ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ Ш. ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ

ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР ИНСТИТУТЫ

«ЖАРАТЫЛЫСТАНУ» КАФЕДРАСЫ

З.Қ. ЖҰБАЕВА

АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ ПӘНІНЕН ӨЗІНДІК ЖҰМЫСТАРДЫ ОРЫНДАУ ҮЛГІЛЕРІ

ӘДІСТЕМЕЛІК НҰСҚАУ

Ақтау-2010

ӘОК 378:516(072)
Жұбаева З. Қ.
Аналитикалық геометрия пәнінен өзіндік жұмыстарды орындау үлгілері.
Әдістемелік нұсқау.Ақтау: КМТжИУ, 2010.- 31 бет.

ПІКІР БЕРУШІ: п.ғ.к., доцент Г.Р. Кощанова

Бұл әдістемелік нұсқау математика мамандығы бойынша жоғары оқу орындарының бағдарламасына сәйкес жасалған. Мұнда аналитикалық геометрия теориясының негізгі анықтамалары мен қасиеттерін терең түсіну үшін, таңдалып алынған мысалдар қарастырылған және әрбір тақырыптың соңында есептер берілген. Сондықтан бұл әдістемелік нұсқауды аралық бақылауға есептер жинағы ретінде пайдалануға болады. Бұл әдістемелік нұсқау кредиттік жүйе бойынша оқытылатын оқу орындарының студенттеріне арналған.

Баспадан шығаруға Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті оқу - әдістемелік кеңесінің шешімімен ұсынған.

Кіріспе

Аналитикалық геометрия – кез-келген математикалық пәннің негізі болтын классикалық математиканың бөлігі.

«Аналитикалық геометрия» курсы белгілі білім қорын жеткізіп және оларды қолдануға үйретіп қана қоймай, ол сонымен қатар математиканы оқып – үйрену үшін қажетті студенттердің логикалық ойлауын және математикалық мәдениетін дамытады.

«Аналитикалық геометрия» пәні жалпы ғылыми пән болып табылады – ол студенттерді басқа математикалық пәндерді оқып – үйренуге дайындайды.

Аналитикалық геометрияны табысты менгеру үшін орта мектеп көлеміндегі элементарлық математиканы, сондай – ақ қатар оқылатын жоғарғы және сызықтық алгебраны, математикалық талдауды білу қажет.

Бұл әдістемелік нұсқау университеттің «Математика», «Физика», «Информатика» мамандықтарында оқитын студенттердің «Аналитикалық геометрия» курсын жеткілікті дәрежеде меңгеруі үшін, есептерді жалпылама шеше алуды үйренуі үшін, жүйелеп оқу принципін кеңінен қолдана отырып, пәнаралық байланысты тиімді пайдалану үшін қажет және олардың кәсіптік біліктілігін жетілдірудің ғылыми ізденістеріне ұмтылуын жетілдіру; стандартты және стандартты емес математикалық есептерді шешу техникасында тәжірибелік біліктіліктерін қалыптастыру, «Аналитикалық геометрия» курсын өту барсында студенттердің тікелей өз бетімен жұмыс жасауға ыңғайландыру, өз бетімен есептерді шығарып, оны талдау дағдыларын қалыптастыру үшін де пайдаланады.

1. ВЕКТОР
Вектордың анықтамасы. Векторларды қосу. Векторды санға (скалярға) көбейту

Анықтамалар. 1°. Бастапқы нүктесі А, ал соңғы нүктесі В болатын бағытталған кесінді АВ векторы деп аталып, $\overline{ÀÂ}$ арқылы белгіленеді. Кейде $\overline{ÀÂ}$ векторын $\tilde{a}$ арқылы белгілеп, $\overline{ÀÂ} = \tilde{a}$ деп те жазады. $\overline{ÀÂ}$ векторының ұзындығын оның модулі деп атап $\left|\overline{ÀÂ}\right|$, немесе $|\tilde{a}|$ арқылы белгілейді. Бір түзуге параллель $\tilde{a}$ және $\bar{b}$ векторларын коллинеар векторлар деп атап $\bar{a} = \lambda \bar{b}$, мұндағы λ скаляр, арқылы белгілейді. Бір жазықтыққа параллель үш векторды компланар векторлар деп атайды. Егер $\tilde{a}$ және $\bar{b}$ векторларының: 1) ұзындықтары тең; 2) бірімен бірі коллинеар; 3) бағыттары бірдей(бағыттас) болса, онда оларды тең векторлар деп атайды.

2°. $\tilde{a}$ векторы мен m санының көбейтіндісі деп ұзындығы $|\grave{a}| \cdot |m|$ көбейтіндісіне тең, $a>0$ болғандағы $\tilde{a}$ векторымен бағыттас (m>0), ал m<0 болғанда $\tilde{a}$-ға қарама-қарсы $\tilde{a}$ m векторын атайды.

3°.Векторларды қосу. $\tilde{a} + \bar{b} + \tilde{n}$ векторларының қосындысы деп тұйықтайтын $\overline{ÎÑ} = \bar{R}$ векторын атайды. Егер параллелограмда $\overline{OA} = \tilde{a}$; $\overline{OB} = \bar{b}$ болса, онда $\overline{ÎÑ} = \tilde{a} + \bar{b}$, ал $\overline{BA} = \tilde{a} - \bar{b}$.

4°.Вектордың өске проекциясы. $\tilde{a}$ векторы Ох өсімен φ бұрышын жасайды дейік. Онда $\tilde{a}$ векторының өске проекциясы мына формула бойынша анықталады.

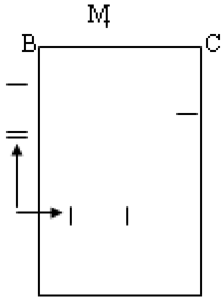
$$ïð_{\hat{o}}\tilde{a} = |\bar{a}| \cdot \cos(\bar{a}, {}^\wedge \mathrm{Ox}).$$

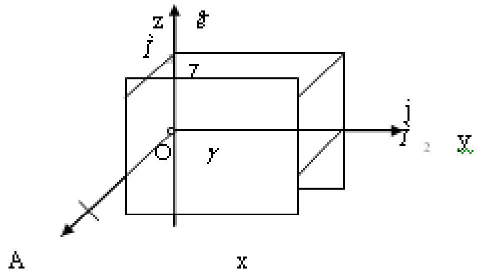
Екі вектордың қосындысының берілген өске проекциясы қосындыны құраушы векторлардың сол өске түсірілген проекцияларының қосындысына тең:

$$ïð_{\hat{o}}(\tilde{a} + \bar{b}) = ïð_{\hat{o}}\tilde{a} + ïð_{\hat{o}}\bar{b}.$$

