4. Көп айнымалы функция

4.1 Көп айнымалы функцияның анықталу облысы (аймағы)

4.1-анықтама. Егер D облысында бір-бірінен тәуелсіз қос (x, y) айнымалыларының әрбір мәніне z айнымалысының анықталған бір мәні сәйкес келсе, онда z айнымалысы x және y айнымалыларына байланысты екі айнымалы функция деп аталады және оны

$$z = f(x, y), \tag{4.1}$$

және тағы да басқа символдардың (ишараттардың) бірімен белгілейді.

4.2-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясы анықталатын x және y мәндерінің қос (x, y) жиынын осы функцияның анықталу облысы деп атайды.

Қарапайым жағдайда, $z = f(x, y)$ функциясының анықталу облысы Oxy жазықтығы, Oxy жазықтығының тұйық сызықтармен шектелген бөлігі немесе осы жазықтықтың бірнеше бөліктерінің жиынтығы болады.

$z = f(x, y)$ функциясының Oxy тік бұрышты координаттар жүйесіндегі геометриялық бейнесі (графигі) осы теңдеумен анықталатын бет болып табылады.

4.3-анықтама. Егер бір-бірінен тәуелсіз $(x_1,x_2,...,x_n)$ айнымалыларының әрбір мәніне u айнымалысының анықталған бір мәні сәйкес келсе, онда u айнымалысы x_1, x_2, ... , x_n айнымалыларына байланысты көп айнымалы функция деп аталады да

$$u = u(x_1, x_2,..., x_n), \qquad u = f(x_1, x_2,..., x_n), \tag{4.2}$$

және тағы да басқа символдардың бірімен белгіленеді.

66-мысал. $z = x^2 + y^2$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция x пен y-тің кез келген мәнінде анықталған, яғни анықталу облысы бүкіл Oxy жазықтығы болып табылады.

67 - мысал. $z = \ln(2x - y)$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Логарифмдік функция $2x - y > 0$, яғни $y < 2x$ болғанда ғана анықталады. Осыдан функцияның анықталу облысы $2x - y = 0$ түзуінен төмен орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі болып табылады.

68-мысал. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Функция нақты мәндерін $x^2 + y^2 - a^2 \ge 0$ немесе $x^2 + y^2 \ge a^2$ болғанда ғана қабылдайды, яғни функцияның анықталу облысы центрі координаталар жүйесінің бас нүктесі, ал радиусы a-ға тең болатын дөңгелектен тыс орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

69-мысал. $z = \arcsin(y - x)$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция $-1 \le y - x \le 1$ теңсіздігі орындалғанда ғана анықталады. Осыдан функцияның анықталу облысы $y = x + 1$ және $y = x - 1$ түзулерінің арасында орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі болады.

4.2 Көп айнымалы функцияның дербес, толық өсімшілері және дербес туындылары

Oxy жазықтығының D обылысында анықталған $z = f(x, y)$ функциясын қарастырайық. Мұндағы x пен y-ті бекітіп алып, x айнымалысына Δx өсімшесін берейік. Сонда x айнымалысы бойынша z функциясының $\Delta_x z$ дербес өсімшесі

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \tag{4.3}$$

формуласымен (кейіптемесімен) анықталады.

$z = f(x, y)$ функциясындағы x пен y айнымалыларын бекітіп алып, y айнымалысына Δy өсімшесін берсек, онда y айнымалысы бойынша дербес өсімшесі

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{4.4}$$

формуласымен анықталады.

Егер x пен y айнымалылары бекітіліп алынып, олар сәйкесінше Δx және Δy өсімшілерін қабылдаса, онда z функциясының толық өсімшесі

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{4.5}$$

формуласымен анықталады.

70-мысал. $z = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес өсімшілерін және толық өсімшесін табу керек.

Шешуі.

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = [(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)\cdot y + 3y^2 + 4(x + \Delta x) - 5y + 6] -$$
$$-(x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6) = (x + \Delta x)^2 - x^2 - 2y\Delta x + 4\Delta x =$$
$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2y\Delta x - 4\Delta x = (2x - 2y - 4 + \Delta x)\cdot \Delta x;$$
$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \left[x^2 - 2x(y + \Delta y) + 3(y + \Delta y)^2 + 4x - 5(y + \Delta y) + 6\right] -$$
$$-(x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6) = -2x\Delta y + 3(y + \Delta y)^2 - 3y^2 - 5\Delta y =$$
$$= -2x\Delta y + 6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 - 5\Delta y = (-2x + 6y - 5 + 3\Delta x)\cdot \Delta x;$$
$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)\cdot(y + \Delta y) + 3(y + \Delta y)^2 + 4(x + \Delta x) -$$
$$-5(y + \Delta y) + 6] - (x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 5y + 6) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y +$$
$$+6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 + 4\Delta x - 5\Delta y = (2x - 2y + 4)\Delta x + (-2x + 6y - 5)\Delta y + (\Delta x)^2 - 2\Delta x\Delta y + 3(\Delta y)^2.$$

4.4-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының x айнымалысы бойынша дербес туындысы деп

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \tag{4.6}$$

шегін айтады. Бұл жағдайда y-ті тұрақты деп алу керек.

4.5-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының y айнымалысы бойынша дербес туындысы деп

$$\lim_{\Delta \acute{o} \to 0} \frac{\Delta_{\acute{o}} z}{\Delta \acute{o}} = \frac{\partial z}{\partial \acute{o}} = f_{\acute{o}}^{'}(x, y) \qquad (4.7)$$

71-мысал. $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 5x + 6y + 4$ функцияның дербес туындысын табу керек.

Шешуі: y-ті тұрақты деп алып, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 5$ табамыз.

Осы сияқты, x-ті тұрақты деп алып, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 3x + 6$ табамыз.

72-мысал. $z = \arcsin(xy^2) + \frac{x}{y^2}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}} \cdot y^2 + \frac{1}{y^2} = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}} + \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}} \cdot 2xy - \frac{2x}{y^3} = \frac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}} - \frac{2x}{y^3}.$$

73-мысал. Үш айнымалы $u = e^{x^2+y^2+z^2}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$, $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$, $\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$.

4.3 Көп айнымалы функцияның толық дифференциалы

$z = f(x, y)$ функциясының толық өсімшесі Δz-ті дербес $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ туындылары арқылы

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \qquad (4.8)$$

түрінде жазуға болады, мұндағы алдыңғы екі қосынды өсімшенің негізгі бөлігі, ал кейінгі екі қосынды қосалқы бөлігі деп аталады. Δx және Δy шамаларымен салыстырғанда қосалқы жоғары ретті ақырсыз аз шама болғандықтан $\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ ұмтылғанда $\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \to 0$.

Толық өсімшенің негізгі бөлігі функцияның толық дифференциалы деп аталып,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \qquad (4.9)$$

арқылы белгіленеді, мұндағы $dx = \Delta x, dy = \Delta y$, ал $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx,\ d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$ сәйкес x және y айнымалылары бойынша дербес дифференциалдары деп аталады.

Егер $u = f(x, y, z, ..., t)$ көп айнымалы функциясы берілсе, онда оның толық дифференциалы

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + ... + \frac{\partial u}{\partial t} dt, \tag{4.10}$$

формуласымен анықталады.

$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$-ң аз мәнінде дифферецианалданатын $z = f(x, y)$ функциясы үшін төмендегі жуықтап есептеу формуласы қолданылады.

$$\Delta z \approx dz.$$

осыдан $$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y \tag{4.11}$$

74-мысал. $z = x^2 + xy^2 + \sin y$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Шешуі. Дербес туындыларын табайық.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + \cos y.$$

Осыдан $$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = (2x + y^2)dx + (2xy + \cos y)dy.$$

75-мысал. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Осыдан $$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

76-мысал. $\sqrt{4{,}03^2 + 2{,}98^2}$ санының жуық мәнін табу керек.

Шешуі. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциясын қарастырайық.

$x + \Delta x = 4{,}03$ осыдан $x = 4,\ \Delta x = 0{,}03;$

$y + \Delta y = 2{,}98$ осыдан $y = 3,\ \Delta y = -0{,}02;$

$$z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{5},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{5},$$

$$\sqrt{4{,}03^2 + 2{,}98^2} \approx z + \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = 5 + \frac{4}{5} \cdot 0{,}03 + \frac{3}{5} \cdot (-0{,}02) = 5{,}012.$$

4.4 Көп айнымалы функциялардың жоғары ретті дербес туындылары мен дифференциалдары

4.6-анықтама. $z = f(x,y)$ функциясының екінші ретті дербес туындысы деп осы функцияның дербес туындысының дербес туындысын айтады және оны былай белгілейді:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y). \quad (4.12)$$

Осылай үшінші және жоғары ретті дербес туындылары табылады:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x,y). \quad (4.13)$$

және т.с.с.

4.7-анықтама. $z = f(x,y)$ функциясы және оның $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y),\ f''_{xy}(x,y),\ f''_{yx}(x,y)$ дербес туындылары D обылысында анықталған және үзіліссіз болса, онда осы облыста "аралас" туындылары тең болады:

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y).,\quad (4.14)$$

4.8-анықтама. $z = f(x,y)$ функциясының екінші ретті дифференциалы деп осы функцияның дифференциалының дифференциалын айтады:

$$d^2 z = d(dz). \quad (4.15)$$

Осы сияқты үшінші және жоғары ретті дифференциалдары анықталады:

$$d^3 z = d(d^2 z), \ldots, d^n z = d(d^{n-1} z). \quad (4.16)$$

Егер x және y бір-бірінен тәуелсіз айнымалылар, ал $f(x,y)$ функциясының үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда жоғары ретті дифференциалдар

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{dx^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3, \qquad (4.17)$$

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

формулаларымен анықталады.

77-мысал. $z = x^3 + 5x^2y - 4y^3 - x^2 - 6xy + 3y^2$ функциясының екінші ретті дербес туындыларын және екінші ретті дифференциалын табу керек.

Шешуі. Алдымен дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 10xy - 2x - 6y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 - 12y^2 - 6x + 6y.$$

Енді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6x + 10y - 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -24y + 6,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 10x - 6,$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= (6x + 10y - 2)dx^2 + 2(10x - 6)dxdy + (-24y + 6)dy^2.$$

4.5 Күрделі функцияны дифференциалдау

Дифференциалданатын $z = F(u, v)$ функциясы берілсін, мұнда $u = u(x, y), v = v(x, y)$ функциясының дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (4.18)$$

формулаларымен есептеледі.

Дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясы берілсін, мұнда $x = x(t), y = y(t)$. Бұл күрделі $z = f(x(t), y(t))$ функциясының t бойынша туындысы

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (4.19)$$

формуласымен есептеледі.

Дифференциалданатын $z=f(x,y)$ функциясы берілсін, мұнда $y=y(x)$. Бұл $z=f(x,y(x))$ функциясының x бойынша туындысы

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad (4.20)$$

формуласымен есептеледі.

78-мысал. $z=\cos(u^2+\sqrt{v})$ функциясының, мұндағы $u=e^{xy}, v=x^2+y^2$, дербес туындыларын табу керек.

Шешуі.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin(u^2+\sqrt{v})\cdot 2u\cdot u_x^{'}-\sin(u^2+\sqrt{v})\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot v_x^{'}=-\left(2uye^{xy}+\frac{x}{\sqrt{v}}\right)\sin(u^2+\sqrt{v}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=-\sin(u^2+\sqrt{v})\cdot 2u\cdot u_y^{'}-\sin(u^2+\sqrt{v})\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot v_y^{'}=-\left(2uye^{xy}+\frac{y}{\sqrt{v}}\right)\sin(u^2+\sqrt{v}).$$

79-мысал. $z=x^2+\sqrt{y}$ функциясы берілген, мұндағы $x=tgt,\ y=t^2+3t+5\cdot\frac{dz}{dt}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=2x\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{2t+3}{2\sqrt{y}}=\frac{2\sin t}{\cos^3 t}+\frac{2t+3}{2\sqrt{t^2+3t+5}}.$

80-мысал. $z=x^3+\sin(xy^2)$ функциясы берілген, мұндағы $y=\sqrt{x^2+1}\cdot\quad\frac{dz}{dx}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+y^2\cos(xy^2),\ \frac{\partial z}{\partial y}=2xy\cos(xy^2),\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Осыдан $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=3x^2+y^2\cos(xy^2)+\frac{2x^2y\cos(xy^2)}{\sqrt{x^2+1}}.$

4.6 Бағыт бойынша туынды. Функция градиенті

4.9-анықтама. $z=f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесінде $\vec{a}=\overrightarrow{MM_1}$ векторының бағыты бойынша туындысы деп

$$\frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=\lim_{\left|\overrightarrow{MM_1}\right|\to 0}\frac{f(M_1)-f(M)}{|MM_1|}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta S}$$

шегін айтады, мұндағы $\Delta S=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Егер $f(x,y)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда бағыт бойынша туынды

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha\,, \qquad (4.21)$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы $\alpha - \vec{a}$ векторы мен Ox осінің арасындағы бұрыш.

Үш айнымалы $u = f(x,y,z)$ функциясының бағыт бойынша туындысы

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ $\vec{a}$ векторының бағытталған косинустары.

4.10-анықтама. $z = f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесіндегі градиенті деп

$$gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{t} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\,, \qquad (4.22)$$

векторын айтады.

Функция градиенті мен $\vec{a}$ векторы бойынша туындысының арасындағы байланыс

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = n\rho_{\vec{a}}\, gradz$$

формуласымен анықталады.

Үш айнымалы $u = f(x,y,z)$ функциясының градиенті

$$gradz = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

векторына тең.

81-мысал. $z = x^2 - y^2$ функциясының $M(1;2)$ нүктесіндегі:

а) $gradz,$

б) $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ векторының бағыты бойынша $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = -4$

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \quad \cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = 0{,}6 \qquad \sin\alpha = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = 0{,}8$$

Осыдан $\quad gradz = 2\vec{i} - 4\vec{j}, \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = 2 \cdot 0{,}6 - 4 \cdot 0{,}8 = -2.$

82-мысал. $u = x^3 y^2 z$ функциясының $M(1, -2, 3)$ нүктесінде

а) $gradu$,

б) $\vec{MN}$ векторының бағыты бойынша туындысын табу керек, мұндағы $N(-1, 0, 2)$.

Шешуі. $\vec{a} = \vec{MN}$ векторы мен бағыттаушы косинустарын табайық.

$$\vec{a} = \{-2; 2; -1\}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{4+4+1} = 3,$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{3}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}; \ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 36; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = -12; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 4;$$

осыдан $\quad gradu = \{36; -12; 4\} \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = 36 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 12 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = -30\frac{2}{3}.$

4.7 Айқындалмаған функциялардың туындысы

4.11-анықтама. $F(x, y) = 0$ теңдеуі түрінде берілген айқындалмаған $y = y(x)$ функциясының туындысы

$$y' = -\frac{F'_x(x, \acute{o})}{F'_y(x, \acute{o})}$$

формуласымен анықталады, мұндағы $F(x, y)$ функциясы x және y айнымалылары бойынша дифференциалданатын әрі $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ функция.

$F(x, y, z) = 0$ теңдеуі түрінде берілген айқындалмаған $z = z(x, y)$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \qquad (4.23)$$

формулаларымен анықталады, мұндағы $F(x, y, z)$ функциясы x, y және z айнымалылары бойынша дифференциалданатын әрі $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ функция.

83-мысал. $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6 = 0$ функциясы берілген.

$\dfrac{dy}{dx}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $F(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6,$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y + 4, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 6y + 5,$$

Осыдан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 2y + 4}{2x + 6y + 5}.$$

84-мысал. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ функциясы берілген. $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ туындыларын табу керек.

Шешуі. $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3yz, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3xz, \ \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

Осыдан

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 - 3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{y^2 - xz}{xy - z^2}.$$

4.8 Бетке жүргізілген жанама жазықтық және нормаль (тіктеме) түзу

Қарастырылатын σ беті $z = f(x, y)$ теңдеуімен берілсін. Беттің бойынан $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесін алайық. Осы нүктеде $f = (x, y)$ функциясы дифференциалданатын болсын.

4.12-анықтама. Беттің $\grave{I}_0$ нүктесі арқылы өтетін барлық қисықтарға жүргізілген жанамалардан тұратын жазықтықты жанама жазықтық дейді. Оның теңдеуі

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}. \tag{4.24}$$

4.13-анықтама. M_0 нүктесі арқылы өтетін және жанама жазықтыққа перпендикуляр болатын түзуді беттің нормалі дейді. Оның теңдеуі

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}, \tag{4.25}$$

Егер σ беті $F(x, y, z) = 0$ теңдеуімен берілсе, онда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі жанама жазықтықтың теңдеуі

$$(x - x_0)\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = 0, \tag{4.26}$$

ал нормалінің теңдеуі

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}}. \qquad (4.27)$$

85-мысал. $z=1+x^2+y^2$ функциясының $M_0(1;2;3)$ нүктесіндегі жанама жазықтығының және нормалінің теңдеуін жазу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y,\ M_0(1,2,3)$ нүктесінде $\frac{\partial z}{\partial x}=2,\ \frac{\partial z}{\partial y}=4.$

Осыдан жанама жазықтығының теңдеуі:

$$z-3=2(x-1)+4(y-2) \text{ немесе } 2x+4y-z-7=0,$$

ал нормалінің теңдеуі

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-1}.$$

4.9 Екі айнымалы функцияның экстремумы

D аймағында анықталған $z=f(x,y)$ функциясы берілсін. Осы аймақта жататын $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің маңайында жататын барлық $M(x,y)$ нүктелерінде $f(x_0,y_0)>f(x,y)(f(x_0,y_0)<f(x,y))$ теңсіздігі орындалса, онда $z=f(x,y)$ функциясы M_0 нүктесінде максимум (минимум) мәнін қабылдайды. "Максимум" және "минимум" мәндері экстремум мәндері деп аталады. Үш және одан көп айнымалылардың функцияларының экстремумдары да осылайша анықталады. Кез келген дифференциалданатын екі айнымалы функция экстремум мәндерін тек оның барлық дербес туындылары нөлге тең болатын нүктелерінде ғана қабылдайды. Мұндай нүктелер стационарлық (тұрақты) нүктелер деп аталады. Мысалы, дифференциалданатын $z=f(x,y)$ функциясының стационарлық нүктесі $M_0(x_0,y_0)$

$$\begin{cases} f_x^{'}(x,y)=0, \\ f_y^{'}(x,y)=0 \end{cases} \qquad (4.28)$$

жүйесін шешу арқылы анықталады. (12.28) – шарт $z=f(x,y)$ функциясының экстремум мәндерін қабылдауының шарты болып табылады. Яғни стационарлық нүктелердің барлығы бірдей экстремум нүктелері бола бермейді. Сондықтан олардың әрқайсысы төмендегі функцияның экстремум мәндерін қабылдауының жеткілікті шартын қанағаттандыру керек. $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі $z=f(x,y)$ функциясының стационар нүктесі болсын.

