ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш. ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСЫ

Б. Т. ӨРБІСІНОВА

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЛОГИКА

ОҚУ ҚҰРАЛЫ

АҚТАУ -2012

ӘОЖ 510(075.8)
ББК 22.12я73

Пікір берушілер: Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті профессоры, ф.-м.ғ.д. С.Т. Мұхамбетжанов

Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті профессоры, ф-м.ғ.к. М.Ш. Тілепиев

Алматы энергетика және байланыс институтының доценті, ф-м.ғ.к.
М.Ж. Байсалова

Өрбісінова Б.Т.

У68 Математикалық логика: Оқу құралы / Б.Т. Өрбісінова - Ақтау, Ш.Есенов атындағы КМТжИУ, 2012. - 83б.

ISBN 978-601-7649-20-2

Бұл оқу құралы Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінде оқитын математика мамандығының «Математикалық логика» пәнінің бағдарламасына сәйкес жасалған.

ӘОЖ 510(075.8)
ББК 22.12я73

Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің Оқу-әдістемелік Кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылды

ISBN 978-601-7649-20-2

© «Ш. Есенов атындағы КМТжИУ», 2012 ж.

Кіріспе

Қазіргі қоғамның компьютерлеу заманында жас мамандарға есептеу техникасымен, автоматтық құралдармен жабдықталған өндіріс орындарында еңбек етуге тура келетіні сөзсіз. Сондықтан да математикалық логиканың принциптері мен заңдарын білудің маңызы зор. Өйткені математикалық логика ақыл – ой еңбегін машиналандырудың құралы болып табылады. Мектеп қабырғасынан - ақ электрондық- есептеу техникасын оқып үйренуге кірісетін оқушы математикалық логика қоғамдық құрылыстағы аса күрделі процестер мен құбылыстарды басқару жайындағы ғылым - кибернетиканың теориялық негізі екенін білуі тиіс. Ал жоғарғы оқу орнында логиканың алғашқы ұғымдарымен, математикалық логиканың негізгі бөлімдерімен және олардың қолдануларымен таныса отырып, студент басқа пәндерді меңгеруге теориялық және тәжірибелік тұрғыдан дайындықтан өтеді. Математикалық логика пәнінің міндеті - студенттерді дұрыс ойлаудың формальды логика зерттейтін негізгі заңдарымен және ережелерімен таныстыру. Формальды логика екі бөлімнен тұрады: біріншісі - ойлау процесін құрудың жалпы адамдық заңдары мен ережелерін, формаларын зерттейтін ежелгі логика және екіншісі - ойлау процесін арнаулы математикалық әдістер , символдық аппараттар қолдану арқылы зерттейтін математикалық логика.

Логика гректің «logos» - «ойлау», «сөз», «ақыл - ой», «заңдылық» деген ұғымдарды білдіретін кең мазмұнды сөзінен шыққан. Грамматиканың ережелерін білмей-ақ адамдардың дұрыс сөйлей білетіні сияқты, логика ғылымы тұжырымдаған ережелерді білмей де дұрыс ойлауға, дұрыс қорытынды жасап, дұрыс дәлелдеуге болады. Алайда бұдан логиканы арнайы оқып үйренудің қажеті жоқ деген қорытынды шығаруға бола ма? Әрине болмайды. Грамматиканың ережелерін білу сауатты сөйлеуге, сауатты жазуға үйретіп, тіл мәдениетін жетілдіретіні сияқты, дұрыс ойлаудың логикалық заңдары мен ережелерін білу, оларды саналы түрде қолдану дұрыс ойлауға дағдыландырып, ойлау мәдениетінің деңгейін көтеретіні сөзсіз. Математикалық логика жалпы адамдық ойлау заңдары мен формаларын, дәлелдеу ережелерін математикалық әдістермен символдық амалдардың көмегімен зерттейді.

Математика мен логиканың бір-бірімен тығыз байланысы математикалық талдау, жиындар теориясы, қолданбалы математика, кибернетика салаларында жаңа теориялардың ашылуына себеп болды.

Логика адам өмірінің барлық салалары үшін қажет: ғылыми жұмыста да, оқып, білім алу үшін де, күнделікті тұрмыста дұрыс пайымдап, дұрыс тұжырым жасау да, қысқасы, барлық іс - әрекетте керек.

Қоғамдық өмірдің қазіргі аса күрделі кезеңінде оқу, білім беру процестерін ұйымдастырудың жаңа да тиімді әдіс – тәсілдерін, дұрыс жолдарын табуға логиканың көмектесетіні сөзсіз.

I тарау. Жиындар теориясының элементтері
1.1 Жиындар және олардың берілу тәсілдері

Жиын ұғымы математиканың негізгі, алғашқы ұғымдарының бірі, сондықтан ол басқа ұғымдар арқылы анықталмайды.

Сан ұғымынан бұрын шыққан жиын ұғымын қандай да бір нәрселердің жинағы ретінде түсінеміз, ол жинаққа кіретін нәрселерді жеке-жеке қабылдауға және оларды бір-бірінен де, бұл жинаққа жатпайтын басқа нәрселерден де ажыратуға болады деп білеміз. Яғни, жиын туралы сөз еткенде, қандай да бір белгілері бойынша бір тұтас етіп біріктірілген нәрселерді қарастырамыз.

Мысалы,”Бірінші курста оқитын студенттер жиыны”, “Дұрыс көпбұрыштар жиыны”, “Бөлмедегі орындықтар жиыны”, “Елуге дейінгі натурал сандар жиыны”, т.б.

Берілген жиынды құрастыратын нәрселер (объектілер), сол жиынның *элементтері* деп аталады.

Жиынды латын алфавитінің үлкен әріптерімен $A,B,C,...,$ ал оның элементтерін сол алфавиттің кіші әріптерімен $a,в,c,...$ деп белгілейді. Берілген A жиыны $a,в,c$ элементтерінен тұратын болса, оны былай жазады: $A=\{a,в,c\}$.

Мысалы, A – бір таңбалы жұп сандар жиыны десек, онда $A=\{2,4,6,8\}$.

Егер a элементі A жиынының элементі болса, онда a элементі A жиынына тиісті делінеді де, былай белгіленеді: $a \in A$.

Егер a элементі A жиынының элементі болмаса, онда a элементі A жиынына тиісті емес делінеді де, былай жазылады: $a \notin A$.

Бір де бір элементі болмайтын жиынды *құр* (*бос*) *жиын* деп атайды. Оны Ø түрінде белгілейді.

Егер жиынның элементтерін санап, берілген жиында қанша элемент бар екендігін анықтауға болатын болса, онда ол жиынды *шектеулі жиын* деп атаймыз. Мысалы, 25 санының бөлгіштерінің жиынын B деп белгілесек, онда $B=\{1,5,25\}$ шектеулі жиын болады, себебі оның элементтерінің саны үшеу.

Математикада шектеулі болмайтын жиындар да кездеседі. Ондай жиындарды *шексіз жиындар* дейді. Шексіз жиындардың элементтерін санап шығу мүмкін емес. Мысалы, натурал сандар жиыны, жай сандар жиыны, нольден үлкен бірден кіші нақты сандар жиыны.

Егер қандай да бір нәрсенің жиынға тиісті немесе тиісті емес екендігін анықтай алатын болсақ, онда *жиын берілді* дейміз. Жалпы, жиынның берілуінің екі тәсілі бар. Біріншісі *тізіммен берілу* тәсілі. Бұл тәсілде жиынға тиісті элементтердің толық тізімі беріледі. Бұл тәсілмен тек қана шектеулі жиындар беріледі. Шексіз жиындарды тізіммен беру мүмкін емес. Мысалы, барлық натурал сандардың немесе барлық бүтін сандардың жиынын тізім арқылы беру, яғни ол жиындардың барлық элементтерінің тізімін жасау мүмкін емес. Мұндай жағдайда жиынды оның кейбір *сипаттамалық қасиетін көрсету арқылы* береді (жиынның берілуінің екінші тәсілі). Сипаттамалық қасиеті бойынша анықталған жиын элеиенттерін былай белгілеуге болады: фигуралық жақшаның ішіне алдымен жиынның элементін белгілейтін әріп жазылып, тік сызық жүргізілгеннен кейін сипаттамалық қасиеті жазылады.

Мысалы, $A=\{x/x=2k$, k *–бүтін сан*$\}$ жазуы, A – барлық жұп сандардың жиыны екендігін көрсетеді.

Кейде бір жиынды оның барлық элементтерінің тізімі арқылы да немесе сипаттамалық қасиеті арқылы да беруге болады.

Анықтама. Егер A жиынының әрбір элементі B жиынының да элементі болса, онда A жиыны B жиынының ішкі жиыны деп аталады. Бұл қатыс былай жазылады: $A \subset B$

Анықтама. Егер A жиынының әрбір элементі B жиынының да элементі болса және керісінше, B жиынының әрбір элементі A жиынының да элементі болса, онда A мен B жиындары тең деп аталады да, былай жазылады: $A=B$.

Мысалы, $A=\{1,3,5,7,9\}$ және $B=\{9,3,1,5,7\}$ жиындары тең.

Анықтама. Элементтері өзара бірмәнді сәйкестікте болатын жиындарды *тең қуатты жиындар* деп атайды.

Егер $A=\{1,2,3,4,5\}$ жиыны берілсе, онда осы жиынның элементтерін әртүрлі тәсілдермен реттеуге болады. Атап айтқанда, әртүрлі бір таңбалы, екі таңбалы, үш таңбалы, төрт таңбалы, бес таңбалы, алты таңбалы т.с.с. сандарды алуға болады. Реттелген осындай жиын элементтерінің әртүрлі жиынтығын *кортеж* деп атайды, ал кортежді құрап тұрған элементтерді оның *компоненттері* дейді. Кортеждің компоненттерінің санын оның ұзындығы дейді.Кортежді былай белгілейді: $(a1,a2,a3,...,an)$. Мысалы, $A=\{1,2,3\}$ жиынының элементтерінен, ұзындығы 2-ге тең болатын кортеждерді жазайық. Олар: (1;1), (1;2), (1;3), (2;1), (2;2), (2;3), (3;1), (3;2), (3;3). Сондай-ақ, ұзындықтары әртүрлі болатын кортеждерді де жазып көрсетуге болады. Ұзындығы 2-ге тең болатын кортеждерді кейде *парлар* деп те атайды. Кортеждің компоненттерінің өзі де кортеж болып келуі мүмкін. Екі $(a1,a2,a3,...,an)$ және $(в1,в2,в3,...,вm)$ кортеждерінің сәйкес компоненттері тең, яғни $a1=в1$, $a2=в2$, $a3=в3,...$, $an=вm$ және ұзындықтары $n=m$ бірдей болса, онда олар тең болады.

1.2 Жиындарға қолданылатын амалдар

Екі немесе одан көп жиындардың элементтерінен тұратын жаңа жиын құруға болады. Бұл жаңа жиын берілген жиындарға қандай да бір амалдар қолдану нәтижесінде пайда болады. Мұндай амалдарға екі немесе одан көп жиындардың ортақ элементтерінен құрылған жиынды табу, бірнеше жиынды бір жиынға біріктіру, жиыннан оның қандай да бір бөлігін шығарып тастау жатады.

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$ және $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15\}$ жиындары берілсін.

A және B жиындарының ортақ элементтерінен тұратын C жиынын құрайық. $C=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Алынған C жиыны A және B жиындарынң *қиылысуы* деп аталады.

Анықтама. A мен B жиындарының *қиылысуы* деп A жиынына да, B жиынына да тиісті элементтерден тұратын C жиынын айтады.

A мен B жиындарының қиылысуы былай белгіленеді: $C=A \cap B$.

Анықтама бойынша: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

Мысал. $A=\{1,\ 2,\ 3,\ ...\ +\infty\}$, $B=\{-\infty,\ .\ .\ .,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ болсын, онда $A \cap B=\{1, 2, 3, 4\}$.

Жиындардың ортақ элементтері болмауы да мүмкін. Онда олардың қиылысуы құр жиын болады. Бұл жағдайда жиындарды қиылыспайды деп айтады.

Мысал. Егер $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$ болса, онда $A \cap B = \emptyset$.

Себебі, *A* және *B* жиындарының екеуіне де тиісті болатын ортақ элемент жоқ.

Жиындардың қиылысуы шексіз жиын болуы да мүмкін.

Мысал. 12 санының еселіктерінің *A* жиыны шексіз жиын:

$A=\{12, 24, 36, 48, 60, ..., 2n, ...\}$.

Сондай-ақ 16 санының еселіктерінің B жиыны да шексіз жиын:

$B=\{16,\ 32,\ 48,\ 64,\ ...,\ 16m, ...\}$.

Бұл жиындардың қиылысуы да $A \cap B=\{48,\ 96,\ 144,\ ...\}$ шексіз жиын болады.

Анықтама. *A* және *B* жиындарының *бірігуі* деп олардың ең болмағанда біреуіне тиісті элементтерден тұратын жиынды айтады.

A мен *B* жиындарының бірігуі былай белгіленеді: $A \cup B$.

Яғни, $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Мысал. $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ болсын, онда $A \cup B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ болады.

Егер шектеулі екі жиынның қиылысуы құр жиын болмаса, онда жиындардың бірігуінен шыққан жиындағы элементтердің саны әрбір жиындағы элементтердің санының қосындысынан кем болады. Ал, егер жиындардың

қиылысуы құр жиын болса, онда жиындардың бірігуі болатын жиындағы элементтердің саны сол жиындардағы элементтердің сандарының қосындысына тең болады.

Анықтама. *A* және *B* жиындарының *айырмасы* деп А жиынының В жиынына тиісті емес элементтерінен құралған жиынды айтады.

A мен *B* жиындарының айырмасы былай белгіленеді: $A \backslash B$.

$A \backslash B$ жиынын табу үшін В жиынына тиісті емес, А жиынына тиісті элементтерді тізіп шығу керек.

Олай болса, $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$. Сол сияқты, $B \setminus A = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}$

Мысал. а) $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2\}$ болсын, онда $A \backslash B=\{3, 4\}$.

б) $A=\{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$, $B=\{1, 2, 5, 8\}$, онда $A \backslash B=\{3, 7\}$.

в) $A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{3, 4\}$, онда $A \backslash B=\{1, 2, 5\}$.

г) $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, онда $A \backslash B= \emptyset$.

Егер $A \subseteq M$ болса, онда $M \setminus A$ айырмасы А жиынының М жиынына дейінгі *толықтауышы* деп аталады.

Мысал. А –жұп сандар, В – 4 -ке еселі сандар, С – 6 -ға еселі сандар жиыны болсын. Сонда $A \backslash B \cap C$ жиыны қандай элементтерден тұрады?

Берілген өрнекте алдымен В және С жиындарының қиылысуын жазып,сонан соң А жиынынан сол жиынды азайту керек.(қиылысу амалы азайту амалына бұрын орындалады) В және С жиындарының қиылысуы 4 – ке және 6 – ға еселі сандардан тұрады. Егер осы қиылысуды А жиынынан шығарып тастасақ,онда 4 – ке де, 6 – ға да еселі емес жұп сандар жиыны қалады.

Жиындардың бірігуі мен қиылысуын екі немесе бірнеше сандардың ең кіші ортақ еселігін және ең үлкен ортақ бөлгішін табуда пайдаланған ыңғайлы. Мысал. *ЕКОЕ(8; 12)=? ЕҮОБ(8; 12)=?*

$A=\{2, 2, 2\}$, $8=2^3$

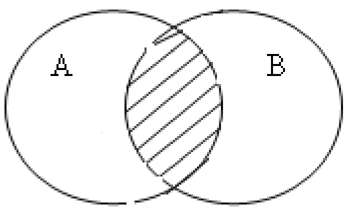
$B=\{2, 2, 3\}$, $12=2\cdot 2\cdot 3$

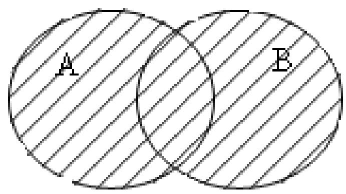
$A\cup B=\{2, 2, 2, 3\}$, олай болса, *ЕКОЕ(8; 12)=24.*

$A\cap B=\{2, 2\}$, *ЕҮОБ(8;12)=4.*

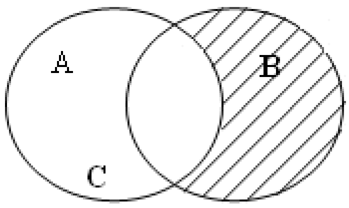
1.3 Эйлер дөңгелегі

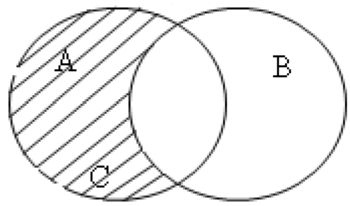
Көрнекілік үшін жиындарды дөңгелек сызықтармен белгілейді. Сызықтың ішінде тек жиын элементтері ғана орналасады. Ол дөңгелектерді *Эйлер дөңгелектері* немесе *диаграммалары* деп атайды. Жиындардың қиылысуын немесе жиындардың бірігуін көрнекі түрде көрсету үшін Эйлер дөңгелектерін пайдаланады.





$A\cap B$ $A\cup B$

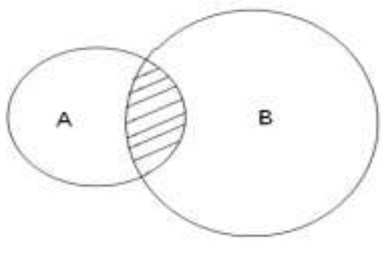




$B\setminus A$ $A\setminus B$

Мысал. $A=\{3, 4, 5, 8, 9\}$, $B=\{3, 5, 7, 8, 9\}$ болсын, сонда $A\cap B=\{3, 5, 8, 9\}$.

Берілген жиындардың қиылысуын Эйлер дөңгелегі арқылы бейнелесек, ол сызбадағы штрихталған облысты береді.

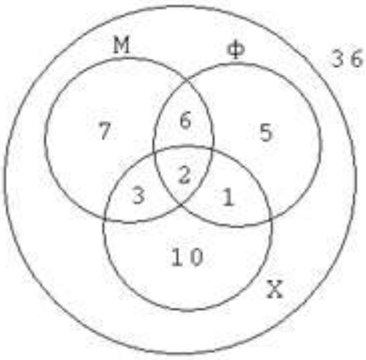


Мысал**.** Сыныпта барлығы 36 оқушы бар. Оның ішінде математика үйірмесіне қатысатындар саны 18, физика үйірмесіне қатысатындар 14, химиядан үйірмеге қатысатындар саны 16. Физика және математика үйірмесіне 8, физика және химия үйірмесіне 3, математика және химия үйірмесіне 5, ал 2 – і үш үйірмеге де қатысады. Үйірмеге қатыспайтын оқушы бар ма, болса қанша?

Шешуі. Есептің берілгеніне сәйкес Эйлер дөңгелегі суретте көрсетілген.

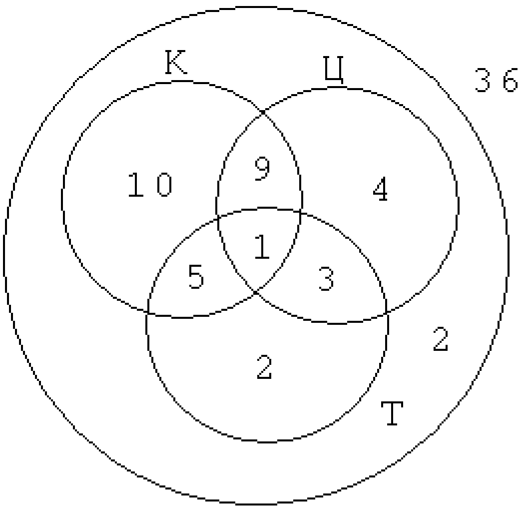
М әрпімен белгіленген дөңгелек – математика үйірмесіне қатысатындар,

Ф және Х – сәйкес физика, химия үйірмесіне қатысатындар.



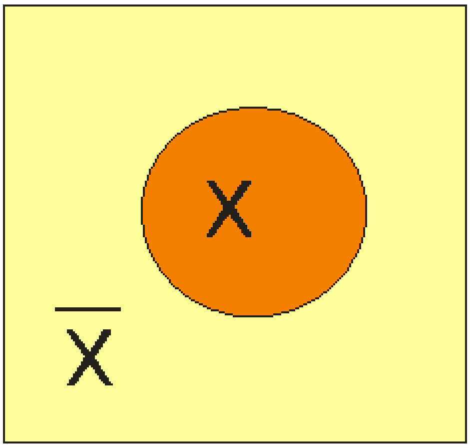
Ешқандай үйірмеге қатыспайтындары – 2.

Мысал. Топтағы 36 студент аптаның белгілі бір күнінде театрға, циркке, киноға баруға шешім қабылдады. Киноға – 25, циркке – 17, театрға – 11 адам баратын болды. Оның ішінде киноға да, циркке де баратындар саны – 9, цирк пен театрға баратындар – 5, кино мен театрға баратындар саны – 5. Студенттердің нешеуі киноға да, театрға да, циркке де баратын болды? Шешуі: Есептің берілгендерін Эйлер дөңгелегіне орналастыратын болсақ, жауабын оңай табуға болады.



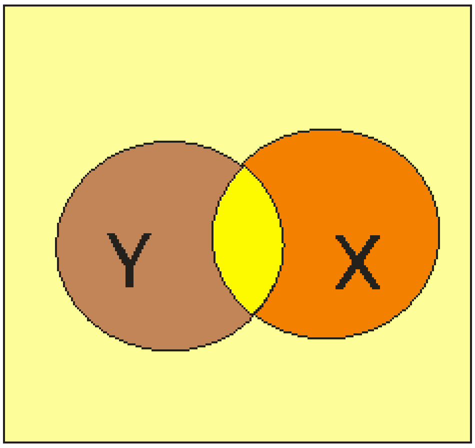
Жауабы: 1.

Эйлерден кейін логикалық есептерді дөңгелектер арқылы шешу әдісін дамытқан ағылшын математигі Джон Венн болды. Сондықтан да, мұндай схемалар кейде «Эйлер – Венн диаграммасы» деп аталады. Айтылымдарды да дөңгелектер арқылы беруге және айтылымдар алгебрасының заңдарын Эйлер - Венн диаграммасының көмегімен дәлелдеуге болады. (ақиқаттық кестесін құру арқылы немесе теңбе тең түрлендірулер жасай отырып дәлелдеуден басқа) Кез келген айтылым диаграммада дөңгелекпен бейнеленеді, ал оның терістеуіне жазықтықтың дөңгелектен тыс жатқан бөлігі сәйкес келеді.



1 – сурет. Эйлер-Венн диаграммасы.

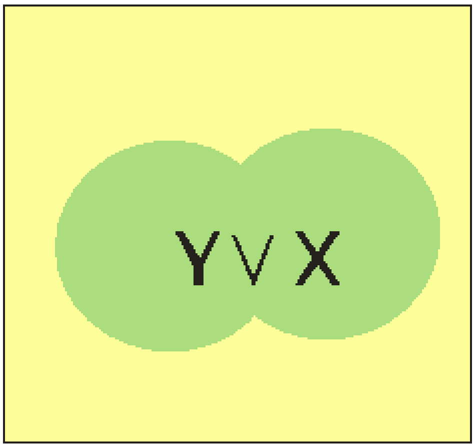
Егер екі X және Y айтылымдары берілсе, онда оларды диаграммада әртүрлі



2 – сурет. X және Y айтылымдарының логикалық көбейтіндісі.

түстегі дөңгелектермен береді. Диаграммада ашық түспен екі айтылымның логикалық көбейтіндісі (конъюнкция) көрсетілген, ал логикалық қосынды (дизъюнкция) келесі суретте берілген.

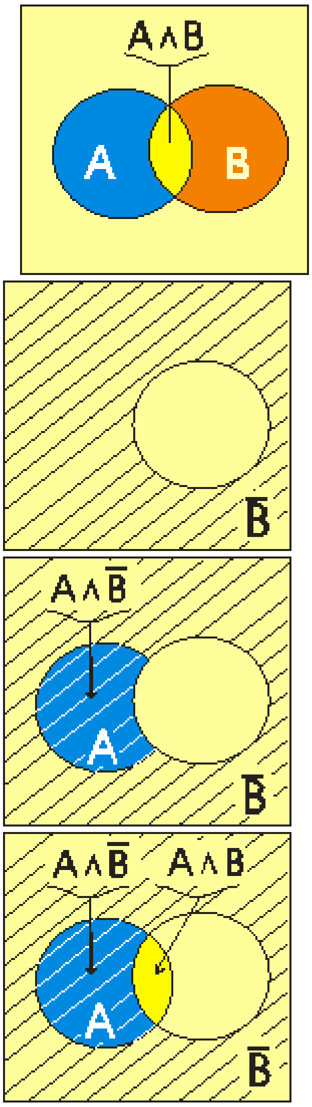
Басқаша айтқанда, логикалық көбейтінді – дөңгелектердің қиылысуы, ал логикалық қосынды – дөңгелектердің бірігуі арқылы бейнеленеді.



3 – сурет. Х және Y айтылымдарының логикалық қосындысы.

Эйлер – Венн диаграммасы математика, логика, менеджмент және басқа да қолданбалы математика салаларында кеңінен қолданылады.

$(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A$ теңдігін Эйлер – Венн диаграммасымен дәлелдеуге болады.



4 – сурет.Эйлер – Венн диаграммасында дәлелдеу.

1.4 Жиындарға қолданылатын амалдардың қасиеттері

A және *B* жиындарының *қиылысуын* кейде сол жиындардың *көбейтіндісі* деп те атайды. Себебі, екі жиынның қиылысуы екі санның көбейтіндісінің заңдылықтарына бағынады:

1. Құр жиын ноль санының ролін атқарады, себебі, кез келген *A* жиыны мен
құр жиын үшін мына қатыс тура: $A\cap$ Ø= Ø.
2. Көбейтудің ауыстырымдылық заңы орындалады: $A\cap B = B\cap A$.
3. Көбейтудің терімділік заңы орындалады:
$A\cap(B\cap C)= (A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$.

Бірақ кейде сандар көбейтіндісі үшін орындалмайтын пікірлер де тура болады:

1. $A\cap A=A$, яғни жиындарға қолданылатын амалдарда дәреже ұғымы жоқ.
2. Егер $A\subset B$, онда $A\cap B=A$, яғни жиын мен оның ішкі жиынының қиылысуынан сол ішкі жиын шығады.

Жиындардың қиылысуын Эйлер дөңгелегі арқылы көрсетуге болады.

Жиындардың бірігуін табу амалының кейбір заңдары сандарды қосу амалының заңдарына ұқсас. Сондықтан жиындарды *біріктіруді* кейде жиындарды *қосу* деп те атайды.

1. Ауыстырымдылық заңы тура болады: $A\cup B= B\cup A$.
2. Терімділік заңы тура болады: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C = A\cup B\cup C$.
3. Жиындардың қиылысуы мен бірігу амалдары үлестірімділік заңына бағынады: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
4. Құр жиын сандарды қосқандағы нольдің ролін атқарады: $A\cup$Ø= A.

Жиындардың бірігуінің кейбір қасиеттері сандарды қосқанда орындалмайды.

1. $A\cup A=A$.
2. Егер $B\subset A$, онда $A\cup B = A$.

Жиындардан тұратын өрнектерді осы қасиеттерді пайдаланып ықшамдауға болады.

Мысалы, $\grave{A}=(\hat{A}\cup\tilde{N})\cap(B\cup\overline{C})\cap(\overline{B}\cap\tilde{N})$өрнегін ықшамдау керек. Алғашқы жақшаны ашатын болсақ: $\grave{A}=(\hat{A}\cap C\cup\tilde{N}\cap B\cup B\cap\overline{C}\cup C\cap\overline{C})\cap(\overline{B}\cap\tilde{N})$

Жақшаның ішін түрлендірсек: $\grave{A}=(\hat{A}\cup\tilde{N}\cap B\cup B\cap\overline{C})\cap(\overline{B}\cap\tilde{N})$

Келесі амалдарды орындасақ: $\grave{A}=B\cap(B\cup\overline{C})=B\cap C$.