<u>Өз бетінше шығарылатын есептер.</u>

1. ОАСВ тіктөртбұрышының ОА және ОВ қабырғаларында $\bar{i}$ және $\bar{j}$ (8-сурет) бірлік векторларыөлшеп салынған. $\bar{i}$ және $\bar{j}$ бірлік векторлары арқылы $\overline{OA}$, $\overline{ÀÑ}$, $\overline{ÑÂ}$, $\overline{ÂÎ}$, $\overline{ÎÑ}$ және $\overline{BA}$, өрнектеңдер, мұндағы ОА=3; ОВ=4.
2. 8-суретте M-BC-нің қақ ортасы, ал N AC –нің қақ ортасы. $\overline{ÎÌ}$, $\overline{ÎN}$ және $\overline{MN}$ векторларының ОА=3; ОВ=4 болғандағы мәндерін анықтаңдар.
3. Компланар емес $\overline{OA} = \tilde{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$; $\overline{ÎÑ} = \tilde{n}$ үш векторлардан параллелепипед салынған. Олардың $\tilde{a} + \bar{b} - \tilde{n}$; $\tilde{a} - \bar{b} + \tilde{n}$; $\tilde{a} - \bar{b} - \tilde{n}$ және $\bar{b} - \tilde{a} - \tilde{n}$ векторларына тең вектор-диагоналдарын көрсетіңдер.
4. $\overline{OA} = \tilde{a}$; $\overline{OB} = \bar{b}$ векторлары берілген. $\overline{ÎÑ} = \tilde{n}$ векторы ОАВ үшбұрышының медианасы. Формулалар көмегімен және геометриялық сызу арқылы: 1) $\tilde{n}$ векторын $\tilde{a}$ және $\bar{b}$ векторлары бойынша; 2) $\tilde{a}$ векторын $\bar{b}$ және $\tilde{n}$ векторлары бойынша жіктеп көрсетіңдер.

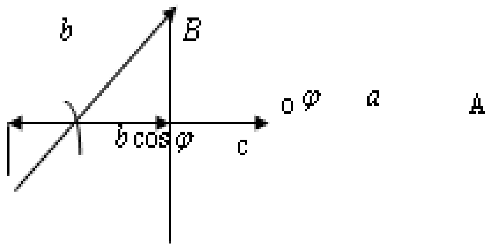




5. Арасындағы бұрыш $120°$-қа тең $\tilde{a}$ және $\bar{b}$ векторлары берілген. $\tilde{n} = 2\bar{a} - 1.5\bar{b}$ векторын салып, a=3, b=4, болғандағы оның модулін табыңдар.

Екі вектордың скалярлық көбейтіндісі

$1°$**. Анықтама**. Екі вектордың скалярлық көбейтіндісі деп олардың ұзындықтарын векторлар арасындағы бұрыштың косинусына көбейткен көбейтіндіге тең санды айтады (10-сурет)



$\tilde{a}$ және $\bar{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін $\bar{a} \cdot \bar{b}$ арқылы белгілейді. Сонда

$$\tilde{a} \cdot \bar{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi \qquad (1)$$

Бұдан $b \cdot \cos\varphi = np{-}_a\bar{b}$. Демек,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi = a \cdot np{-}_a\bar{b} = b \cdot np_b\bar{a} \qquad (2)$$

$2°$. Екі вектордың скалярлық көбейтіндісінің қасиеттері:

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$
2. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$
3. Егер $\bar{a} \parallel \bar{b}$ болса, онда $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ жеке жағдайда $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = a^2$. Бұдан

$$a = \sqrt{a^{-2}} \qquad (3)$$

4. Егер $\bar{a} \perp \bar{b}$ болса, онда $\bar{a} \cdot \bar{b} = a \cdot b \cdot \cos 90° = 0$
5. Орттардың скалярлық көбейтінділері:

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = 0; \bar{j} \cdot \bar{k} = 0; \bar{i} \cdot \bar{k} = 0; \bar{i} \cdot \bar{i} = 1; \bar{j} \cdot \bar{j} = 1; \bar{k} \cdot \bar{k} = 1.$$

Егер $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ және $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ өзінің скалярлық проекциялары арқылы берілсе,онда

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (4)$$

$3°$. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының арасындағы бұрыш:

$$\cos\psi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{a\cdot b} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \qquad (5)$$

Екі вектордың параллелдік белгісі: $\bar{b} = \alpha\bar{a}$ немесе $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$. Екі вектордың перпендикулярлық белгісі: $\bar{a}\cdot\vec{b} = 0$; немесе $a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3 = 0$.

<u>1-мысал:</u> $(2\bar{i} - \bar{j})\cdot\bar{j} + (\bar{j} - 2\bar{k})\cdot\bar{k} + (\bar{i} - 2\bar{k})^2$ векторын есептеп табыңдар.

<u>Шешуі:</u> $(2\bar{i} - \bar{j})\cdot\bar{j} + (\bar{j} - 2\bar{k})\cdot k + (\bar{i} - 2\bar{k})^2 = 2\bar{i}\cdot\bar{j} - \bar{j}^2 + \bar{j}\bar{k} - 2\bar{k}^2 + \bar{i} - 4\bar{i}\bar{k} + 4\bar{k}^2 = -1 - 2 + 1 + 4 = 2$

<u>2-мысал:</u> $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$ және $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар.

<u>Шешуі:</u> $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$ және $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{-1\cdot 1 + 1\cdot(-2)}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+4+4}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\varphi = 135°$