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0),\ B = f''_{xy}(x_0, y_0),\ C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$
$$\Delta = AC - B^2, \qquad (4.29)$$

деп белгілейік. Егер стационарлық $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде:

а) $\Delta > 0$ және $A > 0$ болса, онда M_0 минимум нүктесі болады,
$\Delta > 0$ және $A < 0$ болса, онда M_0 максимум нүктесі болады;

б) $\Delta < 0$ болса, онда M_0 нүктесінде экстремум болмайды;

в) $\Delta = 0$ болса, онда бұл нүктеде экстремум болуы да, болмауы да мүмкін.

86-мысал. $z = 2x^2 - xy + 3y^2 - 5x + 7y$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - y - 5,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 6y + 7$$

болады, осыдан

$$\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ -x + 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің шешімі $x = 1,\ y = -1,\ M(1,-1)$ нүктесіндегі екінші ретті дербес туындылары

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$$

болады. Сонымен

$$\Delta = AC - B^2 = 4 \cdot 6 - (-1)^2 = 23 > 0,\ A > 0.$$

Яғни $M(1,-1)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды және ол

$$z_{\min} = z(M) = -6$$

болады.

4.10 Шартты экстремум. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

4.14-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының шартты экстремумы деп осы функцияның, x және y айнымалыларының $\varphi(x, y) = 0$ теңдеуімен байланысты болған жағдайдағы экстремум мәнін айтады. Мұндағы $\varphi(x, y) = 0$ теңдеуі байланыс теңдеуі деп аталады.

Шартты экстремумды табу үшін Лагранж функциясы деп аталатын $u(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$ функциясының экстремумын табу жеткілікті, мұндағы λ - анықталмаған тұрақты көбейткіш.

Лагранж функциясының экстремумының бар болуының қажетті шарты:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (4.30)$$

Осы үш теңдеуден тұратын жүйеден x, y және λ мәндерін табуға болады.

D тұйық облысында $z = f(x, y)$ функцияның ең үлкен M және ең кіші m мәндерін табу үшін:

а) D облысының ішінде жатқан барлық станционарлық нүктелерді тауып, осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептеу керек (бұл нүктелерде экстремум мәндерінің болуын не болмауын тексерудің қажеті жоқ);

б) D облысының шекарасында функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек;

в) барлық табылған мәндердің ең кішісін (бұл ең кіші мән) және ең үлкенін (бұл ең үлкен мән) таңдап аламыз.

87-мысал. $z = x^2 - y^2$ функциясының байланыс теңдеуі $2x - y - 6 = 0$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек.

Шешуі. Лагранж функциясын қарастырайық:

$$u = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y - 6).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y - \lambda = 0, \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

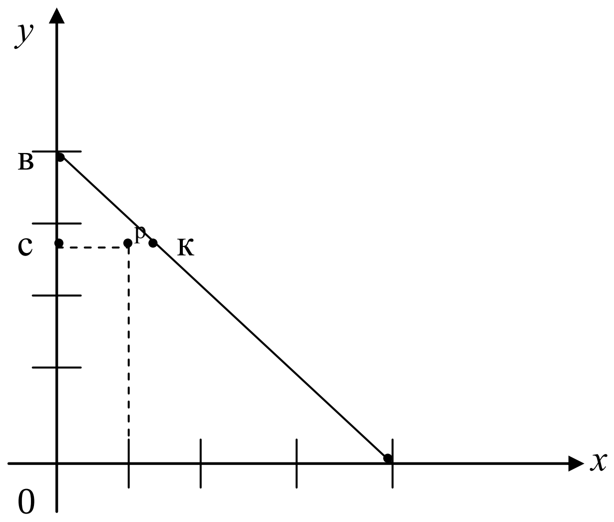
жүйесінен $\lambda = -4, x = 4, y = 2$ мәндері табылады. Осыдан $M(4, 2)$ нүктесінде $z = x^2 - ó^2$ функциясы шартты максимум мәнін қабылдайды және ол $z_{\max} = 12$ болады.

88-мысал. $z = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 10$ функциясының $ó = 0, x = 0,$ $3x + 4y = 12$ сызықтарымен шектелген тұйық D облысындағы (аймағындағы) ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Шешуі. Стационар (тұрақты) M нүктесін табайық.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x - ó - 4 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

Осы жүйеден $x=1, y=2, P(1,2)$ нүктесі D облысының ішінде жатыр. $z(P)=z(1,2)=1$.



4.1 сурет.

Енді берілген функцияны D облысының шекарасында зерттейік. Облыс шекарасы *OA, AB* және *OB* кесінділерінен тұрады:

а) *OA* бөлігінде $y=0, 0\le x\le 4,$ осыдан $z=3x^2-4x+10, z_x^{'}=6x-4=0,$

$$x=\frac{2}{3}\in[0,4],\ N(\frac{2}{3},0),\ z(N)=8\frac{2}{3};$$

OA кесіндісінің шеткі нүктелерінде $z(0)=z(0,0)=10,\ z(A)=z(4,0)=42;$

б) *OB* бөлігінде $x=0, 0\le y\le 3,$ осыдан

$z=2y^2-7y+10,\ z_y^{'}=4y-7,\qquad y=\frac{7}{4}\in[0,3],\ C(0,\frac{7}{4}),\ z(C)=4\frac{7}{8};$

OB кесіндісінің шеткі нүктелерінде $z(0)=10,\ z(B)=z(0,3)=7;$

AB бөлігінде $y=\frac{3}{4}(4-\tilde{o}),\ 0\le \tilde{o}\le 4,$

$z=3x^2-\frac{3}{4}x(4-x)+\frac{9}{8}(4-x)^2-4x-\frac{21}{4}(4-x)+10$ немесе

$z=\frac{39}{8}x^2-\frac{43}{8}x+7,\ z_x^{'}=\frac{39}{4}x-\frac{43}{4}=0,\ x=\frac{43}{39}=1\frac{4}{39}\in[0,4],\ y=2\frac{9}{52},\ K(1\frac{4}{39};2\frac{9}{52}),\ z(K)=1\frac{23}{312};$

AB кесіндісінің шеткі нүктелеріндегі мәндері белгілі.

Табылған $z(P),\ z(N),\ z(K),\ z(C),\ z(0),\ z(A),\ z(B)$ мәндерін салыстыра отырып, z функциясының D облысындағы ең үлкен мәні $M=z(A)=42,$ ал ең кіші мәні $m=z(P)=1$ болатындығын анықтаймыз.

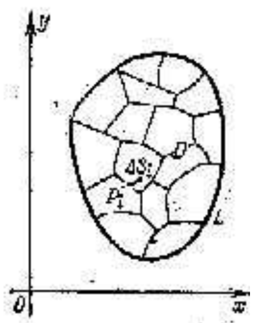
5. Еселі интегралдар

5.1 Қос интегралдың қасиеттері. Қос интегралды еселі интегралға келтіру

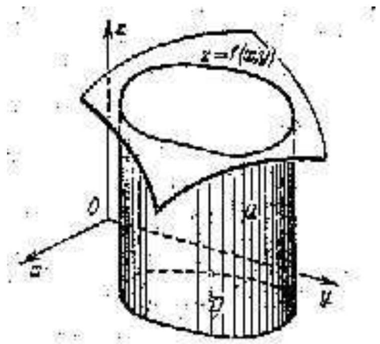
Қос айнымалыға тәуелді үзіліссіз $z = f(x;y)$ функциясы XOY жазықтығының тұйық (D) облысында анықталсын. Осы облысты қандай да бір қисықтармен n бөліктерге бөлеміз. Бөліктерді және олардың сәйкес аудандарын $\Delta s_1; \Delta s_2; ...; \Delta s_n$ деп белгілейміз (5.1-сурет). Әрбір ауданнан бір-бірден нүкте аламыз, сол P_1; P_2; …; P_n нүктелердегі берілген функцияның, яғни $f(P_1); f(P_2);... f(P_n)$
мәндерін есептейміз. Енді $f(P_i)\Delta s_i$ көбейтінділерінен мынадай қосынды құрамыз:

$$V_n = f(P_1)\Delta s_1 + f(P_2)\Delta s_2 + ... + f(P_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta s_i$$

Осы қосындыны $z = f(x;y)$ функциясының (D) облысындағы интегралдық қосындысы деп атаймыз



5.1-сурет



5.2-сурет

Егер $z = f(x;y) \geq 0$ болса, онда бұл қосындының әрбір $f(P_i)\Delta s_i$ қосылғышын табан ауданы Δs_i болатын, ал биіктігі $f(P_i)$ болатын цилиндрдің көлемі деп қарастыруға болады (5.2-сурет).(D) облысында f(x;y) функциясының көмегімен V_{n1} ; V_{n2};… V_{nk}; …
интегралдық қосындылар тізбегін қарастырамыз. Егер $n_k \to \infty$ жағдайда Δs_i аудандарының ең үлкен диаметрі нольге ұмтылады деп жоримыз. Осы жағдайда мына тұжырым орындалады (дәлелдеусіз қабылдаймыз).

5.1- теорема. Егер тұйық (D) облысында f(x;y) функциясы үзіліссіз болса , онда Δs_i аудандарының ең үлкен диаметрі нольге ұмтылып, ал $n \to \infty$ жағдайда интегралдық қосындылар тізбегінің шегі бар болады. Бұл шектің мәні (D) облысы бөліктерге қандай әдістермен бөлінсе де, Δs_i аудандарынан P_i нүктесі қалай таңдалып алынса да , бірдей болады. Осы шекті f(x;y) функциясының (D) облысындағы **қос интегралы** деп атаймыз және былай белгілейміз: $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$. Сонымен $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i = \iint\limits_D f(x;y)dxdy$,
мұндағы (D) – интегралдау облысы деп аталады. Қос интеграл туралы мынадай теоремаларды қарастырамыз.

5.2-теорема. (D) облысы бойынша екі функцияның $\phi(x;y)+\varphi(x;y)$ қосындысының қос интегралы осы функциялардың әрқайсысының осы облыс бойынша қос интегралының қосындысына тең болады, яғни

$$\iint_D (\phi(x;y)+\varphi(x,y))dxdy = \iint_D \phi(x;y)dxdy + \iint_D \varphi(x;y)dxdy \ .$$

5.3-теорема. Тұрақты көбейткішті қос интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни, егер а – тұрақты болса, онда

$$\iint_D af(x;y)dxdy = a\iint_D f(x;y)dxdy \, .$$

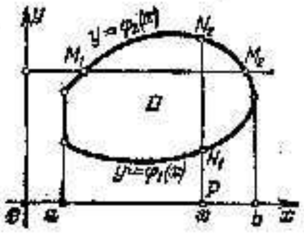
5.4-теорема. Егер (D) облысы ортақ ішкі нүктелері жоқ (D_1) және (D_2) екі облысқа бөлінсе және $f(x;y)$ функциясы осы (D) облысында үзіліссіз болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_{D_1} f(x;y)dxdy + \iint_{D_2} f(x;y)dxdy \, .$$

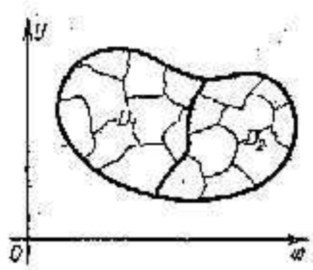
Екі еселі интеграл

XOY жазықтығында жатқан (D) облысының мынадай қасиеті бар болсын, яғни облыстың ішкі нүктесі арқылы өтетін координата осьтерінің біреуіне, мысалы Oy осіне параллель кез-келген түзу осы облыстың шекарасын N_1, N_2 нүктелерінде қиып өтетін болсын. (D) облысын мынадай теңдеулермен анықтайық: $y=\varphi_1(x); y=\varphi_2(x); \quad \varphi_1(x)\le\varphi_2(x); \quad a\le x\le b.$

Ал $\varphi_1(x);\varphi_2(x)$ функциялары $[a;b]$ аралығында үзіліссіз. Осындай қасиеті бар облысты OY өсі бойынша дұрыс облыс деп атаймыз. Дәл осылай OX өсі бойынша дұрыс облысты анықтауға болады. Осындай (D) облысын қарастырамыз.



5.3-сурет



5.4-сурет

(D) облысындағы $f(x;y)$ функциясының екі еселі интегралы деп аталатын мына өрнекті қарастырайық.

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy \right) dx$$

Алдымен бұл өрнектегі жақша ішіндегі интегралды x тұрақты деп санап, y бойынша есептеп алып, алынған x – ке тәуелді фунгцияны $[a;b]$ аралығында интегралдаймыз.

89-мысал . Мына екі еселі интегралды есептеу керек. $\int_1^2 \left(\int_x^{x\sqrt{3}} xydy \right) dx$

Шешуі: $\int\limits_1^2 (\int\limits_x^{x\sqrt{3}} xydy)\,dx =$

$$=\int\limits_1^2 xdx\int\limits_x^{x\sqrt{3}} ydy=\int\limits_1^2 xdx\frac{y^2}{2}/_x^{x\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 x(3x^2-x^2)dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 2x^3dx=(\frac{x^4}{4})_1^2=\frac{15}{4}.$$

90-мысал . Есептеу керек $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{x^2}(2x-y)dy.$

Шешуі. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{x^2}(2x-y)dy.=\int\limits_0^2\left(2xy-\frac{y^2}{2}\right)_x^{x^2}dx=\int\limits_0^2\left((2x^3-2x^2)-\frac{1}{2}(x^4-x^2)\right)dx=$

$$\int\limits_0^2\left(2x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{10}\right)_0^2=8-4-\frac{32}{10}=\frac{4}{5}.$$

Енді екі еселі интегралдың кейбір қасиеттерін қарастырайық.

1.Егер ОУ осіне қарағандағы дұрыс (D) облысын ОУ немесе ОХ осіне параллель түзу арқылы (D_1), (D_2) екі облысқа жіктесек, онда осы облыстағы екі еселі интеграл (D_1) ;(D_2) облыстары бойынша екі еселі интегралдардың қосындысына жіктеледі.(4-сурет)

$$I_D = I_{D1} + I_{D2}.$$

2. (D) облысындағы $f(x;y)$ функциясының ең кіші және ең үлкен мәндері m;M болсын, осы (D) облысының ауданы S болсын. Сонда мынадай теңсіздіктер орындалады:

$$mS\le\int\limits_a^b(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy)dx\le MS$$

3.Ауданы S-ке тең (D) облысындағы үзіліссіз $f(x;y)$ функциясының екі еселі интегралы осы облыстың P нүктесіндегі функция мәні мен облыс ауданының көбейтіндісіне тең болады,яғни

$$\int\limits_a^b(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy)dx= f(\mathrm{P})\mathrm{S}$$

Енді қос интегралды есептеуге мүмкіндік беретін мына теореманы қарастырайық.

5.5-теорема.Мына теңдеулермен анықталған $y=\varphi_1(x); y=\varphi_2(x);\quad \varphi_1(x)\le\varphi_2(x);\quad a\le x\le b.$ дұрыс (D) облысындағы үзіліссіз $f(x;y)$ функциясының қос интегралы осы облыс бойынша осы функцияның екі еселі интегралына тең болады, яғни

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy)dx$$

Дәлелдеу: Берілген облысты координата осьтеріне параллель түзулермен қиып, n дұрыс облыстарға бөлеміз: $\Delta s_1;\Delta s_2;\Delta s_3;...;\Delta s_n$.

Екі еселі интегралдың 1-қасиеті бойынша $I_D = \sum\limits_{i=1}^{n} I_{\Delta s_i}$

Теңдіктің оң жағындағы қосындының әрбір қосылғышын былай түрлендіреміз:

$I_{\Delta s_i} = f(P_i)\Delta s_i$ Сонда

$$I_D = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i$$, мұндағы P_i - Δs_i облысының кез-келген нүктесі.

Бұл теңдіктің оң жағында $f(x;y)$ функциясының (D) облысы бойынша интегралдық қосындысы тұр.Осы арада шекке көшу арқылы мына теңдікті аламыз:

$$I_D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i = \iint_D f(x;y)dxdy$$

Сонымен $\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy \right) dx$

91-мысал. Есептеу керек $\iint_D x\ln y dxdy;$ *егер* $0 \le x \le 4,\ 1 \le y \le e$ -тік төртбұрыш.

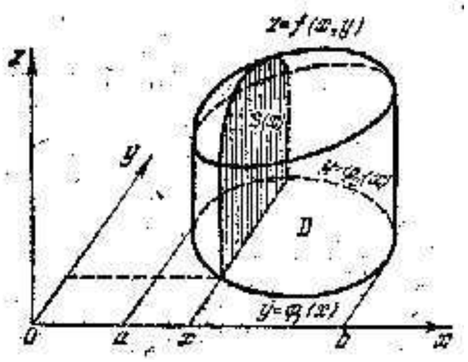
Шешуі. Интегралдау шектерін қоямыз

$$\iint_D x\ln y dxdy = \int_0^4 xdx \int_1^e \ln y dy = \int_0^4 xdx (y\ln y - y)_1^e = \int_0^4 (e\ln e - e + 1)xdx = \int_0^4 xdx = \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^4 = 8.$$

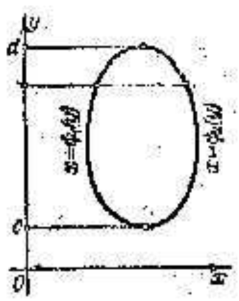
Жауабы. 8.