1.4 Жиындар арасындағы қатыс

Жалпы математикада екі объектінің арасындағы қатынастар қарастырылады.

1) Сандар арасында: тең, артық, үлкен, кіші, бөлінеді, еселі;
2) Түзулер арасында: параллель, перпендикуляр, қиылысады, айқас;
3) Геометриялық фигуралар арсында: конгруэнтті, ұқсас т. с. с.

Сондай-ақ жиындарды салыстыра отырып, олар қиылысады немесе тең, біреуі екіншісіне тиісті, т. с. с. , яғни жиындар арасында да қатыстар орнатуға болады.

Мысал. X={*6, 7, 8, 9*} сандар жиынын қарастырайық. Бұл сандардың арасында «артық» қатысы бар, *7>6, 8>7, 9>8, 9>7, 9>6, 8>6.*

Осы сандардың арасындағы «*1-ге артық*» деген қатысты қарастырсақ,

«*7* саны *6*-дан *1*-ге артық», «*8* саны *7*-ден *1*-ге артық», «*9* саны *8*-ден *1*-ге артық» болады. Бұл сандардың арасында әлі де басқа қатыстар болатынын қарастыруға болады. Сонда, әрбір қатысты қарастырғанда элементтері берілген X жиынынан алынған реттелген қостардың жиынын құрдық.

«артық» қатысы үшін $\{(7,6),(8,7),(9,8),(9,7),(9,6),(8,6)\}$жиыны, ал «*1-ге артық*» қатысы үшін $\{(7,6),(8,7),(9,8)\}$жиыны болады. Сонымен, қарастырылған әрбір қатыс берілген жиынның элементтерінен құрылған қостардың жиынымен анықталып тұр. Осы қостарды X жиынының элементтерінің арасындағы қатыс деп атайды.

Анықтама. X жиынының элементтерінің арасындағы немесе X жиынындағы қатыс деп $X \times X$декарттық көбейтіндісінің кез келген ішкі жиынын айтады. Қатыс латынның үлкен әріптерімен белгіленеді: P, Q, R, S т. с. с.

Егер X жиынының элементтерінің арасындағы қатыс R болса, онда $R \subset X \times X$ болады.

Егер қатыс ақырлы X жиынында берілсе, оны нүктелерден және оларды қосатын стрелкалардан тұратын ерекше сызба арқылы көрнекі түрде беруге болады. Бұл сызбаны *граф* деп атайды. Жиынның элементтерін кескіндейтін нүктелер графтың *төбелері*, ал оларды қосатын стрелкалар графтың *қабырғалары* деп аталады. Егер графта басы мен ұшы беттесетін стрелкалар болса, мұндай стрелкаларды *ілгектер* деп атайды.

1.6 Қатыстың қасиеттері

Анықтама. X жиынындағы кез келген элемент өзі-өзімен R қатыста болса, онда R қатысы *рефлексивті* деп аталады, яғни R рефлексивті $\Leftrightarrow$ $\forall x \subset X$, xRx.

Егер R қатысы рефлексивті болса, онда оның графының барлық төбесінде ілгек болады. Оны кесінділер арасындағы параллельдік және теңдік қатыстарының графтарында көруге болады. Бұл X жиынынан алынған кез келген кесінді өзіне

өзі параллель және өзіне өзі тең екендігін көрсетеді. Параллельдік және теңдік қатыстары рефлексивтік қасиетке ие, немесе олар рефлексивті деп аталады.

Анықтама. X жиынындағы x элементі y элементімен R қатыста және y элементі x элементімен R қатыста болса, онда R қатысы *симметриялы* деп аталады, яғни R симметриялы $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$ үшін x R y$\Rightarrow$yRx

Симметриялық қатыстың графының ерекшелігі мынада: x тен y – ке қарай баратын стрелкамен қоса, y – тен x - қа қарай баратын стрелка да болады.

Мысалы, кесінділердің параллельдік, перпендикулярлық және теңдік қатыстарының графына көңіл аударсақ, бұл графтарда, егер екі элементті бір бағытта қосатын стрелка бар болса, онда міндетті түрде осы элементтерді кері бағытта да қосатын стрелка болатынын көруге болады.

Анықтама. Егер Х жиынындағы әртүрлі х, у элементтері үшін х элементі у элементімен R қатыста болып, ал у элементі х элементімен R қатыста болмаса, онда R қатысы *антисимметриялы* деп аталады, яғни R антисимметриялы $\Leftrightarrow$

$\forall$ x, y $\in$ X үшін $xRy \Rightarrow \overline{yRx}$

Антисимметриялы графтың екі төбесі қайтымды стрелкамен қосылмайды.

Анықтама. Егер Х жиынындағы х элементі у – пен R қатыста, ал у элементі z – пен R қатыста болуымен қоса х элементі де z – пен R қатыста болса, онда R қатысы *транзитивті* деп аталады, яғни R транзитивті $\Leftrightarrow$ xRy, yRz $\Rightarrow$ xRz

Транзитивтік қатыстың графында кез келген үш элемент үшін, х – тен у – ке және у – тен z – ке баратын стрелканың болуымен қатар х – тен z – ке баратын стрелка болады. Осы айтылғанға кері тұжырым да үнемі орындалады.

Анықтама. Егер Х жиынындағы R қатысы рефлексивті, симметриялы және транзитивті болса, онда R *эквивалентті* қатыс деп аталады.

Мысал. $\left\{\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{4},\frac{6}{9},\frac{4}{10},\frac{3}{12}\right\}$ бөлшектер жиынында «теңдік» қатысы берілсін. Осы қатыстың қандай қасиеттері бар екенін граф арқылы анықтайық:

1. Графтың барлық төбелерінде ілгек болатындықтан рефлексивті;
2. Графтың төбелерін қосатын стрелкалар қайтымды болғандықтан симметриялы;
3. х бөлшегі у – ке, у бөлшегі z – ке тең болғандықтан, х бөлшегі z – ке тең болады.

Сондықтан бұл қатыс транзитивті.

Анықтама. Х жиынында берілген R қатысы антисимметриялы және транзитивті болса, онда R *реттік* қатыс деп аталады.

Барлық қатыстар не эквивалентті, не реттік болып бөлінеді деп ойлауға болмайды. Эквивалентті де, ретті де болмайтын қатыстың түрлері бар.

1.7 Декарттық көбейтінді

Кортеж ұғымына сүйеніп, екі жиынның декарттық көбейтіндісін анықтауға болады. Мысал. *A*={*a, в, c*}, *B*={*3*, 4} шектеулі жиындары берілсін. Осы жиындардың элементтерінен ұзындығы 2-ге тең кортеждердің жиынын құрайық. Олар: {*(a;3),(a; 4),(в;3), (в;4), (c;3),(c;4)*}.

Анықтама. *A* және *B* жиындарының *декарттық көбейтіндісі* деп бірінші компоненті *A* жиынынан, екінші компоненті *B* жиынынан алынған барлық реттелген қостардың жиынын айтады. *A* және *B* жиындарының декарттық көбейтіндісі былай белгіленеді: $A \times B$.

Анықтама бойынша, $A \times B = \{(x; y) | x \in A \wedge y \in B\}$.

Декарттық көбейтіндіні табатын амалды жиындарды *декарттық көбейту* (немесе тік көбейтінді) деп атайды. Жиындарды декарттық көбейту ауыстырымдылық заңына бағынбайды, яғни $A\times B\neq B\times A$ болатындай А және В жиындары бар болады.

Мысал. $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 5, 8\}$ болсын.

$A\times B=\{(1,1),(1,5),(1,8),(2,1),(2,5),(2,8),(3,1),(3,5),(3,8)\}$

$B\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(5,1),(5,2),(5,3),(8,1),(8,2),(8,3)\}$.

Бұдан $A\times B$ және $B\times A$ жиындарының әртүрлі элементтерден тұратынын көреміз, яғни $A\times B\neq B\times A$.

Жиындарды декарттық көбейту амалы терімділік заңына да бағынбайды, бірақ бірігу амалына қатысты декарттық көбейту үлестірімді болады: A, B және C жиындары үшін $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ теңдігі тура болады.

Математикада реттелген қостар ғана емес, реттелген үштік, төрттік т. с. с элементтер жиынтығы да қарастырылады.

Мұндай реттелген жиынтықтар *кортеждер* деп аталады. Кортеждегі элементтің саны оның ұзындығын анықтайды. Кортеж ұғымын пайдаланып n жиынның декарттық көбейтіндісін анықтауға болады.

Мысал. $A=\{2, 3\}$, $B=\{3, 4, 5\}$, $C=\{7, 8\}$ болсын.

$A\times B\times C$ көбейтіндісін табу керек.

$A\times B\times C=$
$\{(2,3,7),(2,3,8),(2,4,7),(2,4,8),(2,5,7),(2,5,8),(3,3,7),(3,3,8),(3,4,7),(3,4,8),(3,5,7),(3,5,8)\}$

A және B жиындарының декарттық көбейтіндісін тік бұрышты координаттар жүйесінде көрсетуге болады. Ол үшін декарттық көбейтіндідегі реттелген қостарды жазықтықтағы нүктемен белгілейміз, сонда A және B жиындарының декарттық көбейтіндісін бейнелейтін фигураны аламыз.

Егер $A=B$ болса, онда $A\times A=\{(x_1,x_2)\,|\,x_i\in A, i=\overline{1,2}\}=A^2$

Сондай-ақ, $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_i\in A_i, i=\overline{1,n}\}$

Егер $A=B$ болса, онда $\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n}=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,|\,x_i\in A, i=\overline{1,n}\}=A^n$ А жиынының n дәрежесі деп аталады.

Мысал: Егер R сан түзуінің нүктелер жиыны болса, онда R^n- n өлшемді арифметикалық кеңістіктің жиыны, R^2 - жазықтық нүктелерінің жиыны, R^3 - үш өлшемді кеңістіктің нүктелер жиыны.

II тарау. Комбинаторика элементтері
2.1 Комбинаториканың ережелері

Іс жүзінде адамға заттардың өзара орналасуының барлық мүмкін жағдайларын есептеуге немесе қандай да бір іс-әрекеттің барлық мүмкін нәтижелерін және оны орындауға қажетті барлық мүмкін тәсілдер санын есептеуге тура келеді.

Мысалы: әр түрлі 5 кітапты екі оқушыға неше түрлі тәсілмен үлестіріп беруге болады?

Футболдан әлем біріншілігінде жартылай финалға шыққан 4 команда арасында алтын, күміс, қола медальдары неше түрлі тәсілмен иемделінеді және т.с.с.

Бұл есептерде заттардың өзара орналасуының немесе іс-әрекеттің барлық мүмкін комбинациялары қарастырылады. Сондықтан мұндай есептерді ***комбинаторикалық есептер*** деп атайды.

Ақырлы элементтерден қандай да бір заңдылықпен жасалған әртүрлі комбинациялардың санын есептеуге құрылған есептерді комбинаторикалық есептер деп, ал осы есептерді шешумен айналысатын математиканың бөлімі *комбинаторика* деп аталады. Комбинаторлық әдістер физика, химия, биология, экономика, тағы басқа ғылымда қолдануға болады.

Комбинаторика есептерін шешуде қолданатын өзіндік заңдылықтар мен формулалар бар.

Комбинаториканың есептері қосынды және көбейтінді ережелерінің негізінде шығарылады.

Комбинаториканың ережелері		
Қосу	$\|X+У\|=\|X\|+\|У\|, X\cdot У=\varnothing$	
Көбейту	$X\times У=\|X\|\cdot\|У\|$	
Комбинаториканың түрлері	**Қайталанбайтын**	**қайталанбалы**
алмастыру	$P_n=n!$	$P^n_{m_1,m_2...m_k}=\frac{n!}{m_1!m_2!...m_k!}$
орналастыру	$A_n^m=n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$	$\tilde{A}_n^m=n^m$
теру	$C_n^{\ m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$	$\tilde{C}_n^m=C_{n+m-1}^m=\frac{(n+m-1}{m!(n-1)}$
Паскаль үшбұрышы. Терудің қасиеттері.		

Қосынды ережесі: *X, У* қиылыспайтын ақырлы жиындар болсын.

Сонда *X* – пен *У* – тің бірігуінің элементтерінің саны *X* – пен *У* – тің жеке-жеке элементтер санының қосындысына тең.

$m(X\cup У)=m(X)+m(У)=n+m$

Бұл ережені былайша айтуға да болады: Егер *X* объектісін n әдіспен, ал *У* объектісін m әдіспен таңдап алуға болса, онда «x немесе y - ті» таңдап алу әдісі $m+n$ болады. Мұндағы *X* объектісінің таңдауы *У* – тің таңдауынан өзгеше.

Кез келген санаулы элементтері бар *A* және *B* жиындары үшін

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

теңдігі де орындалады.

Ал бұдан $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

математикалық индукция принципі бойынша бірнеше қосылғыштар үшін жазып шығуға болады.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Мысал: Сыныптағы 32 оқушының 14-і мектепте өткен футбол турниріне, 10-ы баскетбол турниріне және 8-і волейбол ойынынан жарысқа қатысқан. Мұнда 6 оқушы әрі футбол, әрі баскетбол жарысына, 5 оқушы әрі футбол, әрі волейбол жарысына, 4 оқушы әрі баскетбол, әрі волейбол турниріне, ал 3 оқушы барлық үш ойыннан жарысқа қатысқан. Сынып оқушыларының нешеуі осы турнирлердің бірде – біреуіне қатыспаған?

Шешуі: Эйлер – Венн диаграммасын қолданайық.

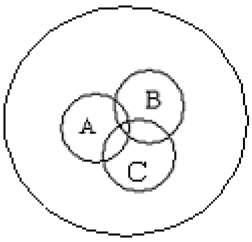
А – футболға қатысқан оқушылар жиыны,

В – баскетбол,

С – волейбол,

U – сыныптағы барлық оқушылар жиыны болсын. Есеп шарты бойынша:

$n(U) = 32,\ n(A) = 14,\ n(B) = 10,\ n(C) = 8,$



$n(A \cap B) = 6,\ n(A \cap C) = 5,\ n(B \cap C) = 4,\ n(A \cap B \cap C) = 3.$

Олай болса, $n(A \cup B \cup C) = 14 + 10 + 8 - 6 - 5 + 4 + 3 = 20.$

Сыныптағы оқушылардың жарыстың қандай да бір түріне қатысқандарын біліп алдық. Онда сыныпта $n(U) - n(A \cap B \cap C) = 32 - 20 = 12$ оқушы жарыстың бірде – бір түріне қатыспаған.

Көбейтінді ережесі: x_1 элементі n_1 тәсілмен таңдап алынсын, x_1**-**дің әрбір таңдалуында x_2 элементі n_2 тәсілмен алынсын, әрбір (x_1**,** x_2) қосының алуында x_3 элементі n_3 тәсілмен алынсын, т. с. с. , ақырында $(x_1, x_2, ... x_{к-1})$элементтерінің таңдалуында $x_к$ элементі $n_к$ тәсілмен алынсын.

Сонда, $(x_1, x_2, ... x_к)$жолының таңдап алыну саны $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 ... n_k$ көбейтіндісіне тең болады.

$$m(x_1, x_2, ... x_к) = m(x_1) \cdot m(x_2) ... m(x_k) = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 ... n_k$$

Мысал**.** Екі таңбалы сандар қанша?

Шешуі.Екі таңбалы сандардың ондықтары 0 – ден өзгеше болуы керек , олай болса $A = \{1,2,3,...,9\}, B = \{0,1,2,...,9\}$ және

$A \times B = \{10,11,...,20,...,90,91,....,99\}, |A \times B| = |A| \cdot |B| = 9 \cdot 10 = 90$, мұндағы

$|A|$ - A жиынындағы элементтер саны. Жауабы: 90

2.2 Комбинаториканың түрлері

Комбинаториканың үш түрі бар: алмастыру, орналастыру, теру.

Анықтама. Берілген әртүрлі n элементтен, n элементтің барлығының қатысуымен жасалған, бір-бірінен айырмашылығы тек орналасу ретінде ғана болатын топ *алмастыру* деп аталады. Барлық алмастырулар саны былайша есептеледі:

$$P_n = n!$$

Мұндағы «!» таңбасы факториал деп аталады. Ол алғашқы n натурал сандардың көбейтіндісіне тең. Мысалы, $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$.

Мысал. 3, 4, 5 цифрлары әр санда бір-ақ рет қайталануға тиіс болса, осы цифрлардан неше үш орынды сан құруға болады?

Шешуі. Үш орынды сан жазу үшін берілген үш цифрдың үшеуі де қатысуға тиіс және олардың орындарын ауыстырып отырсақ әртүрлі сандар шығып отырады. Демек, бұл үш орынды сандардың барлық саны үш цифрдан жасалған алмастыруға тең болады. Алмастыру формуласын қолданып, $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, берілген үш цифрдан әртүрлі 6 сан жазуға болатынын көреміз.

Анықтама. Бір-бірінен айырмашылығы элементтерінің құрамында, немесе элементтерінің орналасу ретінде болатын әртүрлі n элементтен m-нен жасалған топ *орналастыру* деп аталады. Барлық орналастырудың саны былайша есептеледі:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Мысал. Әртүрлі 6 жалаушадан екі-екіден қойып қанша белгі жасауға болады?

Шешуі.Үш жалаушаның өзінен мынадай белгілер жасауға болады: а қ; қ а; а с; с а; қ с; с қ – бұл белгілердің бір-бірінен айырмашылығы жалаушаның түсінде немесе орналасу ретінде, олай болса, іздеп отырған белгілеріміздің саны 6 – дан 2 – ден жасалған орналастыру болады. $A_6^2 = 6\cdot 5 = 30$

Анықтама. Бір-бірінен айырмашылығы ең болмағанда бір элементінде болатын әртүрлі n элементтен m – нен жасалған топ *теру* деп аталады.

Барлық терулер саны мына формуламен анықталады:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Мысал. 10 адамның ішінен 3 адамды таңдап алу тәсілі қанша?

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

Орналастыру, алмастыру, терулер саны өз ара мына теңдікпен байланысқан:

$$A_n^m = P_m C_n^m.$$

2.3 Қайталанбалы алмастыру, орналастыру, терулер

Анықтама. Берілген әртүрлі n элементтен m элемент бойынша *қайталанбалы орналастырулар* деп белгілі бір ретпен жасалған m элементтен тұратын комбинацияларды айтады. Мұнда әрбір элемент комбинацияға бірнеше рет кіруі мүмкін.

Қайталанбалы орналастырулардың жалпы саны мына формуламен анықталады: $\tilde{A}_n^m = n^m$.

Мысал. 7 және 5 цифрларының көмегімен әртүрлі үш орынды қанша сан жазуға болады?

Шешуі: іздеп отырған сандарымызды жазып көрсететін болсақ: 777, 775, 757, 577, 555, 557, 575, 577 барлығы 8 сан болады. Ал осы жауапты формуламен табатын болсақ $\tilde{A}_n^m = 2^3$ =8.

Анықтама. n элементтен m элемент бойынша *қайталанбалы алмастырулар* деп n элементтен тұратын комбинацияларды айтады. Қайталанбалы алмастырулар саны мына формуламен анықталады:

$$P^n_{m_1,m_2...m_k} = \frac{n!}{m_1!m_2!...m_k!}.$$

Мысал. Мына 4,5,2,4,4,2 цифрларының көмегімен алты таңбалы қанша сан жазуға болады?

Шешуі: $P^6_{2,1,3} = \frac{6!}{2!1!3!} = 60$ яғни,барлығы 60 сан жазуға болады.

Анықтама. Берілген n элементтен m элемент бойынша *қайталанбалы терулер* деп бір –бірінен құрамы бойынша ажыратылатын комбинацияларды айтады.

Мұнда бір элемент комбинацияға бірнеше рет кіруі мүмкін.

Қайталанбалы терулер саны мына формуламен анықталады:

$$\tilde{C}_n^m = C^m_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Мысал. Гүл дүкенінде 3 түрлі гүл бар. Алынған 7 гүлден қанша әдіспен букет жасауға болады?

Шешуі: Сатып алынған гүлдің саны жетеу. Жасалған букет 7 гүлден тұрады. Ал осы букетке үш түсті гүлдердің әрбір түсінен бірнеше гүл кіруі мүмкін. Олай болса,

$\tilde{C}_3^7 = \frac{(7+3-1)!}{7!(3-1)!} = \frac{9!}{7!2!} = 36$ (36 әдіспен букет жасауға болады екен).

2.4 Паскаль үшбұрышы

n=0, 1, 2, 3 ... үшін k=0, 1, 2, 3... болғанда C_n^k –ны есептеуге болады.

n мен k-ның әртүрлі мәндеріндегі C_n^k –ның мәнін кесте түрінде жазайық.

n	k	C_n^k
n=0	k=0	1
n=1	k=0; 1	1 1
n=2	k=0; 1; 2	1 2 1

n=3	k=$\overline{0,3}$	1 3 3 1
n=4	k=$\overline{0,4}$	1 4 6 4 1
n=5	k=$\overline{0,5}$	1 5 10 10 5 1
n=6	k=$\overline{0,6}$	1 6 15 20 15 6 1

Бұл кестедегі сандар белгілі бір реттілікпен тең бүйірлі үшбұрыш жасап орналасып тұр. Бұл үшбұрыш *Паскаль үшбұрышы* деп аталады.

Паскаль үшбұрышының төбесіндегі элемент C_0^0 – ге, сол жақ қабырғасының бойындағы элементтер C_n^0 – ге, ал оң жақ қабырғасының бойындағы элементтер C_n^n – нің санына сәйкес келгендіктен 1 – ге тең болады. Кез келген жолдың элементтерін C_n^k –ның мәнін есептеп жатпай – ақ, алдыңғы жолдың элементтерін пайдаланып былайша табуға болады: екі шеткі элемент 1 – ге тең, келесі элемент алдыңғы жолдағы алғашқы екі элементтің қосындысына тең болып, осы екі элементтің дәл ортасына жазылады. Келесі элемент алдыңғы жолдың екінші және үшінші элементтерінің қосындысына тең болып, сол екі элементтің орта тұсына жазылады, т. с. с. Паскаль үшбұрышының көмегімен (a+$в$) екімүшелігін кез келген дәрежеге оңай, тез және дұрыс шығара аламыз. Бірақ, дәрежеге шығарғанда оның алдындағы дәреженің коэффициенттерін, яғни «иығындағы» сандарды білуіміз керек.

Мысалы, $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

Жалпы түрде: $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + ... + nab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ деп көрсетеміз,

мұндағы C_n^0, C_n^1, C_n^2, . . . C_n^n биномдық коэффициенттер деп аталады.

Олар Паскаль үшбұрышы арқылы табылады.

Мысал. Ньютонның биномдық қатарын қолдана отырып терудің қасиеттерін анықтау керек.

Шешуі. Биномдық қатарды қарастырайық.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot ... \cdot(\alpha-\kappa+1)}{\kappa!}x^\kappa + ..., |x| \prec 1,$$

α және x – қа нақты мәндер бере отырып, кейбір комбинаторикалық қатыстарды алуға болады.

1) $\alpha - n$ натурал сан болсын. Онда $n+2$ – ші қосылғыштан бастап ($k=n+1$) оң жақтағы барлық қосылғыштар 0 – ге айналады. Бұл жағдайда Ньютон биномын аламыз: $(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^m x^m + ... + C_n^n x^n$

а) $x = 1$ $\quad 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$,

б) $x = -1$ $\quad 0 = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^m C_n^m + ... + (-1)^n C_n^n$.

Алынған қатыстарды мүшелеп қосу және азайту арқылы терудің қасиеттерін көрсететін теңдіктерді шығаруға болады.

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{2m} = 2^{n-1},$$
$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^{2m-1} = 2^{n-1},$$

мұндағы $m - {}^{n}\!/_{2}$ санының бүтін бөлігі.

III тарау. Айтылымдар

3.1 Айтылымдар жайында түсінік

Қазақ тілінде сөйлемнің үш түрі бар екенін білеміз: хабарлы сөйлем,сұраулы сөйлем, лепті сөйлем. Математикалық логикада осылардың ішінде хабарлы сөйлемдер қарастырылады.

Мынадай бірнеше жай сөйлемдер берілсін:

1. Маңқыстау-мұнайлы өлке;
2. Натурал сандар жиыны шектеусіз;
3. 7 саны – тақ сан;
4. 42 саны 3-ке бөлінбейді;
5. Тең бүйірлі үшбұрыштың барлық бұрыштары тең.

Мазмұны жағынан бұл сөйлемдер әртүрлі. Бірақ, олардың барлығына ортақ бір қасиеттің бар екенін байқауға болады. Ол қасиет-кейбір сөйлемдерде ақиқат, ал кейбір сөйлемдерде жалған ойдың айтылуы. (1, 2 , 3 –сөйлемдер ақиқат, ал 4, 5- сөйлемдер жалған)

Анықтама. Ақиқат немесе жалған екендігін айтуға болатын сөйлем *айтылым* деп аталады.

Бірақ хабарлы сөйлемнің барлығы айтылым бола бермейді.

Мысалы, «математика- ең қызықты пән», «оның шашы сары», «$x > 1$», «басқа планеталарда да тіршілік бар» сөйлемдерінің ақиқат не жалғандығы туралы ешқандай тұжырым айта алмайсың.

$a^2 = 4$ сөйлемін алып көрейік. Дәл осы тұрысында бұл сөйлем айтылым емес. Ал енді осындағы a - ны айнымалы деп, ал $\{-2,0,3,4\}$-айнымалының мәндерінің жиыны деп қарасақ, сол айнымалының әрбір мәніне сай жалған немесе ақиқат пікір шығады.

Мысалы, $(-2)^2 = 4$ (ақиқат) $0^2 = 4$ (жалған) $2^2 = 4$ (ақиқат).

Яғни, кез-келген сөйлем айтылым болмайды.

Бұл мысалдардан байқағандай, айтылым туралы жалпы әңгіме болғанда оның мазмұнына қарамаймыз, тек ақиқат не жалған екендігін анықтаймыз.

Айтылымдар *A, B, C* т. с. с латынның бас әріптерімен белгіленеді, ал мағынасы ақиқат болса айтылымның тұсына ***а*** әрпі, жалған болса ***ж*** әрпі жазылады.

3.2 Жай және күрделі айтылымдар

Қазақ тіліндегі жай және құрама сөйлемдер сияқты логикалық айтылымдар да жай (элементар) және күрделі болып бөлінеді. *Жай (элементар) айтылым* деп басқа айтылымдарға жіктеуге келмейтін айтылымды айтамыз. Ал, бірнеше айтылымдарға жіктеуге болатын айтылым *күрделі айтылым* деп аталады. Күрделі айтылымдар әр түрлі жалғаулықтармен байланысқан бірнеше жай айтылымдардан құралады. Мысалы, «102 саны жұп сан және 3- ке бөлінеді», «Үшбұрыштар қабырғаларына қарай тең бүйірлі немесе тең қабырғалы болып бөлінеді», «Жай сан өзіне және 1- ге бөлінеді» айтылымдары күрделі. Олар «және», «немесе» деген сөздермен байланысқан жай сөйлемдерден құралып тұр. Қазақ тіліндегі «және», «немесе», «егер, онда», «емес», «сонда тек сонда ғана» сөздері логикада *логикалық жалғаулар (байланыстар)* деп аталады. Сонымен логикалық жалғаулар арқылы кез-келген элементар айтылымнан күрделі айтылым алуға болады. Айтылған сөйлемнің ақиқат не жалғандығы біржақты шешілуі үшін логикалық байланыстардың қызметі зор. Күрделі айтылымға кіретін элементар пікрлердің ақиқат немесе жалғандығына қарай күрделі айтылымның ақиқат немесе жалған екендігі анықталады. Ол үшін алдымен күрделі айтылымдағы элементар айтылымдарды әріптермен белгілеп, берілген күрделі айтылымның логикалық құрылымын анықтайтын өрнек аламыз. Осындай өрнек бар болса, онда осы өрнекке сәйкес келетін күрделі айтылымның ақиқат немесе жалған екендігін анықтауға болады.