<u>Өз бетінше шығарылатын есептер</u>

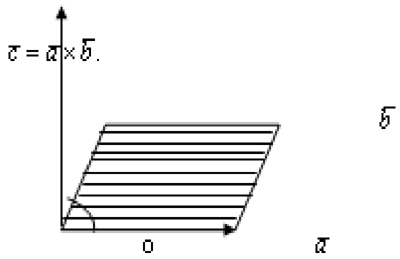
1. Төбелері A(2;-1;3), B(1;1;1) және C(0;0;5) нүктелерінде жатқан ABC үшбұрышының бұрыштарын анықтаңдар.
2. Жазықтық үстінде төбелері O(0;0), A(2a;0) және B(a;-a) нүктелерінде жатқан үшбұрыш берілген. OB қабырғасы мен OM медианасы арасындағы бұрышты табыңдар.
3. xoy және yoz бұрыштарының биссектрисаларының арасындағы бұрышты табыңдар.
4. Квадраттың бір төбесінен қарсы екі қабырғасын қақ бөлетіндей түзулер жүргізілген. Осы екі түзудің арасындағы бұрышты табыңдар.
5. $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$ және $\bar{b} = -2\bar{j} + \bar{k}$ векторларына салынған параллелограм диагональдарының арасындағы бұрышты табыңдар.
6. $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ және $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$ векторлары берілген. $np_b a$ және $np_a b$ табыңдар.
7. 1) $(\bar{a} + \bar{b})^2$; 2) $(\bar{a} + \bar{b})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2$ өрнектеріндегі жақшаларды ашыңдар, алынған формулалардың геометриялық мағыналарын анықтаңдар.
8. $\bar{a} = 2\bar{m} + 4\bar{n}$ және $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңдар. Мұндағы $\bar{m}$ мен $\bar{n}$ бірімен бірі $120°$ бұрыш құратын бірлік векторлар.
9. A(a;0;0), B(0;0;2a) және C(a;0;a) нүктелері берілген. $\overline{\hat{I}\tilde{N}}$ және $\overline{\grave{A}\hat{A}}$ векторларын салыңдар және олардың арасындағы бұрышты табыңдар.
10. $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}$ және $\bar{b} = \bar{m} - 2\bar{n}$ векторларына салынған, мұндағы $\bar{m}$ және $\bar{n}$ бірлік векторлар, олардың арасындағы бұрыш $60°$, паралелограмның диагональдарының ұзындықтарын табыңдар.

Екі вектордың векторлық көбейтіндісі

$1°$. **Анықтама.** $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп (11-сурет) мына шарттарды қанағаттандыратын:

1. Модулі $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларына салынған параллелограмның сан мәніне тең;

2. Параллелограмм жазықтығына перпендикуляр;
3. $\bar{a}$ векторын $\bar{b}$ векторына ең қысқа бұру бағыты $\bar{c}$ векторының
соңғы нүктесінен қарағанда сағат тілінің бағытына қарсы бағытта іске асырылатын $\bar{c}$ векторын атайды. $\bar{a}, \bar{b}$ және $\bar{c}$ оң үштік деп аталады.



Екі вектордың векторлық көбейтіндісі $\bar{a} \times \bar{b}$ арқылы белгіленеді.Демек, $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$.
2°. Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:
1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$;
2) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$.
3) Егер $\bar{a} \parallel \bar{b}$,онда $\bar{a} \times \bar{b} = 0$. Жеке жағдайда $\bar{a} \times \bar{a} = 0$.
3° .Орттардың векторлық көбейтінділері:

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}. \qquad (1)$$

4°. Көбейткіш векторлар координаталары арқылы $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ және $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (2)$$

5°. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларына сызылған параллелограмм ауданы:

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}|, \qquad (3)$$

ал $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторларына сызылған үшбұрыш ауданы:

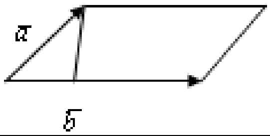
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}| \qquad (4)$$

<u>1-мысал:</u> Төбелері A(7;3;4),B(1;0;6) және C(4;5;-2) нүктелерінде жататын үшбұрыш ауданын есепте.
<u>Шешуі:</u> A(7;3;4); B(1;0;6); C(4;5;-2)
$\overline{\grave{A}\hat{A}} = \{-6; -3; 2\}$; $\overline{\grave{A}\tilde{N}} = \{-3; 2; -6\}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} * \overline{AC}\right|; \qquad \overline{AB} * \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 18\bar{i} - 6\bar{j} - 12\bar{k} - 9\bar{k} - 36\bar{j} - 4\bar{i} = 14\bar{i} - 42\bar{j} - 21\bar{k}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{4 + 36 + 9} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 = \frac{49}{2} = 24.5$$

<u>2-мысал:</u> $\bar{a} = 2\bar{j} + \bar{k}$ және $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{k}$ векторларына параллелограмм салыңдар.Осы параллелограмның ауданы мен биіктігін табыңдар.
<u>Шешуі:</u> $\bar{a} = 2\bar{j} + \bar{k}$ және $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{k}$



$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=4\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$$

$$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{16+1+4}=\sqrt{21}$$

$$\left|\bar{b}\right|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\qquad S=\left|\bar{b}\right|\cdot h\qquad h=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}=\sqrt{4\frac{1}{5}}$$

Өз бетінше шығаратын есептер

1. $(\bar{a}-\bar{b})\times(\bar{a}+\bar{b})=2\bar{a}\times\bar{b}$ теңдігін дәлелдеңдер және осы теңбе-теңдіктің геометриялық мағынасын айқындаңдар.
2. Диагональдары $2\bar{m}-\bar{n}$ және $4\bar{m}-5\bar{n}$,мұндағы $\bar{m}$ және $\bar{n}$ $45°$ бұрыш құрайтын бірлік векторлар, векторлары арқылы берілген параллелограмның ауданын табыңдар.
3. Төбелері A(1;-2;8),B(0;0;4) және C(6;2;0) нүктелерінде жататын үшбұрышты сызыңдар. Үшбұрыш ауданын және BD биіктігін табыңдар.
4. $\bar{a}=\bar{k}-\bar{j}$ және $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ векторларына салынған параллелограмның ауданын және диагоналін табыңдар.
5. $(2\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}+2\bar{b})=3\bar{a}\times\bar{b}$ теңдігін дәлелдеңдер.
6. $\bar{a}=\bar{m}+2\bar{n}$ және $\bar{b}=2\bar{m}+\bar{n}$, мұндағы $\bar{m}$ және $\bar{n}$ $30°$ бұрыш құрайтын бірлік векторлар , векторларына салынған параллелограмм ауданын табыңдар.
7. $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторлары $45°$ құрайды. $|\bar{a}|=|\bar{b}|=5$ болғандағы $\bar{a}-2\bar{b}$ және $3\bar{a}+2\bar{b}$ векторларына салынған үшбұрыш ауданын табыңдар.
8. $\bar{a}=3\bar{k}-2\bar{j}$, $\bar{b}=3\bar{i}-2\bar{j}$ және $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ векторларын салыңдар. $\tilde{n}$ векторының ұзындығы (модулі) мен $\tilde{a}$ және $\bar{b}$ векторларына салынған үшбұрыш ауданын есептеңдер.