Ескерту 1. $f(x;y) \ge 0$ болғанда бұл формуланың мынадай геометриялық мағынасы бар. $z = f(x;y)$ бетімен, z=0 жазықтығымен және жасаушылары OZ осіне параллель , ал бағыттауышы (D) облысының шекарасы болатын цилиндрлік бетпен шектелген денені алайық (5-сурет). Бұл дененің көлемі $z = f(x;y)$ функциясының (D) облысы бойынша қос интегралына тең болады, яғни

$$V = \iint_D f(x;y)dxdy$$



5.5-сурет



5.6-сурет

Ескерту 2. Енді OX өсі бойынша дұрыс (D) облысы мынадай теңдеулермен берілсін (6-сурет):

$x = \phi_1(y); x = \phi_2(y) \quad y = c; y = d; \quad \phi_1(y) \le \phi_2(y)$

Бұл жағдайда қос интеграл былай өрнектеледі:

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x;y)dx \right) dy.$$

92-мысал. $\iint\limits_{(D)}(a-x-y)dxdy$ қос интегралын есептеу керек. Мұндағы (D) облысы мынадай теңдеулермен берілген x+y= a; x=0; y=0.

Шешуі: Қос интегралдың шектерін қойып есептейміз:

$$\iint\limits_{(D)}(a-x-y)dxdy=\int_0^a dx\int_0^{a-x}(a-x-y)dy=\int_0^a dx\Big[\,(a-x)y-\frac{y^2}{2}\,\Big]_0^{a-x}=$$

$$=\int_0^a\left[(a-x)^2-\frac{(a-x)^2}{2}\right]dx=\int_0^a\frac{(a-x)^2}{2}dx=-\left[\frac{(a-x)^3}{6}\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$$

93-мысал . Интегралдау ретін өзгерту керек.

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}f(x;y)dy$$

Шешуі: Интегралдау облысы $y=x^2$ параболасымен, y=1 түзуімен шектелген. Мұндағы $-1\le x\le 1$. Интегралдау тәртібін өзгерткенде мынадай өрнек шығады:

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}f(x;y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x;y)dx.$$

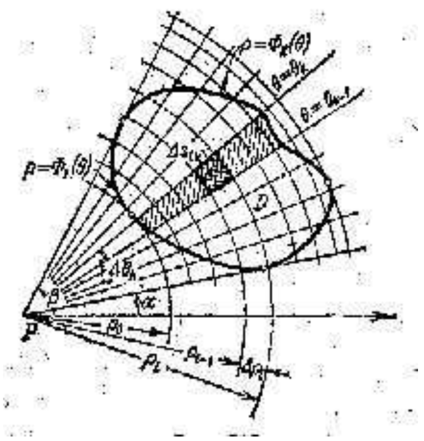
5.2 Полярлық коодинаталардағы қос интеграл

$(\rho;\theta)$ полярлық координата жүйесінде D облысы берілсін. Кез келген ішкі нүктесі арқылы өтетін сәуле оның шекарасын тек екі нүктеде қиып өтсін.

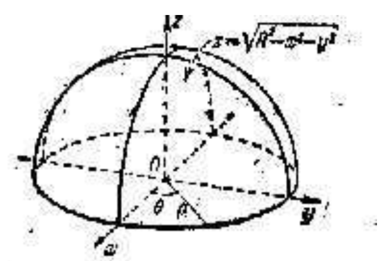
(D) облысы $\rho=\Phi_1(\theta)$, $\rho=\Phi_2(\theta)$ қисықтарымен, $\theta=\alpha,\ \theta=\beta$ - сәулелермен шектелген.

$\Phi_1(\theta)\le\Phi_2(\theta)$, $\alpha\prec\beta$.Осындай облыс дұрыс облыс деп аталады.

Осы D облысында $z=F(\theta;\rho)$ үзіліссіз функциясы берілген. (D) облысын n бөліктерге бөлеміз. $\Delta S_1,\ \Delta S_2,\dots,\ \Delta S_n$ - аудандары (13.7-сурет).



5.7-сурет



5.8-сурет

Интегралдық қосынды құрамыз:

$V_n = \sum_{k=1}^{n} F(P_k)\Delta S_k$.Егер $\max diam\Delta S_k \to 0$, сонда V_n интегралдық қосындының шегі тұрақты болады. Сол тұрақты шек $\iint_D F(\rho,\theta)ds$ интегралына тең болады.

Енді осы түрдегі қос интегралды есептеу жолын қарастырамыз:

$\Delta S_{i,k}$ қарастырамыз $\begin{matrix} \rho = \rho_{i-1}, & \rho = \rho_i \\ \theta = \theta_{k-1}, & \theta = \theta_k \end{matrix}$

$\Delta S_{i,k}$ - ?

$\Delta S_{i,k} = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \Delta\theta_k - \frac{1}{2}\rho_i{}^2\Delta\theta_k = (\rho_i + \frac{\Delta\rho_i}{2})\Delta\rho_i\Delta\theta_k$; $\Delta \mathrm{S}_{\mathrm{i,k}} = \rho_i * \cdot\Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_k$

$\rho_i \prec \rho_i^* \prec \rho_i + \Delta\rho_i$

$\Delta S_{i,k} = \rho_i^* \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_k$

Сонда интегралдық қосынды

$$V_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_i F(\theta_n^*, \rho_i^*)\rho_i^* \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_k\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*)\rho_i^* \cdot \Delta\rho_i\right] \cdot \Delta\theta_k$$

$\Delta\rho_i \to 0$, бұл жағдайда ішкі қосынды $\int_{\Phi_1(\theta_k^*)}^{\Phi_2(\theta_k^*)} F(\theta_k^*, \rho)\rho\, d\rho$ интегралына ұмтылады.

$\Delta\theta_k \to 0$, онда мына интегралды аламыз:

$$V = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta,\rho)\rho\, d\rho\right) d\theta$$

Ал егер интегралдау алдымен θ бойынша жүргізілсе, онда

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\left(\int_{\omega_1(\rho)}^{\omega_2(\rho)} F(\theta,\rho)d\theta\right)\rho\, \mathrm{d}\rho$$

Сонымен тік бұрышты координаталар жүйесінде берілген $\iint_D f(x,y)dxdy$ интегралын есептеу керек.Тік бұрышты координаталардан полярлық координаталарға көшу формуласын жазамыз, сонда

$$\left.\begin{matrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{matrix}\right\}$$

$\mathrm{dxdy} = \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\,.$$

94-мысал. Есептеу керек $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$ (D) облысы: $x^2 + y^2 \le R^2$

Шешуі. Полярлық координаталарға көшеміз:

$x = \rho\cos\theta$, $\mathrm{y} = \rho\sin\theta$, сонда $\rho = \mathrm{R}$ - берілген облысты шектейтін шеңбердің полярлық теңдеуі.Бұл облыста $0 \le \rho \le R$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

5.3 Үштік интеграл. Үштік интегралды анықтау. Үштік интегралды есептеу

Кеңістікте S бетімен шектелген V облысы берілсін. Осы облыста $f(x,y,z)$ функциясы анықталған. V облысын n бөліктерге бөлеміз. Әр бөліктен бір-бірден P_i нүктелерді алып, $f(P_i)$ мәндерін есептейміз. Бөліктердің көлемін $\Delta\upsilon_i$ деп белгілейміз. Осы облыста мынадай интегралдық қосынды құрамыз: $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta\upsilon_i$.

$\max diam\,\Delta\upsilon_i \to 0$ болатындай $\Delta\upsilon_i$ көлемдердің санын шексіз көбейтеміз, яғни $n\to\infty$.

Егер $f(x,y,z)$ функциясы үзіліссіз болса, онда интегралдық қосындының шегі бар болады. Бұл шек V облысын n бөліктерге бөлу әдісіне де, P_i нүктелерін таңдап алуға да тәуелді емес. Осы шекті былай белгілейміз $\iiint\limits_V f(P)dv$ және үштік интеграл деп атаймыз.

Сонымен анықтамасы бойынша:

$$\iiint\limits_V f(P)dv = \lim_{diam\Delta v_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i \text{ немесе}$$

$$\iiint\limits_V f(P)dv = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz\,.$$

Егер $f(x,y,z)$ функциясы V облысында орналасқан заттың тығыздығы болса, онда бұл интеграл осы V облысында орналасқан заттың массасын береді.

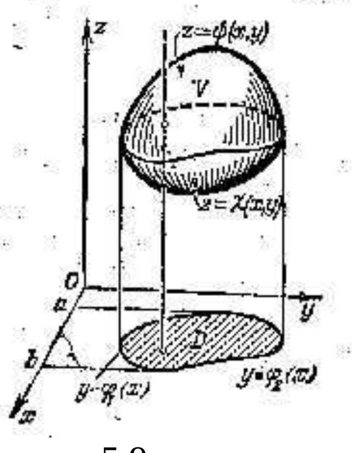
Кеңістіктегі S бетімен шектелген V облысының мынадай қасиеттері болсын:

1.Облыстың ішкі нүктесі арқылы Oz осіне параллель жүргізілген кез келген түзу S бетін екі нүктеде қиып өтеді;

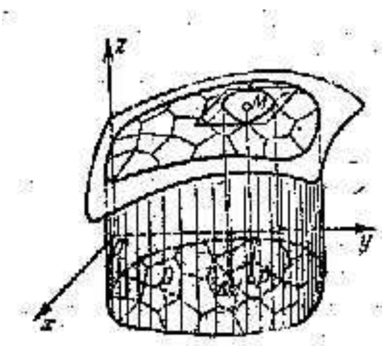
2.Бүкіл V облысы XOY жазықтығына дұрыс D облысы болып проекцияланады;

3.Кез келген координата жазықтығына параллель жазықтықпен қиылған V облысының кез келген бөлігі алдыңғы екі қасиетті қанағаттандырады. Осындай қасиеттері бар V облысын үш өлшемді дұрыс облыс деп атаймыз.

Мысалы, эллипсоид, тікбұрышты параллелепипед, тетраэдр, т.с.с.



5.9-сурет.



5.10-сурет.

V облысы төменгі жағынан $z = \chi(x, y)$ бетімен, жоғарғы жағынан $z = \phi(x, y)$ бетімен шектелген. Айталық, V облысының XOY жазықтығындағы проекциясы болатын D облысы мынадай теңдеулермен анықталсын (9-сурет): $y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x), \quad x = a, \quad x = b$.

V облысында анықталған және үзіліссіз $f(x, y, z)$ функциясының V облысы бойынша үш еселі интегралы деп аталатын мынадай өрнекті қарастырамыз:

$$I_V = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\chi(x,y)}^{\phi(x,y)} f(x, y, z) dz .$$

Бұл жерде алдымен ішкі интеграл x пен y тұрақты деп саналып z айнымалысы бойынша есептеледі, содан кейін шыққан x,y айнымалыларына тәуелді функцияның екі еселі интегралын интегралдаймыз.

95-мысал. Есептеу керек $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int x^3 y^2 z dz$

Шешуі. $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int x^3 y^2 z dz =$

$$\int_0^1 x^3 dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z dz = \int_0^1 x^3 dx \int_0^x y^2 \left(\frac{z^2}{2} \right)_0^{xy} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^4 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 \left(\frac{y^5}{5} \right)_0^x =$$

$$= \frac{1}{10} \int_0^1 x^{10} dx = \left(\frac{x^{11}}{110} \right)_0^1 = \frac{1}{110}.$$

Үш еселі интегралдың мынадай қасиеттері бар:

1. Егер V облысын координата жазықтықтарының біреуіне параллель жазықтықпен V_1 ,V_2 екі облысқа жіктесек, онда V облысы бойынша үш еселі интеграл V_1 және V_2 облыстары бойынша үш еселі интегралдардың қосындысына жіктеледі:

$I_V = I_{V_1} + I_{V_2}$.

Ал V облысы V_1 ,V_2 ,V_3 ,...,V_n облыстарға жіктелсе, онда мына теңдік орындалады:

$I_V = I_{V_1} + I_{V_2} + ... + I_{V_n}$.

2. Егер $f(x, y, z)$ функциясының V облысындағы ең кіші және ең үлкен мәндері сәйкес m; M болса, ал V – облыстың көлемі болса, онда мына теңсіздік орындалады:

$$mV \le I_V \le MV$$

3. V облысында үзіліссіз $f(x, y, z)$ функциясының үш еселі интегралы осы функцияның V облысынан алынған кезкелген P нүктесіндегі мәні мен осы облыс көлемінің көбейтіндісіне тең болады:

$$I_V = f(P) \cdot V$$

Енді үштік интегралды есептеу формуласын қарастырайық.

Теорема. Дұрыс V облысы бойынша $f(x,y,z)$ функциясының үштік интегралы осы облыс бойынша осы функцияның үш еселі интегралына тең болады, яғни

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\chi(x;y)}^{\phi(x;y)} f(x;y;z)dz .$$

Дәлелдеу. V облысын координата жазықтықтарына параллель жазықтықтармен қиып, n бөліктерге бөлеміз.Көлемдерін $\Delta v_1;\Delta v_2;...;\Delta v_n$ деп белгілейміз. Жоғарыдағыдай V облысындағы үш еселі интегралды I_V деп, ал Δv_i облысындағы үш еселі интегралды $I_{\Delta v_i}$ деп белгілейміз.Сонда

$$I_V = I_\Delta + I_{\Delta V_2} + ... + I_{\Delta V_n}$$

Бұл қосындының әрбір қосылғышын былай түрлендіреміз:

$$I_{\Delta V_i} = f(P_i)\Delta v_i$$

мұндағы Δv_i - сәйкес бөліктің көлемі, ал P_i – сол бөліктен алынған нүкте. Сонда

$$I_V = f(p_1)\Delta v_1 + f(P_2)\Delta v_2 + ... + f(P_n)\Delta v_n \quad \text{немесе } I_V = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i$$

Бұл теңдіктің оң жағында V облысы бойынша $f(x,y,z)$ функциясының интегралдық қосындысы. Қалауымыз бойынша V облысы бойынша $f(x,y,z)$ функциясы үзіліссіз, ендеше $\max diam\Delta v_i \to 0$ жағдайда оның шегі үштік интегралға тең болады.Ал сол жақтағы өрнектің шегі өзіне тең. Сөйтіп мына теңдікті аламыз:

$I_V = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

Сонымен

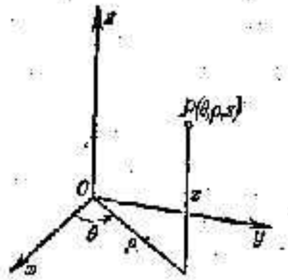
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\chi(x;y)}^{\phi(x;y)} f(x;y;z)dz .$$

Ескерту. V облысының түріне сәйкес интегралдау тәртібін өзгертуге болады.

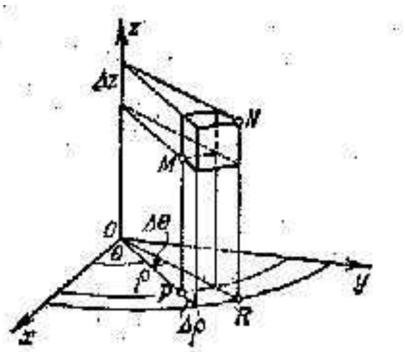
5.4 Цилиндрлік және сфералық координаталардағы үштік интеграл

1. Цилиндрлік координаталардағы үштік интеграл.

Кеңістіктегі Р нүктесінің цилиндрлік координаталары $\rho;\theta;z$ сандарымен анықталады. Мұндағы $\rho;\theta$ сандары Р нүктесінің XOY жазықтығына түскен проекциясының полярлық координаталары, ал zсаны – кәдімгі аппликата, яғни Р нүктесінің XOY жазықтығынан ара қашықтығы, ол XOY жазықтығынан жоғары жатса, плюс таңбасымен, ал төмен жатса - минус таңбасымен алынады (11-сурет).



5.11-сурет.



5.12-сурет.

Кеңістіктегі V облысын қарастырайық. Осы облысты $\theta=\theta_i; \rho=\rho_j; z=z_k$ жазықтықтарымен n бөліктерге бөлейік. Мұндағы $\theta=\theta_i$ – OZ осіне тірелетін жарты жазықтықтар, $\rho=\rho_j$ - дөңгелек цилиндрлер, $z=z_k$ – OZ осіне перпендикуляр жазықтықтар. Бұл жерде элементар көлем үшін табан ауданы $\rho\Delta\theta\Delta\rho$ –тең, ал биіктігі Δz-ке тең қисық призма (12-сурет) алынады.Сондықтан $\Delta v=\rho\Delta\rho\Delta\theta\Delta z$.Олай болса

$$I=\iiint\limits_V F(\rho;\theta;z)\rho d\rho d\theta dz .$$

Интегралдау шектері облыстың түріне байланысты анықталады.

96-мысал. $\iiint\limits_{NV} zdxdydz$ интегралын V облысында есептеу керек. Мұндағы V облысы $z^2=\frac{h^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right)$ конусымен және z = h жазықтығымен шектелген.

Шешуі. Конустың z = h жазықтығымен қимасы $x^2+y^2\le R^2$ дөңгелегі болады. Цилиндрлік координаталарға көшеміз.