3.3 Айтылымды теріске шығару

Кез келген A айтылымынан оны теріске шығара отырып, жаңа айтылым алуға болады. Мысалы, «кез келген үшбұрышты сырттай шеңбер сызуға болады»,«кез келген үшбұрышты сырттай шеңбер сызу мүмкін емес» айтылымдарынының біріншісін екіншісі теріске шығарып тұр (бұл жерде «емес» логикалық жалғауы қолданынылып тұр).

A пікірін теріске шығаруды $\overline{A}$ деп белгілейді. («A емес» деп оқылады) Жоғарыдағы мысалда A пікірі ақиқат, ал $\overline{A}$ пікірі жалған.

Егер A- «қиылысатын түзулер бір жазықтықта жатпайды» десек,

$\overline{A}$ - «қиылысатын түзулер бір жазықтықта жатады» деген айтылымды береді.

Бұл жерде керісінше, A-айтылымы жалған, $\overline{A}$ -айтылымы ақиқат.

Сонымен, A қандай пікір болғанымен, A және $\overline{A}$ екі пікірінің бірі-ақиқат, екіншісі-жалған болады. (екеуі бірдей ақиқат немесе екеуі бірдей жалған болу мүмкін емес)

A және $\overline{A}$ айтылымдарының арасындағы байланысты кесте арқылы көрсетуге болады.

A	$\overline{A}$
а	*ж*
ж	*а*

Бұл кесте ақиқаттық кестесі деп аталады.

Ақиқаттық кестесі арқылы А айтылымын екі рет теріске шығару А айтылымының өзі болатынын көрсетуге болады.

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
а	*а*	*а*
ж	*а*	*ж*

Басқаша айтқанда, кез келген айтылымды екі рет теріске шығарудың нәтижесінде бастапқы айтылымды аламыз, **яғни** $\overline{\overline{A}}$ **=А** (бұл логиканың терістеуді терістеу заңы деп аталады)

3.4 Айтылымдар конъюнкциясы

«ABCD параллелограмының диагональдары қиылысады және қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді» айтылымының логикалық құрылымын анықтайық.

Мысалдағы күрделі айтылым «және» жалғауы арқылы байланысқан екі қарапайым айтылымдардан құралып тұр. «ABCD параллелограмының диагональдары қиылысады» айтылымын *А* деп, « қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді» айтылымын *В* деп белгілесек,онда берілген айтылым «*А* және *В*» деп жазылады. **«***А және В***»** деген айтылымды *А, В* айтылымдарының *конъюнкциясы (біріктіруші)* деп атайды. *А, В* айтылымдарының конъюнкциясын $A \wedge B$ деп белгілейді. Айтылымдардың конъюнкциясына бірнеше мысалдар келтірейік.

«14 тақ сан және 6-ға бөлінеді» деген айтылым жалған, себебі бұл конъюнкцияға кіретін екі элементар айтылымның екеуі де жалған.

$6 < 15 < 21$ теңсіздігі «$6 < 15$» және «$15 < 21$» деген екі айтылымның конъюнкциясы. Бұл айтылымдардың әрқайсысы ақиқат және олардың конъюнкциясы да ақиқат.

«4 саны жай сан» деген жалған, «4 жұп сан» деген ақиқат пікірлердің конъюнкциясы болатын «4 саны жай сан және 4 жұп сан» айтылымы жалған.

Енді осы талдаулар нәтижесін математикалық логикада жиі қолданатын кестеге жазайық.

A	B	$A \wedge B$
а	*а*	*а*
а	*ж*	*ж*
ж	*а*	*ж*
ж	*ж*	*ж*

Бұл кесте $A \wedge B$ конъюнкциясы үшін ақиқаттық кестесі деп аталады.

Анықтама. *А* мен *В* айтылымдарының екеуі де ақиқат болғанда ғана ақиқат болатын күрделі айтылымды осы *айтылымдардың конъюнкциясы* деп атайды.

3.5 Айтылымдардың дизъюнкциясы

Математикада «21 $\geq$10», «16 $\leq$7 » деген пікірлер жиі кездеседі. Енді осы пікірлердің ақиқат не жалғандығын анықтап көрейік. «21$\geq$10» теңсіздігін «21 саны 10-нан артық немесе тең» деп оқимыз. Сонда бұл айтылым «21>10» деген ақиқат және «21= 10» деген жалған айтылымдардан құралып тұр.

Осы айтылымдарды «немесе» жалғаулығымен байланыстыра алынған күрделі айтылым ақиқат.

«16 $\leq$7» жалған айтылым, өйткені ол «16< 7» және «16= 7» деген екі жалған айтылымдардан құралып тұр.

«126 саны жұп немесе 3-ке бөлінеді» айтылымы ақиқат,өйткені ондағы екі айтылым да ақиқат. Бұл айтылымдардың бәрі күрделі, олардың логикалық құрылымы «*А* немесе *В*» болады.

«*А немесе В***»** түріндегі айтылымды *А* мен *В* айтылымдарының *дизъюнкциясы (ажыратушы)*деп атайды. *А* немесе *В* айтылымдарының дизъюнкциясы $A \vee B$ деп белгіленеді.

$A \vee B$ дизъюнкция үшін ақиқаттық кестесі былайша толтырылады:

A	*B*	$A \vee B$
а	*а*	*а*
а	*ж*	*а*
ж	*а*	*а*
ж	*ж*	*ж*

Анықтама. *А* мен *В* айтылымдары жалған болғанда ғана жалған болатын күрделі айтылымды *А* және *В* айтылымдарының дизъюнкциясы деп атайды.

3.6 Айтылымдар импликациясы

Мынадай күрделі айтылым берілсін: «Егер n саны 4-ке бөлінсе, онда ол сан 2-ге бөлінеді». Логикалық формасы: « Егер *А*, онда *В* » түрінде болады.

«Егер *А*, онда *В*» түріндегі айтылым *А* мен *В* *айтылымдарының импликациясы (тығыз байланысты)* деп аталады. (*А* импликацияның шарты, ал *В* оның қорытындысы). *А* мен *В* айтылымдарының импликациясы $A \to B$ деп белгіленеді. Импликацияның әдеттегі қолданылуы логикада өзгешелеу. Импликацияның шарты мен қорытындысының арасында қандай да бір мағына немесе логикалық байланыс бар деп түсінеміз. Импликацияның ақиқаттығы немесе жалғандығы оның шарты мен қорытындысының ақиқат немесе жалғандығына байланысты болады деп келісілген.

Импликация үшін ақиқаттық кестесі былайша құрылады:

A	B	$A \rightarrow B$
а	*а*	*а*
а	*ж*	*ж*
ж	*а*	*а*
ж	*ж*	*а*

Анықтама. A ақиқат, B жалған болғанда ғана жалған, қалған жағдайдың бәрінде ақиқат болатын күрделі айтылымды A мен B айтылымдарының *импликациясы* деп атайды.

Ипликация көп жағдайда математикада кеңінен қолданылады.

3.7 Айтылымдар эквиваленциясы

«Тек сонда, тек сонда ғана» логикалық жалғауы арқылы байланысқан күрделі айтылымды айтылымдардың эквиваленциясы деп атайды. Мысалы, «Мен тек ерте тұрғанда, тек сонда ғана сабақтан кешікпеймін» айтылымын талдап, ондағы жай айтылымдардың ақиқат, жалғандығына қарай кесте толтырайық

A	B	$A \leftrightarrow B$
а	*а*	*а*
а	*ж*	*ж*
ж	*а*	*ж*
ж	*ж*	*а*

Анықтама. A мен B айтылымдарының екеуі бірдей ақиқат немесе екеуі бірдей жалған болғанда ғана ақиқат болатын күрделі айтылымды *айтылымдардың эквиваленциясы* деп атайды.

Сонымен, A және B айтылымдары ақиқат болғанда ғана конъюнкция ($A \wedge B$) ақиқат болады.

Ал, A және B айтылымдарының ең болмағанда біреуі ақиқат болса, онда дизъюнкция ($A \vee B$) ақиқат болады.

Импликация ($A \rightarrow B$) A – ақиқат, B – жалған болатын жағдайдан басқаларында ақиқат.

Логикада қолданылатын таңбалар:

1) X, Y, Z, X_i, Y_i, Z_i (i – натурал сан) – айнымалылар, олардың орнына кез келген айтылымдарды алуға болады.

2) *а, ж* – айтылымның ақиқат, жалғандығын көрсетеді.

3) $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ - логикалық амалдар.

4) ( ) – көмекші құрал.

3.7 Формула ұғымы

Анықтама. Логикалық таңбалар мен әріптерден құрылған, өзара логикалық амалдармен байланысқан өрнекті *формула* деп атайды.

Мысалдар.

1. Егер 100 саны 2-ге және 5-ке бөлінсе, онда 100 саны 10-ға да бөлінеді. $(X \wedge Y) \to Z$.

2. Егер төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары тең және параллель болса, онда ол төртбұрыш – параллелограмм $(X \wedge Y) \to Z$.

2. 2 жай сан және 3 жай сан $X \wedge Y$.
3. N саны 2-ге немесе 3-ке бөлінеді $X \vee Y$.
4. Қиылысатын түзулер бір жазықтықта жатпайды $\overline{X}$.
5. Трапецияның қарама-қарсы екі қабырғасы тең емес немесе параллель емес $\overline{X} \vee \overline{Y}$.

Формуладағы логикалық амалдардың орындалу ережесі:

Алдымен терістеу амалы орындалады. Одан кейін конъюнкция амалы, сосын дизъюнкция, соңында импликация мен эквиваленция амалдары ретімен орындала береді.

Егер амалдарды орындау барысында олардың осы реті бұзылатын болса, сол амал құрауыштарымен қоса жақшаларға алынады. Ал логикадағы жақшалардың қызметі алгебрадағы жақшалардың роліне ұқсас.

Формуланы қысқарту үшін (жақшалардың санын азайту үшін) мынадай келісімдер қабылдаймыз:

1. $\left(\overline{X \vee Y}\right) \wedge Z$ орнына $\overline{X \vee Y} \wedge Z$;
2. $(X \wedge Y) \vee Z$ орнына $X \wedge Y \vee Z$;
3. $X \to (Y \wedge Z)$ орнына $X \to Y \wedge Z$;
4. $(X \wedge Y) \Leftrightarrow (Z \wedge Q)$ орнына $X \wedge Y \Leftrightarrow Z \wedge Q$;
5. $(X \vee Y) \to Z$ орнына $X \vee Y \to Z$;
6. $X \Leftrightarrow (Y \vee Z)$ орнына $X \Leftrightarrow Y \vee Z$;
7. $(X \to Y) \Leftrightarrow Z$ орнына $X \to Y \Leftrightarrow Z$;
8. $(X \wedge (Y \to Z))$ орнына $X \wedge (Y \to Z)$.

3.8 Формулалардың ақиқаттық кестесі

Әрбір логикалық амалдың ақиқаттық кестесімен таныстық. Енді соларды негізге ала отырып кез келген формуланың ақиқаттық кестесін құрып көрейік.

Формулаға сәйкес ақиқаттық кестесін құру:

а) $(\overline{X} \vee Y) \to \overline{Y}$

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \vee Y$	$\overline{X} \vee Y) \rightarrow \overline{Y}$
а	*а*	*ж*	*ж*	*а*	*ж*
а	*ж*	*ж*	*а*	*ж*	*а*
ж	*а*	*а*	*ж*	*а*	*ж*
ж	*ж*	*а*	*а*	*а*	*а*

Алғашқы екі бағанда барлық мүмкін жағдайлар жазылған, ал қалған бағандарда сәйкес айтылымның ақиқат, жалғандығы көрсетілген.

б) $(X \wedge \overline{Y}) \leftrightarrow (Z \rightarrow X)$

X	Y	Z	$\overline{Y}$	$X \wedge \overline{Y}$	$Z \rightarrow X$	$(X \wedge \overline{Y}) \leftrightarrow (Z \rightarrow X)$
а	*а*	*а*	*ж*	*ж*	*а*	*ж*
а	*а*	*ж*	*ж*	*ж*	*а*	*ж*
а	*ж*	*а*	*а*	*а*	*а*	*а*
а	*ж*	*ж*	*а*	*а*	*а*	*а*
ж	*а*	*а*	*ж*	*ж*	*ж*	*а*
ж	*а*	*ж*	*ж*	*ж*	*а*	*ж*
ж	*ж*	*а*	*а*	*ж*	*ж*	*а*
ж	*ж*	*ж*	*а*	*ж*	*а*	*ж*

Ескерту. Екі немесе одан көп айтылымдар үшін мүмкін болатын жағдайлар саны 2^n формуласымен табылады.

Анықтама. Құрамындағы айнымалылардың барлық мүмкін мәндерінде тек қана ақиқат мән қабылдайтын формуланы *тавтология* деп атайды. Тавтологиямен өрнектелген сөйлем логикалық ақиқат сөйлем деп аталады.

Формуланың тавтология емес екенін ондағы айнымалылардың біреуінде жалған мән қабылдауынан – ақ айтуға болады.

Мысалы:

а) $\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\overline{X} \wedge \overline{Y})$

X	Y	$X \wedge Y$	$\overline{X \wedge Y}$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \wedge \overline{Y}$	$\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\overline{X} \wedge \overline{Y})$
а	*а*	*а*	*ж*	*ж*	*ж*	*ж*	*а*
а	*ж*	*ж*	*а*	*ж*	*а*	*ж*	*ж*
ж	*а*	*ж*	*а*	*а*	*ж*	*ж*	*ж*
ж	*ж*	*ж*	*а*	*а*	*а*	*а*	*а*

Берілген формула тавтология емес.

б) $\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})$

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$X \wedge Y$	$\overline{X \wedge Y}$	$\overline{X} \vee \overline{Y}$	$\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})$
а	*а*	*ж*	*ж*	*а*	*ж*	*ж*	*а*
а	*ж*	*ж*	*а*	*ж*	*а*	*а*	*а*
ж	*а*	*а*	*ж*	*ж*	*а*	*а*	*а*
ж	*ж*	*а*	*а*	*ж*	*а*	*а*	*а*

Берілген формула тавтология.

в) $\overline{X \vee Y} \leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})$ (өз бетімен дәлелдеу)

3.10 Формуланың түрлері

Логикада екі айтылым *тепе – тең* деп аталады, егер екеуі бірдей ақиқат немесе екеуі бірдей жалған болса. Мысалы: «ертең жаңбыр жауады» және «ертең жаңбыр жаумауы мүмкін емес» айтылымдары бір ғана ауа - райы туралы айтып тұр. Олар бірдей ақиқат не бірдей жалған болады. Сондықтан да логикада формула үш түрге бөлінеді: тепе - тең ақиқат, тепе – тең жалған және орындалатын формула.

Анықтама. Егер формулаға қатысатын айнымалылардың кез келген мәндерінде формула ақиқат мәнін ғана қабылдаса, онда формуланы *тепе – тең ақиқат* деп атайды.

Анықтама. Егер формулаға қатысатын айнымалылардың кез келген мәндерінде формула жалған мәнін ғана қабылдаса, онда формуланы *тепе – тең жалған* деп атайды.

Анықтама. Тепе – тең ақиқат та, тепе - тең жалған да болмайтын формуланы *орындалатын* деп атайды.

Жалпы формулалардың тепе – теңдігі мына түрде жазылады: $F_1 \equiv F_2$

Формуланың тепе – теңдігін ақиқаттық кестесі арқылы дәлелдейді.

Мысалы: $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$X \wedge Y$	$\overline{X \wedge Y}$	$\overline{X} \vee \overline{Y}$
а	*а*	*ж*	*ж*	*а*	*ж*	*ж*
а	*ж*	*ж*	*а*	*ж*	*а*	*а*
ж	*а*	*а*	*ж*	*ж*	*а*	*а*
ж	*ж*	*а*	*а*	*ж*	*а*	*а*

Тепе – теңдік қатысында мынадай қасиеттер орындалады:

1) рефлексивті, яғни $F \equiv F$;

2) симметриялы, яғни $F_1 \equiv F_2$, онда $F_2 \equiv F_1$;

3) транзитивті, яғни $F_1 \equiv F_2$, $F_2 \equiv F_3$, онда $F_1 \equiv F_3$.

3.11 Логика заңдары

1. $X \equiv X$ тепе – теңдік заңы. Бұл заңның оқылуы: « белгілі бір айтылымда ұғым бір мағынада ғана қолданылуы қажет, яғни өзіне - өзі тең болуы тиіс».
2. $X \wedge \overline{X} \equiv ж$ қайшылық заңы. Бұл заңның оқылуы: « бір нәрсе туралы бір уақытта және бір тұрғыдан айтылған қарама - қарсы екі ойдың екеуі де бірдей ақиқат болуы мүмкін емес ».
3. $X \vee \overline{X} \equiv a$ үшіншісі жоқ заң. Бұл заңның оқылуы: « бір уақытта, бір нәрсе туралы айтылған қайшы екі ойдың әр уақытта біреуі ақиқат, екіншісі жалған болады, ал үшінші ойдың болуы мүмкін емес ».
4. $\overline{\overline{X}} \equiv X$ терістеуді терістеу заңы.
5. $X \wedge X \equiv X, X \vee X \equiv X$ тепе-теңдік заңдары.
6. $X \wedge Y \equiv Y \wedge X, X \vee Y \equiv Y \vee X$ ауыстырымдылық заңдары.
7. $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$
   $(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$ терімділік заңдары.
8. $X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
   $X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ үлестірімділік заңдары.
9. $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}, \overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$ де Морган заңдары.
10. $X \wedge a \equiv X, X \vee æ = X$
11. $X \wedge æ \equiv æ, X \vee a = X$
12. $X \wedge (X \vee Y) \equiv X, X \vee (X \wedge Y) \equiv X$ жұту заңдары.
13. $(X \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee Y) \equiv Y, (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge Y) \equiv Y$ жабысу заңдары.

Логика заңдары айнымалылардың кез келген мәндерінде сақталады. Әрбір заңдағы бір айнымалыны кез келген формуламен ауыстырсақ, тепе-тең ақиқат болатын формула шығады. Логика заңдарын пайдаланып, кез келген формуланы оған теңбе – тең формуламен алмастыруға болады.

3.12 Теңбе-тең түрлендірулер

Егер F формуласының құрамындағы F_1 формуласын оған тепе-тең F_2 формуласымен алмастырсақ, онда бастапқы F формуласына теңбе - тең формула шығады. Мысалы, $\overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{X} \wedge Y} \equiv X \vee \overline{\overline{X} \wedge Y}$ (4- заң бойынша)

$X \vee \overline{\overline{X} \wedge Y} \equiv X \vee (\overline{\overline{X}} \vee \overline{Y})$ (де Морган заңы бойынша)

$X \vee (\overline{\overline{X}} \vee \overline{Y}) \equiv X \vee (X \vee \overline{Y})$ (4- заң бойынша)

$X \vee (X \vee \overline{Y}) \equiv (X \vee X) \vee \overline{Y}$ (7- заң бойынша)

$(X \vee X) \vee \overline{Y} \equiv X \vee \overline{Y}$ (5-заң бойынша), олай болса $\overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{X} \wedge Y} \equiv X \vee \overline{Y}$ (транзитивтік қасиет бойынша)

Формуланы қысқарту дегеніміз құрамында конъюнкция, дизъюнкция таңбалары мейілінше аз болатындай берілген формуланы теңбе-тең түрлендіруді айтамыз. Ал, импликация мен эквиваленция амалдары үшін келесі тепе-теңдіктер орындалады: $X \to Y \equiv \overline{X} \vee Y$

$$X \to Y \equiv \overline{X \wedge \overline{Y}}$$

$$X \leftrightarrow Y \equiv (X \to Y) \wedge (Y \to X) \equiv (\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee X)$$

3.13 Берілген ақиқаттық кестесі арқылы формула құру

X, Y және *Z* айнымалыларынан тұратын *F* формуласы берілсін. Формуланың ақиқаттық кестесі төмендегідей:

X	*Y*	*Z*	*F (X, Y, Z)*
а	*а*	*а*	*а*
а	*а*	*ж*	*ж*
а	*ж*	*а*	*ж*
а	*ж*	*ж*	*а*
ж	*а*	*а*	*ж*
ж	*а*	*ж*	*ж*
ж	*ж*	*а*	*ж*
ж	*ж*	*ж*	*а*

Кестедегі ақиқат мәндерге сәйкес келетін жолдарды бөліп алайық. Олар 1, 4, 8 – жолдар. Әрбір жолдың айнымалыларынан нәтижесінде ақиқат мән шығатындай конъюнкция құрамыз.

$X \wedge Y \wedge Z$ - 1 жол үшін;

$X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}$ - 4 жол үшін;

$\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}$ - 8 жол үшін.

Енді осы конъюнкциялардың дизъюнкциясын жазсақ, берілген кестеге сәйкес формула шығады:

$(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \equiv F(X,Y,Z)$

Мұндай тәсілмен алынған формула дизъюнкцияның қалыпты нормаль түрі (д. қ. н. т.) деп аталады.

Берілген кестеге сәйкес формуланы басқа тәсілмен де жазуға болады. Ол үшін:

1) жалған мән қабылдап тұрған жолдарды бөліп аламыз ;
2) әрбір жолдың айнымалыларынан дизъюнкция құрамыз немесе нәтижесінде дизъюнкция болатындай айнымалылардың терістеуін аламыз;
3) алынған дизъюнкцияларды конъюнкциямен байланыстырамыз.

Сонда берілген кестеге сәйкес мынадай формула шығады:

$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \overline{Z})$

Мұндай тәсілмен алынған формула конъюнкцияның қалыпты нормаль түрі (к. қ. н. т.) деп аталады. Сонымен, бірдей айнымалылардан құралған формула бір – бірден стандартты түрде жазылады екен: ақиқат мәндерден д. қ. н. т., ал жалған мәндерден к. қ. н. т.

3.14 Логикалық айтылымдардың қолданысына мысалдар

1. Үш дос кафеде кездесіп қалды. Мүсінші Белов, скрипкашы Чернов және суретші Рыжов. Міне, қызық, шаштарымыздың түсі әртүрлі (ақ, қара, сарғыш) және бірде-біреуіміздің фамилиямыздағы айтылған түспен шашымыздың түсі де сәйкес келмейді,- деді қара шаштысы.

Рас айтасың,- деді оған Белов. Сонда суретшінің шашы қандай болғаны?

Төмендегі кесте арқылы есептің шешімін оңай табуға болады.

	Ақ	Қара	Сарғыш
Белов	*ж*	*ж*	*а*
Чернов	*а*	*ж*	*ж*
Рыжов	*ж*	*а*	*ж*

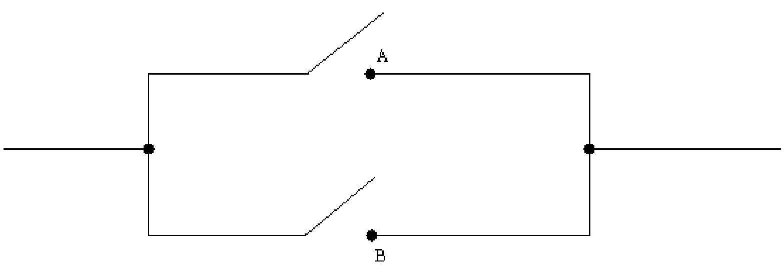
Жауабы: “Қара” түсті.

2. Құрама айтылымдардың логикалық қатынастары тұрмыс, техника және ғылым салаларында кеңінен қолданыс тауып отыр. Төменде математикалық логиканың электр тізбегінде қолданылуы көрсетілген. Айтылымдар конъюнкциясына электр жүйесінің төмендегідей блок-схемасы сәйкес келеді.

а)

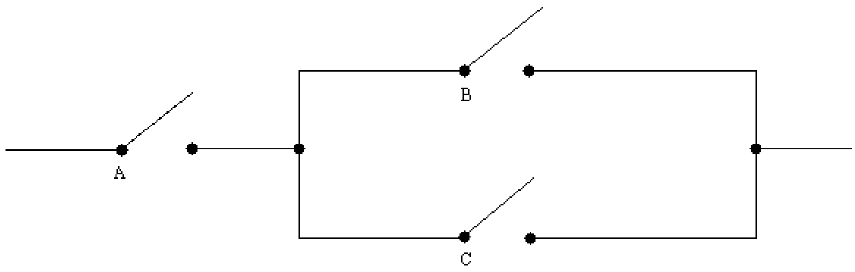
$A \wedge B$ конъюнкциясына сәйкес ажыратып қосқыш тетіктері электр жүйесіне тізбектей қосылғанда ғана ток жүреді және керісінше ажыратып қосқыш тетіктері жүйеге тізбектей қосылғанда $A \wedge B$ конъюнкциясы орындалады.

б)

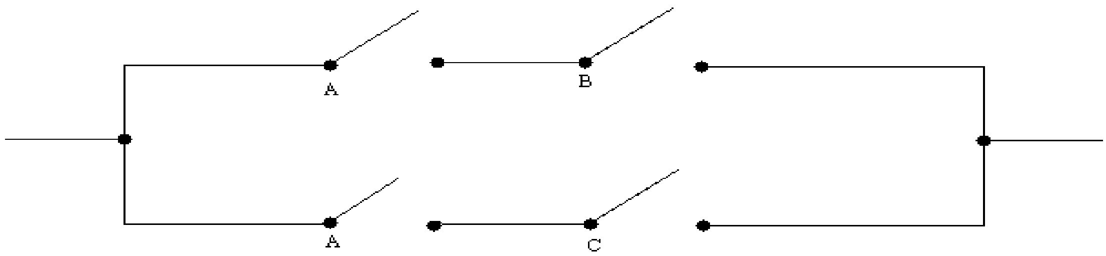


Параллель қосылған ажыратып қосқыш тетіктеріне дизъюнкция амалымен жалғасқан айтылымдар сәйкес келеді. Керісінше де айтуға болады: A$\vee$B айтылымына сәйкес келетін блок сұлбалаларды параллель қосқанда, электр тізбегіне ток жүреді.

3. $A \wedge (B \vee C)$ айтылымын электр жүйесіне енгізейік

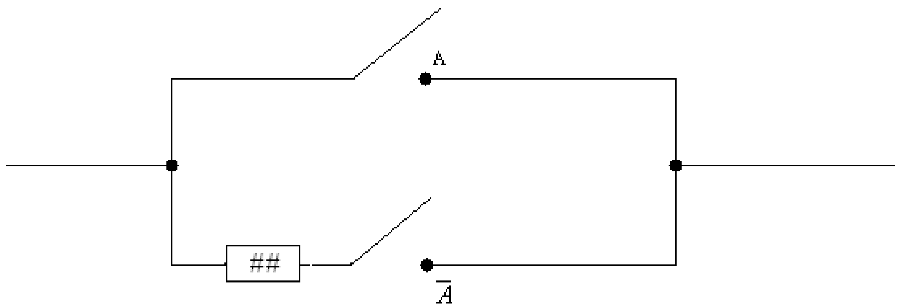


4. $A \wedge (B \vee C)$ және $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ формулаларының эквиваленттi екендiгiне схема арқылы көз жеткiзуге болады.



5. Терiстеу амалын iске асыру.

A және $\overline{A}$ айтылымдары бiр- бiрiне қарсы мәндердi қабылдайды. Мұндай екi ажыратып қосқыш тетiктерiн жалғағанда **өзек** деп аталатын тетiк қояды. Өзектiң қызметi мынадай: егер A блогы арқылы тоқ жүрiп тұрса, онда өзек $\overline{A}$ блогын ажыратып тастайды. Желiдегi өзек ## таңбасымен белгiленген.



Қорытынды: $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$ конъюнкциясына сәйкес ажыратып қосқыш тетiктерi электр жүйесiне тiзбектей қосылғанда ғана ток жүредi және керiсiнше ажыратып қосқыш тетiктерi жүйеге тiзбектей қосылғанда $A_1 \wedge A_2 \wedge ... A_n$

конъюнкциясы орындалады. Сондай-ақ, $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$ күрделі айтылымына сәйкес келетін блок сұлбалаларды параллель қосқанда, электр тізбегіне ток жүреді немесе параллель қосылған ажыратып қосқыш тетіктеріне дизъюнкция амалымен жалғасқан айтылымдар сәйкес келеді.