Үш вектордың аралас көбейтіндісі

$1°$. **Анықтама.** $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ өрнегін айтамыз .Егер $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлары өз координаталары арқылы берілсе: $\bar{a}(x_1;y_1;z_1),\bar{b}(x_2;y_2;z_2)$ және $\tilde{n}(x_3;y_3;z_3)$, онда

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\qquad(1)$$

$2°$. Аралас көбейтіндінің қасиеттері мынадай:

1) Кез келген көбейткіш векторлардың орнын ауыстырғаннан

үш вектордың аралас көбейтіндісі өз таңбасын қарама-қарсы таңбаға ауыстырады:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = -(\bar{a}\times\bar{c})\cdot\bar{b} = -(\bar{c}\times\bar{b})\cdot\bar{a}. \qquad (2)$$

2) Егер үш вектордың екеуі біріне бірі тең немесе параллель (коллинеар) болса, онда аралас көбейтінді нөлге тең.

3) $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$. Сондықтан $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ арқылы да белгілейді.

3° $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторларына салынған параллелепипед көлемі:

$$V_{пар} = \left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right| \ ,$$

Ал пирамида көлемі:

$$V_{пир.} = \frac{1}{6}\left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right|.$$

4°. Үш вектордың компланарлық белгісі. Егер $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлары компланар (яғни, үш вектор да бір жазықтықта жатқан) болса, онда $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = 0$ және,керісінше, егер үш вектордың аралас көбейтіндісі нөлге тең болса, онда ол векторлар бір немесе біріне-бірі параллель жазықтықтарда жатады.

<u>1-мысал:</u> A(2;-1;-2), B(1;2;1), C(2;3;0) және D(5;0;-6) нүктелері бір жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.

<u>Шешуі:</u> A(2;-1;-2); B(1;2;1); C(2;3;0); D(5;0;-6) нүктелерінен жасалған үш вектордың компланарлығына көз жеткіземіз.

$\overline{AB} = \{-1;3;3\}$; $\overline{\grave{A}\tilde{N}} = \{0;4;2\}$; $\overline{\grave{A}D} = \{3;1:-4\}$

$$(\overline{\grave{A}\grave{A}}\cdot\overline{\grave{A}\tilde{N}})\cdot\overline{\grave{A}D} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 16+18-36+2 = 0$$ Демек, $\overline{\grave{A}\grave{A}},\overline{\grave{A}\tilde{N}}$ және $\overline{\grave{A}D}$ векторлары компланар болғандықтан A,B,C және D нүктелері бір жазықтықта жатады.

<u>2-мысал:</u> $\bar{a} = -\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{b} = 2\bar{i}-3\bar{j}-4\bar{k}$; $\bar{c} = -3\bar{i}+12\bar{j}+6\bar{k}$ векторларының компланар болатынын дәлелдеп $\bar{c}$ векторын $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

<u>Шешуі:</u> $\bar{a} = -\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{b} = 2\bar{i}-3\bar{j}-4\bar{k}$; $\bar{c} = -3\bar{i}+12\bar{j}+6\bar{k}$

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(6+12+16-6-12-16) = 0$$

Демек, $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлары - компланар

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} \qquad \begin{cases} -3 = \lambda\cdot(-1)+\mu\cdot 2 \\ 12 = \lambda\cdot 3+\mu\cdot(-3) \\ 6 = \lambda\cdot 2+\mu\cdot(-4) \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+2\mu = -3 \\ 3\lambda-3\mu = 12 \end{cases} \qquad x = 2\mu+3$$

$$6\mu+9-3\mu = 12$$

$$3\mu = 3$$

$$\mu = 1; \qquad x = 5$$

Сонда $\bar{c} = 5\bar{a}+\bar{b}$

Өз бетінше шығарылатын есептер

1. $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{b} = -3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$ векторларына салынған параллелепипедтің көлемін табыңдар. ($\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$) оң немесе теріс үштік екенін анықтаңдар.
2. Төбелері O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0) және C(1;2;4) нүктелері болатын пирамиданы салыңдар және оның көлемін, ABC жағының және осы жаққа түсірілген пирамида биіктігін табыңдар.
3. $\bar{a} = -\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$; $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} - 4\bar{k}$; $\bar{c} = -3\bar{i} + 12\bar{j} + 6\bar{k}$ векторларының компланар болатынын дәлелдеп $\bar{c}$ векторын $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары бойынша жіктеңдер.
4. $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$ бірлік векторлары берілген.
5. $(\bar{m}, \hat{\ } \bar{n}) = [\bar{p}, \hat{\ } (\bar{m} \times \bar{n})] = \alpha.\ (\bar{m} \hat{\times} \bar{n}) \times \bar{p} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ теңдігін дәләлдеңдер.

2. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ

Кесіндіні берілген қатынасқа бөлу. Үшбұрыш ауданы

$A(x_1; y_1)$ және $B(x_2; y_2)$ нүктелері берілсін. AB кесіндісін AM:MB=λ қатынасына бөлетін M(x;y) нүктесінің координаталары

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (1)$$

Формулаларымен анықталады.

Жеке жағдайда, M(x;y) нүктесі AB кесіндісін қақ екіге бөлсе, онда $\lambda = 1$ болады. Демек,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (2)$$

Егер $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ және $C(x_3; y_3)$ н8ктелер3 юер3лген үшбұрыш төбелерінің координаталары болса, онда үшбұрыш ауданы мына формула бойынша анықталады:

$$S_\Delta = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Өз бетінше шығарылатын есептер.

1. Жазықтықта A(-2;1) және B(3;6) нүктелерін салып, AB кесіндісін AM:MB=3:2 қатынасына бөлетінM(x;y) нүктесін табу керек.
2. A(-2;1) және B(3;6) нүктелері берілген. AB кесіндісін AM:MB=-3:2 қатынасына бөліңіз.
3. Төбелері A(2;0), B(5;3) және C(2;6) нүктелерінде орналасқан үшбұрыш ауданын табыңдар.
4. A(1;1), B(-1;7) және C(0;4) нүктелерінің бір түзудің бойында жатқанын дәлелдеңдер.
5. Төбелері A(3;1), B(4;6), C(6;3) және D(5;-2) нүктелерінде жатқан төртбұрыштың ауданын табыңдар.

Координаталарды түрлендіру

Координаталар өстерін өзіне-өзін параллель жылжытқанда декарттық тікбұрышты коорднаталар жүйесін түрлендіру

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b$$

Формулалары арқылы жүзеге асырылады. Мұндағы x,y – кез келген M нүктесінің ескі координаталары, ал x' және y' сол нүктенің жаңа координаталары. a,b ескі координаталар жүйесіндегі жаңа бас нүктенің координаталары.

Декарттық тікбұрышты координаталарды α бұрышына бұрғандағы түрлендіру мына формулалармен анықталады.

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Мұндағы x,y M нүктесінің бұрынғы (ескі) координаталар жүйесіндегі координаталары болса, ал x', y' сол нүктенің жаңа координаталар жүйесіндегі мәні.