$x=\rho\cos\theta; y=\rho\sin\theta; z=z$. Сонда конустың бұл координаталардағы теңдеуі

$z^2=\frac{h^2}{R^2}\left(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\right)=\frac{h^2}{R^2}\rho^2; \quad z=\frac{h}{R}\rho$ болады. Ал дөңгелек облыс бойынша $0\le\rho\le R; \quad 0\le\theta\le 2\pi;$ ал z айнымалысының өзгерісі мынадай болады: $\frac{h}{R}\rho\le z\le h$. Енді үштік интегралдағы орындарына қоямыз:

$$\iiint\limits_V zdxdydz=\iiint\limits_V z\rho d\rho\, d\theta\, dz=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^R d\rho\int\limits_{\frac{h}{R}\rho}^{h} zdz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^R \rho d\rho\int\limits_{\frac{h}{R}\rho}^{h} zdz=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^R \rho\frac{1}{2}(h^2-\frac{h^2}{R^2}\rho^2)d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^R(h^2\rho-\frac{h^2}{R^2}\rho^3)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{h^2\rho^2}{2}-\frac{h^2}{R^2}\frac{\rho^4}{4}\right)\Big/_0^R d\theta=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{h^2R^2}{2}-\frac{h^2R^2}{4}\right)d\theta=$$

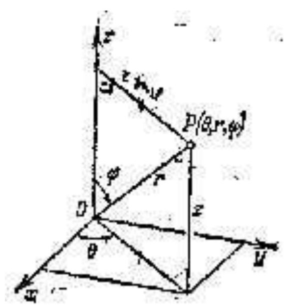
$$=\frac{1}{2}\frac{h^2R^2}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\theta=\frac{h^2R^2\pi}{4}.$$

Сонымен $\iiint\limits_{v} zdxdydz = \frac{h^2 R^2 \pi}{4}.$

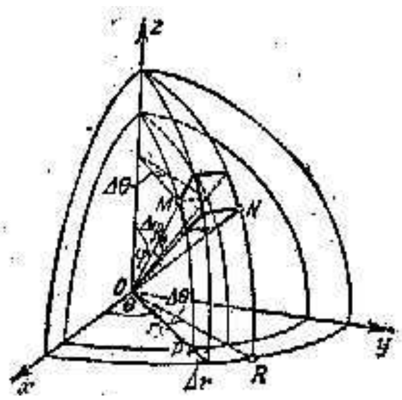
2. Сфералық координаталардағы үштік интеграл. Кеңістіктегі Р нүктесінің сфералық координаталары r, φ, θ үш санымен анықталады. Мұндағы r саны-нүктенің координата басынан қашықтығы, яғни радиус-вектор $0 \le r < \infty; \varphi$ -радиус-вектор мен OZ осінің арасындағы бұрыш, $0 \le \varphi \le \pi$; θ-радиус-вектордың XOY жазықтығына түскен проекциясының OX өсімен жасайтын бұрышы, $0 \le \theta < 2\pi$ (5.13-сурет).
V облысын r=const (сфералар); $\varphi = const$ (төбелері координата басында жатқан конустық беттер); ө=const (OZ осі арқылы өтетін жарты жазықтықтар) координаталық беттерімен қиып, Δv элементар бөліктерге бөлеміз.Элементар көлем үшін қырлары $\Delta r, r\Delta\varphi, r\sin\varphi\Delta\theta$ болатын параллелепипедті (5.14-сурет) аламыз.Сонда оның көлемі $\Delta v = r^2 \sin\varphi\Delta r\Delta\varphi\Delta\theta$
Ал V облысы бойынша $F(r,\varphi,\theta)$ функциясының үштік интегралы мынадай болады I = $\iiint\limits_{v} F(r,\varphi,\theta) r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta$.

Интегралдау шектері V облысының түріне байланысты болады.17-суреттен көрініп тұрғанындай нүктенің тік бұрышты координаталарынан сфералық координаталарына былай өтеміз:
$x = r\sin\varphi\cos\theta;$
$y = r\sin\varphi\sin\theta;$
$z = r\cos\varphi.$
Сондықтан үштік интегралдағы сфералық координаталарға көшу формуласы мынадай болады:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{v} F(r\sin\varphi\cos\theta; r\sin\varphi\sin\theta; r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta.$$



13.13-сурет.



13.14-сурет.

97-мысал. Сфералық координаталарға көшу арқылы мына интегралды есептеу керек $\iiint\limits_{V} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$, мұндағы V облысы - радиусы R-ге тең шар.

Шешуі. Шар үшін сфералық координаталардағы интегралдау шектері мынадай болады: $0 \le r \le R;\ 0 \le \varphi \le \pi; 0 \le \theta \le 2\pi$. Сондықтан

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \left(\frac{r^4}{4}\right)_0^R = \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} \left(-\cos\varphi\right)_0^{\pi} d\theta = \frac{R^4}{2} 2\pi = R^4 \pi.$$

5.5 Еселі интегралдарды геометрия және механика есептерінде қолдану

5.5.1 Қос интегралдарды қолдану формулалары

1. Көлем есептеу формуласы.

$z = f(x, y) \ge 0$ бетімен , z=0 жазықтығымен және жасаушылары Oz осіне параллель циллиндрлік бетпен шектелген дененің көлемін былай табамыз:

$$V = \iint_D f(x, y) ds.$$

Ескерту! Егер дене $z = \Phi_2(x, y) \ge 0;\ z = \Phi_1(x, y) \ge 0$ беттерімен шектелсе, әрі беттердің әрқайсысының XOY жазықтығындағы проекциясы D облысы болса, онда бұл дененің көлемі V екі циллиндрлік дененің көлемдерінің айырмасына тең болады (16-сурет).

$$V = \iint_D \Phi_2(x, y) ds - \iint_D \Phi_1(x, y) ds \quad \text{немесе} \quad V = \iint_D \left[\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)\right] ds.$$

2. Аудан есептеу формуласы.

Егер интегралдық қосындыны D облысында f(x;y)=1 функциясы үшін құратын болсақ, онда бұл қосынды осы облыстың ауданына тең болады.

$$S = \iint_D dxdy.$$

3. Беттің ауданын есептеу формуласы.

$z = f(x, y)$ теңдеуімен берілген беттің шекарасы Г қисығы болсын. $z = f(x, y)$ функциясы өзінің дербес туындыларымен үзіліссіз болсын. Осы қисықтың XOY жазықтығындағы проекциясы L қисығы, ал осы қисықпен шектелген XOY жазықтығындағы облысты (D)деп белгілейміз(17-сурет). Осы беттің ауданы мына формуламен табылады.

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

4. Пластинка массасын есептеу формуласы.

D облысында әрбір (x,y) нүктесіндегі тығыздығы $f(x; y)$ болатын пластинка орналасқан. Осы пластинканың массасы былай табылады:

$$M=\iint_D f(x,y)dxdy$$

5. Пластинканың ауырлық центрінің координаталарын есептеу формуласы.

$$x_C=\frac{M_y}{M},\quad y_C=\frac{M_x}{M};$$

Мұндағы $M_y=\iint_D xf(x,y)dxdy;\quad M_x=\iint_D yf(x,y)dxdy;$- пластинканың ОУ ,ОХ осьтеріне қарағандағы статикалық моменттері, ал М-массасы.

Пластинка біртекті болған жағдайда $f(x,y)=const.$

6.Жазық фигура ауданының инерция моменті.

ХОУ жазықтығында орналасқан D жазық фигураның O(0;0) координата басына қарағандағы инерция моменті.

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)dxdy \qquad f(x,y)=x^2+y^2;$$

Ал координата осьтеріне қарағандағы инерция моменттері былай табылады:

$$I_{xx}=\iint_D y^2dxdy,\qquad I_{yy}=\iint_D x^2dxdy$$

мұндағы (D) – берілген жазық фигураға сәйкес келетін облыс.

5.5.2 Үштік интегралдарды қолдану формулалары

1. Көлем есептеу формуласы. Кеңістіктегі V облысының көлемі былай табылады:

$$V=\iiint_V dxdydz\ .$$

2. Дененің массасын есептеу формуласы. Егер V облысында орналасқан заттың тығыздығы f(x;y;z) функциясына тең болса, онда осы облыста орналасқан заттың массасы былай табылады:

$$M=\iiint_V f(x;y;z)dxdydz.$$

3. Дененің ауырлық центрінің координаталарын табу формулалары. Дененің ауырлық центрін белгілейміз $C(x_C;y_C;z_C)$.Сонда оның координаталары былай табылады:

$$x_C=\frac{M_{yz}}{M};\quad y_C=\frac{M_{xz}}{M};\quad z_C=\frac{M_{xy}}{M}$$

Мұндағы $M_{xz;}:M_{yz};M_{xy}$ - дененің сәйкес координата жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттері, ал М- дене массасы. Ал статикалық моменттерді былай табамыз:

$$M_{yz}=\iiint_V xf(x;y;z)dxdydz;\ M_{xz}=\iiint_V yf(x;y;z)dxdydz;\ M_{xy}=\iiint zf(x;y;z)dxdydz.$$

4. Дененің координата осьтеріне қарағандағы инерция моменттері.

Егер V облысында орналасқан заттың тығыздығы f(x;y;z) функциясына тең болса, онда осы дененің OX; OY;OZ осьтеріне және координата басына қарағандағы инерция моменттері былай табылады:

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) f(x;y;z)dxdydz; \qquad I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2) f(x;y;z)dxdydz;$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) f(x;y;z)dxdydz. \qquad I_O = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) f(x;y;z)dxdydz$$

5.6 Қисық сызықты интегралдар

5.6.1 Қисық сызықты интегралдың 1-түрі

z=f(x;y) үзіліссіз функциясы берілген. $y = \varphi(x);\ \ a \le x \le b$ C қисық сызығының теңдеуі. Осы қисық сызықты $M_1;M_2;M_3;\ ...;M_n$ нүктелерімен n бөліктерге бөлеміз. M_{i-1} және M_i нүктелерінің арасын қосатын доғаны Δs_i деп белгілейміз.

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + \Delta y_i^{\,2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

Интегралдық қосынды құрамыз.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_i;y_i)\Delta s_i$$

Осы интегралдық қосындының $n \to \infty$ және $\max \Delta S_i \to 0$ жағдайда ұмтылатын шегін қисық сызықты интегралдың 1-түрі деп немесе қисықтың доғасы бойынша интеграл деп атаймыз және былай белгілейміз:

$$\int\limits_C f(x;y)ds$$

Сонымен анықтамасы бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i = \int\limits_C f(x;y)ds$

Мұндағы ds - доғаның дифференциалы. Қисық сызықты интегралдың 1-түрі интегралдау жолының бағытына тәуелді емес. Егер интегралданатын функцияны C қисығының сызықтық тығыздығы деп есептесек, онда бұл интеграл сол қисықтың массасына тең болады. Енді есептеу жолдарын қарастырайық.

1. Егер C қисығы $y = \varphi(x)$ теңдеуімен айқын түрде берілсе, ал $a \le x \le b$, онда бұл интеграл мынадай анықталған интегралға келтіріледі:

$$\int\limits_C f(x;y)ds = \int\limits_a^b f(x;\varphi(x))\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}dx$$

2. Егер C қисығы $x = \varphi(t); y = \phi(t)\quad \alpha \le t \le \beta$ түрінде параметрлік теңдеулермен берілсе , онда бұл интеграл мынадай анықталған интегралға келтіріледі:

$$\int\limits_C f(x;y)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t);\phi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)}dt\ .$$

98-мысал. $\int\limits_{OA}\frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ интегралын O(0,0); A(1;2) нүктелерінің арасын қосатын түзудің кесіндісі бойынша есептеу керек.

Шешуі. (OA) түзуінің теңдеуін құрамыз y = 2x .Ендеше $y'=2$

ds = $\sqrt{1+4}dx=\sqrt{5}dx$. Орнына қоямыз:

$$\int\limits_{OA}\frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{5x^2+4}}=\sqrt{5}\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{5(x^2+\frac{4}{5})}}=\left(\ell n\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right|\right)_0^1=\ell n\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

5.6.2 Қисық сызықты интегралдың 2-түрі

XOY жазықтығында L қисық сызығын қарастырамыз. P(x;y) нүктесі осы қисықтың M нүктесінен N нүктесіне қарай жылжиды, оған $\vec{F}=\vec{F}(P)$ күші әсер етеді. Осы күштің осы жолда жасайтын жұмысын қарастырайық. L қисығын $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ нүктелерімен n бөліктерге бөлеміз.Белгілеу енгіземіз (15-сурет) $\Delta\vec{S}_i=M_i\vec{M}_{i+1i}$. Ал M_i нүктесіндегі $\vec{F}$ күшінің мәнін $\vec{F}_i$ деп белгілейміз.Сонда $\vec{F}_i\Delta\vec{S}_i$ скаляр көбейтіндісін $\vec{F}$ күшінің M_iM_{i+1} доғасында жасаған жұмысының жуық мәні деп санауға болады.

$$A_i\approx\vec{F}_i\Delta\vec{S}_i$$

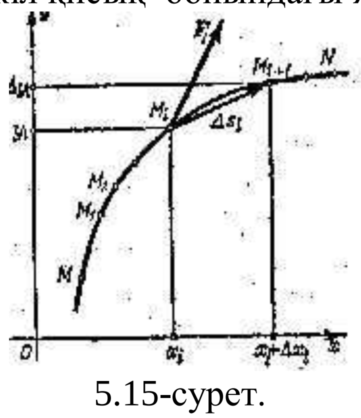
Енді $\vec{F}=X(x;y)\vec{i}+Y(x;y)\vec{j}$ векторын қарастырайық.

$$\Delta S_i=\Delta x_i\vec{i}+\Delta y_i\vec{j}$$

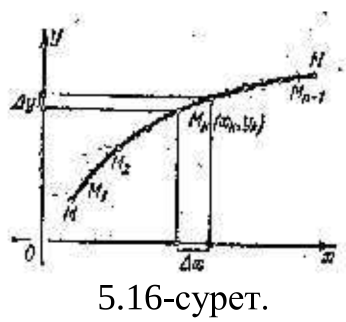
Сондықтан

$$\vec{F}_i\Delta S_i=X(x_i;y_i)\Delta x_i+Y(x_i;y_i)\Delta y_i.$$

Бүкіл қисық бойындағы жұмыстың жуық мәні



5.15-сурет.



5.16-сурет.

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\Delta\vec{S}_i=\sum_{i=1}^{n}\left[X(x_i;y_i)\Delta x_i+Y(x_i;y_i)\Delta y_i\right]$$

Осы арадан $\Delta S_i\to 0$ шегін тапсақ, бұл жерде $\Delta x_i\to 0;\Delta y_i\to 0$,бүкіл қисық бойында $\vec{F}=\vec{F}(P)$ күшінің жасаған жұмысы шығады:

$$A=\lim_{\Delta s\ 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\Delta\vec{S}_i=\lim_{\Delta s\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[X(x_i;y_i)\Delta x_i+Y(x_i;y_i)\Delta y_i\right]$$

Осы теңдіктің оң жағындағы шекті L қисығы бойынша интеграл деп атайды және былай белгілейді:

$$A=\int_L X(x;y)dx+Y(x;y)dy$$

Қисық сызықты интегралдың 2-түрі интегралданатын өрнекке, қисықтың түріне және интегралдау бағытына тәуелді. Интегралдау бағытын өзгерткенде интеграл да таңбасын өзгертеді, өйткені $\Delta\vec{S}$ векторы, сондықтан оның проекциялары да таңбаларын өзгертеді. Егер L қисығы тұйық болса, онда тұйық қисықта интегралдау бағыты көрсетілуі керек, бұл жағдайда мынадай белгілеу қолданылады: $\oint_L Xdx+Ydy$. Егер $\bar{F}$ векторлық функциясы X;Y;Z проекцияларымен анықталса, онда қисық сызықты интеграл мынадай болады:

$$\int_L Xdx+Ydy+Zdz$$

Есептеу жолдары:

1. Егер L қисығы $y=\varphi(x);\quad a\le x\le b$ теңдеуімен айқын түрде берілсе, онда қисық сызықты интеграл мынадай анықталған интегралға келтіріледі:

$$\int_L X(x;y)dx+Y(x;y)dy=\int_a^b X(x;\varphi(x))dx+Y(x;\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

2. Егер L қисығы $x=\varphi(t);y=\phi(t);\quad \alpha\le t\le\beta$ түрінде параметрлік теңдеулерімен берілсе, онда қисық сызықты интеграл мынадай анықталған интегралға келтіріледі:

$$\int_L X(x;y)dx+Y(x;y)dy=\int_\alpha^\beta X(\varphi(t);\phi(t))\varphi'(t)dt+Y(\varphi(t);\phi(t))\phi'(t)dt.$$

99-мысал. $\int_L y^2dx+x^2dy$.интегралын L қисығы бойынша есептеу керек, мұндағы

L қисығы $y=x^2$ параболасының A(1;1), B(2;4) нүктелерін қосатын доғасы.

Шешуі. $y=x^2$; $dy=2xdx$, орнына қоямыз

$$\int_L y^2dx+x^2dy=$$

$$=\int_1^2 x^4dx+x^2\,2xdx=\int_1^2(x^4+2x^3)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}\right)_1^2=\frac{1}{5}(32-1)+\frac{1}{2}(16-1)=\frac{137}{10}=13{,}7.$$

5.7 Қисық сызықты интегралдарды қолдану. Грин формуласы

Қисық сызықты интегралдарды анықталған интегралдар сияқты әртүрлі геометриялық және физикалық шамаларды есептеуге қолдануға боады.

1. Жазық немесе кеңістіктегі қисықтың доғасының ұзындығы:

$$s = \int_C ds$$

2. ХОУ жазықтығында жатқан С тұйық қисығымен шектелген фигураның ауданы:

$$\text{P} = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx.$$

Бұл арада С қисығы бойымен сағат тіліне қарсы бағыттағы қозғалыс қарастырылған.

3. Материалды АВ доғасының массасы:

$$M = \int_{AB} \rho(x;y)ds\,,$$

мұндағы $\rho(x;y)-$доғаның кез-келген нүктесіндегі заттың сызықтық тығыздығы.

4. АВ доғасының ауырлық центрінің координаталары:

$$x = \frac{\int_{AB} x\rho(x;y)ds}{M};\ y = \frac{\int_{AB} y\rho(x;y)ds}{M}.$$

Мұндағы М - АВ доғасының массасы.

5. $\vec{F} = X(x;y)\vec{i} + Y(x;y)\vec{j}$ күшінің АВ доғасының бойымен қозғалғанда жасайтын жұмысы:

$$A = \int_{AB} X(x;y)dx + Y(x;y)dy.$$

100-мысал. $y = \ell nx$ қисығының әрбір нүктесіндегі заттың сызықтық тығыздығы нүктенің абсциссасының квадратына пропорционал және А(1;0): В(3; $\ell n3$) болса. онда АВ доғасының массасы неге тең?

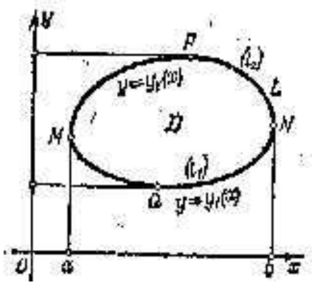
Шешуі. $y' = \frac{1}{x}$; $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}dx}$; $\rho = kx^2$;

$$M = \int_{AB} \rho\, ds = k\int_1^2 x^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx = k\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{k}{2}\int_1^2 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}d(x^2+1) = \frac{k}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \Big/_1^2 =$$

$$= \frac{k}{3}(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}).$$

Жазық D облысы бойынша қос интеграл мен осы облыстың шекарасы болатын L қисығы бойынша қисық сызықты интеграл арасындағы байланысты қарастырайық.