IV тарау. Предикат

4.1 Предикат туралы түсінік

Математикада бір немесе бірнеше айнымалысы бар сөйлемдер жиі кездеседі:

а) $x \prec 3$;

б) $x^2 + 2 = 3x$;

в) $x + y = 10$;

г) $x \in Z$ т. с.с.

Бұл сөйлемдер айтылым болмайды, бірақ айнымалының орнына қандай да бір мән берсек , ақиқат немесе жалған айтылымға айналады.

Мысалы, $x^2 + 2 = 3x$

$x = 1$ болса, онда $1^2 + 2 = 3 * 1$ (a)

$x = 2$ болса, онда $2^2 + 2 = 3 * 2$ (a)

Ал, x – тің басқа кез келген мәнінде жалған айтылым болады.

Егер $x + y = 10$ сөйлеміндегі x пен y – тің орнына (2 ; 8) мәнін қойсақ, ақиқат, ал (3; 9) мәнін қойсақ, жалған айтылым аламыз.

Анықтама 1. Бір немесе бірнеше айнымалысы бар және олардың нақтылы мәндерінде айтылымға айналатын сөйлем *предикат* деп аталады.

Предикатқа енетін айнымалының санына қарай бір орынды, екі орынды, үш орынды т.с.с. предикаттар анықталады.

Осы предикаттардын әркайсысында біз екі жиынды байланыстырамыз. Оның біріншісі - Х айнымалының предикатты айтылымға айналдыратын барлық мәндерінің жиыны, екіншісі - айнымалының орнына қойғанда сөйлемдерді ақиқат айтылымға айналдыратын мәндер жиыны. Бірінші жиынды предикаттың анықталу жиыны, ал екіншісін оның ақиқаттық жиыны деп атайды.

Анықтама 2. $P(x_1, x_2, ...x_n)$ предикаты деп аргументтері белгілі бір Х, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ жиынында анықталған,екі а (ақиқат) және ж (жалған) мәндерін қабылдайтын функцияны атайды. Сонымен, предикат $X \to \{a, æ\}$ кескінін жүзеге асырады.

Егер барлық $x_1, x_2, ..., x_n$ айнымалылар нақты мәндерді қабылдаса, онда предикат айтылымға айналады.

Бір орынды предикатты *P(x)* түрінде белгілейді. *P(x)* жазылуы "Х жиынында х - тің *P* предикаты берілген" деп оқылады.

Егер х - тің орнына Х жиынының кез келген бір *a* элементін койсак, *P(a)* деген пікірді аламыз.

Предикат ұғымын өзімізге белгілі бір айнымалысы бар теңдеу, бір айнымалысы бар теңсіздік, екі айнымалысы бар теңсіздік , т.с.с. ұғымдардың жалпы түрі деп қарауға болады.

Айтылымдар сияқты предикаттар да элементар және күрделі болады.

Күрделі предикаттар элементар предикаттарға «және», «немесе», «емес» т. с. с. логикалық байламдарын колдану арқылы алынады.

4.2 Предикаттарға амалдар қолдану

Айтылымдар сияқты предикаттар да *а, ж* мәндерін қабылдайды. Сондықтан, оларға да айтылымдар логикасының амалдарын қолдануға болады. (конъюнкция, дизъюнкция, терістеу, импликация, эквиваленция).

Біз бұл амалдарды бір орынды предикаттар үшін қарастырамыз. (көп орынды предикаттар үшін де осылайша орындалады).

Х жиынында *P(x)* және *Q(x)* предикаттары берілсін. Онда осы жиында

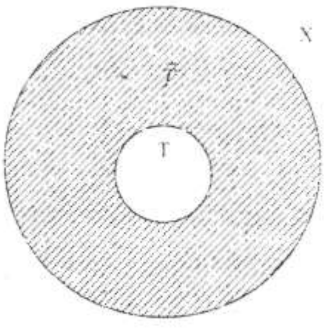
$\overline{P}(x)$, $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $P(x) \to Q(x)$, $P(x) \leftrightarrow Q(x)$

предикаттары да анықталады.

4.2.1 *Предикаттарды терістеу.*

Х жиынында *P(x)* предикаты берілген болсын. Оның кері предикаты деп сол Х жиынында анықталған және берілген предикаттың Х жиынының жалған болатын мәндерінде ғана ақиқат болатын предикатты айтады. Оны $\overline{P}(x)$ деп белгілеп , *P(x)* предикатының терістеуі деп атайды.

Мысалы, « х < 6 » предикаты Х ={ 1, 2 , 3 . . . , 10 }жиынында берілсін. Оның ақиқаттық жиыны Т = {1, 2, 3, 4, 5 } болады. Сонда, оның кері предикаты $\overline{P}(x)$: «х ≥ 6» . Оның ақиқаттық жиыны $\overline{T}$ = { 6 , 7, 8 , 9 , 10}. Бұл жиын Т жиынының Х жиынына дейінгі толықтырылуы болады. $\overline{P}(x)$предикатының ақиқат жиыны : $\{x \mid \overline{P}(x)\} = \overline{\{x \mid P(x)\}}$ (1 – сызба)



1- сызба

4.2.2 *Предикаттар конъюнкциясы.*

Х жиынында *P(x)* жоне *Q(x)* екі предикаты берілсін.

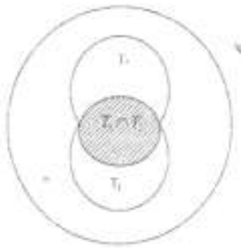
Х элементтерінде *P(x), Q(x)* предикаттарының конъюнкцнясы деп Х жиынының *P(x)* және *Q(x)* предикаттарының екеуі де ақиқат болғанда ақиқат болатын $P(x) \wedge Q(x)$ түріндегі күрделі предикатын айтады.

Мысалы, Х = {1, 2, 3, . . . , 15 } жиынында *Р (х)* : « х < 8 » және *Q (х)* : «х жұп сан» деген екі предикат берілсе, онда олардың конъюнкциясы $P(x) \wedge Q(x)$ «х саны 8-ден кем және жұп сан» предикаты болады.

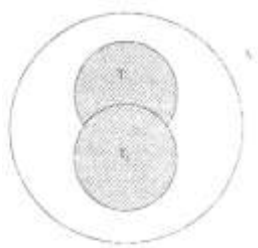
P(x) предикатының акикаттық жиыны T_1 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, ал *Q(x)* предикатының ақиқаттық жиыны T_2 = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}. «х саны 8-ден кем және жұп сан» предикатының акикаттық мәндері Т = {2, 4, 6 } болады. Олай болса Т акиқаттық жиыны T_1 мен T_2 жиындарынын қиылысуына тең, яғни Т = $T_1 \cap T_2$ (2- сызба).

$P(x) \wedge Q(x)$ предикатының ақиқат жиыны:

$\{x \mid P(x) \wedge Q(x)\} = \{x \mid P(x)\} \cap \{x \mid Q(x)\}$ (2 – сызба)



2 – сызба



3 – сызба

4.2.3 *Предикаттар дизъюнкциясы*

X жиынындағы $P(x) \vee Q(x)$ күрделі предикаты *P(x)* және *Q(x)* предикаттарының дизъюнкциясы деп аталады. Ол X жиынының *P(x)* және *Q(x)* предикаттарының ең болмағанда біреуі ақиқат болатын мәндерінде ақиқат болады.

Мысалы:X = {1, 2, 3, . . . , 15} жиынында *P(x)* : «х саны 8-ден кем », *Q(x)*: «х жұп сан » предикаттарының $P(x) \vee Q(x)$ дизъюнкциясы «х саны 8-ден кем немесе жұп сан» болады. Сонда оның ақиқаттық жиыны

Т = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14 } ,яғни Т = T_1 U T_2 болады. $P(x) \vee Q(x)$ предикатының ақиқат жиыны:

$\{x \mid P(x) \vee Q(x)\} = \{x \mid P(x)\} \cup \{x \mid Q(x)\}$ (3 - сызба).

Теріске шығару, конъюнкция, дизъюнкция амалдарын пайдаланып, берілген предикаттар арқылы күрделі предикаттар құруға болады.

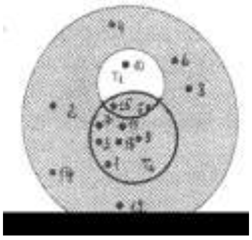
4.2.4 *Предикаттар импликациясы.*

X жиынында *P(x)* және *Q(x)* предикаттары берілсін. *P(x)* предикаты ақиқат, *Q(x)* предикаты жалған пікірлер болатын $x \in X$ -тің мәндерінде ғана жалған болатын күрделі предикатты *P(x)* және *Q(x)* предикаттарының импликациясы деп атайды.

Екі предикаттың импликациясы $P(x) \rightarrow Q(x)$ деп белгіленеді. X жиыныңдағы х-тің басқа мәндерінде $P(x) \rightarrow Q(x)$ предикаты ақиқат болады.

Мысалы, X = { 1, 2, 3, . . . ,15} жиынында *P(x)*: «х саны 5-ке еселі», *Q(x)*: «х саны тақ» деген екі предикатты алайық. Сонда $P(x) \rightarrow Q(x)$ предикаты «Егер х саны 5-ке еселі болса, онда ол тақ сан болады» деген сөйлем болады. Осы предикаттың ақиқаттық жиынын табайық. T_1 жиыны *P(x)* предикатының T_2 жиыны *Q(x)* предикатының ақиқаттық жиындары болсын. Сонда T_1 = {5, 10, 15 }, T_2 = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15} болады. Эйлер – Венн диаграммасы арқылы осы жиындарды кескіндейік (4 – сызба) .

$P(x) \rightarrow Q(x)$ предикатынын ақиқатгық жиыны T_3 = {1, 2, 3. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15 }. 4 – сызбада T_3 жиыны штрихталып көрсетілген, сонымен қатар T_3 жиыны T_2 жиынынан және T_1 жиынының X жиынына дейінгі толықтырылуынан тұрады, сонда $T_3 = T_2 \cup \overline{T_1}$.



4– сызба

Жалпы, *P(x)* → *Q(x)* предикатының ақиқаттық жиыны *Q(x)* предикатының ақикаттық жиыны мен – *P(x)* предикатының ақиқатгық жиынының X жиынына дейінгі толықтырылуының бірігуінен тұрады.

$P(x) \to Q(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x)$.

Олай болса, *P(x)* → *Q(x)* предикатының ақиқат жиыны:

$$\{x \mid P(x) \to Q(x)\} = \{x \mid \overline{P}(x) \vee Q(x)\} = \{x \mid \overline{P}(x)\} \cup \{x \mid Q(x)\} = \{\overline{x \mid P(x)}\} \cup \{x \mid Q(x)\}$$

4.2.5. *Предикаттар эквиваленциясы.*

$x \in X$ - тің мәндерінде *P(x)* және *Q(x)* предикаттарының екеуі де ақиқат немесе екеуі де жалған болғанда ақиқат болатын күрделі предикатты *P(x)* және *Q(x)* предикаттарының эквиваленциясы деп атайды. Белгіленуі: $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$. Эквиваленция амалында айтылымдар логикасындағы барлық қасиеттер орындалатындықтан, дербес жағдай да

$$x \in X \; P(x) \Leftrightarrow Q(x) \equiv (P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(x) \to P(x))$$

Сондықтан да

$$\{x \mid P(x) \to Q(x)\} \cap \{x \mid Q(x) \to P(x)\} = (\{x \mid \overline{P}(x)\} \cup \{x \mid Q(x)\}) \cap (\{x \mid \overline{Q}(x)\} \cup \{x \mid P(x)\})$$

Жоғарыда берілген анықтамалардан бұрыннан бізге таныс логикалық амалдар мен жиындарға қолданылатын амалдар арасындағы байланысты нақтылай атап көрсетуге болады:

Егер *P(x)* және *Q(x)* бір орынды предикаттары *P* және *Q* жиындарының мінездемелік қасиетін өрнектесе, яғни

$A = \{x \mid A(x)\}$,

$B = \{x \mid B(x)\}$,

$A \cup B = \{x \mid A(x) \vee B(x)\}$,

$A \cap B = \{x \mid A(x) \wedge B(x)\}$,

$\overline{A} = \{x \mid \overline{A}(x)\}$,

ал $A \in B \Leftrightarrow A(x) \to B(x)$ (кез келген X үшін ақиқат болса).

Логикалық айтылымдардың формуласының тавтология екендігі ақиқаттық кестесін құру арқылы тексеріледі. Ал, предикаттар логикасында оның формуласының ақиқат, жалғандығын тексеретін тәсіл жоқ. Ол тек талқылаулар арқылы ғана жүзеге асады.

Черч теоремасы. Кез келген предикаттар логикасының формуласы үшін ол жалпымәнді ма, жоқ па дегенді орнататын алгоритм жоқ.

V тарау. Кванторлар

5.1 Бар болу және жалпылық кванторы

Айтылымдар логикасының амалдары предикатты күрделі предикатқа түрлендіреді. Енді педикатты айтылымға айналдыратын амалдарды қарастырамыз. Предикаттарды айтылымдарға түрлендіру үшін логикада көбінесе **жалпылық** кванторы, **бар болу** кванторлары қолданылады.

Квантор - латын сөзінен алынған, «қанша» деген мағынаны білдіреді. Жалпы алғанда квантор логикалық амал. Ол предикатқа қолданғанда шыққан өрнектің мүмкіндік аймағының мөлшерін анықтайды.

Мысалы, «төртбұрыштың қарама – қарсы қабырғалары тең» сөйлемінің ақиқат не жалғандығын айта алмаймыз. Егер осы сөйлемнің алдына «барлық» немесе «кейбір» сөздерін қолданатын болсақ, онда предикатымыз айтылымға айналады: «барлық төртбұрыштың қарама – қарсы қабырғалары тең» (жалған айтылым) «кейбір төртбұрыштың қарама – қарсы қабырғалары тең» (ақиқат айтылым). Сонымен, предикаттың алдына койылған «барлық» , «кейбір», «бар – болады» сөздері оны айтылымға айналдырады екен.

«Барлық», «бар болады», «кейбір» деген сөздер кванторлар деп аталады. Осындай сөздерді жазу үшін $\forall$ және $\exists$ символдары пайдаланылады. $\forall$ символы «барлық», «әрбір», «кез келген», «әртүрлі» деген сөздердін орнына қолданылып, жалпылау кванторы деп аталады.

Мысалы, «кез келген нақты санның квадраты теріс емес» тұжырымын жалпылық кванторы арқылы жазып көрелік. R нақты сандар жиыны болсын. Сонда бұл тұжырымды $\forall x \in R, \left(x^2 \geq 0\right)$деп жазуға болады. $\exists$ символын «бар болады», «қандай болмасын , «ең болмағанда бір», «табылады» сөздерінің орнына пайдаланып, оны бар болу кванторы деп атайды.

Мысалы: $P(x)$: «$x + 2>x$, $x \in N$» предикаты үшін $\forall x \in N$, $P(x)$ түріндегі жазба « кез келген x натурал саны үшін $x + 2>x$ теңсіздігі орындалады » деген пікірді білдіреді. Бұл – пікір ақиқат, өйткені кандай да бір x натурал санды алсақ та, үнемі $x + 2>x$ болады. Ал, $\exists x \in N$, $P(x)$ жазбасы « $x + 2>x$ теңсіздігі орындалатын x натурал саны бар болады » деп оқылады. Бұл предикат та ақиқат.

Сонымен, $P(x)$ X жиынында берілген кандай да бір предикат болса, онда $\forall x \in X$, $P(x)$ деген жазба «X жиынындағы барлык x үшін $P(x)$ орындалады» деген предикат болады. Бұл предикаттың ақиқаттығын анықтау үшін X жиынынан кез келген a элементін алып, $P(a)$ айтылымының ақиқат екенін көрсету керек. Егер де, X жиынындағы ең болмағанда бір a элементі үшін $P(a)$ жалған болса, онда $\forall\ x \in X$, $P(x)$ жалған предикат болады.

Егер X жиынында анықталған $P(x)$ предикаты үшін $\exists\ x \in X$, $P(x)$ жазуы берілсе, ол «X жиынында $P(x)$ орындалатын x бар болады» деп окылады. Бұл жазуды «X жиынынан $P(x)$ орындалатын ең болмағанда бір x элементі табылады» деп те оқуға болады.

X жиынынан алынған ең болмағанда бір a элементі үшін $P(a)$ ақиқат болса, $\exists\ x \in X$, $P(x)$ предикаты ақиқат болады. Егер $P(x)$ акиқат болатындай X жиынынан бірде – бір элемент табылмаса, ол жалған предикат болады.

$\forall$ және $\exists$ кванторлары екі, үш, т.с.с. орынды предикаттар үшін де қолданылады. Мысалы, барлық нақты сандар жиынында $Q(x,y)$:« $x \bullet y = y \bullet x$» предикаты берілген болсын. Сонда $\forall\ x, y \in R$, $Q(x,y)$ жазылуы « кез келген x, y нақты сандары үшін $x \bullet y = y \bullet x$ теңдігі орындалады деп оқылады.

Барлық нақты сандар жиынында $P(x.y)$: «$x<y$» предикатын қарастырайық.

Сонда $\forall\ x \in R, \exists\ y \in R, P(x,y)$ жазылуы «кез келген x нақты саны үшіи $x<y$ теңсіздігі орындалатын y нақты саны бар болады» деген мағына береді. Бұл ақиқат предикат.

5.2 Бір квантордан екінші кванторға көшу

$\forall\ x \in X$, $P(x)$ жалпылық кванторы $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$ конъюнкциясымен, ал $\exists\ x \in X$, $P(x)$ бар болу кванторы $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$ дизъюнкциясымен бірдей екендігін көруге болады, яғни мынадай эквиваленттілік орынды:

$$\forall\ x \in X\ , P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n) \quad \text{және}$$

$$\exists\ x \in X\ , P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$$

Бұдан жалпылық кванторы конъюнкцияның, ал бар болу кванторы дизъюнкцияның жалпыланған түрі деп айта аламыз.

Енді осы эквиваленттіліктерге де Морган заңын қолданып көрейік:

$$\overline{\forall\, x \in X,\ \mathrm{P(x)}} \Leftrightarrow \overline{P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)} \Leftrightarrow \overline{P}(x_1) \vee \overline{P}(x_2) \vee \ldots \vee \overline{P}(x_n) \Leftrightarrow \exists\, x \in X, \overline{P}(x)$$

сол сияқты,

$$\overline{\exists\, x \in X,\ \mathrm{P(x)}} \Leftrightarrow \overline{P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)} \Leftrightarrow \overline{P}(x_1) \wedge \overline{P}(x_2) \wedge \ldots \wedge \overline{P}(x_n) \Leftrightarrow \forall\, x \in X, \overline{P}(x)$$

Сонымен, де Морган заңдарын қолданып, бір квантордан екінші кванторға көшуге болады екен.

$$\overline{\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{P(x)}} \equiv \exists\, \mathrm{x}, \overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$$

$$\overline{\exists\, \mathrm{x}, \mathrm{P(x)}} \equiv \forall\, \mathrm{x}, \overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$$

Мысалы: $\overline{\forall x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P(x, y)}$ формуласын түрлендіру керек.

$$\exists x\, \overline{\exists \mathrm{y}}\, P(x, y) \equiv \exists x\, \forall y\, \overline{P}(x, y)$$

Кванторларды пайдалану мектеп математикасындағы негізгі ұғымдарды терең түсінуге мүмкіндік береді. Мысалдар келтірелік.

а) (x_n) *тізбегінің шегінің* анықтамасы кванторлар арқылы былайша беріледі:
$\forall \varepsilon \succ 0 \exists n_1 \in N \forall n \in N((n \succ n_1) \Rightarrow |x_n - a| \prec \varepsilon)$

б) *Функцияның нүктедегі шегі.*

Орта мектептегі математикалық талдау пәнінде берілетін анықтама мен бұл анықтаманың логика тілінде айтылатын анықтаманы қатар жүргізіп, бір бірімен салыстыралық.

Анықтама. Егер кез келген оң ε саны үшіе оң δ саны табылса, барлық $x \neq a$ үшін $|x-a| < \delta$ теңсіздігі орындалғанда $|f(x)-A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда *A* санын *f(x)* функциясының *x=a* нүктесіндегі шегі деп атайды.

Енді бұл анықтаманы кванторлар арқылы жазсақ:

$$A = \lim_{n\to a} f(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon \succ 0)(\exists \delta \succ 0)(\forall x \neq a)((|x-a| \prec \delta) \Rightarrow (|f(x)-A| \prec \varepsilon))$$

«Логика тілінде» жаттыққан оқушылар үшін функция шегінің мұндай анықтамасы әрі түсінікті, әрі қысқа.

в) *Функцияның үзіліс нүктесі.*

f(x) функцияның *x=a* нүктесіндегі үздіксіздігі $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (1)

теңдігімен анықталады. Ал, *f(x)* функциясы *x=a* нүктесінде үздіксіз болмаса, онда *x=a* нүктесінде функция *үзілісті* болғаны. (1) теңдігін пайдаланып, нүктедегі үзілісті функцияны кванторлар арқылы былай анықтауға болады:

Егер $(\exists \varepsilon \succ 0)(\forall \delta \succ 0)(\exists x \neq a)(|x-a| \prec \delta) \wedge (|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$ (2) болса, онда *x=a* нүктесі *f(x)* функциясының *үзіліс* нүктесі деп аталады. Функцияның үзілістігін тап осылай анықтау үзіліс нүктелерін зерттегенде пайдасы мол.

г) *f(x) функциясының периодтылығының* анықтамасы кванторлар арқылы былайша беріледі: $\exists c \forall x (c \neq 0 \wedge f(x+c) = f(x))$

д) *Математикалық индукция әдісін* кванторлар арқылы жазайық.

P(x) – N сандар жиынында берілген кез – келген предикат.

Егер P (n_0) $\wedge$ ($\forall$K $\geq$ n_0, P(k) $\to$ P(k +1)) айтылымы ақиқат болса, онда барлық $n \geq n_0$ үшін P(x) – ақиқат болады.

5.3 Предикаттар логикасының формулаларының тепе – теңдігі

Анықтама 1. Егер предикаттар логикасының *A* және *B* формулалары *X* аймаққа тиісті айнымалыларының барлық мәндерінде бірдей логикалық мән қабылдаса, онда бұл формулалар *X* аймағында *тепе-тең* деп аталады.

Анықтама 2. Егер предикаттар логикасының *A* және *B* формулалары кез-келген аймақта тепе-тең болса, онда бұл формулалар *тепе-тең* деп аталады.

A(x) және *B(x)* – айнымалы предикаттар, ал *C* - айнымалы тұжырым болсын (немесе *x*-ке тәуелді емес формула). Онда келесі тепе-теңдіктер орынды:

1. $\overline{\forall x, A(x)} \equiv \exists x, \overline{A}(x)$.
2. $\overline{\exists x, A(x)} \equiv \forall x, \overline{A}(x)$.
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$.
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \wedge B(x)]$.
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [C \wedge B(x)]$.
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x [C \vee B(x)]$.

8. $C \to \forall x B(x) \equiv \forall x[C \to B(x)]$

9. $\forall x[B(x) \to C] \equiv \exists x B(x) \to C$.

10. $\exists x[A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

11. $\exists x[C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x)$

12. $\exists x[C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x)$.

13. $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y[A(x) \wedge B(y)]$.

14. $\exists x[C \to B(x)] \equiv C \to \exists x B(x)$.

15. $\exists x[B(x) \to C] \equiv \forall x B(x) \to C$.

Анықтама. Егер предикаттар логикасының формуласы терістеу, конъюнкция, дизъюнкция және кванторлық операциялар көмегімен құрылған болса және терістеу амалы тек қарапайым формулаларға қатысты болса, онда бұл формула *нормал формаға ие* деп айтады.

Айтылымдар алгебрасының және предикаттар логикасының тепе-теңдіктерін пайдаланып, предикаттар логикасының кез келген формуласын нормал формаға келтіруге болады.

Мысал. $(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z)$ формуласын нормал формаға келтіру керек.

Тепе-тең түрлендірулерді пайдаланамыз:

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv \overline{\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv \overline{\overline{\exists x P(x)}} \wedge \overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv$$
$$\equiv \exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z)$$

Предикаттар логикасы формулаларының арасында пренекстік нормал форма деп аталатын формулалар да бар. Бұл формада кванторлық амалдар болмайды немесе олар логика алгебрасының барлық амалдарынан кейін қолданылады, яғни предикаттар логикасы формуласының ПНФ келесі түрде болады:

$(\sigma x_1)(\sigma x_2)...(\sigma x_n)A(x_1, x_2, ...x_m), n \le m$, мұнда (σx_1) символы - $\forall x$ немесе $\exists x$, ал A формуласында кванторлар жоқ.

VI тарау. Буль функциялары
6.1 Бульдің элементар функциялары

Бульдік екілік айнымалылар екі мәнге ие: **0** немесе **1**. $y = f(x_1, x_2, ...)$ функциясы *бульдік функция* немесе *күй ауыстырғыш функция* деп аталады. Мұндағы $x_1, x_2, ...$ екілік айнымалыларға байланысты y айнымалысының мәні 0 немесе 1 мәнін ғана қабылдайды.

Екілік аргументтің мүмкін болатын барлық комбинациялары **екілік жиынтық** деп аталады.

Мысалы, екі аргумент $(x_1$ және $x_2)$ үшін екілік жиынтық 00, 01, 10, 11, ал үш аргумент $(x_1$ және $x_2, x_3)$ үшін екілік жиынтық 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 және 111болады.

n аргумент үшін жиынтық комбинациялар саны $k_k = 2^n$, яғни аргумент саны $n = 1$болғанда функция саны 4-ке, $n = 2$ болғанда функция саны 16-ға тең болады.

Жиынтық нөмірі – бұл екілік жиынтықтың ондық сан түрінде бейнеленуі. Мысалы, 101 жиынтығының нөмірі 5, 1001 жиынтығының нөмірі 9.

Функция коды – бұл өз аргументтерінің барлық мүмкін комбинацияларындағы функция мәндері.

Логикалық айнымалылардың барлық мүмкін болатын комбинациялары мен функцияның оларға сәйкес мәндерін кесте түрінде бейнелеу өте ыңғайлы. Мұндай кестені **ақиқаттық кестесі** деп атайды.

Бір және екі аргументті Буль функциялары 1 және 2 кестелерде көрсетілген.

1 - кесте

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0(x)$ функциясының мәні аргумент мәніне тәуелсіз нөльге тең болады да, функция **нөль тұрақты** деп аталады.

$f_1(x)$- айнымалының мәніне тең болады және ***x* айнымалы** деп аталады.

$f_2(x)$- аргументтің терістелген мәніне тең болады және ***x* инверсия** деп аталады.

$f_3(x)$- мәні аргумент мәніне тәуелсіз бірге тең болады және **бір тұрақты** деп аталады.

2 - кесте

a	$x_1 x_2$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	01	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	10	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
3	11	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

f_0және f_{15} - сәйкесінше **тұрақты 0** және оның инверсиясы **тұрақты 1** функциялары;

f_3және f_{12} - x_1 **айнымалы** және оның инверсиясы $\overline{x_1}$;

f_5 және f_{10} - x_2 **айнымалы** және оның инверсиясы $\overline{x_2}$;

f_1 және f_{14} - **конъюнкция** функциясы және оның инверсиясы **Шеффер функциясы**;

f_7 және f_8- **дизъюнкция** функциясы және оның инверсиясы **Пирс функциясы**;

f_2 және f_{13} - **тыйым салу** функциясы және оның инверсиясы x_1**- ден** x_2**- ге импликация**;

f_4 және f_{11}- **тыйым салу** функциясы және оның инверсиясы x_2**- ден** x_1**- ге импликация**;

f_6 және f_9 - **тепе-теңсіздік** функциясы және оның инверсиясы эквиваленттік.

Инверсия (терістеу) – аргумент мәні бір болса, мәні нөльге, ал**,** аргумент мәні нөлге тең болса, мәні бірге тең болатын функция және ол $f(x)=\overline{\overline{x}}$ деп белгіленеді. Инверсия функциясы ***x*** **емес** деп оқылады.