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b$$

формулалары координаталар жүйесін Ox бағытында a-ға, ал Oy бағытында b-ға жылжытып α бұрышына бұрғандағы түрлендіруді анықтайды.

<u>Өз бетінше шығарылатын есептер.</u>

1. Координаталар өстері бағыттарын өзгертпей координаталар бас нүктесін төменде келтірілген нүктелерге көшіргендегі сәйкес формулаларды жазып көрсетіңдер:

1) A(3;4); 2) B(-2;1); 3) C(-3;5).

2. Координаталар өстері бағытын өззгертусіз қалдырып бас нүкте $\hat{I}\,'$(3;-4) нүктесіне көшірілген. Координаталардың жаңа жүйесінде A(1;3), B(-3;0), C(-1;4) нүктелері берілген. Осы нүктелердің координаталарын ескі жүйеде есепте.

3. A(2;1), B(-1;3) және C(-2;5) берілсін. Координаталар бағытын өзгертпей бас нүктені: 1) A нүктесіне; 2) B нүктесіне; 3) C нүктесіне көшіргендегі осы нүктелердің координаталардың жаңа жүйесіндегі координаталарын табу керек.

4. Координаталар өстері : 1) $60°$; 2) $-45°$; 3) $90°$; 4) $-90°$; 5) $180°$ бұрыштарының біреуіне бұрылғандағы кординаталарды түрлендірудің формулаларын жазыңдар.

5. M(3;1), N(-1;5) және P(-3;-1) нүктелері берілген. Координаталар өстері: 1) $-45°$; 2) $90°$; 3) $-90°$; 4) $180°$ бұрыштарына бұрылғандағы сол нүктелердің координаталардың жаңа жүйесіндегі координаталарын табыңдар.

Сызық теңдеуі-нүктелердің геометриялық орны

x пен y айнымалылары қанағаттандыратын теңдеу сызық теңдеуі деп аталады.

Сызық теңдеуіне енген x пен y айнымалылары ағымдық координаталар деп аталады, ал әріптік тұрақтылар- параметрлер. Мысалы, $x^2 + y^2 = R^2$ - шеңбер теңдеуіндегі x пен y ағымдық координаталар, ал радиус R – параметр.

Бізге бірдей қасиетке ие нүктелердің геометриялық орны ретінде анықталатын сызық теңдеуін құру үшін мыналар қажет болады:

1) Сызықтың үстіндегі кез-келген M(x;y) нүктесін аламыз;

2) Сызықтың M(x;y) нүктесінің барлық жалпы қасиеттерін теңдік арқылы жазамыз;

3) Теңдікке енген барлық кесінділер мен бұрыштарды M(x;y) ағымдық нүктесінің координаталары арқылы өрнектейміз.

Өз бетінше шығарылатын есептер.

1) $x^2 + y^2 = R^2$ - теңдеуі радиусы R-ге тең центрі координаталар бас нүктесінде жатқан шеңбер теңдеуі екенін дәлелдеңдер.

2) Центрі C(3;4) нүктесінде жатқан, радиусы R=5 ке тең шеңбер теңдеуін жазыңдар. A(-1;1), B(2;3), O(0;0) және D(4,1) нүктелері шеңберге тән немесе сырт нүктелер екенін тексеріңдер.

3) A(0;2) мен B(4;-2) нүктелерінен бірдей қашықтықта жатқан M(x;y) нүктесінің қозғалу сызығының теңдеуін жазу керек. C(-1;1), D(1;-1), E(0;-2) және F(2;2) нүктелері сызық үстінде жататын, жатпайтынын анықта.

4) Өз қозғалысында A(0;9) нүктесінен B(0;1) нүктесіне қарағанда үш есе алыс қашықтықта қозғалатын M(x,y) нүктесінің траекториясының теңдеуін жазыңдар.

5) Өз қозғалысында A(-1;1) нүктесінен B(-4;4) нүктесіне қарағанда екі есе жақын қозғалатын M(x;y) нүктесінің траекториясының теңдеуін жазыңдар.

6) Координаталар бұрыштарының биссектрисаларының теңдеулерін жазыңдар.

7) F(2;2) нүктесі мен Ox өсінен бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орнының теңдеуін жазыңдар. Алынған теңдеудің графигін салыңдар.

8) Ox өсінен Oy өсіне қарағанда екі есе үлкен қашықтықта жатқан M(x;y) нүктесінің қозғалу траекториясының теңдеуін жазыңдар.

9) $y = 2x^2 - 4x + 3$ сызығының координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін табыңдар және сызықтың графигін салыңдар.

10) Oy өсімен F(4;0) нүктесінен бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орнының теңдеуін жазыңдар. Алынған теңдеудің графигін сызыңдар.

Бұрыштық коэффициенті арқылы берілген түзу теңдеуі. Түзудің жалпы теңдеуі. Координаталар өстерінен қиылған кесінділер арқылы берілген түзу теңдеуі

1. y=kx+b – бұрыштық коэффициенті арқылы берілген түзу теңдеуі. Мұндағы k абсцисса өсі мен түзу арасындағы бұрыштың тангенсі. $k = tg\alpha$- түзудің бұрыштық коэффициенті деп аталады. b-түзудің ордината өсінен қиған кесіндінің шамасы.

2. A+B+C=0 –түзудің жалпы теңдеуі. Кейбір дербес түрлері:

а) C=0 болса, онда $y = -\frac{A}{B}x$, мұндағы B≠0, түзу координаталардың бас нүктесін басып өтеді.

б) B=0 болғанда $x = -\frac{C}{A} = a$ -түзу Oy өсіне паралель.

в) A=0 болғанда $y = -\frac{C}{B} = b$ - түзу Ox өсіне паралель.

г) B=C=0 болса, онда $Ax = 0$; x=0 –Oy өсінің теңдеуі.

д) A=C=0 болса, онда y=0 – Ox өсі

3. Координаталар өстерінен қиатын кесінділер арқылы түзу теңдеуі:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Мұндағы a және b –координаталар өстерінен қиатын түзу кесінділері.

Мысалы: Өзінің жалпы теңдеулері арқылы берілген түзулер: 1) 2х-3у=6; 2) 3х-2у+4=0 теңдеулерін координаталар өсінен қиатын кесінділері арқылы берілген түзу теңдеулері арқылы жазыңдар.

Шешуі: 2х-3у=6 теңдеуін $\frac{\tilde{o}}{\grave{a}}+\frac{\acute{o}}{\hat{a}}=1$ түріне келтіреміз. Ол үшін теңдеудің екі жағын да 6 санына бөлеміз:

$$\frac{\tilde{o}}{3}+\frac{\acute{o}}{-2}=1$$

Демек a=3, b=-2 болған кездегі кесінділермен берілген теңдеу.