ХОУ жазықтығында контуры L қисығы болатын дұрыс облысты алайық.Бұл облыс төменгі жағынан $y = y_1(x)$, ал жоғарғы жағынан $y = y_2(x)$; $a \le x \le b$ қисығымен шектелген. Екеуі бірігіп L қисығын құрайды (17-сурет).



5.17-сурет.

$$\iint_D \frac{\partial X(x;y)}{\partial y} dxdy = \int_{MPN} X(x;y)dx - \int_{MQN} X(x;y)dx =$$
$$= \int_{MPN} X(x;y)dx + \int_{NQM} X(x;y)dx = \int_{MPNQM} X(x;y)dx = \int_L X(x;y)dx$$

$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int_L X(x;y)dx$ -- сағат тілімен бір бағытта алынған.

Сол сияқты

$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} dxdy = -\int_L Y(x;y)dy$ -- сағат тілімен бір бағытта алынған.

Соңғы екі теңдіктің біріншісінен екіншісін мүшелеп алсақ, онда мынадай формула шығады:

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dxdy = \int_L X(x;y)dx + Y(x;y)dy . \ -$$

сағат тілімен бір бағытта алынған Грин формуласы.Ал сағат тіліне қарсы бағытта Грин формуласы мынадай болады:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy = \int_L X(x;y)dx + Y(x;y)dy .$$

Сонымен бұл формула жазық (D) облысы бойынша қос интеграл мен осы облыстың шекарасы болатын L қисығы бойынша қисық сызықты интегралдың арасындағы байланысты көрсетеді.

5.8 Бет бойынша интегралдар

5.8.1 Бет бойынша интегралдың 1-түрі

$f(x;y;z)$ функциясы σ бетінің кез-келген M(x;y;z) нүктесінде үзіліссіз болсын.Осы бетті кез-келген әдіспен n бөліктерге бөлейік.Әр бөліктің ауданын сәйкес $\Delta\sigma_1; \Delta\sigma_2 ...; \Delta\sigma_n$ деп белгілейік. Әр бөліктен бір-бірден нүкте алайық. Сол нүктелерде функцияның

$$f(M_1; f(M_2);...; f(M_n)$$

мәндерін есептейік. Енді мынадай көбейтінділерден $\Delta\sigma_n$ бетінің ауданы бойынша интегралдық қосынды құрайық:

$$f(M_1)\Delta\sigma_1 + f(M_2)\Delta\sigma_2 + ... + f(M_n)\Delta\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i$$

σ бетін қандай әдіспен бөліктерге бөлсек те, нүктелерді қалай таңдап алсақ та, бұл қосындының $\max diam\Delta\sigma_i \to 0$ жағдайда шегі тұрақты болады, сол шекті бет бойынша интегралдың 1-түрі немесе беттің ауданы бойынша интеграл деп атаймыз, былай белгілейміз:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y;z)d\sigma$$

Сонымен анықтамасы бойынша

$$\lim_{\max diam\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta\sigma_i = \iint\limits_{\sigma} f(x;y;z)d\sigma .$$

Бұл интегралдың қасиеті интегралдауды беттің бойымен қай бағытта жүргізсек те, өзгермейді. Енді есептеу жолын қарастырайық.

σ бетінің ХОУ жазықтығына түсетін проекциясы жазық D облысы болса,яғни OZ осіне параллель жүргізілген кез-келген түзу бетті бір ғана нүктеде қиып өтсе, онда бұл беттің теңдеуі $z=\varphi(x;y)$ болады.Сонда бет бойынша интеграл мынадай қос интегралға келтіріледі:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y;z)d\sigma = \iint\limits_{D} f(x;y;\varphi(x;y))\sqrt{1+\varphi_x'^2(x;y)+\varphi_y'^2(x;y)}dxdy .$$

101-мысал. $\iint\limits_{\sigma}(x+y+z)d\sigma$ интегралын (σ) беті, яғни кубтың

$0 \le x \le a; 0 \le y \le a; 0 \le z \le a$ беті бойынша есептеу керек.

Шешуі. Берілген интегралды кубтың $z=0; z=a$ беттері бойынша есептеп, кубтың 6 беті болғандықтан, шыққан мәнді 3-ке көбейтеміз.

$$\iint\limits_{\sigma_1}(x+y+z)d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2}(x+y+z)d\sigma = \iint\limits_{D}(x+y)dxdy + \iint\limits_{D}(x+y+a)dxdy =$$

$$= \int_0^a dx\int_0^a (x+y)dy + \int_0^a dx\int_0^a (x+y+a)dy = \int_0^a dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^a + \int_0^a dx\left(xy+\frac{y^2}{2}+ay\right)\Big|_0^a =$$

$$= \int_0^a\left(ax+\frac{a^2}{2}\right)dx + \int_0^a\left(ax+\frac{a^2}{2}+a^2\right)dx = \left(\frac{ax^2}{2}+\frac{a^2x}{2}\right)\Big|_0^a + \left(\frac{ax^2}{2}+\frac{a^2x}{2}+a^2x\right)\Big|_0^a = 3a^3 .$$

Сонымен

$$\iint\limits_{\sigma}(x+y+z)d\sigma = 3\cdot 3a^3 = 9a^3 .$$

5.8.2 Бет бойынша интегралдың 2-түрі

Oxyz координаталар жүйесінде V облысы берілсін. Осы облыста λ қисығымен шектелген σ беті берілсін.Беттің әрбір Р нүктесіндегі нормалінің бағыты бағыттауыш косинустары бет нүктелерінің үзіліссіз функциялары болатын $\vec{n}(P)$ бірлік векторымен анықталсын.Беттің әрбір нүктесінде

$\vec{F} = X(x;y;z)\vec{i} + Y(x;y;z)\vec{j} + Z(x;y;z)\vec{k}$

векторы анықталған, X;Y;Z –координаталарының үзіліссіз функциялары.

Бетті элементар аудандарға бөлеміз. Әрбір $\Delta\sigma_i$ ауданынан P_i нүктелерін алып, $f(P_i)$ мәндерін есептейміз.Қосынды құрамыз:

$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(P_i)\vec{n}(P_i)\Delta\sigma_i$ Осы қосындының $\max diam\Delta\sigma_i \to 0$ шегін бет бойынша интегралдың 2-түрі деп атаймыз және былай белгілейміз.

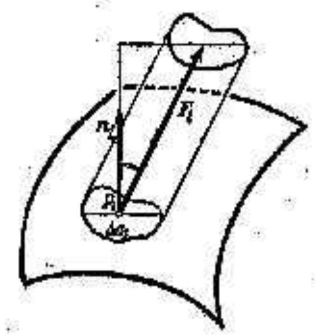
$\iint\limits_{\sigma}\vec{F}\vec{n}d\sigma$ Сонымен анықтамасы бойынша

$$\lim_{difm\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \vec{n}_i \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} \vec{F}\vec{n} d\sigma$$

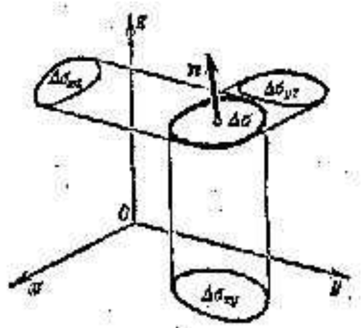
Бұл қосындыдағы әрбір қосылғышы $\vec{F}_i \vec{n}_i \Delta\sigma_i = F_i \Delta\sigma_i \cos(\vec{n}_i; \vec{F}_i)$.

Бұл өрнектің мәні табан ауданы $\Delta\sigma_i$, ал биіктігі $F_i \cos(\vec{n}_i; \vec{F}_i)$ болатын цилиндр көлеміне тең, ал гидромеханикалық мәні мынадай:

Егер $\vec{F}$ векторы σ беті бойынша ағып өтетін сұйықтың жылдамдығы болса,онда бұл өрнек уақыт бірлігіндегі $\vec{n}_i$ векторының бағытымен $\Delta\sigma_i$ ауданы арқылы өтетін сұйықтың мөлшеріне тең болады (18-сурет).



5.18-сурет.



5.19-сурет.

Ал $\iint_{\sigma} \vec{F}\vec{n} d\sigma$ өрнегі уақыт бірлігінде σ беті бойынша ағып өтетін барлық сұйықтың мөлшерін береді.Сондықтан бет бойынша интегралды $\vec{F}$ векторлық өрісінің σ беті бойынша ағыны деп атайды. Егер σ беті σ_1, σ_2,..., σ_n бөліктерге бөлінсе, онда мына теңдік орындалады:

$$\iint_{\sigma} \vec{F}\vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma_1} \vec{F}\vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma_2} \vec{F}\vec{n} d\sigma + ... + \iint_{\sigma_n} \vec{F}\vec{n} d\sigma$$

Енді бірлік векторды координата осьтеріне проекциялары арқылы жазайық:

$$\vec{n} = \cos(n;x)\vec{i} + \cos(n;y)\vec{j} + \cos(n;z)\vec{k}$$

Сонда

$$\iint_{\sigma} \vec{F}\vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} [\ X\cos(n;x) + Y\cos(n;y) + Z\cos(n;z)\ ] d\sigma$$

5.19-суреттен көрініп тұрған мынадай теңдіктерді жазайық:

$$\Delta\sigma \cdot \cos(n;x) = \Delta\sigma_{yz}$$

$$\Delta\sigma \cdot \cos(n;y) = \Delta\sigma_{xz}$$

$$\Delta\sigma \cdot \cos(n;z) = \Delta\sigma_{xy}$$

мұндағы $\Delta\sigma_{yz}; \Delta\sigma_{xz}; \Delta\sigma_{xy}$ - сәйкес координата жазықтықтарына түскен $\Delta\sigma$ ауданының проекциялары.Осыған сәйкес беттік интеграл былай жазылады:

$$\iint_{\sigma} \vec{F}\vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} [X\cos(n;x) + Y\cos(n;y) + Z\cos(n;z)] d\sigma = \iint_{\sigma} Xdydz + Ydxdz + Zdxdy \,.$$

Енді беттік интегралдың бұл түрін есептеу жолын қарайық.Бет бойынша интеграл жазық облыс бойынша қос интегралды есептеуге келтіріледі.Алдымен мына интегралды есептеу жолын көрсетейік:

$\iint\limits_{\sigma} Z\cos(n;z)d\sigma$ Берілген σ бетін OZ осіне параллель кез-келген түзу бір ғана нүктеде қиып өтсін.Сонда оның теңдеуі $z=f(x;y)$ болады. Беттің ХОУ жазықтығына түскен проекциясын D деп белгілесек, онда анықтамасы бойынша

$$\iint\limits_{\sigma} Z(x;y;z)\cos(n;z)d\sigma = \lim_{diam\Delta\sigma_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} Z(x_i;y_i;z_i)\cos(n_i;z)\Delta\sigma_i =$$

$$= \lim_{diam\Delta\sigma xy\to 0}\sum_{i=1}^{n} Z(x_i;y_i;f(x_i;y_i))(\Delta\sigma_{xy})_i = \pm\lim_{diam\Delta\sigma_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} Z(x_i;y_i;f(x_i;y_i))\left|\Delta\sigma_{xy}\right|_i .$$

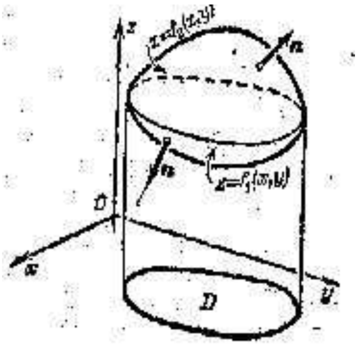
Ал соңғы өрнек Z(x;y;f(x;y)) функциясы үшін D облысындағы интегралдық қосынды.Сондықтан

$$\iint\limits_{\sigma} Z\cos(n;z)d\sigma = \pm\iint\limits_{D} Z(x;y;f(x;y))dxdy .$$

Егер $\cos(n,z)\geq 0$, онда плюс таңбасы; ал $\cos(n,z)\leq 0$ болса, минус таңбасы қойылады.

$\iint\limits_{\sigma} X\cos(n,x)d\sigma,\quad \iint\limits_{\sigma} Y\cos(n,y)d\sigma$ интегралдары да дәл осылай есептеледі.

Енді тұйық σ бетін OZ осіне параллель кез-келген түзу екі нүктеде қиып өтетін болсын.Нормальдің оң бағыты үшін сыртқы нормальді аламыз (20-сурет).



5.20-сурет

Бұл жерде бетті екі бөлеміз. Төменгі және жоғарғы бөліктердің теңдеулері сәйкес $z=f_1(x,y),\quad z=f_2(x,y)$. ХОУ жазықтығына проекциясы D облысы болады.Сонда

$$\iint\limits_{\sigma} z\cos(n,z)d\sigma = \iint\limits_{D} f_2(x,y)dxdy - \iint\limits_{D} f_1(x,y)dxdy .$$

Екінші интегралды минус таңбасымен алған себебіміз беттің төменгі бөлігі үшін $\cos(n,z)\leq 0$. Бұл формуладағы интегралдардың айырмасы σ бетімен шектелген дене көлеміне тең. Олай болса σ бетімен шектелген дене көлемі мына беттік интегралға тең:

$$V = \iint\limits_{\sigma} z\cos(n,z)d\sigma .$$

5.9 Скалярлық өріс. Векторлық өріс.Дивергенция, ротор. Остроградский, Стокс формулалары

Анықтама. Егер кеңістіктің әрбір М нүктесіне скаляр U шамасы сәйкес келіп отырса, онда скалярлық U(M) өрісі берілген деп аталады. Егер кеңістіктің әрбір М нүктесіне $\vec{F}$ векторы сәйкес қойылса, онда $\vec{F}$(M) векторлық өрісі берілген деп аталады. Әрбір Р нүктесінде нормальдың оң бағыты $\vec{n}(P)$ бірлік векторымен анықталған болсын.Кеңістікте вектор координаталарымен берілсін.

$\vec{F} = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

Анықтама. $\iint\limits_{\sigma} \vec{F}\vec{n}d\sigma$ бет бойынша интегралы F векторлық өрісінің ағыны деп аталады.Егер скаляр көбейтіндіні координаталық түрде жазсақ, онда

$$\iint\limits_{\Delta} \vec{F}\vec{n}d\Delta = \iint\limits_{\Delta}[P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]d\Delta = \iint\limits_{\Delta} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Егер *f(x, y, z)* функциясының үзіліссіз дербес туындылары үшін:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R;$$

орындалса, онда бұл функцияны потенциалды функция деп немесе F векторының потенциалы деп аталады. Координаталары *f* функциясының дербес туындылары болатын мына векторды функцияның градиенті деп аталады

$$\vec{F} = grad f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Потенциал мына формуламен табылады:

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz$$

x_0, y_0, z_0 – бастапқы нүктенің координаталары.

$$\iint\limits_{S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right)dxdydz$$

Бұл Остроградский формуласы. Бұл формула V облысы бойынша үштік интегралын осы облыстың беті бойынша интегралмен байланыстырады.

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = div\vec{F}.$$

$\iint\limits_{\sigma} \vec{F}nd\sigma = \iiint div\vec{F}dV$ - Остроградский формуласының векторлық түрі.

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Бұл -- Стокс формуласы. Координаталары

$$B_x = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y};$$

болатын векторды F векторлық өрісінің роторы деп атаймыз және былай белгілейміз $rot\vec{F}$.

6. Қатарлар

6.1 Қатарлар. Жинақты қатарлардың қасиеттері. Коши критериі

6.1-анықтама. Шексіз сандық тізбектің $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ қосындысын сан қатары деп атаймыз**.**

$u_1, u_2, ...$ сандары қатардың мүшелері, ал u_n – қатардың жалпы мүшесі.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

6.2-анықтама $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, ...$ қосындылары қатардың дербес қосындылары деп аталады. S_1, S_2, ...,S_n, ... дербес қосындылар тізбегін қарауға болады.

6.3-анықтама. $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатарының дербес қосындыларының тізбегі жинақталса, онда қатар жинақталған деп аталады.

$\lim S_n = S$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.- қатар қосындысы.

Ал егер қатардың дербес қосындыларының тізбегі жинақталмаса, немесе шегі болмаса, немесе шексіздікке айналса, онда қатар жинақталаған деп аталады. Қасиеттері

1) Егер қатардың бірнеше санаулы мүшесін қатардан шығарып тастаса, онда қатардың жиақтылығы немесе жинақсыздығы бұзылмайды.

2) Екі қатар қарастырайық $\sum u_n$ және $\sum Cu_n$, мұндағы С – тұрақты.

6.1-теорема. Егер $\sum u_n$ жинақталса және оның қосындысы S-ке тең болса,онда $\sum Cu_n$ қатары да жинақталады, әрі қосындысы CS (C $\neq$ 0) болады.

3) Екі қатар қарастырайық $\sum u_n$ және $\sum v_n$. Бұл қатарлардың қосындысы не айырмасы $\sum (u_n \pm v_n)$ қатарына тең, мұндағы қатардың әрбір элементі сәйкесэлементердің қосындысынан не айырмасынан алынады.

6.2-теорема. Егер $\sum u_n$ және $\sum v_n$ қатарлары жинақталса және қосындылары сәйкес S және σ болса, онда $\sum (u_n \pm v_n)$ қатары да жинақталады және қосындысы S + σ болады.

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Жинақты екі қатардың айырмасы да жинақты болады.Ал жинақты және жинақсыз екі қатардың қосындысы жинақсыз болады.Екі жинақсыз қатардың қосындысы туралы тұжырым жасау қиын.Жинақтылықтың қажетті шарты.

6.3-теорема. Егер қатар жинақты болса, онда оның жалпы мүшесінің шегі $n \to \infty$ жағдайда нольге тең болады.

Дәлелдеу. Айталық $\sum u_n$ қатары жинақты болсын, яғни $\lim S_n = S$

Мұнда мына теңдік те орындалады.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S; \quad n\to\infty; (n-1)\to\infty$ Осы екі теңдікті мүшелеп бір-бірінен алып тастайық, сонда

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = 0; \quad \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0; \quad S_n - S_{n-1} = u_n, \quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ дәлелдеу керегі осы.

Салдар. Егер қатардың жалпы мүшесі $n\to\infty$ жағдайда нольге ұмтылмаса, онда қатар жинақсыз.