Конъюнкция (логикалық көбейту) – барлық аргументтері нөльге тең болғанда ғана мәні нөл болатын функция. Конъюнкция таңбасы &. Бұл таңба көп жағдайларда жазылмай, түсіп қалады. $f(x_1,x_2)=x_1 \,\&\, x_2 = x_1x_2$ формуласы x_1 *және* x_2 деп оқылады.

Дизъюнкция (логикалық қосу) – ең болмағанда бір аргументі бірге тең болса, мәні бір болатын функция. Дизъюнкция таңбасы $\vee$. $f(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2$ формуласы x_1 *немесе* x_2 деп оқылады.

Шеффер функциясы – конъюнкция инверсиясы.

Пирс функциясы - дизъюнкция инверсиясы.

Анықтама. Екі аргументпен анықталған екі мәнді функцияны *Буль функциясы* деп атайды. Басқаша айтқанда, n – орынды буль функциясы – ол $\{0,1\} \to \{0,1\}$ түріндегі бейнелеу.

$$\overline{P}=\begin{cases}0, егер P=1,\\ 1, \text{егер P}=0,\end{cases} \quad PG=\begin{cases}1, \text{егер P}=\text{G}=1\\ \quad 0\end{cases} \quad P\vee G=\begin{cases}0, егер P=G\\ \quad 1\end{cases}$$

Егер 0 – жалған (ж), ал 1– ақиқат (а) деп алсақ, онда буль функциясы ақиқатты функция болады, ал жоғарыда анықталған үш негізгі буль функциялары – терістеу, коньюнкция және дизьюнкциямен сәйкес келеді.

Буль алгебрасының теоремалары:

1. $\overline{0}=1, \overline{1}=0$
2. $x\vee 0=x, x\cdot 1=0$
3. $x\vee 1=1, x\cdot 0=0$
4. $x\vee x=x, x\cdot x=x$ - тавтология заңдары
5. $x\vee \overline{x}=1, x\cdot \overline{x}=0$- конъюнкция мен дизъюнкция үшін терістеу заңдары
6. $\overline{\overline{x}}=x$- екі рет терістеу заңы
7. $x\vee y=y\vee x, x\cdot y=y\cdot x$ - ауыстырымдылық заңы
8. $x\vee x\cdot y=x, x\cdot(x\vee y)=x$ - айнымалыны қысқарту заңдары
9. $x\vee \overline{x}\cdot y=x\vee y, x\cdot(\overline{x}\vee y)=x\cdot y$
10. $(\overline{x\vee y})=\overline{x}\cdot\overline{y}$, $\overline{x\cdot y}=\overline{x}\vee\overline{y}$ - де Морган заңдары
11. $(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)=x\vee y\vee z$, $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)=x\cdot y\cdot z$
12. $x\vee y\cdot z=(x\vee y)(x\vee z)$, $x\cdot(y\vee z)=x\cdot y\vee x\cdot z$ - үлестірімділік заңдары

6.2 Буль функцияларын ықшамдау және оның ақиқаттық кестесін тұрғызу

Буль алгебрасының заңдылықтары мен теңбе-теңдіктері көбінесе функцияларды ықшамдауда қолданылады. Буль функцияларын ықшамдау функцияның логикалық схемасын тұрғызғанда, ақиқаттық кестелерін құрғанда көп жеңілдіктер береді.

1. Буль функцияларын ықшамдау.

Мысал. Берілген Буль функциясын ықшамдап, оның ақиқаттық кестесін тұрғызу керек: $f(x_1, x_2, x_3) = x_3\left(\overline{x_2 x_1 \vee \overline{\overline{x_3}}}\right)$

Шешуі: $f(x_1, x_2, x_3) = x_3\left(\overline{x_2 x_1 \vee \overline{\overline{x_3}}}\right) = \{10\} = x_3\left(\underline{\overline{x_2 x_1} \vee \overline{x_3}}\right) = \{11{,}6\} = x_3 \overline{x_2 x_1} x_3 = \{4{,}7\} = \overline{x_1 x_2} x_3$.

Жауабы:

x_1	x	x	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$f(0,0,0) = \overline{0 \cdot 0} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$.

$f(0,0,1) = \overline{0 \cdot 0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$.

$f(0,1,0) = \overline{0 \cdot 1} \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$.

$f(0,1,1) = \overline{0 \cdot 1} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$.

$f(1,0,0) = \overline{1 \cdot 0} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$.

$f(1,0,1) = \overline{1 \cdot 0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$.

$f(1,1,0) = \overline{1 \cdot 1} \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$.

$f(1,1,1) = \overline{1 \cdot 1} \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$

2. Ақиқаттық кестесі бойынша функцияны құру. Ол үшін:

1. Кестедегі функция мәні бірге тең болатын әрбір қатар үшін минтерм құру. **Минтерм** дегеніміз айнымалы не терістелген айнымалы бір рет қатысатын конъюнкция. Кесте қатарындағы мәні 0 болатын айнымалы мәні минтермге терістелген күйде, ал 1 болатын айнымалы сол күйінде кіреді.

2. Құрылған минтермдерді дизъюнкция амалы арқылы біріктіріп жазу.

Мысал. Берілген кесте бойынша функция құрып, оны ықшамдау керек.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

1. Кестеден $f = 1$болатын қатарларды таңдап алып, олар үшін минтермдер құрамыз:

1қатар үшін: $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$;

2 қатар үшін: $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$;

8 қатар үшін: $x_1 x_2 x_3$.

2. Минтермді дизъюнкция амалымен біріктіреміз:

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

3. Өрнекті ықшамдаймыз:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 x_3 = \{12\} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}(x_3 \vee x_3) \vee x_1 x_2 x_3 = \{5.2\} = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2 x_3$$
$$= \{10\} == \left(\overline{x_1 \vee x_2}\right) \vee x_1 x_2 x_3$$

Жауабы: $\left(\overline{x_1 \vee x_2}\right) \vee x_1 x_2 x_3$

6.3 Буль функцияларының канондық формалары

Түрлі функцияларды белгілі бір ереже бойынша жазуды функциялардың **канондық формасы** деп атайды. Буль функциясын канондық түрде жазудың екі формасы бар: *нормальді форма* және *қалыптасқан нормальді форма.*

а) Дизъюнктивті нормальді форма (**ДНФ**).

Элементар конъюнкциялардың дизъюнкциясы Буль функциясының *дизъюнктивті нормальді формасы* деп аталады.

Мысалы, $f(x, y, z) = x \vee \overline{y}z \vee \overline{x}z \vee x\overline{y}z$.

ә) Конъюнктивті нормальді форма (**КНФ**).

Элементар дизъюнкциялардың конъюнкциясы Буль функциясының *конъюнктивті нормальді формасы* деп аталады.

Мысалы, $f(x, y, z) = (x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$.

б) Қалыптасқан дизъюнктивті нормальді форма (**ҚДНФ**).

Функцияның әрбір 1-ге тең мәні үшін оның конъюнкциялардың дизъюнкциялары түрінде жазылуы *қалыптасқан дизъюнктивті нормальді форма* (**ҚДНФ**) деп аталады. Дизъюнкцияның конъюнкциясы әрбір айнымалының мәні 1- ге тең болса тура мағынада, ал мәні 0 – ге тең болса терістелген мағынада бір рет қана қабылдайды. Қалыптасқан дизъюнктивті нормальді форманың әрбір конъюнкциясы *минтерм* деп аталады.

в) Қалыптасқан конъюнктивті нормальді форма (**ҚКНФ**).

Функцияның әрбір 0-ге тең мәні үшін дизъюнкциялардың конъюнкциялары түрінде жазылуы *қалыптасқан конъюнктивті нормальді форма* (**ҚКНФ**) деп аталады. Конъюнкцияның дизъюнкциясы әрбір айнымалының мәні 0 - ге тең болса тура мағынада, ал мәні 1 – ге тең болса терістелген мағынада тек бір рет қана қабылдайды. Қалыптасқан конъюнктивті нормальді форманың әрбір дизъюнкциясы *макстерм* деп аталады.

Әрбір минтермге немесе макстермге кіретін айнымалылар саны функцияның **рангісі** деп аталады.

Ақиқаттық кестесі арқылы берілген Буль функциясын қалыптасқан нормальді формада жазу

Ақиқаттық кестесі бойынша функцияның қалыптасқан дизъюнктивті нормальді формасын жазу алгоритмі: 1. Кестедегі функция мәні 1-ге тең болатын әрбір қатар үшін минтерм құру.

2. Құрылған минтермдерді дизъюнкция амалы арқылы біріктіріп жазу.

Мысал. Берілген кесте бойынша функцияны қалыптасқан дизъюнктивті нормальді формада жазу керек.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

1. Кестеден $f=1$ болатын қатарларды таңдап алып, олар үшін минтермдер құрамыз:

3 қатар: $\overline{x_1}x_2\overline{x_3}$;

4 қатар: $\overline{x_1}x_2x_3$;

7 қатар: $x_1x_2\overline{x_3}$.

2. Минтермді дизъюнкция амалымен біріктіреміз:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\vee\overline{x_1}x_2x_3\vee x_1x_2\overline{x_3}.$$

Жауабы: $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\vee\overline{x_1}x_2x_3\vee x_1x_2\overline{x_3}$ - ҚДНФ

Ақиқаттық кестесі бойынша функцияның қалыптасқан конъюнктивті нормальді формасын жазу алгоритмі: 1. Кестедегі функция мәні 0-ге тең болатын әрбір қатар үшін макстерм құру.

2. Құрылған макстермді конъюнкция амалы арқылы біріктіріп жазу.

Мысал. Берілген кесте бойынша функцияны қалыптасқан конъюнктивті нормальді формада жазу керек.

1. Кестеден $f=0$ болатын қатарларды таңдап алып, олар үшін макстермдер құрамыз: 1қатар: $x_1\vee x_2\vee x_3$;

2 қатар: $x_1\vee x_2\vee\overline{x_3}$;

5 қатар: $\overline{x_1}\vee x_2\vee x_3$;

6 қатар: $\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3}$;

8 қатар: $\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3}$.

2. Макстермдерді конъюнкция амалымен біріктіреміз:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee x_2\vee\overline{x_3})(\overline{x_1}\vee x_2\vee x_3)(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3})(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3}).$$

Жауабы: $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee x_2\vee\overline{x_3})(\overline{x_1}\vee x_2\vee x_3)(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3})(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3})$ - ҚКНФ

6.4 Буль функцияларын түрлендірудің аналитикалық тәсілдері

1. Функцияны нормальді формаға түрлендіру. Кез-келген функцияны нормальді түрде жазу берілген логикалық өрнектегі бірнеше айнымалылар үшін терістеулерді, жақшаларды алып тастау және бірдей мүшелерді біріктіру амалдарына келіп тіреледі.

Мысал. Берілген функцияны нормальді дизъюнктивті формада жазу керек.

$$f(x,y,z)=\overline{x\cdot y\vee\overline{x}\cdot\overline{y}\vee z}\vee x\cdot y.$$

Берілген өрнектегі терістеуді алып тастаймыз. Сонда

$f(x,y,z)=\overline{x\cdot y\vee\overline{x}\cdot\overline{y}\vee z}\vee x\cdot y=\overline{xy}\vee\overline{\overline{x}}\,\overline{\overline{y}}\vee\overline{z}\vee xy$. Енді Морган заңын қолданамыз:

$f(x,y,z)=(\bar{x}\bar{y})\vee\left(\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}\right)\vee\bar{z}\vee xy$. Екі рет терістеу заңы бойынша:

$$f(x,y,z)=(\bar{x}\bar{y})\vee\left(\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}\right)\vee\bar{z}\vee xy=(\bar{x}\bar{y})\vee(xy)\vee\bar{z}\vee xy.$$

Жақшаларды ашамыз.

$f(x,y,z)=(\bar{x}x\vee x\bar{y}\vee \bar{x}y\vee \bar{y}y)\bar{z}\vee xy$. $\bar{x}x=0$ және $x\vee 0=x$ ережелерін қолданып, табатынымыз: $f(x,y,z)=(\bar{x}y\vee x\bar{y})\bar{z}\vee xy$.

Жақшаларды ашып, функцияның нормальді формасын аламыз:

$f(x,y,z)=(\bar{x}y\vee x\bar{y})\bar{z}\vee xy=\bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{z}\vee xy$.

Сонымен ДНФ: $f(x,y,z)=\bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{z}\vee xy$

2.Функцияны бір нормальді формадан екінші нормальді формаға түрлендіру.

Дизъюнктивті нормальді формада берілген функцияны конъюнктивті нормальді формада жазу үшін логикалық өрнекті толығымен терістеу, яғни өрнектегі айнымалыларды жеке-жеке терістеп, конъюнкция амалдарын дизъюнкция амалдарына, дизъюнкция амалдарын конъюнкция амалдарына алмастыру керек.

Конъюнктивті нормальді формада берілген функцияны да дәл осылайша дизъюнктивті нормальді формада жазуға болады.

Мысал. $f(x,y,z)_{\text{ÄÍÔ}}=\bar{x}y\vee x\bar{z}\vee \bar{y}z$. ДНФ –дан КНФ –ға түрлендіру.

$$f(x,y,z)_{\text{ÄÍÔ}}=\overline{\bar{x}y\vee x\bar{z}\vee \bar{y}z}=(x\vee\bar{y})(\bar{x}\vee z)(y\vee\bar{z})$$

$$f(x,y,z)_{\text{ÊÍÔ}}=(x\vee\bar{y})(\bar{x}\vee z)(y\vee\bar{z}).$$

3. Функцияны нормальді формадан қалыптасқан дизъюнктивті нормальді формаға түрлендіру.

Функцияны нормальді формадан қалыптасқан дизъюнктивті нормальді формаға түрлендіру үшін функциядағы әрбір толық емес функцияны $x\vee\bar{x}=1$

(мұндағы x конъюнкцияға енбей қалған айнымалы) логикалық өрнегіне көбейту керек. Көбейту процесі берілген өрнектегі әрбір конъюнкцияға енбей қалған айнымалылардың санына байланысты қайталанады.

Мысал. $f(x,y,z)_{\text{ÄÍÔ}}=x\vee\bar{x}z\vee xy\bar{z}$ функциясын қалыптасқан дизъюнктивті нормальді формада жазу керек.

1. Бірінші конъюнкцияны $(y\vee\bar{y})$ және $(z\vee\bar{z})$ өрнегіне көбейтеміз:

$$x(y\vee\bar{y})=(xy\vee x\bar{y})(z\vee\bar{z})=xyz\vee xy\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee x\bar{y}\bar{z} \qquad (1)$$

2. Екінші конъюнкцияны $(y\vee\bar{y})$ өрнегіне көбейтеміз:

$$\bar{x}z(y\vee\bar{y})=\bar{x}yz\vee\bar{x}\bar{y}z \qquad (2)$$

3. Үшінші конъюнкцияда айнымалылар саны түгел болғандықтан сол күйінде қалдырамыз: $xy\bar{z}$.

4. (1), (2) және (3) өрнектерді дизъюнкция таңбасымен біріктіріп жазамыз:

$$f(x,y,z)=xyz\vee \underline{xy\bar{z}}\vee x\bar{y}z\vee x\bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}yz\vee \bar{x}\bar{y}z\vee \underline{xy\bar{z}}.$$

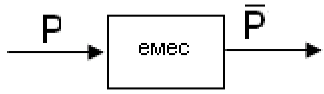
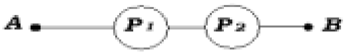
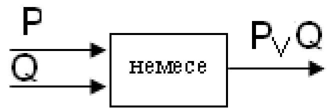
5. Асты сызылған конъюнкциялар бірдей болғандықтан тавтология заңын қолдансақ,

$$f(x,y,z)=xyz\vee xy\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee x\bar{y}z\vee x\bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}yz\vee \bar{x}\bar{y}z.$$

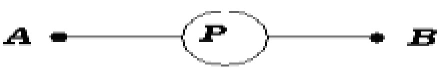
Сонымен, $f(x,y,z)=xyz\vee xy\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee x\bar{y}z\vee x\bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}yz\vee \bar{x}\bar{y}z$ - ҚДНФ.

6.5 Буль функциясының интерпретациясы

1 - кесте

<table>
<tr><td rowspan="2">Буль функция</td><td colspan="3">Буль функциясының интерпретациясы (мағынасы)</td></tr>
<tr><td>айтылымдар алгебрасы</td><td>өткізгіштің сұлбасы</td><td>электр тізбегінің сызбанұсқасы</td></tr>
<tr><td>0</td><td>ж</td><td>ашық</td><td>төменгі қысым сигналы</td></tr>
<tr><td>1</td><td>A</td><td>тұйық</td><td>жоғары қысым сигналы</td></tr>
<tr><td>$\bar{P}$</td><td>$\bar{P}$</td><td>инверсиялық контакт</td><td></td></tr>
<tr><td>PG</td><td>$P\wedge G$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$P\vee G$</td><td>$P\vee G$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Өткізгіштер сұлбасы электр тізбегіне жалғаушы өткізгіш сымдар мен электр тізбегін тұйықтау үшін қосып-ажыратқыш кілттерден тұрады. Өткізгіштер тізбектей немесе параллель жалғанады. Тізбектей жалғанған өткізгіштердің ең болмағанда біреуі жұмыс істемесе, онда бүкіл тізбек бойында ток жүрмейді. Ал тізбекті параллель жалғағанда, ток өткізгіштер бойымен тармақталады, бір тұтынушының істен шығуы, басқаларының жұмысына әсерін тигізбейді. Бір өткізгіштен тұратын сұлба берілсін.



1 - сурет.

p өткізгішіне *X* айнымалысын меншіктейік.

Өткізгіш «тұйықталған» кезде X айнымалысының қабылдайтын мәні a (1), ал өткізгіш «ашық» жағдайда X айнымалысының қабылдайтын мәні *ж* (0) болсын. Онда тізбектегі жұмыс X формуласымен өрнектеледі. Егер p_1 және p_2 екі өткізгішті тізбектей жалғасақ, онда екі өткізгіш тұйықталғанда ғана тізбек тұйық, ал ең болмағанда біреуі ашық болса, онда тізбек ашық болады.

p_1 және p_2 өткізгіштеріне сәйкес X_1 және X_2 айнымалылары a мәнін қабылдаса, онда X_1 және X_2 айнымалыларының конъюнкциясы a (1), ал ең болмағанда біреуі *ж* (0) болса, онда *ж* мәнін қабылдайды. Олай болса, $X_1 \wedge X_2$ формуласына тізбектей қосылған ток көздері сәйкес келеді.

Егер p_1 және p_2 ток көздері параллель жалғанса, онда ең болмағанда бір өткізгіш тұйықталса, онда тізбек тұйықталып, өткізгіш бойымен ток жүреді. Мұндай схемаға құрамындағы айнымалылардың ең болмағанда біреуі a(1) болғанда a, ал екеуі бірдей *ж*(0) болғанда *ж* болатын $X_1 \vee X_2$ формуласы сәйкес келеді. Егер өткізгіштер бірдей қосылып не бірдей ажыратылатын болса, онда олар *парапар* деп аталады (*идентичными*). Егер біреуі қосылғанда екіншісі ажырайтын болса, онда *инверсиялы* деп аталады. Идентивті ток көздері бірдей таңбаланады. Ал p өткізгішке инверсиялы өткізгіш $\overline{p}$ деп белгіленеді. Егер p өткізгішін X айнымалысымен белгілесек, онда $\overline{p}$ өткізгішке $\overline{X}$ формуласы сәйкес келеді. X айнымалысы a (1) мәнін қабылдаса, өткізгіш p тұйық, ал $\overline{X}$ формуласы *ж* (0) мәнін қабылдайды да өткізгіш $\overline{p}$ ашық болады немесе керісінше.

Сонымен параллель немесе тізбектей қосылған ток көздерін буль функцияларының формуласымен жазуға болады екен. Керісінше, буль функцияларының кез келген формуласын блок сұлбаларда көрсетуге болады.

Мысал**.** Конкурсқа қатысушы адамды келесі турға жіберу туралы мәселені үш адамнан тұратын (*X, Y, Z)* қазылар алқасы шешу керек. Қазылар алқасының кем дегенде екі мүшесі (біреуі міндетті түрде қазылар алқасының төрағасы) келіскен жағдайда, тек сонда ғана дұрыс шешім қабылданады.

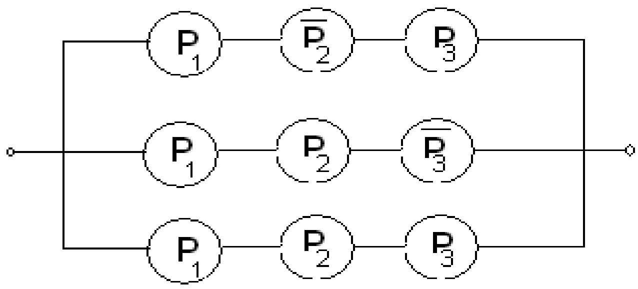
Қазылардың жұмысы F буль функциясын сипаттайды (2 - кесте).

2 - кесте

X	Y	Z	$F(X,Y,Z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Кесте бойынша *F(X, Y, Z)* буль функциясының ДҚНТ – ін құрамыз: $X\,\overline{Y}\,Z \vee XY\overline{Z} \vee XYZ$

Алынған формулаға төмендегідей схема сәйкес келеді.

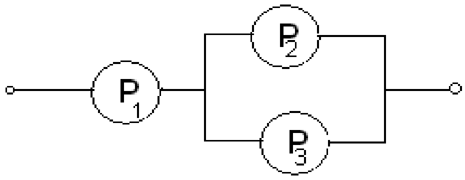


2 - сурет

Бұл схеманы қысқартуға да болады. Ол үшін алдымен функцияның ДҚНТ – сын ықшамдаймыз.

$$X\,\overline{Y}\,Z \vee XY\overline{Z} \vee XYZ \equiv X\left(\overline{Y}Z \vee Y\overline{Z} \vee YZ\right) \equiv X\left(\left(\overline{Y}Z \vee YZ\right) \vee \left(Y\overline{Z} \vee YZ\right)\right) \equiv$$
$$X\left(Z\left(Y \vee \overline{Y}\right) \vee Y\left(Z \vee \overline{Z}\right)\right) \equiv X(Z \vee Y)$$

$X(Z \vee Y)$ формуласына сәйкес құрылған схема бойынша (3 - сурет) жасалатын жұмыс $X\overline{Y}Z \vee XY\overline{Z} \vee XYZ$ формуласына сәйкес схема (2 - сурет) бойынша жасалатын жұмыспен бірдей.



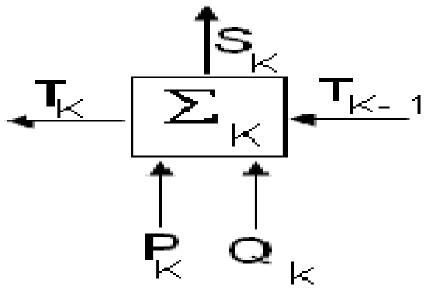
3 - сурет

6.6 Екілік қосқыш

Есептеуіш машинасының негізгі арифметикалық құрылысы екілік қосқыштан тұрады. Екілік қосқыш – көпмәнді екілік сандарды қосуды орындайды. Ол бір разрядты екілік қосқыштардың қосылысынан құралған, олардың әрқайсысы бір разрядтағы қосуды және жоғары разрядқа көшіруді орындайды.

Бір разрядты қосқыштың құрылысы үш енгізу P_k, G_k, T_{k-1} және екі шығару S_k, T_k тетіктерінен тұрады. P_k, G_k енгізу тетіктері арқылы берілген разрядтағы қосылғыштарды – екілік сандарды, ал T_{k-1} енгізу тетігінде кіші k-1 разрядтан көшірілген екілік санды қабылдайды, S_k – да қосқыш берілген разрядтағы қосындыны, ал T_k – да $k+1$ – ші разрядқа көшіреді. (4 - сурет).

P_k, G_k, T_{k-1} енгізу тетіктерін ықшамдап *P, G, R* , ал S_k, T_k шығару тетіктерін *S, T* айнымалыларымен белгілейік. *P, G, R* айнымалылары тек қана 0 және 1 сандарын қабылдай алады, олай болса *T* мен *S* – буль функциялары.



4 - сурет. Бір разрядты қосқыштың сұлбасы

T(P, G, R), S(P, G, R) буль функцияларын екілік жүйеде төмендегідей кестемен беруге болады.

3 - кесте

Енгізу			Шығару	
P	*G*	*R*	*T*	*S*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

T және S функциялары үшін Д.Қ.Н.Т табамыз:

$$T \equiv \overline{P}GR \vee P\overline{G}R \vee PG\overline{R} \vee PGR;$$

$$S \equiv \overline{P}\overline{G}R \vee \overline{P}G\overline{R} \vee P\overline{G}\overline{R} \vee PGR.$$

$$T \equiv \overline{P}GR \vee P\overline{G}R \vee PG\overline{R} \vee PGR \equiv PGR \vee PGR \vee PGR \vee \overline{P}GR \vee P\overline{G}R \vee PG\overline{R}$$

$$\equiv \left(PGR \vee \overline{P}GR\right) \vee \left(PGR \vee P\overline{G}R\right) \vee \left(PGR \vee PG\overline{R}\right) \equiv GR\left(P \vee \overline{P}\right) \vee$$

$$PR\left(G \vee \overline{G}\right) \vee PG\left(R \vee \overline{R}\right) \equiv GR \vee PR \vee PG \equiv PG \vee PR \vee GR$$

$$\underline{S \equiv \overline{P}\overline{G}R \vee \overline{P}G\overline{R} \vee P\overline{G}\overline{R} \vee PGR} \equiv PGR \vee P\overline{G}\overline{R} \vee \overline{P}G\overline{R} \vee \overline{P}\overline{G}R \equiv$$

$$PGR \vee \left(\overline{P} \vee G \vee R\right)\left(P \vee \overline{G} \vee R\right)\left(P \vee G \vee \overline{R}\right)$$

Терістеу амалымен тұрған соңғы формуланы түрлендіреміз:

$$PGR \vee (\overline{P} \vee G \vee R)(P \vee \overline{G} \vee R)(P \vee G \vee \overline{R}) \equiv \overline{P}\,PP \vee \overline{P}\,PG \vee \overline{P}\,P\,\overline{R} \vee \overline{P}\,\overline{G}\,P \vee \overline{P}\,\overline{G}\,G$$

$$\vee \overline{P}\,\overline{G}\,\overline{R} \vee \overline{P}\,RP \vee \overline{P}\,RG \vee \overline{P}\,R\overline{R} \vee GPP \vee GPG \vee GP\overline{R} \vee G\overline{G}\,P \vee G\overline{G}\,G \vee G\overline{G}\,\overline{R} \vee$$

$$GRP \vee GPG \vee GR\overline{R} \vee RPP \vee RPG \vee RP\overline{R} \vee R\overline{G}\,P \vee R\overline{G}\,G \vee R\overline{G}\,\overline{R} \vee RRP \vee RRG \vee R$$

$$R\overline{R} \equiv \overline{P}\,\overline{G}\,\overline{R} \vee \overline{P}\,GR \vee PG \vee PG \vee PG\overline{R} \vee PGR \vee$$

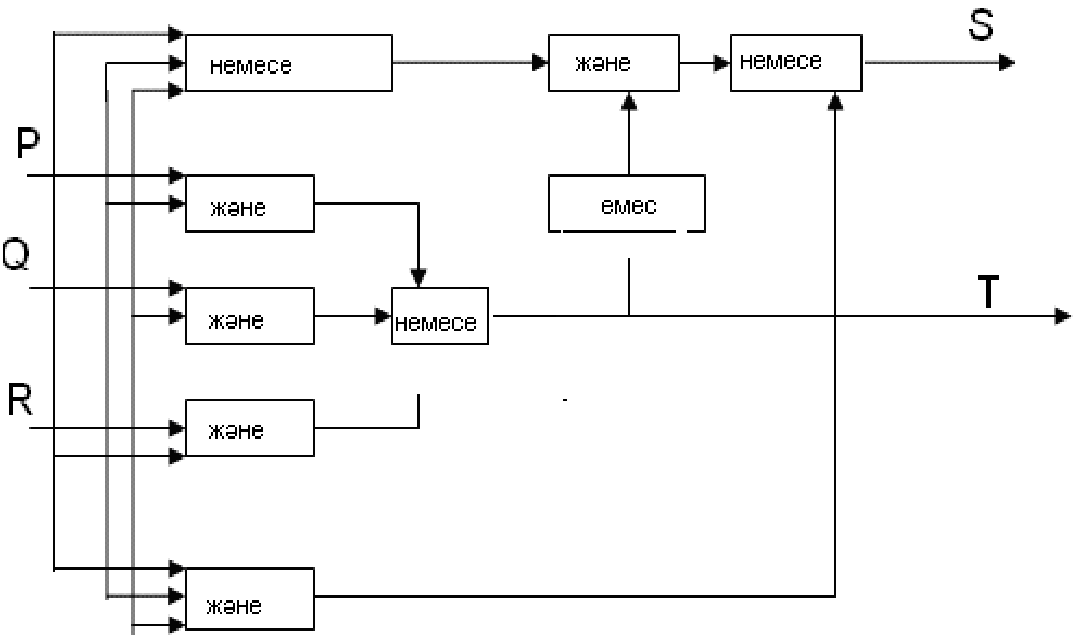
$$GR \vee PR \vee PGR \vee P\overline{G}\,R \vee PR \vee GR \equiv (PG \vee PR \vee GR) \vee$$

$(PGR\vee \overline{P}GR\vee P\overline{G}R\vee PG\overline{R})\vee \overline{P}\,\overline{G}\,\overline{R}\equiv T\vee T\vee \overline{P}\,\overline{G}\,\overline{R}\equiv T\vee \overline{P}\,\overline{G}\,\overline{R}$.