<u>Өз бетінше шығарылатын есептер</u>.

1. Оу өсінен b=3 кесіндісін қиатын және Ох өсімен: 1) $45°$; 2) $135°$ бұрыш жасайтын түзулердің теңдеулерін жазыңдар.
2. Оу өсінен b=-3 кесіндісін қиатын және Ох өсімен: 1) $60°$;2) $120°$ бұрыш жасайтын түзулердің теңдеулерін жазыңдар.
3. Координаталардың бас нүктесінен өтетін және Ох өсімен: 1) $45°$;2) $60°$;3) $90°$;4) $120°$;5) $135°$ бұрыш жасайтын түзу теңдеуін жазыңдар.
4. Координаталардың бас нүктесінен және (-2;3) нүктесі арқылы өтетін түзу теңдеуін жазыңдар.
5. А(2;3) нүктесі арқылы өтетін және Ох өсімен $45°$ бұрышын жасайтын түзудің k және b параметрлерін анықтап теңдеуін жазыңдар.
6. А(4;3) нүктесі арқылы өтетін және координаталар бұрышынан ауданы 3-ке тең үшбұрыш қиатын түзу теңдеуін жазыңдар.
7. А(3;5), В(2;7), С(-1;-3) және D(-2;-6) нүктелері $y=2x-1$ түзуі үстінде жата ма немесе олар ол түзуден «жоғары» немесе «төмен» орналасқан ба?
8. Диагональдары 10 см және 6 см ромбының үлкен диагоналін Ох өсі, ал кіші диагоналін Оу өсі деп алып ромб қабырғаларының теңдеулерін жазыңдар.
9. (-4;6) нүктесін басып өтетін және координаталар өсінен ауданы 6-ға тең үшбұрыш қиатын түзу теңдеуін жазыңыз.
10. Ох өсінен қашықтығы х=-3 түзуіне дейінгі қашықтығынан екі есе үлкен қашықтықта жатқан М(х;у) нүктесінің қозғалу сызығының теңдеуін жазыңыздар.

Екі түзу арасындағы бұрыш. Берілген нүкте арқылы өтетін шоқ түзулер теңдеуі. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуі. Екі түзудің қиылысу нүктесі

$1°$. Сағат тілінің бағытына қарсы бағытта өлшенетін $y=k_1x+b_1$ түзуінен $y=k_2x+b_2$ түзуіне дейінгі φ бұрышы

$$tg=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \qquad (1)$$

формуласы арқылы анықталады. Өзінің жалпы теңдеулері арқылы берілген

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{және} \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

түзулері үшін (1)- формула былай жазылады:

$$tg\alpha=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2-B_1B_2}.$$

Екі түзудің паралельдік шарты: $k_1=k_2$ немесе $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$ теңдіктері арқылы анықталады.

Екі түзудің перпендикулярлық шарты: $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ немесе $A_1A_2+B_1B_2=0$ теңдіктері арқылы анықталады.

2°. $A(x_1;y_1)$ нүктесінен өтетін шоқ түзулер теңдеуі:

$$y-y_1=k(x-x_1) \qquad (2)$$

формуласы арқылы беріледі.

3°. Берілген екі: $A(x_1;y_1)$ және $B(x_2;y_2)$ нүктелері арқылы өтетінтүзу теңдеуі:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

формуласы арқылы беріледі.

4°.Параллель емес екі $A_1x+B_1y+C_1=0$ және $A_2x+B_2y+C_2=0$түзулерінің қиылысу нүктесін табу үшін оларды біріктіріп шешіп табатынымыз:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-C_1 & B_1\\ -C_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & -C_1\\ A_2 & -C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.$$

<u>Мысалы:</u> A(2,3) нүктесі арқылы өтетін шоқ түзулер теңдеуін жазыңдар. Осы шоқ түзулер ішінен Ох өсімен: 1) $45°$;2) $60°$;3) $135°$;4)$0°$ бұрыш жасайтын түзулерді таңдап алып, олардың графиктерін сызыңдар.

<u>Шешуі:</u> Түзулердің теңдеулерін $ó=\hat{e}\tilde{o}+b$ түріне келтіреміз. Сонда k коэффициенттері бірдей түзулер параллель болады да, коэффициенттері қарама-қарсы, әрі кері болса, яғни $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$ болса, перпендикуляр болады.

1. $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{7}{2}$
2. $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{4}$
3. $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{4}$
4. $y=-\dfrac{3}{2}x+2$

Сонда бірінші түзу мен екінші түзу параллель болады да, төртінші түзу ол екеуіне перпендикуляр болады.

<u>Өз бетінше шығарылатын есептер.</u>

1. A(-2;5) нүктесі мен $2x-y=0$ түзуін салыңдар. A нүктесін басып өтетін шоқ түзулер теңдеуін жазыңдар, және шоқ түзулер: 1) берілген түзуге параллель түзуді бөліп шығарыңдар; 2) берілген түзуге перпендикуляр түзудің теңдеуін жазыңдар.
2. $2x-5y-10=0$ түзуінің координаталар өстері мен қиылысу нүктелерінде оған перпендикулярлар жүргізілген. Сол перпендикулярлар теңдеулерін жазып беріңдер.
3. A(-1;3) және B(4;-2) нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуін жазыңдар.
4. Төбелері A(-2;0), B(2;6) және C(4;2) нүктелерінде жатқан үшбұрыштың BD биіктігі және BE медианасы жүргізілген. AC қабырғасы, BE медианасы және BD биіктігі теңдеулерін жазыңдар.
5. Координаталардың бас нүктесінен өтіп $y=4-2x$ түзуімен $45°$ бұрыш жасайтын түзулердің теңдеулерін жазыңдар.
6. $2x+3y=6$ түзуімен $45°$ бұрыш жасайтын және A(-1;1) нүктесін басып өтетін түзулердің теңдеулерін жазыңдар.
7. Қабырғалары $3y+x=0$; $x=3$; $x-2y+3=0$ теңдеулері арқылы берілген үшбұрыштың төбелерін және бұрыштарын табыңдар.
8. Үшбұрыш төбелері A(-2;0), B(2;4), C(4;0) арқылы берілген. Үшбұрыш қабырғалары, AE медианасы; AD биіктігі теңдеулерін жазыңдар және AE медианасының ұзындығын табыңдар.
9. Төбелері A(-4;2), B(2;-5) және C(5;0) нүктелерінде жатқан үшбұрыштың медианаларының қиылысу нүктелерін және биіктіктерінің қиылысу нүктелерін табыңдар.