102-мысал . $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ қатары жинақсыз, өйткені

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Гармоникалық деп аталатын $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ қатар жалпы мүшесі $n\to\infty$ жағдайда нольге ұмтылса да жинақсыз. Оны дәлелдеуге болады. Жинақталатын қатардың мысалына шексіз кемімелі геометриялық прогрессияны алуға болады.

6.2 Оң мүшелі қатарлардың жинақтылығы. Оларды салыстыру белгілері

Айталық екі қатар берілсін $\sum u_n$ және $\sum v_n$ мұндағы $u_n, v_n \geq 0$.

6**.4-теорема.** Егер кез келген n үшін $u_n \leq v_n$ болып, және $\sum v_n$ қатары жинақты болса, онда $\sum u_n$ қатары да жинақталады.

103-мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$. қатарын жинақтылыққа зерттеу керек

$\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, ал $\sum\frac{1}{2^n}$ жинақты, өйткені ол шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы, олай болса берілген $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ қатары жинақталады.

6.5-теорема. Егер кез келген n үшін $u_n \geq v_n$, болып, және $\sum v_n$ қатары жинақты болмаса, онда $\sum u_n$ қатары да жинақталмайды.

104-мысал. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln n} + ...$ қатарын жинақтылыққа зерттеу керек

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, ал гармоникалық қатар $\sum\frac{1}{n}$ жинақталмайды, олай болса $\sum\frac{1}{\ln n}$ қатары да жинақталмайды.

6.6-теорема. Егер $u_n > 0, \quad v_n > 0$ және $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = h$ шегі бар болса, h – нольден ерекше сан, онда $\sum u_n$, $\sum v_n$ қатарлары бірдей жинақталады немесе жинақталмайды.

Даламбер белгісі. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ шегі бар болса, онда $\rho < 1$ қатар жинақталады, ал $\rho > 1$ – қатар жинақталмайды. Егер $\rho = 1$, онда бұл теорема сұраққа жауап бере алмайды.

105-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ қатарын зерттеу керек..

$u_n=\frac{n}{2^n}$; $u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}<1$

Ендеше қатар жинақты.

Коши белгісі. (радикалды белгі)

Егер оң мүшелі $\sum u_n$ қатары үшін q<1 саны табылып, барлық n үшін мына теңсіздік орындалса

$\sqrt[n]{u_n}\le q$, онда $\sum u_n$ жинақаталады, ал $\sqrt[n]{u_n}\ge 1$, теңсіздігі орындалса, онда $\sum u_n$ қатар жинақталмайды.

Салдар. Егер $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ шегі бар болып, ρ<1 болса, қатар жинақты,ал ρ>1 қатар жинақсыз.

Кошидың интегралдық белгісі.

Егер φ(x) – оң үзіліссіз функция болып, және [1;∞) арсында кемімелі болса, онда φ(1) + φ(2) + …+ φ(n) + … = $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ қатары мен $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx$ меншіксіз интегралы бірдей жинақталады немесе бірдей жинақталмайды. Мысалға, $1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+...+\frac{1}{n^{\alpha}}+...$ қатары α>1 болғанда жинақталады, ал α≤1 жинақталмайды, өйткені оған сәйкес интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ α>1 жинақталады, ал α≤1 болғанда жинақталмайды.

6.3 Таңбалары ауыспалы қатарлар. Абсолютті және шартты жинақтылық

Таңбалары кезектесіп ауысатын қатарды қарастырайық

$u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n+...$

мұндағы $u_n>0,\quad n=1,2,3,...$

Лейбниц белгісі.

$u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n+...$ кезек таңбалы қатарының мүшелері кемімелі болса, $u_1>u_2>u_3>...$ ал жалпы мүшесі $u_n\to 0$,онда қатар жинақталады. Мысалға, 1-1/2 +1/3 -1/4 +...+$(-1)^{n+1}$(1/n)+… қатары жинақталады, өйткені

1) 1 > 1/2 > 1/3> …

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

$\sum u_n$ - таңбалары айнымалы қатар, яғни қатар мүшелерінің ішінде оң таңбалы да, теріс таңбалы да сандар бар. Кезек таңбалы қатар мұндай қатардың жеке жағдайы болады.

Даламбер белгісі. Егер $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$, ρ<1 болса $\sum u_n$ қатары абсолютті жинақталады, ал ρ>1 қатар жинақталмайды.

Коши белгісі. Егер $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho$, онда ρ<1 болса $\sum u_n$ қатары абсолютті жинақталады, ал ρ>1 болса, қатар жинақталмайды

Таңбалары айнымалы қатар карастырайық.

$$u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (6.1)$$

және қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан тұратын қатар:

$$|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+...=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \qquad (6.2)$$

6.7-теорема. (6.2) қатардың жинақтылығынан (6.1) қатардың жинақтылығы шығады.

6.4-анықтама. Егер $\sum|u_n|$ қатары жинақталса, онда $\sum u_n$ қатары абсолютті жинақталады деп аталады.

6.5-анықтама. Егер $\sum|u_n|$ қатары жинақталып, ал $\sum u_n$ жинақталмаса, онда ол жинақталмайды деп аталады.

106-мысал. Жинақтылыққа зерттеу керек.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}=\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+...+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+... \qquad (6.3)$$

Қосымша екі қатар қарастырамыз:

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+...+\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|+... \qquad (6.4)$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...\frac{1}{n^2}+... \qquad (6.5)$$

(6.5) қатары жинақты, ал (6.4) қатар мүшелері (6.5) қатар мүшелерінен асып кетпейді , ендеше (6.4) қатар жинақты, одан (6.3) қатардың жинақтылығы шығады.

Абсолютті және шартты жинақталатын қатарлардың қасиеттері айтылуы тиіс.

6.4 Функционалды қатарлар. Нүктедегі жинақтылық. Бірқалыпты жинақтылық

Егер қатар мүшелері x- ке тәуелді функциялар болса, ондай қатар функционалды қатар деп аталады.

$U_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots u_n(x)+\ldots$

X- ке әртүрлі мән бергенде әртүрлі сан қатарлары шығады.

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ қатарының алғашқы n мүшелерінің қосындысын n-ші дербес қосынды деп атаймыз: $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x), \quad n=1,2,...$

6.6-анықтама. Функционалдық $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ қатарының дербес қосындыларының тізбегі ($x=x_0$) нүктесінде жинақталса, онда қатар да осы нүктеде жинақталады деп аталады.

<u>Функционалды қатар</u> жинақталатын х- тің барлық мәндерінің жиынын осы қатардың жинақталу облысы деп атаймыз.
Қатардың бірқалыпты жинақтылығы туралы.Вейерштрасс белгісі.

Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционалдық қатары үшін жинақталатын оң мүшелі

$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n + ...$ қатары табылып, х- тің барлық мәндері үщін мына теңсіздіктер
$|u_1(x)| \le \alpha_1, |u_2(x)| \le \alpha_2, ..., |u_n(x)| \le \alpha_n, ...$ орындалса, онда функционалдық қатары бірқалыпты жинақталады деп аталады.

107-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ қатары үшін жинақталатын $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қатарын алуға болады, мұндағы $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, $n = 1,2,3,...$ Ендеше берілген қатар бірқалыпты жинақталады.

Осы лекцияда қатар қосындысының үзіліссіздігі туралы, қатарды мүшелеп интегралдау және дифференциалдау туралы айтылады.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx; \quad \alpha, \beta \in [a,b]$$

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}.$$

6.5 Дәрежелік қатарлар. Абель теоремасы. Жинақталу радиусы. Тейлор және Маклорен қатарлары.Функцияларды жіктеу

Дәрежелік қатар деп мына түрдегі

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

қатарды айтамыз. Дәрежелік қатарлардың жинақтылығын зерттеуге Даламбер, Коши белгілерін қолданамыз.

108-мысал. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$

Даламбер белгісі бойынша: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right| = |x|$.

Осы арадан $|x| < 1$ болса, қатар жинақты, ал $|x| > 1$ болса қатар жинақты емес.

X = 1 болса: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ...$ қатар Лейбниц белгісі бойынша жинақты.

X = -1 болса: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ гармоникалық қатар жинақты емес.

<u>Абель теоремасы.</u>(Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норв. Математик)

6.8-теорема. Егер $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ дәрежелік қатары x = x_1 мәнінде жинақты болса, онда ол барлық $|x| > |x_1|$ мәні үшін жинақты, әрі абсолютті жинақты.

Салдар. Ал егер x = x_1 мәнінде жинақты болмаса, онда ол барлық $|x| > |x_1|$ мәндері үшін жинақты емес Сонымен әрбір дәрежелік қатар үшін $|x| < R$ қатар жиақты, ал $|x| > R$ қатар жинақты емес.(-R, R) интервалы жинақтылық интервалы деп аталады. Жинақтылық радиусы былай табылады.

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$ - бұл Даламбер белгісі бойынша.Ал Коши белгісі бойынша $R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

109-мысал. $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$ қатарының жинақталу интералын табу керек.

Даламбер белгісі бойынша

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1$ шегі x- ке тәуелді емес, әрі 1-ден кіші , ендеше x- тің барлық мәнінде қатар жинақталады.

Тейлор және Маклорен қатарлары туралы айтылуы тиіс. Кейбір функциялардың Маклорен қатарына жіктелулері көрсетілуі керек. Мысалы, e^x, sinx, cosx, … мысалы,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\frac{x^n}{n!} + ...$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$$

7. Ықтималдықтар теориясы

7.1 Оқиғалар, оқиғаларды кластарға жіктеу. Ықтималдықтардың классикалық анықтамасы. Оқиғаларды қосу және көбейту

Кездейсоқ құбылыстардың заңдылықтарын зерттейтін математиканың негізгі салаларының бірі ықтималдық теориясы болып табылады. Ықтималдық теориясының негізгі ұғымдарының бірі **оқиға** ұғымы.

Осы оқиғалардың түрлерін қарастырайық:

110-мысал. Теңгені теп-тегіс еденге лақтырайық. Сонда мұндай құбылыстарды байқаймыз.

Осы тәжірибе 2 оқиғамен анықталады:

1) теңге жерге елтаңба жағы жоғары қарап түседі.

2) цифр жағы жоғары қарап түседі.

Бұл оқиғалар пайда болуына талдау жасап мынадай қорытындылар жасаймыз.

а) олардың қайсысы болса да кездейсоқ оқиға, өйткені тәжірибе жасамас бұрын осы екі оқиғаның қайсысының пайда болатыны белгісіз.

б) олар үйлесімсіз оқиғалар, біреуінің пайда болуын екіншісі болдырмайды.

в) бұл тәжірибеде бірінші оқиғамен екінші оқиға бірден-бір мүмкін нәтижелер. Осы екі нәтиженің біреуі ғана пайда болады, басқа үшінші нәтиже жоқ.

г) екі оқиғаның пайда болу мүмкіндіктері бірдей.

7.1-анықтама. Белгілі бір жағдайда орындалуы да, орындалмауы да мүмкін болатын оқиғалар **кездейсоқ оқиға** деп аталады.

7.2-анықтама. Сынақ нәтижесінде пайда болуы міндетті оқиға **ақиқат оқиға** деп аталады.

7.3-анықтама. Сынақ нәтижесінде пайда болмайтын, немесе орындалмайтын оқиға **мүмкін емес** немесе **жалған оқиға** деп аталады.

7.4-анықтама. Бір-бірінің пайда болуын жоятын оқиғаны **үйлесімсіз оқиға** деп аталады.

7.5-анықтама. Бір-бірінің пайда болуын жоққа шығармайтын оқиға **үйлесімді оқиға** деп аталады.

111-мысал**.** Екі атқыш нысанаға бір-бірден оқ атты делік. Екі атқыштың да нысанаға дәл тигізуі қандай оқиғаға мысал болады.

А ─ оқиға 1 атқыштың нысанаға дәл тигізуі.

В ─ оқиға 2 атқыштың дәл тигізуі.

А, В оқиғалар үйлесімді, өйткені 2 атқышта бір мезгілде нысанаға дәл тигізуі мүмкін.

7.6-анықтама. Сынақ кезінде пайда болған оқиғалардың ең болмағанда біреуі ақиқат оқиға болса, онда ол **жалғыз мүмкіндікті оқиға** деп аталады.

112-мысал. 2 лотерея билеті сатып алынған. Келесі оқиғаның біреуі міндетті түрде орындалады.

1. 1 билет ұтады, 2-ші билет ұтпайды.
2. 1 билет ұтпайды, 2-ші билет ұтады.
3. Екеуі де ұтады.
4. Екеуі де ұтпайды.

7.7-анықтама. Оқиғалардың қосындысы.

А және В жиындарының барлық элеметтерінен құрылған жиынды А және В жиындарының бірігуі немесе қосындысы

$$A + B = C \qquad (7.1)$$

7.8-анықтама. А, В жиындарының ортақ элементтерінен құрылған жиынды осы жиындардың көбейтіндісі деп аталады.

$$C = A \cdot B \qquad (7.2)$$

Оқиғаларды қосудың және көбейтудің қасиеттері:

1. Коммутативтік заң

$$A + B = B + A \qquad A \cdot B = B \cdot A \qquad (7.3)$$

2. Ассоциативтік (терімділік)

$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad (7.4)$$

3. Дистрибутивті (үлестірімділік)

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (7.5)$$

7.9-анықтама. Қандай да бір оқиғаның (A оқиғасы) ықтималдығы деп осы A оқиғасының падй болуына қолайлы жағдайлар m-санының сынаудың тең мүмкіндікті барлық элементар оқиғалар n-санына қатынасын айтады.

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (7.6)$$

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы немесе **Лаплас моделі** деп аталады.

1) Ақиқат оқиғаның ықтималдығы бірге тең

$$P(A) = 1 \quad (7.7)$$

2) Мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы нөлге тең

$$P(A) = 0 \quad (7.8)$$

3) Кездейсоқ оқиғаның ықтималдығы

$$0 \le P(A) \le 1 \quad (15.9)$$

Комбинаториялық формулалар

1. **Орналастыру**. n элементті m бойынша орналастыру.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (7.10)$$

2. **Алмастыру**

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! \quad (7.11)$$

3. **Теру**. n элементтен m элементті таңдап алу.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (7.12)$$

7.2 Ықтималдықтарды қосу теоремалары. Шартты ықтималдық. Ықтималдықтарды көбейту теоремалары. Толық ықтималдық. Байес формулалары

Егер екі оқиғаның біреуінің пайда болу екіншісінің пайда болу ықтималдығын өзгертпесе, ондай екі оқиғаны *тәуелсіз* деп атайды.

Егер екі оқиғаның біреуінің пайда болу екіншісінің пайда болу ықтималдығын өзгертетін болса, ондай екі оқиғаны тәуелді оқиғалар деп атайды.

1. Ықтималдықтарды қосу теоремасы.

Екі немесе бірнеше үйлесімсіз оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысы олардың ықтималдықтарының қосындысына тең болады.

$$P(A + B + \ldots + D) = P(A) + P(B) + \ldots + P(D) \quad (7.13)$$

Егер *A* және *B* үйлесімді оқиғалар болса, онда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (7.14)$$

113-мысал. Жәшікте ақ, қызыл, көк түсті шарлар бар. Ақ шардың алыну ықтималдығы $\frac{7}{12}$, қызыл шардың алыну ықтималдығы $\frac{1}{12}$, ал көк шардың алыну ықтималдығы $\frac{1}{3}$. Алынған шардың қызыл болмауының ықтималдығы қандай.

$$P(A)+P(C)=\frac{7}{12}+\frac{1}{3}=\frac{11}{12}.$$

Шартты ықтималдық.

Екі оқиғаның біреуінің шартты ықтималдығы деп екінші оқиға болып кеткеннен кейінгі пайда болу ықтималдығын айтады.

$$P_B(A)$$

114-мысал. Жәшікте 4 қызыл және 6 ақ шар бар. Жәшіктен бір қызыл шар алынғаннан кейін ақ шардың алыну ықтималдығын табу керек.

Шешуі: A – қызыл шар алынуы

B – ақ шар алынуы

$$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5} \qquad P_A(B)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

2. Ықтималдықтарды көбейту теоремасы

Егер *A* және *B* тәуелді оқиғалар болса, онда

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A) \qquad (7.15)$$

мұнда $P_A(B)$ және $P_B(A)$ - шартты ықтималдықтар.

Егер *A* және *B* тәуелсіз оқиғалар болса, онда

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B) \qquad (7.16)$$

115-мысал. «МАТЕМАТИКА» деген сөзді құрайтын әріптер жеке парақ қағаздарға жазылып, олар араластырылған. Осы араластырылған парақтардың ішінен қарамай-ақ үш парақ алғанда олардағы әріптер «КИТ» деген сөздің құралу ықтималдығын табу керек.

$$P(КИТ)=P(К)\cdot P_К(И)\cdot P_{КИ}(Т)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{360}.$$

Оқиғаның кемінде бір рет пайда болуынынң ықтималдығы.

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n)=1-q_1q_2...q_n \qquad (7.17)$$

Жеке жағдайда, егер $A_1, A_2, ..., A_n$ оқиғаларының пайда болуының ықтималдықтары бірдей болса, яғни

$$P(A_1)=P(A_2)=...=P(A_n)=p$$

онда

$$P(A)=1-q^n \qquad (7.18)$$

116-мысал. Екі мерген атыс алаңында атыс жүргізуде. Бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы – 0,7, екіншісінікі – 0,8 ге тең. Егер екеуі де бір-бірден атыс жасаса, ең болмағанда біреуінің нысанаға дәл тигізетіндігінің ықтималдығы қандай?

Шешуі: *A* – бірінші мерген нысанаға дәл тигізді. *B* – бірінші мерген нысанаға дәл тигізді. Бұл екі оқиға үйлесімді, себебі екі мерген де нысанаға дәл тигізуі мүмкін. Сондықтан үйлесімді оқиғалардың қосындыларының ықтималдығы туралы теореманы пайдаланып:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

$$P(A+B)=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94$$

екенін табамыз.

Осы мысалды ең болмағанда бір оқиғаның пайда болуы (оқиға D) туралы теореманы пайдаланып та шығаруға болады. Сонда

$$P(D)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}94$$

Бұл жерде $P(\overline{A})=1-P(A)=0{,}3$ $P(\overline{B})=1-P(B)$.

Толық ықтималдық.