Бұдан S : $S=PGR\vee \overline{\mathrm{T}\vee \overline{\mathrm{P}}\,\overline{\mathrm{G}}\,\overline{\mathrm{R}}}\equiv PGR\vee \overline{T}(P\vee G\vee R)$.

Олай болса $T\equiv PG\vee PR\vee GR$, $S=PGR\vee \overline{T}(P\vee G\vee R)$.

Бұл формула бойынша екілік қосқыштың төмендегідей сұлбасын алуға болады:



5 - сурет.

YII тарау. Графтар теориясының элементтері
7.1 Графтар теориясының кейбір есептері

Графтар теориясы – графтың қасиеттерін зерттейтін дискретті математиканың бір бөлімі**.** *Граф дегеніміз* **-** белгілі бір жиынның элементтерінен (нүктелерден) және оларды қосатын стрелкалардан (бағытталған сызықтардан) тұратын ерекше сызба. Берілген нүктелер графтың *төбелері*, ал оларды қосатын стрелкалар графтың *қабырғалары* деп аталады. Графтар арқылы көптеген жағдайлардың моделін құруға болады.

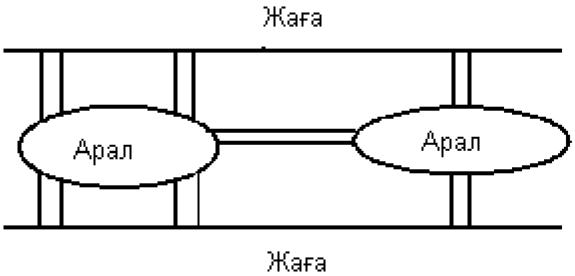
Мысалы, адамдар арсындағы байланыстарды (достық, таныстық, туыстық, көршілік т. с. с), қалалар арасындағы байланыстар (қала – графтың төбесі, оларды байланыстырып тұрған жолдар – граф қабырғалары), байланыс құралдарының арасындағы т. с. с байланыстарды графтардың көмегімен қарастыруға болады.

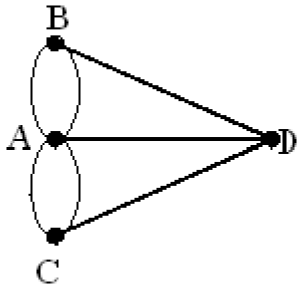
Графтар теориясының алғашқы есептерінің бірі 1736 жылы Швейцария математигі Эйлердің шешкен есебі болатын.(көпірлер туралы)

Графтар теориясының дамуына ықпалын тигізген келесі есеп 1852 жылдан бері шешімі табылмай келген «төрт түрлі бояу» туралы еді. Бұл есептің толық жауабын 1976 жылы американдық математиктер тапты. Жалпы графтар теориясын қолдана отырып шешілетін есептерді былайша топтауға болады:

1. Көпір туралы есеп
2. «Бояулар» туралы есеп
3. Логикалық есептер.

Мысал 1.(көпірлер туралы есеп) Екі арал өзен жағасымен және өзара 7 көпірмен байланысқан. Осы құрылықтың біреуінен шығып, әр көпірді бір-ақ рет жүріп өтетін жолды табу керек. Бұл есепті шешу үшін Эйлер құрылықтарды (сумен бөлініп жатқан, өз ара тек көпірлермен байланысқан участоктер) А, В, С, Д деп белгілеп, ал оларды жалғап тұрған көпірлерді сызықтармен кескіндеген. Сонда төмендегідей сызба алған.



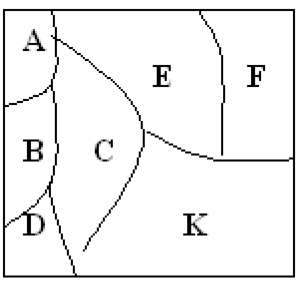


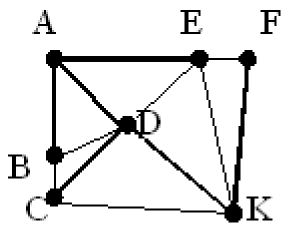
Бұл алынған сызба *граф* деп аталады. А, В, С, Д графтың төбелері, ал оларды жалғастырып тұрған сызықтар графтың қабырғалары.

Эйлер бұл есепті талдай келе, жалпы осы тектес есептердің шешімінің бар болуы туралы критерий тапты. Алдымен көпірлер санын анықтады.

А участогіне 5 көпір, ал қалғандарына 3 көпір апарады. Содан кейін мынадай ережені қолданды: егер әрбір участокке апаратын көпірлер саны жұп болса, онда әрбір көпірден бір-ақ рет, есептің шартында айтылғандай жүріп өтуге болады. (кез келген участоктен бастап) Мұның өзі жоғарыдағы есептің шешімі жоқ екендігін көрсетеді.

Мысал 2. Географиялық карта бетінде әрбір елдің шекарасы кем дегенде 4 түрлі бояумен сырланатынын дәлелдеп көрейік. (ортақ шекаралары бар елдер) Егер әрбір елді граф төбесі деп белгілеп, ортақ шекарасы бар екі елдің төбесін қоссақ граф қабырғасын аламыз.





Графтың бұл түрі *жазық* граф деп аталады.

Сонда, елдерді бояу – граф төбелерін бояу, ал ортақ шекараларын бояу – граф қабырғаларын бояу деген сөз.(олар әртүрлі түспен боялуы тиіс)

Бұл мысалдардан граф дегеніміз әртүрлі жағдайларды модельдеу үшін қажетті құрал екендігін көреміз.

Эйлерлік есептерге ұқсас тұжырымдалған логикалық есептер көбінесе графтар арқылы, осы принципке негізделіп шешіледі.

Мысал 3. Өзеннің ортасында көпірлер арқылы байланысқан 7 арал орналасқан. Әрбір көпірден бір – ақ рет өту үшін катер саяхатшыларды қай аралға жеткізу керек? Неліктен саяхатшыларды А аралына жеткізуге болмайды?

Шешуі. Кенигсберг көпірі туралы есепке ұқсас болғандықтан Эйлер ережесін қолданыламыз. Әрбір көпірден бір-ақ рет жүріп өту үшін катер саяхатшыларды Е немесе F аралына жеткізуі тиіс. Егер А аралынан бастаса есептің шартында айтылғандай жүріс болмайды.

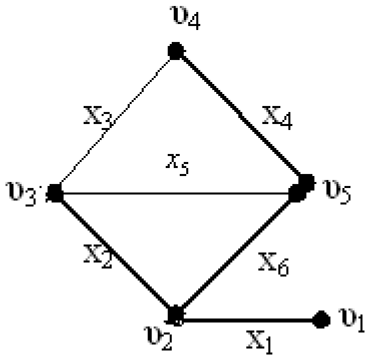
7.2 Графтар теориясының негізгі ұғымдары

Анықтама 1. Белгілі бір жиынның элементтерінен (нүктелерден) және оларды қосатын стрелкалардан (бағытталған сызықтардан) тұратын ерекше сызба *граф* деп аталады. Берілген нүктелер графтың *төбелері*, ал оларды қосатын стрелкалар графтың *қабырғалары* деп аталады. Граф қабырғалары *жол* деп те аталады.

Анықтама 2. (*V, X*) жиындар парын граф деп атайды.Мұндағы *V*-төбелер жиыны, ал *X*-қабырғалар жиыны. Белгіленуі: G(*V, X*)

Төбелер саны p, қабырғалар саны q әрпімен таңбаланады.

Анықтама 3. Көршілес төбелердің тізбегі графтағы маршрут деп аталады. Маршрутты қабырғалардың тізбегі түрінде де анықтауға болады (қабырға маршруттың бағытын көрсетеді). Маршрутта төбелердің қайталануы мүмкін, бірақ қабырға қайталанбайды.



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$
$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$\tilde{o}_1$ - қабырғасы v_1 және v_2 төбелерін қосады.

v_1, v_2 төбелері *сыбайлас,* v_1төбесі x_1 қабырғасына *инциденттi* деп аталады.

Анықтама 4. Кез-келген төбелер жұбы қабырғалармен байланысқан граф *толық* граф деп аталады. Ал ешқандай қабырғасы жоқ граф *бос* немесе *ноль* граф деп аталады.

Мысал. Құрылықтағы бірнеше елді мекендердің әрқайсысынан шығатын

2 машина жолы, 3 жаяулар жолы бар. Әрбір жол қандай да бір елді мекенге әкеледі. Кез-келген екі ел әйтеуір бір жолмен байланысқан. Елді мекендер саны қанша?

Шешуі: Граф тұрғызамыз. Әрбір елді мекен граф төбесі болады. Олардан шығатын жолдар граф қабырғаларын көрсетеді. Граф толық, себебі, графтың әрбір екі төбесі өзара байланысты және әр төбеден 5 қабырға шығып тұр. Олай болса, төбелер саны немесе елді мекендер саны 6.

Графтар кейде кесте арқылы беріледі. Кестенің бағандары мен жолдарына графтың төбелері сәйкес келеді. Егер төбелер қабырғалармен байланысқан болса (сыбайлас болса), онда сәйкес жол мен бағанға 1 қойылады, керісінше жағдайда – 0. Сонда негізгі диагоналы 0 – ден құралған (төбе өзіне сыбайлас емес деп есептеледі) және негізгі диагоналға қарағанда симметриялы матрица шығады.

$$(G)= \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline v_5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Анықтама 5. (a, a) пар ***тұзақ*** делінеді, егер X жиынтығында ***(a, b)*** пары бірнеше рет кездессе, оны ***еселі қыр(доға)*** деп айтады.

Анықтама 6. Бұдан былай тұзақсыз және еселі қырларсыз графты

бағытталмаған(немесе жайғана граф), тұзақсыз графты ***мультиграф***, ал тұзақтар кездесетін мультиграфты ***псевдограф*** дейміз.

Анықтама 7. v_i төбесіне инциденттi G граф қабырғалар саны v_i төбесінің *дәрежесі* деп аталады. (төбелер жатқан қабырғалар саны)

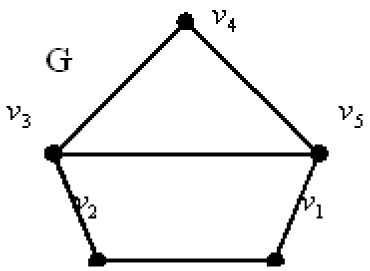
Белгіленуі: deg v – v төбесінің дәрежесі.

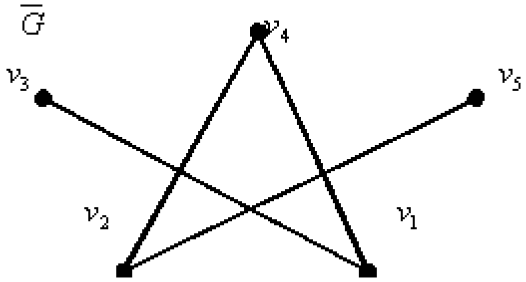
Дәрежесі 0-ге тең төбе *оңаша* төбе деп, ал дәрежесі 1-ге тең төбе *тұйықталған* төбе деп аталады.

Анықтама 8. Барлық k төбесінің дәрежелері бірдей болып келген граф

k дәрежелі біртекті граф деп аталады.

Анықтама 9. Берілген графты толық графқа дейін толықтыратын граф *толықтауыш граф* деп аталады.





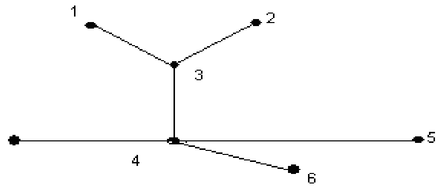
$\overline{G}(V, \overline{X})$-толықтауыш граф.

Анықтама 10. Қабырғалары тек төбелерінде қиылысатын граф *жазық граф* деп аталады. Мысалы, графтың *АС* және *ВД* қабырғалары қиылысады, бірақ қиылысу нүктесі төбе болмауы мүмкін.

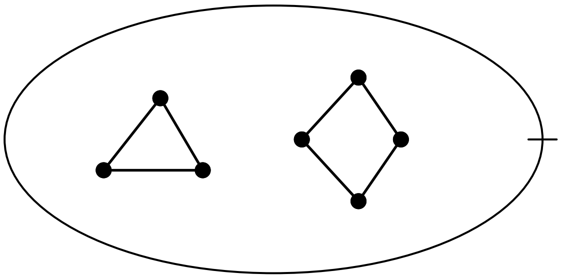
Анықтама 11. Ішкі бетінде ешқандай төбе немесе қабырға жоқ көпбұрыш жазық графтың *жағы* деп аталады.

Жазық граф және графтың жақтары ұғымдары « картаны бояу» сияқты есептерде қолданылады.

Анықтама 12. Циклсіз (топтамасыз) байланысқан граф *ағаш* деп аталады.



Анықтама 13. Төбелер жұбы байланысқан графты *байланысты* граф деп атайды. (Егер *V* және *U* төбелерін қосатын жол бар болса, онда *V* және *U* төбелері байланысқан деп аталады). Керісінше, кез келген төбелер жұбы байланыссыз болып келсе, онда *байланыссыз граф* деп аталады.

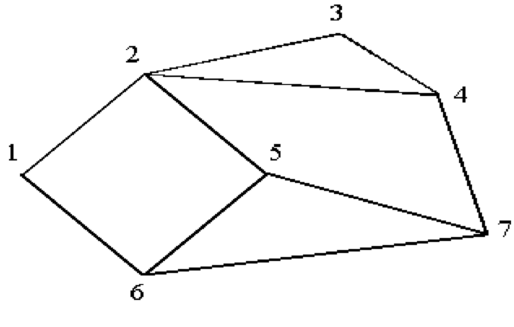


G – байланыссыз граф, екі байланысты графтан құралып тұр. Олай болса, G графтың байланыс компоненті 2-ге тең.

Анықтама 14. Байланыссыз графтың байланысты болып келген ішкі графтарының саны *байланыс компоненті* деп аталады.

Анықтама 15. Әрбір байланыс компоненті ағаш болып келген граф *орман* еп аталады.

Анықтама 16. Кезектесе орналасқан G граф төбелері мен қабырғаларынан құралған $\vartheta_0 x_1 \vartheta_1 x_2 ... x_n \vartheta_n$ тізбегі *жол* деп аталады. (міндетті түрде төбеден басталып, төбемен аяқталады)



Суреттегі 1–2–3–4–2–5 тізбегі маршрут (жай ғана жол емес), ал 1–2–3–4–7–5 және 1–2–5 тізбегі – жол (маршруттар); 1–2–3–4–2–5–6–1 – цикл (бірақ контур

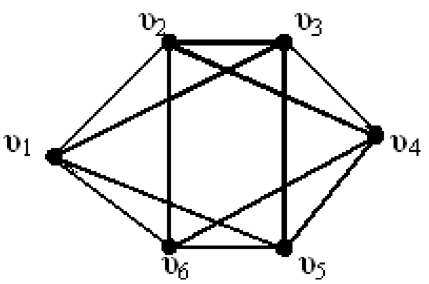
емес);1–2–5–6–1-контур.
Ескерту: Жолда қайталанатын төбелер және қабырғалар болуы мүмкін.

Анықтама 17. Қайталанатын қабырғалары жоқ жолды *тізбе* деп, ал тұйық жолды *цикл* деп атайды.($\vartheta_1 x_8 \vartheta_6 x_4 \vartheta_3 x_3 \vartheta_5 x_7 \vartheta_6$-тізбе)

Анықтама 18. Циклдегі қабырғалар саны *жолдың ұзындығы* деп аталады.

Анықтама 19. Қайталанатын төбесі жоқ тізбені *жай тізбе* деп, ал тек қана бастапқы және соңғы төбесі беттесетін циклді *жай цикл* деп атайды.
($\vartheta_3 x_3 \vartheta_5 x_5 \vartheta_4 x_6 \vartheta_6 x_4 \vartheta_3$-жай цикл)

Анықтама 20. Қабырғалары қайталанбайтын цикл *Эйлер циклі* деп аталады. Ал Эйлер циклінен тұратын граф *Эйлер графы* деп аталады.

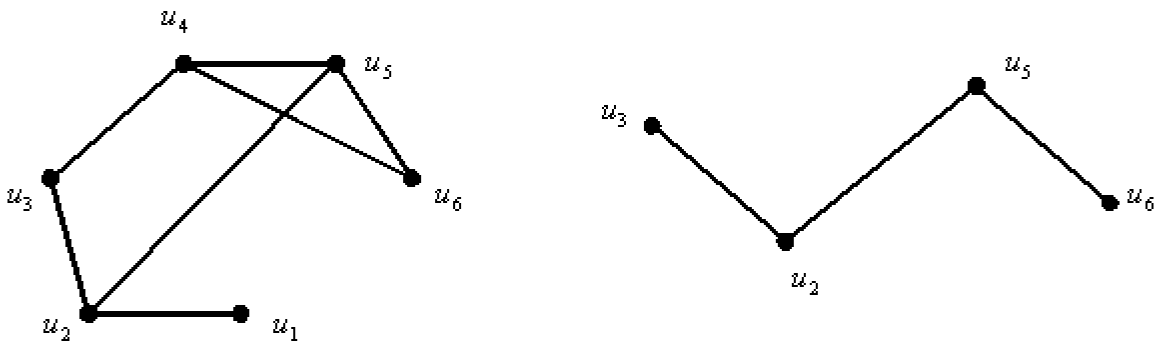


Эйлер циклі: G →
$$\vartheta_1 \to \vartheta_3 \to \vartheta_5 \to \vartheta_1 \to \vartheta_2 \to \vartheta_6 \to \vartheta_4 \to \vartheta_2 \to \vartheta_3 \to \vartheta_4 \to \vartheta_5 \to \vartheta_6 \to \vartheta_1$$

Анықтама 21. Сыбайластық қатынасты сақтай отырып , U граф төбелерінің жиынын V граф төбелерінің жиынына бейнелейтін бірмәнді f сәйкестігі болатын болса, онда графтар «*изоморфты*» деп аталады.

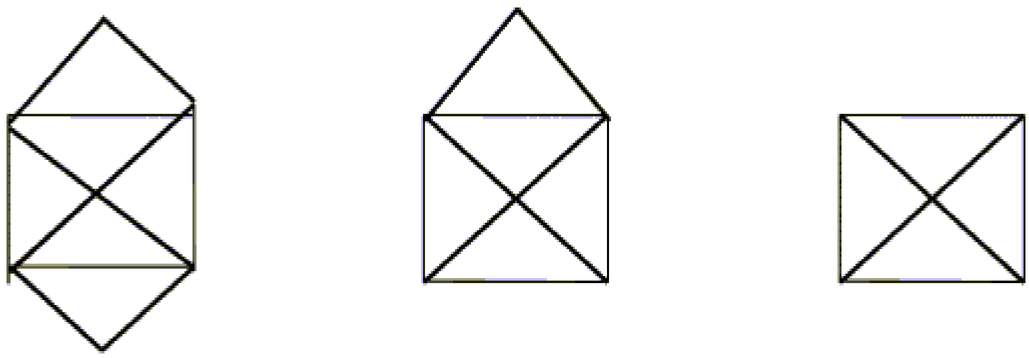
$$f : \begin{pmatrix} v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 \\ u_1 u_3 u_5 u_4 u_2 \end{pmatrix}.$$

Анықтама 22. Егер $G_1(V_1, X_1)$ графтың V_1 төбелер жиыны *G(V, X)* графтың V төбелер жиынының ішкі жиыны болса, онда $G_1(V_1, X_1)$ графы *G(V,X)* графының *ішкі графы* деп аталады.



Төмендегі суретте: а) эйлерлік граф, б) – жартылай эйлерлік граф, в) - эйлерлік граф та емес, жартылай эйлерлік граф та емес .

а) б) в)



7.3 Графтар теориясының негізгі теоремалары

Теорема 4.1 Кез келген графтың төбелерінің дәрежесінің қосындысы жұп сан болады.

Дәлелдеу. $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ – берілген графтың төбелері, ал $p(A_1), p(A_2), ..., p(A_n)$ – төбелердің дәрежесі болсын. Графтың төбелерінің дәрежесінің қосындысын анықтағанда әрбір қабырға 2 рет есептелінеді. Олай болса, граф төбелерінің дәрежесінің қосындысы 2 еселенген қабырғалар санына тең.

$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$, мұндағы q – қабырғалар саны, p – төбелер саны.

Теорема 4.2 Кез келген графта тақ дәрежелі төбелердің саны жұп болады.

Дәлелдеу. 4.1 теорема бойынша $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$. Бұл теңдеудің екі жағынан да жұп дәрежелері төбелердің санын шегереміз, сонда қалған тақ дәрежелі төбелердің қосындысы жұп болады (екі жұп санның айырмасы жұп сан).

Ал тақ сандардың қосындысы жұп болады тек сонда ғана, егер қосылғыштардың саны, дәлірек айтқанда, тақ дәрежелі төбелердің саны жұп болса. Дәлелдейтініміз де осы еді.

Салдар 1. Жер бетіндегі адамдардың қол алысып амандасу саны барлық уақытта жұп болады.

Салдар 2. Кез келген ұйымдағы тақ санды таныстардың саны әрқашанда жұп болады.

Теорема 4.3 Барлық n төбеден тұратын ($n \geq 2$) графта әрқашанда бірдей дәрежелі екі немесе одан да көп төбе табылады.

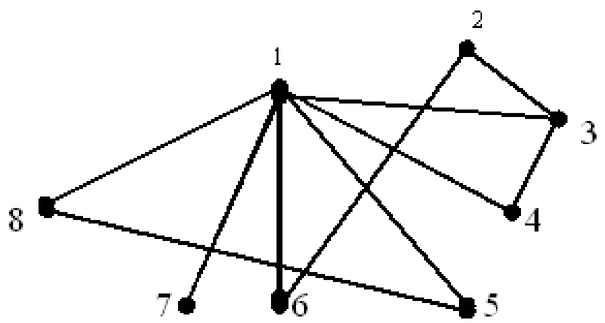
Дәлелдеу. Графта n төбе және олардың әрқайсысы 0, 1, 2, ... (n–1) дәрежелі, яғни дәрежелері әртүрлі болсын. Егер p(A)=0 болса (A төбесінің дәрежесі 0 – ге тең), онда A – оңашаланған төбе болады да, ол ешқандай төбемен байланыспайды. Сондықтан да дәрежесі p(X)= n–1 болатындай X төбесі табылмайды. Шынында да бұл төбе n–1 төбемен, соның ішінде A төбесімен де байланысқан болуы керек. Ал бізде A – оңашаланған төбе. Олай болса, n төбесі бар графта бір мезгілде 0 және (n–1) – дәрежелі төбелер болуы мүмкін емес.

Бұл – графта бірдей дәрежелі 2 төбе табылады деген сөз.

Теорема 4.4 *p* – төбе, *q* – қабырғадан тұратын G графы үшін төмендегідей тұжырымдар эквивалентті:

1. G – ағаш;
2. G – байланысқан граф;
3. $q= p–1$;
4. G – циклсіз;
5. Бір қабырғаны қосу арқылы циклді графқа айналдыруға болады;
6. Кез келген қабырғасын алып тастап, 2 компонентті байланысқан граф алуға болады.
7. G – кез келген төбесі жалғыз ғана тізбемен байланыққан граф;
8. G – циклсіз граф.

Бұл теореманы дәлелдеу үшін осы қасиеттерді көрсететін графты қарастырсақ жетіп жатыр:



Теорема 4.5 Егер төбесі *p*– ға тең орманның *p– к* қабырғасы болса,онда ормандағы ағаштар саны *к*–ға тең. (өз бетімен дәлелдеу)

Теорема 4.6 G – Эйлерлік граф болуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті: 1) байланысқан граф болуы керек;

2) барлық төбелерінің дәрежесі жұп болуы керек.

Дәлелдеу. <u>Қажеттілік шарты:</u> 1) Эйлер циклі граф төбелерін толықтай қамтитын болғандықтан байланысқан граф болатындығы түсінікті.

2) бір төбеден шығатын қабырғалар саны жұп, яғни кез келген төбесінің дәрежесі жұп.

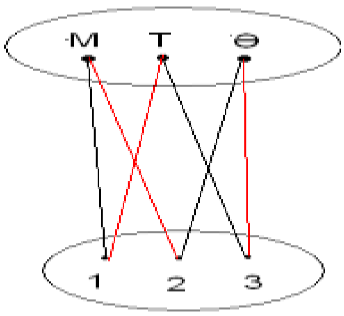
Жеткілікті шарты: Граф байланысқан болғандықтан және әрбір төбесінің дәрежесі жұп болғандықтан графтың барлық төбелерін қамтитын цикл табылады.

Бұл теоремалардың қолданулары тәжірибелік сабақтарда қарастырылады.

7.4 Логигалық есептерді граф арқылы шешу

Логикалық есептер граф арқылы да шешіледі.

1 - есеп: Дүйсенбі күнгі сабақ кестесін құру кезінде үш мұғалім мынадай өтініш айтты: 1) математика бірінші не екінші, 2) тарих бірінші не үшінші, 3) әдебиет екінші не үшінші болсын. Қанша тәсілмен мұғалім өтінішін орындауға болады?



1 - сурет

Шешуі: Математика, тарих, әдебиеттің бас әріптерінен бір жиын сабақтардың 1,2,3 –деген ретінен екінші жиын құралық (1-сурет))

Математиканы 1-сабаққа (онда ол 2-бола алмайды) қойсақ, онда тарих тек үшінші ғана болады, тарих 1-қойылмайды, онда әдебиет 2- сабаққа қойылған болады, ол 3- сабаққа қойылмайды. Сонымен математика - бірінші, әдебиет - екінші, тарих - үшінші болады.

Теңдеуді граф арқылы шешу, яғни бұл бағытталған граф болып табылады.