Түзудің нормаланған теңдеуі. Нүктенің түзуге дейінгі қашықтығы. Берілген екі түзудің қиылысу нүктесін басып өтетін шоқ түзулер теңдеуі

$1°$. Түзудің нормаланған теңдеуі

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (1)$$

мұндағы p- түзуге координаталар бас нүктесінен түсірілген перпендикулярдың (нормаль) ұзындығы; α-осы перпендикулярдың Ox өсімен жасайтын бұрышы. Түзудің жалпы теңдеуін оның нормаланған түріне келтіру үшін Ax+By+C=0 теңдеуінің екі жағын да нормалаушы көбейткіш $M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$-қа көбейтеміз. М-нің таңбасы бос мүше C-ның таңбасына қарама-қарсы таңба етіп алынады.

$2°$. $M_0(x_0;y_0)$ нүктесінен $\cos\alpha+\sin\alpha-p=0$ түзуіне дейінгі қашықтық: $d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|$ теңдігімен анықталады. Егер түзу өзінің жалпы теңдеуі арқылы берілсе, онда

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (2)$$

$3°$. Ax+By+C=0 және $A_1x+B_1y+C_1=0$ түзулерінің арасындағы бұрыштың биссектрисасының теңдеуі

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} \qquad (3)$$

арқылы табылады.

4°. Берілген екі түзудің қиылысу нүктесі арқылы өтетін шоқ түзулер теңдеуі

$$\alpha(Ax+By+C)+\beta(A_1x+B_1y+C_1)=0$$

арқылы беріледі.

<u>Өз бетінше шығарылатын есептер.</u>

1. Мына теңдеулерді нормаланған теңдеулерге келтіріңдер: 1) 3x-4y-20=0; 2) x+y+3=0; 3) y=kx+b.
2. Нормаль p=2 болғандағы, ал оның Ox өсімен жасайтын α бұрышы: 1) $45°$; 2) $135°$; 3) $225°$; 4) $315°$ болғандағы түзулер теңдеуін жазыңдар.
3. A(4;3), B(2;1) және C(1;0) нүктелерінің $3\tilde{o}+4\acute{o}-10=0$ түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар. Аталған нүктелер мен түзуді салыңдар.
4. Координаталардың бас нүктесінен 12x-5y+39=0 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
5. y=кx+5 түзуі координаталар бас нүктесінен $d=\sqrt{5}$ қашықтықта орналасқан деп санап к-ның мәнін табыңдар.
6. 4x-3y=0 түзуінен d=4-ке тең қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орнының теңдеуін жазыңдар.
7. A(4;-2) нүктесінен d=4 қашықтықта жатқан және 8x-15y=0 түзуіне параллель түзу теңдеуінжазыңдар.
8. 2x+3y=10 және 3x+2y=10 түзулерінің арасындағы бұрыштардың биссектрисаларының теңдеулерін жазыңдар.
9. Төбелері A(-3;0), B(2;5) және C(3;2) болатын үшбұрыштың BD биіктігінің ұзындығын табыңдар.
10. A(2;4) нүктесі арқылы өтетін және координаталар бас нүктесінен d=2 қашықтықта түзу теңдеуін жазыңдар.

Шеңбер

Центрі C(a,b) нүктесінде жатқан және радиусы R-ге тең шеңбер теңдеуі:

$$(\tilde{o}-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

теңдеуі арқылы жазылады.

<u>Өз бетінше шығарылатын есептер</u>.

1. Центрі C(-4;3) нүктесінде орналасқан радиусы R =5 тең шеңбер теңдеуін жазып және сызбасын салыңдар.A(-1;-1), B(3;2) және O(0;0) нүктелері шеңберде жататынын немесе жатпайтынын тексеріңдер.
2. $y=-\sqrt{-x^2-4x}$ сызығының координаталар жүйесінде орналасуын аныктап, оның графигін салыңдар.
3. A(-1;3), B(0;2), C(1;-1) нүктелері арқылы өтетін шеңбер теңдеуін жазыңдар.
4. Координаталар өстеріне жанасатын және A(1;2) нүктесін басып өтетін шеңбер теңдеуін жазыңдар.

5. A(-3;0) және B(3;6) нүктелері берілген. AB кесіндісі диаметр болатындай шеңбер теңдеуін жазыңдар.

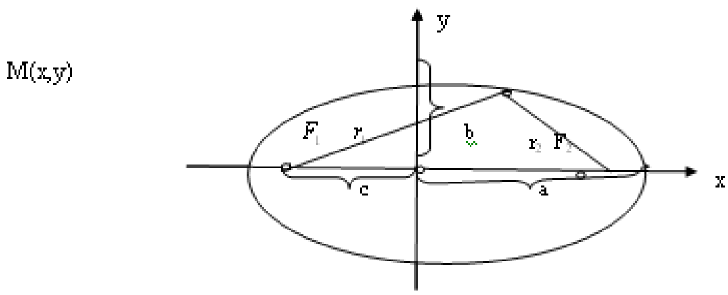
Эллипс

Фокустары деп аталатын берілген F_1 және F_2 нүктелерінен қашықтықтарының қосындысы тұрақты 2a санына тең M(x,y) нүктелерінің геометриялық орны эллипс деп аталады.

Эллипстің ең қарапайым (каноникалық) теңдеуі

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

түрінде жазылады.(1) теңдеу арқылы берілген эллипс координаталар өстеріне қарағанда симметриялы сызық. a және b параметрлері эллипстің жарты өстері деп аталады. Егер a > b болса, онда эллипс фокустары абсцисса өсінің бойында орналасқан. (2-сурет).



$F_1O \sim OF_2 = c.c=\sqrt{a^2-b^2}$. $\frac{c}{a}=\varepsilon<1$ эллипс эксцентриситеті деп аталады. M(x;y) нүктесінен эллипс фокустарына дейінгі қашықтық (фокустық радиус-векторлар):

$$r_1=a-\varepsilon x \text{ және } r_2=a+\varepsilon x$$

формулалары арқылы анықталады. Егер a<b болса, онда эллипс фокустары Oy өсінде орналасқан.

$$c=\sqrt{b^2-a^2}\ ;\ \varepsilon=\frac{c}{b}\ ;\ r=b\pm\varepsilon y .$$

<u>Мысалы:</u> $x^2+4y^2=16$ теңдеуімен берілген эллипстің фокустары мен эксцентриситетін табыңдар.