Егер A оқиғасы, өзара үйлесімсіз $B_1, B_2, B_3...$ оқиғаларының біреуімен бірге пайда болады делік. Ықтималдықтарды көбейту теоремасы бойынша A оқиғасының B_1 оқиғасымен бірге пайда болуының ықтималдығы $P(B_1)P_{B_1}(A)$, B_2 оқиғасымен бірге пайда болу ықтималдығы $P(B_2)P_{B_2}(A)$..., B_n оқиғасымен бірге пайда болу ықтималдығы $P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$

$B_1, B_2, B_n...$ оқиғалары үйлесімсіз болғандықтан $AB_1, AB_2,..., AB_n$ оқиғаларына ықтималдықты қосу теоремасын қолданып, A оқиғасының ықтималдығын табамыз:

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+...+P(AB_n)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

Бұл - A – оқиғасының толық ықтималдығы деп аталады.

Байес формуласы.

А оқиғасы үйлесімсіз B_1, $B_2,...B_n$ оқиғаларымен бірге пайда болсын делік. Бұл оқиғаларды ықтималдықтары $P(B_1)...P(B_n)$ және шартты ықтималдық $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A),....$ елгілі болсын. A оқиғасы болып өтті делік. A оқиғасымен бірге $B_1, B_2, B_n...$ оқиғаларының пайда болу ықтималдығын табайық.

$$P(AB_1)=P(A)\cdot P_A(B_1)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) \qquad (7.19)$$

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)} \qquad (7.20)$$

бұл **Байес** формуласы.

7.3 Тәуелсіз сынақтарды қайталау Бернулли формуласы. Биномдық үлестірім

Бір әрекеттің (сынаудың) өзі бірдей жағдайда бірнеше рет қайталануы практикада жиі кездеседі. Алайда сынау жүргізгенде бірнеше мүмкін нәтиженің (оқиғаның) бірі пайда болуын, мысалы ойын текшесін лақтырғанда алты нәтиже, теңгені лақтырғанда 2 нәтиже т.с.с. күтуімізге болады.

Бұлардың ішіндегі ең қарапайымы сынау нәтижесі тек қана екеу болатын тәуелсіз оқиғаларды қарастырайық.

Нәтижелерінде тәуелсіз оқиғалар пайда болатын сынақтар **тәуелсіз сынақтар** деп атайды. Мұндай сынауларға теңге лақтыру, бұйымның сапалығын тексеру, детальдің жарамдылығын тексеру т.б. сынақтар жатады.

Сонымен аталған екі нәтижені «А оқиғасы пайда болады» және
«А оқиғасы пайда болмайды » деп атаймыз. Сондай-ақ осы екі оқиғаның бір-біріне қарама-қарсы екенін ескеріп сәйкес ықтималдықтарын $P(A) = p$ және $P\left(\bar{A}\right) = 1 - p = q$ деп аламыз. Мұндай қарапайым схеманың тұңғыш қарастырған ─ Швейцария ғалымы Л. Бернулли (1654-1705) сондықтан бұл схема Бернулли схемасы немесе тәуелсіз сынауларды қайталау схемасы деп аталады.

7**.1-теорема.** Егер әрбір сынауда оқиғаның пайда болу ықтималдығы тұрақты *p*-ға тең болса, онда *n*-рет тәуелсіз сынау жүргізгенде, ол оқиғаның дәл *к* - рет пайда болу ықтималдығы

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (7.21)$$

формуласымен есептеледі, мұндағы $p = P(A)$ $q = 1 - p = P(A)$
Бұл (15.21) формуланы кейде биномдық деп атайды.

A оқиғасының ең ықтималды m_0 рет пайда болуы мына теңсіздікпен анықталады.

$$np - q \le m_0 \le np + q \qquad (7.22)$$

Егер $np - q$ бүтін сан болсын, онда m_0 - дің екі бүтін мәні болады, ал $np - q$ бүтін сан болмаса, онда m_0 - дің бір ғана бүтін мәні болады.

Бернулли формуласын пайдаланып мына оқиғалардың ықтималдығын анықтауға болады:

Тәуелсіз n сынақтарда A оқиғасының k реттен кем пайда болатындығының ықтималдығы:

$$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k-1) = \sum_{i=0}^{n-1} P_n(i) \qquad (7.23)$$

k – реттен артық болуының ықтималдығы:

$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + ... + P_n(n) = \sum_{i=k+1}^{n} P_n(i) \qquad (7.24)$$

Кем дегенде k -рет пайда болуының ықтималдығы

$$P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n(n) = \sum_{i=k}^{n} P_n(i) \qquad (7.25)$$

k - реттен артық емес пайда болуының ықтималдығы

$$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(n) = \sum_{i=0}^{n} P_n(i) \qquad (7.26)$$

Ең болмағанда бір оқиғаның пайда болу ықтималдығы

$$P = 1 - q^n \qquad (7.27)$$

117-мысал. Электр энергиясы шығынының бір тәулікте қалыптасқан нормадан асып кетпеуінің ықтималдығы $p = 0{,}75$. Электр энергиясының шығыны алдағы 6 тәуліктің 4-інде қалыптасқан нормадан асып кетпеуінің ықтималдығын табу керек.

Шешуі. 6 тәуліктің әрқайсысында электр энергиясының шығынының нормадан асып кетпеу ықтималдығы $p=0{,}75$ болса, онда кері оқиға ықтималдығы

$$q=1-p=1-0{,}75=0{,}25$$

Ізделінді ықтималдық Бернулли формуласы бойынша

$$P_6(4)=C_6^4 p^4 q^2=0{,}3.$$

118-мысал. Емтихан кезінде студент бағдарлама бойынша қойылатын 100 сұрақтың 70 – іне жауап әзірлеген. Емтиханда оған 4 сұрақ берілді.

Ол сұрақтардың тек үшеуіне ғана жауап беруінің ықтималдығы қандай?

Шешуі: 100 сұрақтың 70-іне жауап беру ықтималдығы $p=\frac{70}{100}=0{,}7$

Олай болса $q=1-p=1-0{,}7=0{,}3$

Енді 4 сұрақтың 3-іне жауап беру ықтималдығы:

$$P_4(3)=C_4^3 p^3 q=\frac{4!}{3!}(0{,}7)^3 0{,}3\approx 0{,}4116.$$

7.4 Лапластың локалдық және интегралдық теоремалары. Пуассон формуласы

Бернулли формуласы

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

n саны үлкейген сайын Бернулли формуласын қолдану қиындай түседі. Сондықтан бұл жағдайда жуықтап есептеу формулаларын қолданады.

Егерде $P(A)=p$ мәні 0,5-тің маңайында болса, онда Муавр-Лапластың локалдық және интегралдық жуықтау формулалары қолданылады.

7.2-теорема. Муавр-Лапластың локальдық теоремасы.

Егер *A* оқиғасының әрбір сынаудағы пайда болу ықтималдығы ***p*** тұрақты болып, 0 мен 1 санына тең болмаса $(0<p<1)$ және сынау саны шексіздікке ұмтылса ($n\to\infty$), онда оқиғаның дәл ***к*** рет пайда болу ықтималдығы

$$P_n(k)\cdot\sqrt{npq}$$

көбейтіндісі

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

өрнегіне ұмтылады, былайша айтқанда $n\to\infty$ болғанда

$$\sqrt{npq}\cdot P_n(k)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \qquad (7.28)$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \qquad (7.29)$$

$$\varphi(-x)=\varphi(x) \qquad (7.30)$$

жұп функция.

κ - ның барлық қабылдайтын мәндерінде жинақтылық бірқалыпты болады, мұнда

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \tag{7.31}$$

Сонда

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \tag{7.32}$$

7**.3-теорема.** Муавр-Лапластың интегралдық теоремасы.

Әрбір тәжірибеде ықтималдығы тұрақты p болатын A оқиғасының n – рет тәжірибе жасағанда k_1 реттен кем және k_2 реттен артық пайда болмауының ықтималдығы мына формуламен табылады:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{7.33}$$

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \tag{7.34}$$

Мұндағы:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \qquad \Phi(-x) = -\Phi(x) \tag{7.35}$$

119-мысал. Шығарылған 400 өнімнің 80-і жарамсыз болу ықтималдығын табу керек. Детальдың жарамсыз болу ықтималдығы 0,2.

Шешуі: $n = 400 \quad p = 0{,}2 \quad k = 80$

Берілген мәндерді мына формулаға $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ қойып, x – тің мәнін табамыз.

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 80}} = 0$$

Енді мына $P_n(k) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$ формулаға n, p, k, x - тің мәндерін қойып, детальдың жарамсыз болу ықтималдығын табамыз:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi(0) \approx \frac{0{,}3989}{8} \approx 0{,}04986$$

120-мысал. Шығарылған 400 детальдың жарамсыз саны

а) 100-ден артық болмауының

ә) 50-ден 150-ге дейін болу ықтималдықтарын анықтау керек. Детальдың жарамсыз болу ықтималдығы 0,2.

Шешуі: $n = 400 \quad p = 0{,}2$

Берілген мәндерді мына формулаларға $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \qquad x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ қойып, x_1, x_2 – дің мәндерін табамыз:

$$x_1 = \frac{0 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -10 \qquad x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5$$

$$P_{400}(0{,}100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-10) = \Phi(2{,}5) + \Phi(10) = 0{,}4938 + 0{,}5 = 0{,}9938 .$$

Пуассон формуласы. p –нің мәні 0-ге немесе 1-ге мейлінше жуық болмағанда және $n \to \infty$ жағдайда Лаплас формуласын теореманың шарты бойынша пайдалануға болмайды. Сондықтан Пуассон формуласын пайдаланамыз.

Пуассон формуласы: $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \lambda = np \quad (\lambda \le 10)$ (7.36)

121-мысал. Тұқымға арналған бидайдың дәндерінің ішінде 0,004% арамшөп дәндері кездеседі. Кез-келген 50000 дәндердің ішінде арамшөптің 5 дәндері кездесетіндігінің ықтималдығын табу керек.

Шешуі. $p = 0{,}00004 \qquad \lambda = np = 2$

$$P_{50000}(5) = \frac{2^5}{5!} e^{-2} \approx 0{,}036$$

М-Лапластың (4.6) формуласын пайдаланып тәуелсіз сынақтарда A оқиғасының ықтималдығының салыстырмалы жиіліктен ауытқуының абсолют шамасының ықтималдығы

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{np}{q}}\right) \qquad (7.37)$$

7.5 Дискретті кездейсоқ шамалар. Дискретті кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары. Дискретті кездейсоқ шамалар

Айталық элементарлық оқиғалар кеңестігі $\Omega = \{\omega\}$ берілсін. Егер осы кеңістікте анықталған $X(\omega)$ функциясы сандық мәндер қабылдап, кез-келген X үшін мына ықтималдық

$$P(X < x) = P\{\omega : X(\omega) < x\} \qquad (7.38)$$

анықталған болса, онда $X(\omega)$ функциясын кездейсоқ шама деп атадады.

Мысалы, теңге лақтыру тәжірибесін қарастыралық. Осы тәжірибеде кездейсоқ оқиға деп елтаңбаның немесе цифрдың пайда болуын айтамыз, ал кездейсоқ шама ретінде тәжірибе нәтижесінде елтаңбаның пайда болу санын қарастыруға болады. Бұл кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері 0,1,2,.....

Кездейсоқ шамалар дискретті және үзіліссіз болып бөлінеді.

7**.10-анықтама.** Кездейсоқ шаманың қабылдайтын мәндері ақырлы бүтін сандар немесе тізбек түрінде жазылса, онда ондай кездейсоқ шамаларды дискретті деп атайды.

Кездейсоқ шама мәндерімен оларға сәйкес ықтималдықтарды байланыстыратын ереже дискретті кездейсоқ шаманың үлестіру заңы делінеді. Бұл заң кесте, график немесе формула түрінде өрнектеледі.

Үлестіру кестесі:

x_1	x_2	...	x_n	Кездейсоқ шама

X					мәндері
P	p_1	p_2	...	p_n	Сәйкес ықтималдықтар

Кездейсоқ шамның барлық мүмкін мәндері ықтималдықтарының қосындысы бірге тең. $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

Кесте түрінде берілген дискретті кездейсоқ шама ықтималдықтарының үлестіру заңын үлестіру қатары деп те атайды.

Енді үлестіру заңының функционалды тәуелділік (формула) түрін қарастырайық.

Үлестірім заңдары.

1. Биномдық үлестіру.

Егер мүмкін мәндері 0,1,2,....к.... болып, ал осы мүмкін мәндерді қабылдау $X = \kappa$ ықтималдықтары Бернулли формуласымен анықталса

$$P(X = \kappa) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{7.39}$$

онда кездейсоқ шама биномдық үлестірім заңымен берілген дейді.

2. Пуассон үлестіру.

Егер тәуелсіз сынақтарда n үлкен сан болса және p-ның шамасы аз болса, онда кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтарын Пуассон формуласымен

$$P(X = x) = P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np \tag{7.40}$$

есептеу керек.

3. Геометриялық үлестіру.

$$P(X = n) = pq^{n-1} \tag{7.41}$$

формуласымен өрнектеледі: $n = 1, 2, 3, ...$ десек, бірінші мүшесі p еселігі q $(0 < q < 1)$ блған геометриялық прогрессия $p,\ pq,\ pq^2,\ ...\ pq^{n-1}$ аламыз. Осы себептен бұл формуланы геометриялық үлестіру деп атайды, мұнда $\sum_{n=0}^{n} pq^{n-1} = 1$

4. Гипергеометриялық үлестіру.

Егер X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері 0,1,2,.... болып, ал сәйкес ықтималдықтары

$$P = C_n^k C_{N-n}^{m-k} / C_N^m \tag{7.42}$$

Дискретті кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары:

1. Математикалық күтім

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{7.43}$$

2. Дисперсия

$$D(X)=M[X-M(X)]^2 \text{ немесе } D(x)=M(X^2)-[M(X)]^2 \quad (7.44)$$

3. Орташа квадраттық ауытқу

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \quad (7.45)$$

4. Бастапқы k - ретті моменті

$$\nu_k(X)=M(X^k) \quad (7.46)$$

5. k - ретті орталық моменті

$$\mu_k(X)=M[X-M(X)]^k \quad (7.47)$$

Математикалық күтім бастапқы бірінші ретті моментке тең болады

$$M(X)=\nu_1(X) \quad (7.48)$$

Дисперсия екінші ретті орталық моментке тең болады

$$D(X)=\mu_2(X) \quad (7.49)$$

Математикалық күтім қасиеттері:

1) $M(C)=C$
2) $M(CX)=CM(X)$
3) $M(X\pm У)=M(X)\pm M(У)$ (5.50)
4) $M(XУ)=M(X)\cdot M(У)$

Дисперсия қасиеттері:

1) $D(X)\geq 0$
2) $D(C)=0$
3) $D(CX)=C^2D(X)$ (5.14)
4) $D(X\pm У)=D(X)+D(У)$
5) $D(X\pm C)=D(X)$

1. Биномдық үлестірім

$$M(X)=np \qquad D(X)=npq \quad (7.50)$$

2. Пуассон үлестірім

$$M(X)=\lambda \qquad D(X)=\lambda \quad (7.51)$$

3. Геометриялық үлестірім

$$M(X)=\frac{1-p}{p} \qquad D(X)=\frac{1-p}{p^2} \quad (7.52)$$

4. Паскаль үлестірім

$$M(X)=\frac{m(1-p)}{p} \qquad D(X)=\frac{m(1-p)}{p^2} \quad (7.53)$$

7.6 Кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы, үлестірім тығыздығы. Үзіліссіз кездейсоқ шамалар. Олардың сандық сипатамалары

7.11-анықтама. Егер кездейсоқ шама өзінің мүмкін мәндерін $[a;b]$ аралықта қабылдаса, онда ол үзіліссіз кездейсоқ шама деп аталады.

Мысалы: поездың кешігу уақыты, атылған оқтың ұшу алыстығы т.б. кездейсоқ шамалардың мүмкін мәндері белгілі бір интервалды қамтып жатады.

Кездейсоқ шаманың үлестірім заңдылықтарын әртүлі жолдармен қарастыруға болады. Төменде X - кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері тиянақты x санынан кіші болу ықтималдығы қарастырылады.

7.12-анықтама. Үлестірім функциясы (интегралдық функция) деп Х кездейсоқ шамасының мәндері тиянақты x санынан кіші болу ықтималдығын айтады.

Үлестірім функциясы $F(x)$ арқылы белгіленеді. Сонда анықтама бойынша

$$F(x) = P(X < x) \tag{7.54}$$

немесе $F(x) = P(-\infty < X < x)$ болады. Бұл функцияны үлестіру функциясы немесе үлестірудің интегралдық функциясы, немесе кездейсоқ шама үлестіруінің интегралдық заңы, немесе кездейсоқ шама ықтималдықтарының үлестіру функциясы деп атайды. Бұл функция әрі дискретті, әрі үзіліссіз кездейсоқ шамаларды сипаттайды.

Негізгі қасиеттері:

1. $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$
2. $F(x_2) \ge F(x_1), \;\; x_2 \ge x_1$ (7.55)
3. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1, \;\; \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

X дискретті кездейсоқ шама болса интегралды үлестірім функциясы былай анықталады:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x < x} p_i \tag{7.56}$$

Мұндағы $x_1, x_2, ..., x_n$ дискретті кездейсоқ шаманың қабылдайтын мүмкін мәндері, ал $p_1, p_2, ..., p_n$ сол мәндердің қабылдануының сәйкес ықтималдықтары. Мына (6.3) қосындысы тек $x_i < x$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x_i үшін олардың сәйкес ықтималдықтарының қосындысы болады; x берілген тиянақты сан.

7.13-анықтама: Үзіліссіз кездекйсоқ шаманың дифференциалдық функциясы (үлестірім тығыздығы) деп үлестірім функциясының бірінші туындысын айтады.

Дифференциалдық функцияны $f(x)$ деп белгілейді. Сонда анықтама бойынша

$$f(x) = F'(x) \tag{7.57}$$

Негізгі қасиеттері:

1. $f(x) \ge 0$
2. $\int\limits_a^в f(x)dx = 1$

3. $P(\alpha \le x \le \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

4. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары

Математикалық күтімі:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad (7.58)$$

Дисперсия:

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx \text{ немесе } D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 \qquad (7.59)$$

Орташа квадраттық ауытқу:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} \qquad (7.60)$$

k - ретті бастапқы моменті

$$\nu_k(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx \qquad (7.61)$$

k - ретті орталық моменті

$$\mu_k(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^k f(x)dx \qquad (7.62)$$

Тест сұрақтары

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышты есептеңіз.