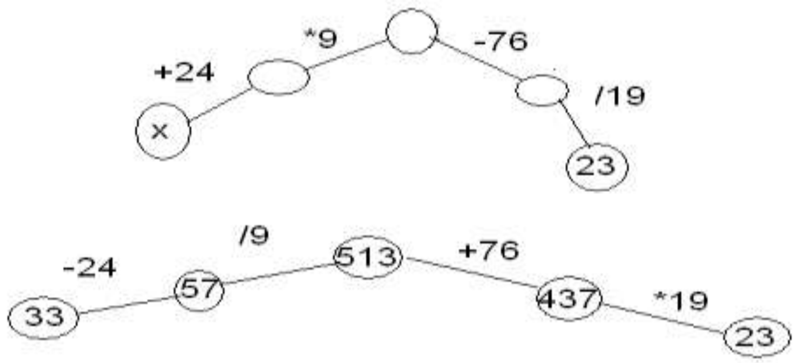
2 - есеп: Мен бір сан ойладым. Сол санға 24 қоссақ, одан шыққан санды 9-ға көбей-тсек, сосын 76- ны алсақ, ендігі шыққан санды 19- ға бөлсек, онда 23 шығады.Ойлаған санды табайық.

$$((x + 24)*9-76)/19=23$$
$$9x+140=437$$
$$9x=297$$
$$x=33$$

Графты құрайық. Енді осы сандарды керісінше амалмен шығарайық (2-сурет).

23*19 =437 437+76=513 513/9=57 57-24=33.

Сонымен ойлаған санды таптық - 33.



2 – сурет

3 - есеп: Серік, Ернар, Талғат және Бекарыс қайық сатып алды, олар осы қайықпен төрт апта қыдырды (әрқайсысы бір аптадан.) Мыналар белгілі:

1) Егер екінші аптада қайықпен Серік немесе Бекарыс қыдырса, онда Талғат бірінші аптада қыдырды.

2) Егер Бекарыс қайықпен ең соңғы аптада қыдырса, онда Талғат үшінші аптада, ал Серік бірінші болып қыдырды.

3) Егер Талғат екінші болып немесе Бекарыс үшінші болып қыдырса, онда Ернар соңғы аптада қыдырды.

4) Егер Серік үшінші аптада қыдырса, онда Ернар –екіншіде, және керісінше.

5) Егер Бекарыс бірінші аптада қыдырса, онда Талғат- үшіншіде.

6) Егер Бекарыс үшінші аптада қыдырса, онда Серік екінші аптада қыдырды.

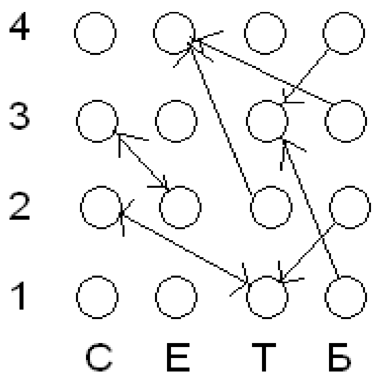
Шешуі: Егер есептің шартын жиынның элементтері мен олардың арасындағы логикалық байланыстар арқылы өрнектесек, онда мұндай жиын берілген есеп үшін базистік жиын деп аталады. Біздің есебімізде бұл жиын «*X* қайықпен n апта қыдырды» типтегі 10 сөйлемнен тұрады, мұндағы $X \in \{C, E, T, Á\}$, n ={1,2,3,4}(3-сурет).

Енді осы (*x, n*) жиынының арасындағы конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция операцияларын сәйкес ˄,˅,→ , символдарымен белгілейік. Есептің берілгенін символдық түрде жазайық.

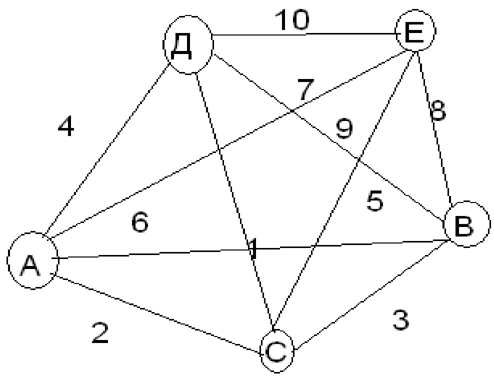
1) ((С, 2) ˅ (Б,2))→(Т,1)
2) (Б,4)→ ((Т,3) ˄(С,1))
3) ((Т,2)˅ (Б,3))→ (Е,4)
4) (С,3),(Е,2)
5) (Б,1)→(Т,3)
6) (Б,3)→(С,2)

1)- 4) сөйлемдерді жай импликация түріне келтіріп, есептің шартын 10 импликацияның көмегімен былай жазуға болады.

(С,2)→ (Т,1), (Б,2) → (Т,2), (Б,4)→ (Т,3), (Б,4)→ (С,1), (Т,2)→ (Е,4),
(Б,3)→ (Е,4), (С,3) →(Е,2), (Е,2)→ (С,3), (Б,1)→ (Т,3), (Б,3)→ (С,2)



3 - сурет



4 - сурет

4 - есеп: Бірнеше ұл балалар вокзалдың алдында кездесті. Олар бір-бірімен қол ұстасып амандасты. Егер 10 қол амандасып ұстасса, онда қанша ұл бала қалаға кетті?

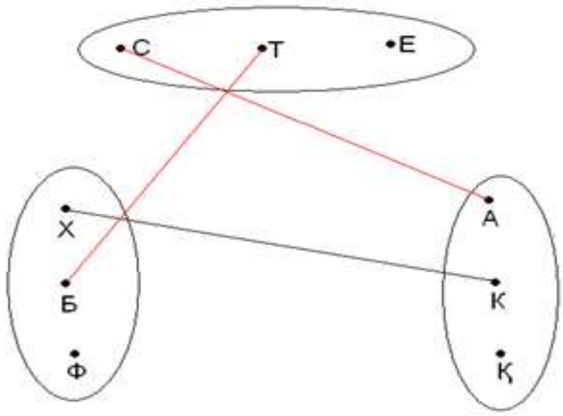
Шешуі: Есепті граф арқылы шешеміз. Ең алдымен қағазға екі нүкте белгілейміз. А мен В және оларды қосамыз. Нүктелерді балалар деп, ал кесіндіні балалардың қол ұстасқаны деп есептейік. Тағы бір С нүктесін алып, оны А және В нүктелерімен қосамыз. Оларға тағы бір Д нүктесін қосамыз. Бесінші нүктені Е деп белгілеп, А,В,С,Д нүктелерімен қосамыз. Сонда 10 кесінді шықты. Яғни вокзалда 5 ұл бала кездесіп, қол ұстасып амандасты. (4-суретте)

5 - есеп: Үш дос- Серік, Талғат, Ернар әр түрлі үш пәннен (химия, биология, физика) Алматының, Қарағандының, Көкшетаудың мектептерінде сабақ береді. Егер мына мәліметтер белгілі болса: 1) Серік Алматыда істемейді, ал Талғат Қарағандыда тұрмайды; 2) Алматылық физикадан сабақ бермейді;

3) Қарағандыда тұратын мұғалім химиядан сабақ береді; 4) Талғат биологиядан сабақ бермейді. Әр мұғалім қай қалада тұрады, қандай пәннен сабақ береді?

Шешуі: Үш жиын алып, олардан үштен нүкте қарастырамыз. Оларды адамдар аттарының бас әріптері, пәндер мен қалалардың аттарының бірінші әріптерімен белгілейміз. Әр түрлі жиыннан алынған нүктелер бір ғана адамның қасиеттерін бейнелей алса, онда ол нүктелерді тұтас (үзіксіз) сызықтармен қосамыз, егер олар әр түрлі адамның белгілерін білдірсе, үзік сызықтармен (штрихтармен) қосамыз. Үзік-қызыл, ал тұтас – қара түспен сызамыз. (Есептің берілгендері 5 –суретте)

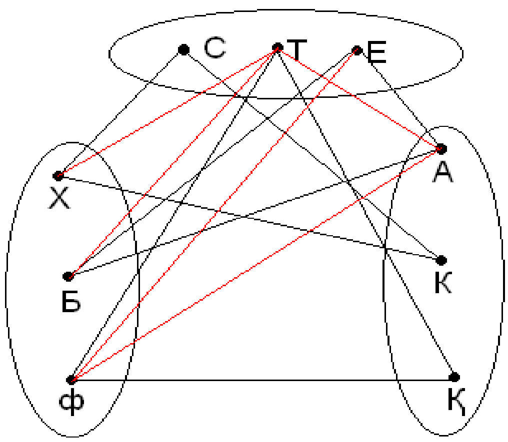
Граф арқылы осы есепке ұқсас есепті шешкенде мынадай ережелерді пайдаланамыз: 1) Үш төбесі үш жиында жатқан үщбұрыштың бір қабырғасы тұтас (қара) сызықпен, екіншісі үзік(қызыл) сызықпен сызылса, онда үшінші қабырғасы үзік (қызыл) сызықпен сызылады; 2) Жиыннның бір нүктесінен 2-жиындағы 2-нүктеге үзік (қызыл) сызық жүргізілсе, онда үшіншісіне тұтас (қара) сызық жүргізіледі; 3) Егер төбелері әр түрлі жиында жатқан үшбұрыштың екі қабырғасы тұтас (қара) сызықпен сызылса, онда үшіншісі де тұтас (қара) сызықпен қосылады.



5 – сурет

Бұл есеп граф тілінде төбелері үш жиында жатқан, қабырғалары тұтас сызықтармен қосылған үш үшбұрышты салуға келтіріледі. ХТ- сәйкес келмейді, Х мен Т-ны қызыл сызықпен қосамыз, ол КХ сәйкес келеді (Көкшетауда тұратын мұғалім химиядан береді), Т мен К сәйкес келмейді – ТК, сондықтан Т мен Х сәйкес келмейді (6-суретте).

Ережеге сүйеніп Ф мен Т-ны тұтас сызықпен қосамыз (ФТ). АТ- үзік сызықпен сызылады, себебі ТФА үшбұршында ТФ –тұтас, ФА- үзік сызықтармен сызылады. ТҚ тұтас сызықпен қосылады, себебі ТА, ТК- үзік сызықтар. ФҚ- тұтас сызық. Олай болса, ТФҚ-үшбұрышының қабырғалары тұтас сызық болады.



6 – сурет

АЕ,СК,ХС, БА, БЕ-тұтас сызықтарын жүргіземіз. Сонда ТФҚ, КХС және ЕАБ- үшбұрышының төбелеріндегі элементтер сәйкес келіп,есептің сұрағына жауап береді, яғни Ернар - биолог Алматыда тұрады; Серік - Көкшетауда тұрып, химиядан сабақ береді; Талғат Қарағандыда тұрады, физикадан сабақ береді.

ҮІІІ тарау. Құпиялау теориясының элементтері

8.1 Ақпаратты құпиялау

Негізінде құпиялау термині ақпаратты сақтауға, өңдеуге, тасымалдауға тиімді басқа түрдегі пішіндер түрінде түсіндіріледі.

Көптеген африкалық тайпалар бүгінгі күнге дейін бір-бірімен ақпарат алмасу үшін там-там барабандарын қолданылады. Ал теңіз флоттарында ақпарат алмасу үшін семафор әліппесі (сигнал беруші жалауша арқылы қолдарының қимылдарымен әріптерді көрсетеді) қолданылады. Берілген сигналдар қабылданып және түсінікті болуы үшін оларды алдын ала келісіп отырған. Ақпарат және оны жіберу тәсілімен басқа тағы да бір компонент пайда болды. Ол *ақпаратты түрлендіру немесе кодтау.*

Ақпаратты анықталған түрде пішіндеу процесі *құпиялау* **(***кодтау)* деп аталады.

Ақпараттарды кері түрлендіру *құпияны ашу* **(***декодтау)* деп аталады. Мәтінді кодтауда қолданылатын символдардың толық жинағы *алфавит* деп аталады. Кодтау тәсілі мақсатында байланысты жазуды қысқарту, ақпаратты құпияландыру, өңдеуге ыңғайландыру болып келеді, көбінесе ағылшын орыс тілдеріндегі мәтіндер кодталады.

Мәтіндерді құпиялаудың үш тәсілі бар:

1. Графикалық-арнаулы белгілер суреттер көмегімен.
2. Сандық-сандар көмегімен.
3. Символдық-негізгі мәтін жазылған алфавиттегі символдар көмегімен.

Әрбір ақпаратты жадыға сақтау үшін оны құпиялау (кодтау) қажет. Біз дәптерге бір нәрсе жазып алсақ та, оны шын мәнінде арнайы символдармен кодтап отырмыз.Бұл символдар әрбір адамға мәлім – әріптер.

Сол сияқты дыбыстарды да құпиялауға болады. Құпиялаудың бұл түрі мелодияларды ноталар арқылы жазу.

Текстік және дыбыстық ақпараттармен қатар суреттер де компьютер жадында кодтар арқылы сақталады. Егер суретті үлкейтіп қарайтын болсақ, онда суреттің кушкентай нүктелерден жасалғанын көруге болады. Оларды растрлар деп атайды. Әрбір нүкте координаталары сан түрінде сақталып отырады. Бұл сурет нүктелерінің координаталарын компьютер кодтап, жадында сақтайды.

Ал телеграф әліппесінде кодтаудың түрі мүлдем басқаша. Олар әріпті нүкте мен сызықшалар арқылы құпиялайды. Оны Морзе коды деп атайды. Морзе ұсынған кодтау тек үш белгіден тұрды: ұзын сигнал (тире), қысқа (сигнал), нүкте сигнал жоқ болса (пауза) - әріптер бір-бірінен бөлінеді: Мысалы: SOS сигналы келесі түрде кодталады.

<Нүкте>, <нүкте> ,<нүкте>-S

< пауза>

<Туре>,<туре>,<туре>-0

<пауза>

<Нүкте>,< нүкте>,< нүкте>-S

Морзе кодын аппараттардың қабылдауы үшін өте күрделі болады. Неміс өнертапқышы Водо өзінің кодын ұсынды. Ол тек екі сигналды пайдаланды: нүкте және тире. Әріптерді бір-бірінен ажырату қиындығы туындамасы үшін, барлық әріптер бірдей ұзындықты сигналдардың кезектілігімен кодталды.

Водо аппарты өндірісте ыңғайлы және сенімді болды.Оның көмегімен телефон ақпарат жіберудің құралы ретінде кеңінен пайдаланды.

Нөлдер мен бірліктер тізбегін қолданып графикалық ақпараттарды қодтауға болады.

Компьютерлік графиканың 3-түрі бар: растырлы (нүктелі), векторлы және фрактальды. Электрондық және полиграфикалық баспаларда растрлы нүктелі графика көп қолданылады.

Растрлы графиканың негізі құраушысы – нүкте (пинсель).

Кез келген бейнені кодтау үшін нүктелерге бөліп, әр нүктенің түсін кодтау керек. Мысалы: ала бейнені кодтау үшін екі бит қолданылады.

11-ақ түсті, 10-ақшыл сұр түсті, 01-сұр түсті, 00-қара түсті. 256-түрлі түстерді кодтау үшін 8бит қажет. Бірақ бұл табиғаттын толық түсті көркемдерін кодтау үшін жетпейді. Адамның көзі ондаған миллион түрін ажырата алады. Қазіргі заманда түстің бір нүктесін кодтау үшін компьютерлерде 3 байт қолданылады.

Әр түс негізгі үш түстің комбинациясынан құралады: қызыл, жасыл және көк.

Бірінші байт қызыл құраушының интенсивтілігін, екінші – жасыл құраушының, үшінші – көк құраушының интинсивтілігін білдіреді.

Бұл кодтау жүйесін RGB(Red, Green, Biue) деп атайды. Бұл жүйе 16,5млн яғни 2^{24} түрлі түстерді қамтиды.

8.2 Хэмминг құпиялары

Ричард Весли Хэмминг -1915 ж. 11 қаңтарында Чикагода дүниеге келген. 1937ж.Чикаго университетін бітіріп бакалавр атағын алды. Ол өз білімін Небраска штатының университетінде жалғастырды, сол жерде ол 1939ж. магистр атағын алды. 1942 ж. Ричард Иллионойс штатында математика саласында философия ғылымының докторы атағын алды.

1946ж. ол Белл лабораториясында компьютер құрастырумен айналыса бастады. Танымалы орталықта ол 30 жылдай жұмыс жасаған.

1976ж. Ричард Монтеррей (шт. Калифорния) қаласына қоныс аударып, Жоғары әскери-теңіз училищесінде есептеуш техника саласында ғылыми зерттеулерді басқарды. Осы училищеде ол сабақ берді, ықтималдық теориясы және комбинаторика туралы кітаптар жазды.

1950ж кодтарға және қателерді жөндеуге арналған ғылыми мақала жазды. Бұл мақала дүние жүзіне танылды және оған аброй әкелді.

Ұзын код көп тараған кодтардың бірі болып саналады.

Dmin=3 бірлік қателер үшін қолданылады , Dmin=4 бірлік қателерді қолдана отырып екілік қателерді табады

Хэмминг кодының ұзындығы n≤ 2r-1, мұндағы r – тексерілетін разрядтар саны.

Сипаттамалық ерекшелігі бойынша тексерілетін матрица коды Dmin=3 болғанда оның бағандары, ұзындығы r болатын 0-дік емес комбинация құрайды.

Мысал, r=4 және n=15 (15 11) коды үшін тексерілетін матрица келесі түрді қабылдайды:

$$H_{15,11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Құрамында бір бірлік бар бағандарды аударғанда, матрицаны келесі тұрге келтіруге болады.

$$H_{15,11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Тексеруші разрядтар ретінде төмендегі разрядтарды да қолдануға болады:

$$U_{12} = U_5 \oplus U_6 \oplus U_7 \oplus U_8 \oplus U_9 \oplus U_{10} \oplus U_{11};$$
$$U_{13} = U_2 \oplus U_3 \oplus U_4 \oplus U_8 \oplus U_9 \oplus U_{10} \oplus U_{11};$$
$$U_{14} = U_1 \oplus U_3 \oplus U_4 \oplus U_6 \oplus U_7 \oplus U_{10} \oplus U_{11};$$
$$U_{15} = U_1 \oplus U_2 \oplus U_4 \oplus U_5 \oplus U_7 \oplus U_9 \oplus U_{11}.$$

Мұндағы *U12-U15* - тексеруші разрядтар; *U1-U11* – хабарламалық разрядтар.

Онда тексеруші топтар төмендегідей болуы керек:

$$b_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus \ldots;$$
$$b_2 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus \ldots;$$
$$b_3 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{12} \oplus \ldots;$$
$$b_4 = a_8 \oplus a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} \oplus \ldots.$$

Хэмминг құпияларының символдар саны өте көп болғандықтан қолдануға қолайсыз. Қазіргі кезде кеңінен қолданылатын ASCII (American Standard Code for Interchanqe) кодтар кестесі бар.

Құпилаудың түрлері.

1.KOU8 – кодтау түрі..

2. Халықаралық кодтау ASCII

3. Морзе кодтау кестесі

4. Еуропа елдеріндегі электротауарлардың қауіпсіздік белгілері.

5. Кейбір елдер тауарларын штрихты кодтауға арналған EAN кодтар.

Тест сұрақтары

1. $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

A) барлық орналастырулар саны; B) барлық терулер саны;

C) барлық алмастырудың саны; D) қайталанып келетін орналастыру саны;

E) қайталанып келетін алмастыру саны.

2. Бір-бірінен айырмашылығы ең болмағанда бір элементінде болатын әртүрлі n элементтен m-нен жасалған топ:

A) орналастыру; B) алмастыру; C) қайталанатын алмастыру;

D) теру; E) қайталанбайтын алмастыру.

3. $P_n = n!$

A) барлық орналастырулар саны; B) барлық терулер саны;

C) барлық алмастырудың саны; D) қайталанып келетін орналастыру саны;

E) қайталанып келетін алмастыру саны.

4. $A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$

A) қайталанып келетін орналастыру саны; B) барлық терулер саны;

C) барлық алмастырудың саны; D) барлық орналастырулар саны;

E) қайталанып келетін алмастыру саны.

5. Бір-бірінен айырмашылығы элементтерінің құрамында, немесе элементтерінің орналасу ретінде болатын әртүрлі n элементтен m-нен жасалған топ:

A) орналастыру; B) алмастыру; C) теру; D) қайталанатын орналастыру;

E) қайталанбайтын орналастыру.

6. A және B айтылымдарының эквиваленциясы дегеніміз?

A) A ақиқат және B жалған болғанда ғана жалған мән қабылдайтын айтылым;

B) A мен B-нің екеуі бірдей ақиқат не екеуі бірдей жалған мәндерін қабылдағанда, ақиқат мән қабылдайтын айтылым

C) A мен B айтылымдарының ең болмағанда біреуі ақиқат болғанда, ақиқат мән қабылдайтын айтылым;

D) A мен B-нің екеуі бірдей ақиқат болғанда ғана ақиқат болатын айтылым.

E) Егер A ақиқат болса, онда жалған. Ал A жалған болса, онда ақиқат болатын айтылым.

7. A айтылымының терістеуі дегеніміз?

A) A ақиқат және B жалған болғанда ғана жалған мән қабылдайтын айтылым;

B) A мен B-нің екеуі бірдей ақиқат не екеуі бірдей жалған мәндерін қабылдағанда, ақиқат мән қабылдайтын айтылым

C) А мен В айтылымдарының ең болмағанда біреуі ақиқат болғанда, ақиқат мән қабылдайтын айтылым;

D) А мен В-нің екеуі бірдей ақиқат болғанда ғана ақиқат болатын айтылым.

E) Егер А ақиқат болса, онда жалған. Ал А жалған болса, онда ақиқат болатын айтылым.

8. Тавтология дегеніміз не?

A) Айнымалылардың барлық мүмкін мәндерінде тек қана ақиқат мәнді қабылдайтын формула;

B)Ақиқат не жалған екендігін айтуға болатын сөйлем;

C) Барлық мәндері {а,ж} жиынында жататын функция;

D) Логикалық жалғаулар арқылы жасалынған сөйлем;

E) Құрама емес сөйлемдер.

9. Предикат дегеніміз не?

A) Айнымалылардың барлық мүмкін мәндерінде тек қана ақиқат мәнді қабылдайтын формула;

B)Ақиқат не жалған екендігін айтуға болатын сөйлем;

C) Барлық мәндері {а,ж} жиынында жататын функция;

D) Логикалық жалғаулар арқылы жасалынған сөйлем;

E) Құрама емес сөйлемдер.

10. Құрама сөйлем дегеніміз не?

A) Айнымалылардың барлық мүмкін мәндерінде тек қана ақиқат мәнді қабылдайтын формула;

B)Ақиқат не жалған екендігін айтуға болатын сөйлем;

C) Барлық мәндері {а,ж} жиынында жататын функция;

D) Логикалық жалғаулар арқылы жасалынған сөйлем;

E) Құрама емес сөйлемдер.

11. Жәй сөйлем дегеніміз не?

A) Айнымалылардың барлық мүмкін мәндерінде тек қана ақиқат мәнді қабылдайтын формула;

B)Ақиқат не жалған екендігін айтуға болатын сөйлем;

C) Барлық мәндері {а,ж} жиынында жататын функция;

D) Логикалық жалғаулар арқылы жасалынған сөйлем;

E) Құрама емес сөйлемдер.

12. а, в - нақты сандар. $ав \neq 0$ сөйлемінің ақиқаттық шартын конъюнкция немесе дизъюнкция арқылы көрсетіңіз?

A) $а=0$ □ $в \neq 0$; B) $а=0$ □ $в=0$; C) $а \neq 0$ □ $в \neq 0$; D) $а \neq 0$ □ $в=0$; E) $а \neq 0$ □ $в \neq 0$.

13. а, в - нақты сандар. ав□ 0 сөйлемінің ақиқаттық шартын конъюнкция немесе дизънкция арқылы көрсетіңіз?

A) а=0 □ в$\neq$0; B) а=0 □ в=0; C) а$\neq$0 □ в$\neq$0; D) а$\neq$0 □ в=0; E) а$\neq$0 □ в$\neq$0.

14. а, в - нақты сандар. а/в=0 сөйлемінің ақиқат шартын конъюнкция немесе дизъюнкция арқылы көрсетіңіз?

A) а=0 □ в$\neq$0; B) а=0 □ в=0; C) а$\neq$0 □ в$\neq$0; D) а$\neq$0 □ в=0; E) а$\neq$0 □ в$\neq$0.

15. Берілген сөйлемді мағынасын өзгертпей конъюнкция немесе дизъюнкция арқылы беріңіз: "Квадрат теңдеудің екіден артық түбірі балмайды."

A) квадрат теңдеудің 2 немесе 3 түбірі болмайды;
B) квадрат теңдеудің бір немесе 2 түбірі болады;
C) квадрат теңдеудің бір және 2 түбірі болады;
D) квадрат теңдеудің 2 және 3 түбірі болады;
E) квадрат теңдеудің 3 түбірі болмайды.

16. $\overline{a < в}$ сөйлемін терістеу таңбасынсыз көрсетіңіз

A) а□ в; B) а□ в; C) а□ в; D) а□ в; E) а□ в.

17. $\overline{a > в}$ сөйлемін терістеу таңбасынсыз көрсетіңіз.

A) а□ в; B) а□ в; C) а□ в; D) а□ в; E) а□ в.

18. P(X)□ "X жай сан"
R(X)□ "X-жұп сан"
Q(X)□ "X-тақ сан"
S(X)□ "У х-қа бөлінеді" предикаттары берілген. R(X) □ P(X)формуласымен қандай айтылым берілген.

A) 4-жұп сан және 4 жай сан емес; B) 4-жұп сан және 4 жай сан;
C) 4-тақ сан және 4 жай сан емес; D) 4-жай сан және 4 жұп сан емес;
E) 4-жұп сан немесе 4 жай сан емес.

19. P(X)□ "X жай сан"
R(X)□ "X-жұп сан"
Q(X)□ "X-тақ сан"
S(X)□ "У х-қа бөлінеді" предикаттары берілген. Q(3)□ P(3) формуласымен қандай айтылым берілген?

A) 3-тақ сан және 3 жай сан; B) 3-жұп сан және 3 жай сан емес;
C) 3-тақ сан және 3 жай сан емес; D) 3-жай сан және 3 жұп сан емес;
E) 3-жұп сан немесе 3 жай сан емес.

20. P(X)□ "X жай сан"
R(X)□ "X-жұп сан"

Q(X)□ "X-тақ сан"
S(X)□ "У X-қа бөлінеді" предикаттары берілген. □X(S(2;X))□R(X) формуласымен қандай айтылым берілген?
A) кез-келген X 2-ге бөлінеді;   B) X - жұп сан;
C) кез-келген X 2-ге бөлінсе, онда ол - жұп сан;
D) X - жұп сан және X 2-ге бөлінеді;   E) кез-келген X жұп сан.

21. P(X)□ "X жай сан"
R(X)□ "X-жұп сан"
Q(X)□ "X-тақ сан"
S(X)□ "У X-қа бөлінеді" предикаттары берілген. □ □ □ R(X)□ S(X,10)) формуласымен қандай айтылым берілген?
A) қандай да бір X саны табылады;   B) X саны 10-ға бөлінеді;
C) X-жұп сан, олай болса X саны 10-ға бөлінеді;
D) Қандай да бір X саны табылады, ал X-жұп сан және 10 саны X-қа бөлінеді.
E) 10 саны X-қа бөлінетіндей, X саны табылады.

22. P(X)□ "X жай сан"
R(X)□ "X-жұп сан"
Q(X)□ "X-тақ сан"
S(X)□ "У X-қа бөлінеді" предикаттары берілген. □ □ □ R(X)□ S(X,5)) формуласымен қандай айтылым берілген?
A) қандай да бір X саны табылады;   B) X саны 5-ке бөлінеді;
C) X-жұп сан, олай болса X саны 5-ке бөлінеді;
D) 5 саны X-қа бөлінетіндей, X саны табылады;
E) Қандай да бір X саны табылады, ал X-жұп сан және 5 саны X-қа бөлінеді.

23. 3 орынды предикатты анықтаңыз:
A) $x>1$;   B) $x>y$;   C) $xy=10$;   D) $\frac{x}{y}+z+\sin x<0$;   E) $xy-1<0$.

24. Бір орынды предикатты анықтаңыз:
A) $x>1$;   B) $x>y$;   C) $xy=10$;   D) $\frac{x}{y}+z+\sin x<0$;   E) $xy-1<0$.

25. Q(X)□"X-жай сан" предикаты берілген. Мына айтылымдардың қайсысы ақиқат?
A) Q(6);   B) Q(12);   C) Q(7);   D) Q(4);   E) Q(0).

26 Бірінші компоненті А жиынынан, екінші компоненті В жиынынан алынған барлық реттелген қостардың жиыны қалай аталады?
A) жиындардың бірігуі;   B) жиындардың қиылысуы;
C) жиындардың көбейтіндісі;   D) жиындардың декарттық көбейтіндісі;
E) жиындардың сәйкестігі.

27. Декарттық көбейту қандай заңдарға бағынбайды?
A) ауыстырымдылық заңы мен терімділік заңына;
B) ауыстырымдылық заңы, үлестірімділік заңына;
C) терімділік заңы мен үлестірімділік заңына;
D) үлестірімділік заңына;
E) уыстырымдылық заңына.

28. A={2;3}, B={7;8} болсын A□ B көбейтіндісін табу керек?
A) {(2,7),(2,8),(7,2),(8,3)}; B) {(2,7),(2,8),(3,7),(3,8)};
C) {(2,3),(2,7),(3,7),(3,8)}; D) {(2,7),(2,8),(3,2),(3,8);
E) {(3,7),(3,8),(3,2),(3,3)}.

29. A={1;2;3}, B={3;5} болсын A□ B көбейтіндісін табу кфек?
A) {(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3)}; B) {(1,3),(2,3),(2,5),(3,5)};
C) {(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3),(3,5)}; D) {(1,3),(1,5),(3,3),(3,5)};
E) {(1,3),(1,5),(2,3),(3,5)}.

30. A={1;2;3}, B={3;5} болсын B□ A көбейтіндісін табу керек?
A) {(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3)} B) {(1,3),(2,3),(2,5),(3,5)};
C) {(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3)}; D) {(1,3),(1,5),(3,3),(3,5)};
E) {(3,1),(3,2),(3,3)(5,1),(5,2),(5,5)}.

31. Төмендегі айтылымдардың қайсысы жалған?
A) 30+24=54; B) 3<7; C) -10<1; D) y^2□ 0; E) барлық сан 7-ге бөлінеді.

32. P(X) - "Төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары тең" айтылымы, X-тің қандай мәнінде ақиқат болады?
A) барлық; B) кез-келген; C) кейбір; D) екі; E) X-тің мәні жоқ.

33. Төмендегі айтылымдардың қайсысы жалған?
A) n - жұп сан немесе n+1 жұп сан; B) n - жұп сан және n+1 жұп сан;
C) жазықтықтағы а, в түзулері параллель немесе қиылысады;
D) (x□ 0)□ (x□ 0); E) ABC үшбұрышы тік бұрышты немесе доғал бұрышты немесе сүйір бұрышты.

34. Төмендегі айтылымдардың қайсысы ақиқат?
A) n - жұп сан және n+1 жұп сан; B) n - жұп сан немесе n+1 жұп сан;
C) (x□ 0)□ (x□ 0); D) Төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары тең;
E) жазықтықтағы түзулер қиылысады;

35. "28 саны жұп және 7-ге бөлінеді" деген сөйлемнің логикалық құрылымы қандай?
A) A □ B; B) A □ B; C) A □ B; D) A □ B; E) A □ $\overline{B}$.

36. "X □ 8" сөйлемінің логикалық құрылымын анықтау керек?
A) A □ B; B) A □ B; C) A □ B; D) A □ B; E) A □ $\overline{B}$.

37. "Егер үшбұрыш теңбүйірлі болса, онда оның табанындағы бұрыштары тең" сөйлемінің логикалық құрылымы қандай?

A) A B; B) A B; C) A B; D) A B; E) A $\overline{B}$.

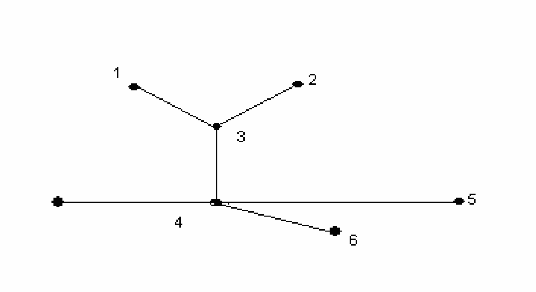
38. Ақырлы X жиынының элементтерінен (нүктелерден) және оларды қосатын стрелкалардан (бағыттылған сызықтардан) тұратын ерекше сызба қалайша аталады?

A) орман; B) тізбе; C) ағаш; D) граф; E) жол.

39. Кезектесе орналасқан G граф төбелері мен қабырғаларынан $\square_0 x_1 \square_1 x_2 ... x_n \square_n$ тізбегі қалай аталады?

A) орман; B) тізбе; C) ағаш; D) граф; E) жол.

40. Төмендегі граф не деп аталады?



A) орман B) тізбе C) ағаш D) граф E) жол.

41. Қайталанатын қабырғалары жоқ жол не деп аталады?

A) орман B) тізбе C) ағаш D) граф E) жол.

42. Тұйық жолды не деп атайды?

A) орман; B) тізбе; C) цикл; D) граф; E) жол.

43. Жай тізбе дегеніміз не?

A) қайталанатын төбесі жоқ тізбе B) қайталанатын қабырғалары жоқ жол
C) бастапқы және соңғы төбесі беттесетін цикл
D) қабырғалары қайталанбайтын цикл E) байланыссыз граф.

44. Эйлер циклі деп нені айтамыз?

A) қайталанатын төбесі жоқ тізбе
B) қайталанатын қабырғалары жоқ жол
C) бастапқы және соңғы төбесі беттесетін цикл
D) қабырғалары қайталанбайтын цикл E) байланыссыз граф.

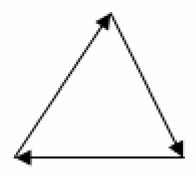
45. G - Эйлерлік граф болуы үшін қандай шарт орындалуы қажет?

A) байланыссыз граф болу керек B) байланысқан граф болу керек
C) ішкі графтары болу керек D) қабырғалары қайталанып келуі керек
E) төбелері қайталанбау керек.

46. Төмендегі тізбелердің қайсысы Эйлер циклі?

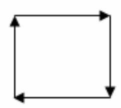
A) $\square_0 x_1 \square_1 x_2 \square_2$ B) $\square_3 x_3 \square_5 x_5 \square_4 x_6$ C) $\square_3 x_3 \square_5 x_5 \square_3$ D) $\square_1 \square_3 \square_5 \square_1$ E) $\square_1 \square_3 \square_5$.

47. Төмендегі графта көрсетілген қатыстағы қасиеттерді анықтау керек.



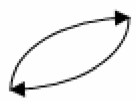
A) рефлексивті,антисимметриялы B) транзитивті,симметриялы
C) симметриялы D) антисимметриялы E) антирефлексивті,транзитивті емес.

48. Төмендегі графта көрсетілген қатыстағы қасиеттерді анықтау керек.



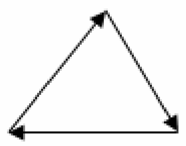
A) транзитивті,рефлексивті B) антисимметриялы
C) рефлексивті D) симметриялы E) антитранзитивті

49. Төмендегі графта көрсетілген қатыстағы қасиеттерді анықтау керек.



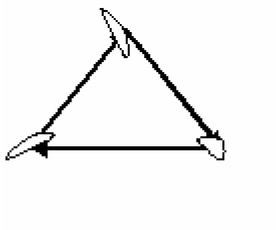
A) симметриялы B) рефликсивті,транзитивті C) антисимметриялы
D) транзитивті E) антитранзитивті

50. Төмендегі графта көрсетілген қатыстағы қасиеттерді анықтау керек.



A) рефликсивті B) антирефликсивті C) симметриялы
D) реттік E) транзитивті, рефлексивті.

51. Төмендегі графта көрсетілген қатыстағы қасиеттерді анықтау керек.



A) рефликсивті B) антирефликсивті C) транзитивті D) симметриялы
E) барлығы дұрыс

52. Берілген әртүрлі n элементтен, n элементтің барлығының қатысуымен жасалған, бір-бірінен айырмашылығы тек орналасу ретінде ғана болатын топ:

A) орналастыру B) алмастыру C) теру D) қайталанатын орналастыру
E) қайталанбайтын орналастыру.

53. А және В айтылымдарының импикациясы дегеніміз?

A) А ақиқат және В жалған болғанда ғана жалған мән қабылдайтын айтылым

B) А мен В-нің екеуі бірдей ақиқат не екеуі бірдей жалған мәндерін қабылдағанда, ақиқат мән қабылдайтын айтылым

C) А мен В айтылымдарының ең болмағанда біреуі ақиқат болғанда, ақиқат мән қабылдайтын айтылым

D) А мен В-нің екеуі бірдей ақиқат болғанда ғана ақиқат болатын айтылым.

E) Егер А ақиқат болса, онда жалған. Ал А жалған болса, онда ақиқат болатын айтылым.

54. Төмендегі сөйлемдердің қайсысы айтылым болады?

A) Бөлменің ауданы 20м^2

B) Берілген нүктеден бірдей қашықтықта жатқан жазықтықтағы нүктелер жиыны

C) Параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары тең

D) Математикалық логика - қызықты пән E) x + y =10.

55. А және В айтылымдарының дизъюнкциясы дегеніміз не?

A) А ақиқат және В жалған болғанда ғана жалған мән қабылдайтын айтылым;

B) А мен В-нің екеуі бірдей ақиқат не екеуі бірдей жалған мәндерін қабылдағанда, ақиқат мән қабылдайтын айтылым

C) А мен В айтылымдарының ең болмағанда біреуі ақиқат болғанда, ақиқат мән қабылдайтын айтылым;

D) А мен В-нің екеуі бірдей ақиқат болғанда ғана ақиқат болатын айтылым.

E) Егер А ақиқат болса, онда жалған. Ал А жалған болса, онда ақиқат болатын айтылым.

56. А мен В айтылымдарының конъюнкциясы дегеніміз:

A) А мен В-нің екеуі бірдей ақиқат болғанда ғана ақиқат болатын айтылым;

B) А мен В-нің екеуі бірдей ақиқат не екеуі бірдей жалған мәндерін қабылдағанда, ақиқат мән қабылдайтын айтылым;

C) A мен B айтылымдарының ең болмағанда біреуі ақиқат болғанда, ақиқат мән қабылдайтын айтылым;

D) A ақиқат және B жалған болғанда ғана жалған мән қабылдайтын айтылым;

E) Егер A ақиқат болса, онда жалған. Ал A жалған болса, онда ақиқат болатын айтылым.

57. Айтылым деген не?

A) Айнымалылардың барлық мүмкін мәндерінде тек қана ақиқат мәнді қабылдайтын формула

B)Ақиқат не жалған екендігін айтуға болатын сөйлем

C) Барлық мәндері {а,ж} жиынында жататын функция

D) Логикалық жалғаулар арқылы жасалынған сөйлем

E) Құрама емес сөйлемдер.

58. 10 цифрдан төрт орынды әр түрлі қанша автомашина нөмірін құрастыруға юолады?

A) 40   B) 10!   C) 45   D) 24   E) 10^4.

59. Топтағы 10 студенттен ЭЕМ-де жұмыс істеу үшін 2 адамды таңдау керек. Мұны неше тәсілмен орындауға болады?

A) 90   B) 45   C) 20   D)15   E) 10.

60. Жазықтықта 15 нүкте берілген. Олардың ешқандай үш нүктесі бір түзудің бойында жатпайды.Осы нүктелер әр түрлі неше түзуді анықтайды?

A) 100   B) 200   C) 105   D) 30   E) 45

61. $P_n(k)=C_n^k\cdot p^k.q^{n-k}$ Бұл формула қалай аталады?

A) теру формуласы   B) Бейес формуласы   C) Пуассон формуласы

D) Бернулли формуласыE) Лапласс формуласы

62. Бернулли формуласы:

A) $P(A)=\dfrac{m}{n}$ B) $Đ_n(k)=C_n^k\cdot p^n.q^{n-k}$ C) $Đ_n(k)=C_n^k\cdot p^k.q^{n-k}$

D) $P(A)=Đ(À)\cdot Đ_À(Â_1)+Đ(À)\cdot Đ_À(Â_2)+........+Đ(À)\cdot Đ_À(Â_n)$

E) $Đ(À+Â)=Đ(À)+Đ(Â)-Đ(ÀÂ)$

63. Берілген сөйлемді логикалық таңбалар арқылы көрсет:

Егер төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары тең және параллель болса,онда ол төртбұрыш параллелограмм.

A) X$\wedge$ У B) X$\vee$У   C) X$\rightarrow$У   D) (X$\vee$У)$\rightarrow$Z   E) (X$\wedge$У)$\rightarrow$Z.

64. Формулалардың ішінен тепе-тең формуланы көрсетіңіз.

A) $x\wedge y, x\vee y;$ B) $\bar{x}\vee\bar{y}; \overline{x\wedge y}$ C) $\overline{x\vee y},\ \bar{x}\vee\bar{y}$ D) $\overline{x\vee y}, x\wedge y$ E) $x\rightarrow y, y\rightarrow x$.

65. Мына тепе-теңдіктердің қайсысы жалған.

A) $x \equiv \bar{\bar{x}}$ B) $x \equiv x \wedge x;$ C) $y \equiv y \vee y$ D) $x \wedge y \equiv x \vee y$ E) $x \vee \bar{x} \equiv a$.

66. Белгілі бір әңгімеде ұғым бір мағынада ғана қолданылуы қажет,яғни өзіне-өзі тең болуы тиіс. Бұл логиканың қандай заңы?

A) үшіншісі мүмкін емес B) қайшылық заңы C) тепе-теңдік заңы

D) де Морган заңы E) Коммутативтік заңы.

67. Бір нәрсе туралы бір уақытта және бір тұрғыдан айтылған қарама-қарсы екі ойдың екеуі де бірдей ақиқат болуы мүмкін емес.Бұл логиканың қандай заңы?

A) үшіншісі мүмкін емес B) қайшылық заңы C) тепе-теңдік заңы

D) де Морган заңы E) Коммутативтік заңы.

68. Бір уақытта бір нәрсе туралы алынған қайшы екі ойдың әр уақытта біреуі ақиқат ,екіншісі жалған болады,үшінші ойдың болуы мүмкін емес.

A) үшіншісі мүмкін емес B) қайшылық заңы C) тепе-теңдік заңы

D) де Морган заңы E) Коммутативтік заңы.

69. $\overline{\tilde{o} \wedge \acute{o}} \equiv \bar{\tilde{o}} \vee \bar{o}, \overline{\tilde{o} \vee \acute{o}} \equiv \bar{\tilde{o}} \wedge \bar{o}$ Логиканың қандай заңы берілген?

A) үшіншісі мүмкін емес B) қайшылық заңы C) тепе-теңдік заңы

D) де Морган заңы E) Коммутативтік заңы.

70. $\tilde{o} \wedge \acute{o} \equiv \acute{o} \wedge \tilde{o}, \tilde{o} \vee \acute{o} \equiv \acute{o} \vee \tilde{o}$ Логиканың қандай заңы берілген?

A) үшіншісі мүмкін емес B) қайшылық заңы C) тепе-теңдік заңы

D) де Морган заңы E) Коммутативтік заңы.

71. Төмендегі айтылымды теңбе-тең болатындай дизьюнкциямен алмастырыңыз. |x+3|>3

A) (x+3>3)V(x+3>-3) B) (x+3<3)V(x+3<-3) C) (x+3<3)^(x+3<-3);

D) (x+3>3)^(x+3>-3) E) (x+3>3)V(x+3<-3).

72. Төмендегі айтылымды теңбе-тең болатындай дизьюнкциямен алмастырыңыз x^2 -5x+6=0

A) (x-3=0)V(x-2=0) B) (x-3=0)^(x-2=0)

C) (x-3≠0)V(x-2=0) D) (x-3≠0)V(x-2≠0) E) (x-3=0)^(x-2=0).

73. $x \vee \overline{\bar{x} \wedge y}$ формуласын Морган заңымен түрлендіру керек.

A) X $\vee \bar{X}$ $\wedge$Y ; B) $X \vee (\bar{\bar{\tilde{O}}} V \bar{Y})$; C) X $\vee X$ $\wedge$Y; D) X $\wedge \bar{X}$ $\wedge$Y ; E) X $\vee \bar{Y}$.

74. X $\leftrightarrow$ Y формуласынан с.д.н.ф. жазу керек

A) XY V X$\bar{\text{Y}}$; B) ($\bar{X}$Y V XY); C) $XY \wedge X\bar{Y}$;

D) $X\bar{Y} \wedge XY$ E) XY V $\bar{\tilde{\text{O}}}\bar{\text{Y}}$.

75. X $\leftrightarrow$ Y формуласын с.к.н.ф жазу керек

A) $XY \vee X\overline{Y}$; B) $(\overline{X}Y \vee XY)$; C) $(\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y})$

D) $X\overline{Y} \wedge XY$ E) $XY \vee \overline{X}\overline{Y}$.

76. Берілген таблица арқылы алынған формуланы көрсетіңіз

X	Y	F
a	a	a
a	$ж$	$ж$
$ж$	a	$ж$
$ж$	$ж$	a

A) $XY \vee X\overline{Y}$; B) $(XY) \vee (\overline{X}\overline{Y})$; C) $(\overline{\tilde{O}} \vee Y) \wedge \left(X \vee \overline{Y}\right)$

D) $X\overline{Y} \wedge XY$ E) $XY \vee \overline{\tilde{O}Y}$.

77. Берілген таблица арқылы формула құрастыру керек

X	Y	F
a	a	a
a	$ж$	a
$ж$	a	a
$ж$	$ж$	$ж$

A) $XY \vee X\overline{Y}$; B) $(XY) \vee (\overline{X}\overline{Y})$; C) $(\overline{\tilde{O}} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y})$;

D) $(\tilde{O}\overline{Y}) \vee (\overline{X}Y) \vee XY$; E) $XY \vee \overline{\tilde{O}}\overline{Y}$.

78. Берілген таблица арқылы формула құрастыру керек (д.қ.н.т)

X	Y	F
a	a	a
a	$ж$	a
$ж$	a	a
$ж$	$ж$	$ж$

A) $XY \vee X\overline{Y}$; B) $X \vee Y$; C) $(\overline{\tilde{O}} \vee Y) \wedge \left(X \vee \overline{Y}\right)$

Д) $(\tilde{O}\overline{Y}) \vee (\overline{X}Y) \vee XY$ E) $XY \vee \overline{\tilde{O}}\overline{Y}$.

79. Берілген сөйлем кванторлар арқылы қалай жазылады ?
X+10=2 болатындай X саны табылады.

A) $\forall x\,(x+0=x)$; B) $\forall x \forall y\, \exists z\,(x+y=z)$;

C) $\exists x\,(x+10=2)$; D) $\forall x\, \exists z\,(x+10=2)$; E) $\overline{\exists} x\,(x+10=x)$.

80. Берілген сөйлем кванторлар арқылы қалай жазылады ?
x+10=x болатындай x саны табылмайды.

A) $\forall x\,(x+0=x)$; B) $\forall x \forall y\, \exists z\,(x+y=z)$; C) $\overline{\exists} x\,(x+10=x)$.

D) $\forall x\, \exists z\,(x+10=2)$; E) $\exists x\,(x+10=2)$.

81. $5\tilde{N}_n^3 = \tilde{N}_{n+2}^4$ табу керек n-?

A) 14;3 B) 6;12 C) 0;14 D) 0;2 E) 2;3

82. $3\tilde{N}_n^2 = \tilde{N}_{n+1}^2$ табу керек n=?

A) 14;3 B) 6;12 C) 0;14 D)2 E) 2;3

83. Жай сөйлемдерді логикалық жалғаулармен байланыстырып қандай сөйлемдер алуға болады?

A) айтылымдар B) предикаттар C)теңбе-тең формулалар

D) құрама сөйлемдер E) тавтология

84. Жазықтықта 15 нүкте берілген. Олардың ешқандай үшеуі бір түзудің бойында жатпайды.Осы нүктелер әр түрлі неше шеңберді анықтайды?

A) 62 B) 755 C) 564 D) 455 E) 360.

85. Теңдеуді шешу керек: $\tilde{N}_{\tilde{o}}^{\tilde{o}-2} = 45$

A) 10 B) -9 C) 60 D) 16 E) 23,5

86. Теңдеуді шешу керек: $\tilde{N}_{2\tilde{o}+8}^{2\tilde{o}+3} = 13\grave{A}_{2\tilde{o}+6}^{3}$

A) 10 B) -9 C) 60 D) 16 E) 23,5.

87. $\frac{\text{Đ}_n}{\text{Đ}_{n+2}} = \frac{1}{30}$ табу керек n ?

A) 5 B)7 C)4 D)12 E)-6.

88. $\frac{\text{Đ}_n}{\text{Đ}_{n+1}} = \frac{1}{4}$ табу керек n ?

A) 9 B)3 C)7 D)4 E)1.

89. $\overline{\overline{X}} \equiv X$ логиканың қандай заңы?

A) тепе-теңдік заңы B) қайшылық заңы C) коммутативтік заңы

D) жұту заңы E) терістеуді терістеу заңы.

90. $\tilde{O} \wedge (\tilde{O} \vee \acute{O}) \equiv \tilde{O}$ $\tilde{O} \vee (\tilde{O} \wedge \acute{O}) \equiv \tilde{O}$ логиканың қандай заңы?

A) тепе-теңдік заңы B) қайшылық заңы C) коммутативтік заңы

D) жұту заңы E) терістеуді терістеу заңы.

91. Берілген кесте арқылы формула жазыңыз.

X	Y	F
а	*а*	*а*
а	*ж*	*ж*
ж	*а*	*ж*
ж	*ж*	*ж*

A) $\overline{X} \wedge Y$ B) $\mathrm{X} \vee \overline{\mathrm{Y}}$ C) $\tilde{O} \to Y$ D) $X \leftrightarrow Y$ E) $\tilde{O} \wedge Y$.

92. Берілген кесте бойынша формула жазыңыз.

X	Y	F
а	*а*	*а*
а	*ж*	*ж*
ж	*а*	*а*
ж	*ж*	*а*

A) $XY \vee \mathrm{X}\overline{\mathrm{Y}};$ B) $\tilde{O} \vee Y$ C) $(\overline{\tilde{O}} \vee \mathrm{Y}) \wedge \left(X \vee \overline{Y}\right)$

D) $(\overline{X} \vee Y)$ E) $XY \vee \overline{\tilde{O}}\overline{\mathrm{Y}}. \vee \overline{X}Y$

93. 9,7,3 цифрлары әр санда бір-ақ рет қайталануға тиіс болса, осы цифрлардан неше үш орынды сан құрауға болады?

A) 9 B) 6 C) 20 D) 15 E) 3.

94. P(x) -"x бүтін сан"

Q(x)-"x оң сан"

R(x)-"x жа R(x)-"x жай сан"

S(x;3)_-"x саны 3-ке бөлінеді" айтылымдары берілген.

"X саны 100-ге бөлінеді тек сонда ғана,егер X саны 5-ке және 10-ға бөлінсе" айтылымы логикалық түрде қалай жазылады?

A)P(x) $\vee$Q(x) $\wedge$R(x) B) P(x) $\wedge$Q(x) $\wedge$R(x)

C) $S(x;100) \Leftrightarrow S(x;10) \wedge S(x;5)$ D) $\left(S(x;2) \wedge S\overline{(x;6)}\right) \to \overline{S(x;3)}$

E) $P(x) \wedge Q(x) \to S(x;3) \vee \overline{S(x;3)}$

95. P(x) -"x бүтін сан"

Q(x)-"x оң сан"

R(x)-"x жай сан"

S(x;3)_-"x саны 3-ке бөлінеді" айтылымдары берілген.

Егер "X саны 10-ға бөлініп және 5-ке бөлінбесе, онда X саны 100-ге бөлінбейді» айтылымы логикалық түрде қалай жазылады?

A)P(x) $\vee$Q(x) $\wedge$R(x) B) P(x) $\wedge$Q(x) $\wedge$R(x)

C) $S(x;6) \Leftrightarrow S(x;2) \wedge S(x;3)$ D) $\left(S(x;10) \wedge S\overline{(x;5)}\right) \to \overline{S(x;100)}$

E) $P(x) \wedge Q(x) \to S(x;3) \vee \overline{S(x;3)}$.

96. P(x) -"x бүтін сан"

Q(x)-"x оң сан"

R(x)-"x жай сан"

S(x;3)_-"x саны 3-ке бөлінеді" айтылымдары берілген.

Егер "X саны бүтін сан және он сан болса, онда X саны 3-ке бөлінеді немесе 3-ке бөлінбейді» айтылымы логикалық түрде қалай жазылады?

A)P(x) $\vee$Q(x) $\wedge$R(x) B) P(x) $\wedge$Q(x) $\wedge$R(x)

C) $S(x;6) \Leftrightarrow S(x;2) \wedge S(x;3)$ D) $\left(S(x;2) \wedge S\overline{(x;6)}\right) \to \overline{S(x;3)}$

E) $P(x) \vee q(x) \to S(x;3) \vee \overline{S(x;3)}$

97. n элементтен жасалған алмастыру санның n+2 элеменнтен жасалған алмастыру санына қатысы 0,1:3 қатысындай.

n - алмастыру санын табу керек.

A)5 B) -3 C) 9 D) 2 E) 4

98. n элементтенn элементтен жасалған алмастыру санның n+1 элементтен жасалған алмастыру санына қатысы 1:4 қатысындай.

n - алмастыру санын табу керек.

A)3 B) -7 C) 4 D) -2 E) 5

99. n элементтен 3-тен жасалған топтын саны n+2 элементтен 4-тен жасалған топтын санынан 5 есе кем . n-ді табу керек.

A)0;8 B) 14;3 C) 3;5 D) 2;14 E) 2;4

100. n элементтен 2-ден жасалған топтын саны n+1 элементтен 2-ден жасалған топтын санынан 3 есе кем. n-ді табу керек.

A)1;2 B) 4;3 C) 2 D) 0;14 E) 2;14

Жауаптары

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	C	D	A	B	E	A	C	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	C	B	A	B	D	C	B	A	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	E	D	A	C	D	A	B	C	C
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
E	C	B	B	C	B	A	D	E	C
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	C	A	D	B	D	D	B	A	B
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	B	A	C	C	A	B	E	B	**C**
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
D	C	E	B	D	C	B	A	D	E
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

E	A	B	E	C	E	D	B	C	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
A	D	D	D	A	D	C	B	E	D
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
E	E	B	C	D	E	C	A	B	C

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Уч. Пособие. –М., Наука, 1979.
2. Новиков П.С. Элементы математической логики. –М., Наука, 1978
3. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – М., наука, 1977.
4. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. –М., Наука, 2000.
5. Матросов В.А., Стеценко В.А. Лекции по дискретной математике. –М., МПГУ, 1997.
6. Косточка А.В., Соловыева Ф.И. Дискретная математика. Ч.1.-Новосибирск, НГУ, 1995.
7. Косточка А.В. Дискретная математика. Ч.2. –Новосибирск, НГУ, 1996.
8. Ежов И.И., Скороход А.А., Ядренко М.М. Элементы комбинаторики. –М., Наука, 1977.
9. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. М., Наука, 1975
10. Перязев Н.А. Основы теории булевых функции. –М., Физматлит, 1999.
11. Ә. Тұрғынбаев. Логика. Алматы « Білім » 2000.
12. А. Д. Гетманова. Логика. Для педагогических учебных заведений. – М. «Книжный дом », 1998.
13. М. И.Каченовский., Ю. М. Колягин. Алгебра и начала анализа. Часть 1. М. , 1977.
14. Б.С. Жаңбырбаев, В.П. Добрица. Математикалық логиканың бастамалары.: Оқу құралы – Алматы: Абай атындағы АлМУ, 2001

Мазмұны

III тарау. Буль функциялары

VII тарау. Графтар теориясының элементтері

YIII тарау. Құпиялау теориясының элементтері

Пішімі 60х84 1/12
Көлемі 83 бет 6,9 шартты баспа табағы
Таралымы 20 дана.
Ш.Есенов атындағы КМТжИУ
Редакциялық - баспа бөлімінде басылды.
Ақтау қаласы, 32 ш/а.