A)0; B)6; C) 8; D) 12; E) 24.

2. n-ші ретті анықтауыштың дұрыс емес қасиетін көрсетіңіз**.**
A) Егер анықтауыштың біржолы 0- ден құралса, онда анықтауыш 0- ге тең
B) Екі бірдей жолы бар анықтауыш 0- ге тең
C) Анықтауыштың екі жолын алмастыру барысында ол таңбасын қарама – қарсы таңбаға өзгертеді
D) Сол нөмері бойынша анықтауыштың жолын бағанмен ауыстыруға болады
E) Екі пропоциональды жолы бар анықтауыш 0- ге тең

3. Анықтауыштың A_{ij} алгебралық толықтауышы тең
A) $A_{ij} = (-1)^{i-j} M_{ij}$; B) $A_{ij} = -M_{ij}$; C) $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$;
D) $A_{ij} = (-1)^{i} M_{ij}$; E) $A_{ij} = M_{ij}$.

4. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеңіз.
A) 16 B) 43 C) 47 D) 74 E) 15

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ матрицасының рангын есептеңіз.

A) r =0 B) r =1 C) r =2 D) r =3 E) r =4

6. A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицасының A^{-1} кері матрицасы тең

A) $A^{-1} = \Delta A \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$; B) $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$;

C) $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$; D) $A^{-1} = \frac{1}{A}$; E) 2/A.

7. Егер $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ болса, онда 2A+5B тең

A) $\begin{pmatrix}16 & 24\\ 12 & -8\end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix}16 & 25\\ 13 & -8\end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix}13 & 14\\ 15 & 16\end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix}16 & 25\\ 15 & 12\end{pmatrix}$.

8. Компланар векторлар деп...
A) бір немесе параллель жазықтықта жататын векторлар
B) бір –біріне перпендикуляр векторлар
C) перпендикуляр түзуде жататын векторлар.
D) бір-біріне параллель векторлар
E) параллель жазықтықтар

9. Бағыттаушы косинустардың арасындағы қатыс
A) $\cos^2 \alpha+\sin^2 \alpha+\mathrm{tg}^2\gamma=1$; B) $\cos^2 \alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$;
C) $\cos^2 \alpha+\sin^2 \alpha=1$; D) $\sin^2 \alpha-\sin^2\beta=1$; E) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$.

10. $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$; $\vec{в}=\{в_x;в_y;в_z\}$ векторларының векторлық көбейтіндісі тең

A) $\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$; B) $a\times b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$;

C) $a\times b=a_xb_xi+a_yb_yj+a_zb_zk$; D) $a\times b=(a_x-b_x)(a_y-b_y)(a_z-b_z)$;
E) 12.

11. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2\\ 2x_1-3x_2+2x_3=2\\ 3x_1+x_2+x_3=8\end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңіз

A) $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=5$ B) $x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=0$ C) $x_1=1, x_2=2, x_3=3$
D) $x_1=x_2=x_3=1$ E) 0

12. Белгісіздерді жою әдісі
A) Крамер әдісі B)Үшбұрыштық түрге келтіру әдісі
C) Гаусс әдісі D) Саррюс әдісі E) Ньютон әдісі

13. Сызықтық теңдеулер жүйесінің матрицалық түрі :
A) $B=A^{-1}$; B) $AX=1$; C) $AX=B$; D) $A=0$; E) A=1.

14. M(1,0,-1) нүктесі және $\vec{p}\,\{2,3,0\}$ параллель векторы арқылы өтетін түзудің параметрлік теңдеуін жазыңыз

A) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{0}$ B) $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{0}$

C) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-1 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3t \\ z=1 \end{cases}$ E) $\frac{1}{2}x=\frac{1}{3}y=\frac{-1}{0}z$

15. $x+3y-4=0$ түзуін нормальдық түрге келтіру керек.

A) $\frac{2}{\sqrt{15}}x+\frac{3}{\sqrt{20}}y-\frac{1}{\sqrt{10}}=0$; B) $\frac{3}{\sqrt{18}}x+\frac{13}{\sqrt{30}}y+\frac{2}{\sqrt{10}}=1$;

C) $\frac{1}{\sqrt{25}}x-\frac{4}{\sqrt{20}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=2$; D) $\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{4}{\sqrt{10}}=0$;

E) x+3y-1=0 .

16. $\frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{m_1}=\frac{z-z_0}{n_1}$ және $\frac{x-x_1}{l_2}=\frac{y-y_1}{m_2}=\frac{z-z_1}{n_2}$ түзулерінің параллельдік шарты

A) $l_2l_1+m_2m_1+n_2n_1=0$; B) $l_2=m_2=n_2$; C) $l_1/l_2=m_1/m_2=n_1/n_2$;
D) $n=m=l=1$; E) $l_1l_2-m_1m_2-n_1n_2=0$.

17. $M(x_0,y_0,z_0)$ нүктесінен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығына дейінгі қашықтық тең

A) $d=\frac{|\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\ |}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; B) $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$;

C) $d=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\ |}$; D) $d=\sqrt{A^2+B^2+C}$;

E) $d=\frac{|\ Ax_0+By_0+C\ |}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

18. Екінші тамаша шек

A) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^2=e$; B) $\lim\limits_{y\to 0}\left(2+\frac{2}{y}\right)^y=1$; C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^X=e$;

D) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$; E) $\frac{\lim}{n\to 0}\left(2+\frac{1}{y}\right)=e$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2+2n-3}{5n^2-4n+4}$ шегін есептеу керек

A) $\frac{5}{2}$; B) $\frac{7}{5}$; C) $\frac{2}{5}$; D) $\frac{3}{7}$; E) 1.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}7^{\frac{3n}{6n-5}}$ шегін есептеу керек

A) $\sqrt{2{,}5}$; B) $\sqrt{4}$; C) $\sqrt{5}$; D) $\sqrt{7}$; E) 2.

21. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\right)$ шегін есептеу керек

A) $\frac{1}{6}$; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{2}{3}$; D) $\frac{5}{3}$; E) 3.

22. y = $\sqrt{3x+1}$ функциясының дифференциалын табыңыз.

A) $dy=\frac{3}{\sqrt{3x+1}}dx$ B) $dy=\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ C) $dy=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}dx$

D) $dy=\frac{3}{\sqrt{3x+1}}$ E) $dy=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

23. $Shx=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ гиперболалық синус функциясының туындысы тең

A) $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ B) $\frac{e^{-x}}{2}$ C) $\frac{e^{x}}{2}$

D) $-\frac{e^{-x}}{2}$ E) $-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

24. $y=tg(3x^2+5)$ функциясының туындысы тең

A) $\frac{6x}{\cos^2(3x^2+5)}$; B) $\frac{61x-1}{\cos x}$; C) $\cos^2 x+\sin x+61x$;

D) $\frac{61x}{\sin(3x+5)}$; E) sinx+c.

25. $y^5-5axy+x^5=0$ функциясының туындысы тең

A) $y' = 2ax - y^2 - 1$; B) $y' = \dfrac{xy - a^2}{y^2 - ax}$; C) $y' = \dfrac{y - x^2}{y^4 - ax}$;

D) $y' = \dfrac{ay - x^4}{y^4 - ax}$; E) 1.

26. $\int \dfrac{x^2}{4+3x^3}dx$ интегралын есептеңіз

A) $\ln\left(4+3x^3\right)+c$; B) $\ln\left(4+3x^3\right)+cx+c$; C) $4+3x^3$;

D) $\dfrac{1}{9}\ln|4+3x^3|+c$; E) 5.

27. $\int \dfrac{10x+8}{\sqrt{5x^2+8x+1}}dx$ интегралын есептеңіз

A) $\dfrac{3}{5}\sqrt{5x^2+8x+1} - \dfrac{47}{5\sqrt{5}}\ln|10x+8+2\sqrt{5(5x^2+8x+1}|+c$;

B) $\sqrt{5x^2+8x+1} - \ln|5x^2+8x+1| + x^3(10x+8)+c$;

C) $\dfrac{3}{5}\sqrt{5x^2+8x+1}+c$;

D) $47\sqrt{5}\ln|5x^2+8x+1| - 10x + c$;

E) $2\sqrt{5x^2+8x+1}+c$.

28. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ интегралын есептеңіз

A) $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ C) 1 D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ E) 0

29.Бөліктеп интегралдау формуласын табыңыз:

A) $\int\limits_a^b u d\vartheta = u\vartheta\Big|_a^b + \int\limits_a^b \vartheta du$ B) $\int a d\vartheta = \vartheta du - \int\limits_a^b \vartheta du$ C) $\int\limits_a^b u d\vartheta = u\vartheta\Big|_a^b - \int\limits_a^b \vartheta du$

D) $\int\limits_a^b u d\vartheta = u\vartheta$ E) $\int\limits_a^b u d\vartheta = u\vartheta\Big|_a^b - \int\limits_a^b \vartheta du$

30.Айналу бетінің ауданын табыңыз:

A) $S_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x_t') + (y_t')}dt$ B) $S = 2\pi f(x)$

C) $S_x = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$ D) $S = f(x)$ E) $S = x$

31. $z = x^4 + 5x^2y - y^4 + 6$ Табу керек: z_x'-?

A) $4x^2+10x$; B) $4x^3+10xy$; C) $5x^2-4y^3$;

D) $10xy-4y^3$; E) $4x^3+5x^2$.

32 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функциясының (2;1) нүктедегі градиентін есепте

A) $9\vec{i}+3\vec{j}$; B) 0; C) 1; D) $9\vec{i}-3\vec{j}$; E) $6\vec{i}$.

33. $z = 3x^4 - 7xy^2 + 4$ Табу керек: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-?$

A) $36x^2$; B) $12x^2$; C) $36x^2-14y$; D) $-14x$; E) $14y$.

34. $u = x^2yz + x - 4y + 2z - 12$ Табу керек: $\frac{\partial u}{\partial x}-?$

A) $2xyz+1$; B) x^2z-4; C) x^2y+2; D) x^2y+1; E) $2xyz-12$.

35. $z = 4xy^2 + 5x + 12$ Табу керек: dz-?

A) $4y^2dx+8ydy$; B) $(4y^2+5)dx+8xydy$; C) $8xydx+(4y^2+5)dy$;

D) $4y+5$; E) $4xy^2+5$.

36. z=x^2y+xy^2, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$

A) $2xy$; B) $2x+2y$; C) $y+y^2$; D) $2x+y^2$; E) $2x+y^3$.

37. Берілген $y''-4xy'+y=0$ теңдеуінің реті қандай?

A) 1-ретті ; B) 2-ретті; C) 3-ретті; D) 4-ретті; E) 5-ретті.

38. $ydy+xdx=0$ теңдеуінің жалпы интегралы.

A) $y^2+x^2=c$; B) $xy=c$; C) $x=y$; D) $y+x=0$; E) $2x-y=0$.

39. $y'=\frac{y}{x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек ?

A) $y=Cx$; B) $y=Cx^2$; C) $y=Cx+\ln x$; D) $y=Ce^x$; E) $y=xe^x$.

40. $\frac{dx}{\cos^2 x}-\frac{dy}{\sin^2 y}=0$ теңдеуін шешу керек:

A) $\sin^2 x-\cos^2 y=c$; B) $tgx+ctgy=c$; C) $\sin x-\cos y=c$;

D) $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin y}=c$; E) $\sin x\cdot\cos y=c$.

41. $y''+6y'+5y=0$ теңдеуін шешу керек.

A) $y=c_1e^x+c_2e^{3x}$ B) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-15x}$ C) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-5x}$

D) $y=c_1e^x+c_2e^{3x}$ E) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$

42. $y''+9y=0$ теңдеуін шешу керек.

A) $y=c_1\cos+c_2\sin x$; B) $y=\cos x+\sin x+c_1+c_2$;
C) $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$; D) $y=c_1\sin x-c_2\cos x$;
E) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$.

43. $y''-4y'+4y=0$ теңдеуін шешу керек.

A) $y=c_1x+c_2e^{x}$; B) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$; C) $y=(c_1+c_2)e^{2x}$;
D) $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$; E) $y=e^{2x}$.

44. $y''+2y'+5y=0$ теңдеуінің жалпы щешімін табу керек

A) $y=e^{-x}(C_1Cos2x+C_2Sin2x)$; B) $y=e^{x}(C_1Cos2x+C_2Sin2x)$;
C) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$; D) $y=e^{-x}(C_1Cosx+C_2Sinx)$;
E) $y=C_1Cos2x+C_2Sin2x$.

45. $\iint\limits_D xydxdy$ интегралын $D=\{0\le x\le 1;0\le y\le 2\}$ тік төртбұрыш облысында есептеңіз.

A) 1/4 ; B) 2 ; C) 1/2; D) 3; E) 1.

46 . $\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x\sqrt{3}} xydy$ екі еселі интегралын есептеңіз .

A) 15/2; B) 15/4; C) 15; D) 1/2; E) 5/4 .

47 . Есептеңіз : $\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^3 dz$

A) 6; B) 12; C) 5; D) 1; E) -1 .

48. $x=a\cos t, y=b\sin t, 0\le t\le 2\pi$ параметрлік түрдегі теңдеумен берілген эллипстің ауданын табыңыз.

A) πa^2b; B) πab^2; C) πab; D) $\pi ab/2$; E) πa^2b^2

49 . $\int\limits_L (x-y)dl$ интегралын есепте, мұндағы L қисығы O(0;0) және A(4;3) нүктелерін қосатын түзудің бөлігі.

A) 2; B) 1/2; C) 3/2; D) 5/2; E) 7/2 .

50 . $\int\limits_L xydx+x^2dy$ интегралын есепте, мұндағы L қисығы O(0;0) және A(1;2) нүктелерін қосатын түзудің бөлігі.

A) 2/3; B) 16/3; C) 8/3; D) 4/3; E) 1/3.

51. $\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+...+\frac{10^n}{n!}+...$ қатарын жинақтылыққа зертте

A) Жинақсыз; B) Жинақты; C) шартты жинақты;
D) абсолют жинақты; E) шексіз.

52. $\frac{1}{4}+(\frac{2}{7})^2+(\frac{3}{10})^3+...+(\frac{n}{3n+1})^n+...$ қатарын жинақтылыққа зертте
A) Жинақсыз; B) абсолют жинақты; C) жинақты;
D) шартты жинақты; E) шектелген.

53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоникалық қатары
A) Жинақты; B) Жинақсыз; C) абсолют жинақты;
D) шартты жинақты; E) шексіз;

54. Қатардың $u_n=\frac{n}{10^n+1}$ жалпы мүшесі берілген. Қатардың алғашқы төрт мүшесін жазыңыз.
A) $\frac{4}{10^4+1}$; B) $\frac{1}{11}+\frac{2}{101}+\frac{3}{1001}+\frac{4}{10001}+...$;
C) $\frac{4}{10001}$; D) шексіз; E) $\frac{10}{10001}$.

55. Қатарды жинақтылыққа зертте: $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+...+\frac{2^n}{n^{10}}+...$
A) Жинақты; B) Жинақсыз; C) Абсолют жинақты;
D) Жинақталуы мүмкін; E) Жинақталмауы мүмкін.

56. Мына формулалардың қайсысы дұрыс?
A) $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$; B) $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$; C) $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}}$;
D) $R=\frac{1}{\lim\sqrt{a_n}}$; E) $R=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

57. Тиын екі рет лақтырылған. «Гербтің» ең болмағанда бір рет түсу ықтималдығын тап.
A)2; B) 1; C) 0; D)3/4; E) 4/3.

58. Екі мергеннің атқан кезде дәл тию ықтималдылығы: P_1=0,9, P_2=0,7. Екеуінің де нысанаға дәл тигізу ықтималдылығы қандай?
A) 0,34; B) 0,63; C)0,6; D)0,2; **E) 1,6.**

59 . Дорбадағы 40 асықтың 4-і сақа. Дорбадан кездейсоқ алған асықтың сақа болатындығының ықтималдылығын тап.
A) 0,25 B) 0,025 C) 0,1 D) 0,01 E) 0,2

60. A, B, C, D оқиғалары толық топ құрайды. Бұл оқиғалардың ықтималдықтары: P(A)=0,1; P(B)=0,4; P(C)=0,3.
D оқиғасының ықималдығын табу керек.

A) 0,8; B)0,12; C)0; D)0,2; E)1.

Жауаптары

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
[illegible]	D	C	C	C	B	B	A	B	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	C	C	D	C	A	C	B	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	C	A	A	D	D	E	B	C	C
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
[illegible]	D	A	A	B	B	B	A	A	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	D	A	E	B	A	C	D	D
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
[illegible]	C	B	B	B	A	D	B	C	D

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). - Алматы: «Иль-Тех-Кітап». ЖШС, 2000. - 744 б.
2. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. – Алматы: ҚазТУ, 2000. – 254 б.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М., Наука, 1975.
4. Божанов Е.Т. Конспект лекции по высшей математике. Часть I, II. -1992.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М., Наука, 1980.
6.Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М., Наука, 1980.
7.Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть1,2. - М., Высшая школа, 1998.
8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнении по математическому анализу. - М., Наука, 1985.
9. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.К. Жоғары математика. - Алматы: КБП, 2004. - 409 б.
10. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М. - 1992-1995г.
11. Қабдықайыров Қ. Жоғары математика. - Алматы: РБК, 1993.
12. Қасымов Қ.А., Қасымов Е.А. Жоғары математика курсы. - Алматы: Санат, 1994.
13. Пискунов Н. С. Дифференциальные и интегральные исчисления. Часть I, II. - 1972.
14.Сборник индивидуальных задании по высшей математике. Под ред. Рябушка А. П. - Минск, 2001.

Мазмұны

Жоспар 2010 ж., реті.

Базаргүл Табылғанқызы Құлжағарова

МАТЕМАТИКАДАН ДӘРІСТЕР ЖИНАҒЫ

Оқу құралы

Пішімі 60х84 1/12
Көлемі 159 бет 13,3 шартты баспа табағы
Таралымы 20 дана.
Ш.Есенов атындағы КМТжИУ
Редакциялық - баспа бөлімінде басылды.
Ақтау қаласы, 32 ш/а.