<u>Шешуі:</u>

$x^2+4y^2=16$ a=4; b=2

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\tilde{n}=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}\,;$$

$$F_1(-2\sqrt{3};\ 0)\,;\quad F_2(2\sqrt{3};\ 0)\ ;\quad E=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

<u>Өз бетінше шығарылатын есептер.</u>

1. Егер: 1) фокустардың арақашықтығы 8 тең , кіші жарты өс b=3; 2) үлкен жарты өс a=6, ал эксцентриситеті I=0.5 болғандағы эллипстің канондық теңдеуін жазып көрсетіңдер.

2. Координаталар өстеріне қарағанда симметриялы орналасқан эллипс M(2; $\sqrt{3}$) және B(0;2) нүктелерін басып өтеді. Эллипстің теңдеуін жазу керек және M нүктесінен эллипс фокустарына шейінгі қашықтықтарды табыңдар.

3. Фокустары Ox өсінде орналасқан эллипс координаталар өстеріне қарағанда симметриялы орналасқан, M(-4; $\sqrt{21}$) нүктесін басып өтеді. Эллипс эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{3}{4}$. Эллипс теңдеуін жазыңдар және M нүктесінің фокустық радиус-векторларын табыңдар.

4. $\tilde{o}^2+2\acute{o}^2=18$ эллипсінің өстерінің арасындағы бұрышты қақ бөлетін хордасының ұзындығын табыңдар.

5. Фокустарының ара қашықтығы оның үлкен және кіші жарты өстерінің ұштарының ара қашықтығына тең эллипстің эксцентриситетін табыңдар.

6. Бір төбесі үлкен жарты өстің соңғы нүктесіне сәйкес келетін эллипске дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Үшбұрыштың қалған екі төбесінің координаталарын табыңдар. <u>Нұсқау</u>. Үшбұрыштың бір қабырғасының көлбеу бұрышы $k=tg30°$ деп алып, хорданың эллипспен қиылысу нүктесін табу керек.

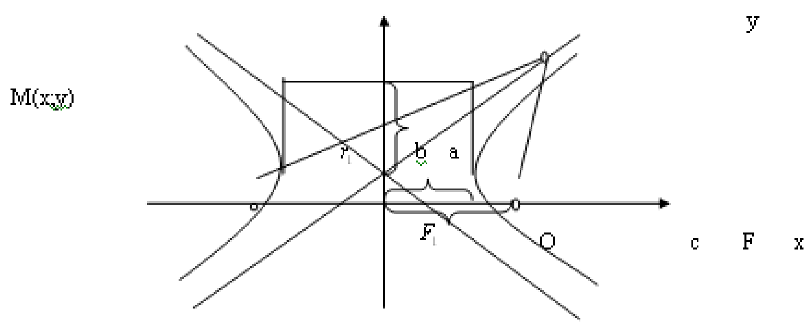
7. Бір фокусынан үлкен өстің екі төбелеріне дейін қашықтығы 5 және 1-ге тең эллипстің ең қарапайым теңдеуін жазыңдар.

8. $x^2+y^2=4$ шеңбері нүктелерінің абсциссалары екі есеге өсірілген. Сонда алынған сызықты анықтаңдар.

9. Өз қозғалысында x=9 түзуіне қарағанда A(1;0) нүктесіне үш есе жақын M нүктесінің траекториясын анықтаңдар.

Гипербола

Фокустары деп аталатын берілген F_1 және F_2 нүктелеріне дейінгі қашықтықтардың айырымы тұрақты 2a санына тең жазықтық нүктелерінің геометриялық орны гипербола деп аталады(3-сурет).



Гиперболаның канондық теңдеуі:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

Гипербола координаталар өстеріне қарағанда симметриялы орналасқан. Гипербола Ох өсін $A_1(-a;0)$ және $A_2(a;0)$ нүктелерінде қиып өтеді. а параметрі гиперболаның нақты, ал b параметрі оның жорамал жарты өстері деп аталады.

$\frac{c}{a}=\varepsilon>1$ қатынасы гиперболаның эксцентриситеті деп аталады. Гиперболаның М(х;у) нүктесінің фокустарға дейінгі қашықтығы $r_1=|\varepsilon x-a|$ және $r_2=|\varepsilon x+a|$ оның фокустық радиус-векторы деп аталады.
b=a болғанда гиперболаны тең қабырғалы деп атайды, оның теңдеуі $x^2-y^2=a^2$ болады. $y=\pm x$ түзуі тең қабырғалы гиперболаның асимптоталары. Екі гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ және $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ түйіндес гиперболалар деп аталады.

<u>Мысалы:</u> $x^2-4y^2=16$ гиперболасы мен оның асимптоталарын салыңдар.

<u>Шешуі:</u>

$x^2-4y^2=16$ a=4; b=2

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{2}x$

<u>Өз бетінше шығарылатын есептер</u>.

1. $x^2-4y^2=16$ гиперболасынан ординатасы 1-ге тең М нүктесі алынған. Осы М нүктесінен гипербола фокустарына дейінгі қашықтықтарды табыңдар.
2. Төбелері $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипсінің фокустарында, ал фокустары оның төбелерінде орналасқан гипербола теңдеуін жазыңдар.
3. Эксцентриситеті $\varepsilon=\sqrt{2}, (2a; a\sqrt{3})$ нүктесі арқылы өтетін және координаталар өстеріне қарағанда симметриялы орналасқан гиперболаның теңдеуін жазыңдар.
4. $y^2=a^2+x^2$ гиперболасын салып, оның фокустарының координаталарын тауып, асимптоталар арасындағы бұрышты есептеңдер.
5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасының фокусынан оның асимптоталарына дейін қашықтықты және екі асимптоталар құратын бұрышты табыңдар.
6. Асимптотасы нақты өсімен 1) $60°$; 2) α бұрышын жасайтын гипербола эксцентриситетін табыңдар.
7. Өз қозғалысында F(4;0) нүктесіне қарағанда х=1 түзуіне екі есе жақын болатын М(х;у) нүктесінің траекториясын анықтаңдар.
8. Гиперболаның бір төбесінен оның фокустарына дейінгі қашықтығы сәйкес 9 және 1-ге тең болатын канондық теңдеуін жазыңдар.
9. Сол жақты фокусынан қашықтығы оң жақты фокусына қарағанда екі есе кіші қашықтықта орналасқан $9x^2-16y^2=144$ гипербола нүктесін табыңдар.

Парабола

Фокусы деп аталатын берілген нүктеден директрисасы деп аталатын берілген түзуге дейінгі бірдей қашықтықта орналасқан нүктелердің геометриялық орны парабола деп аталады.

Параболаның канондық теңдеуінің екі түрі бар:

1) $y^2 = 2px$-парабола Ох өсіне қарағанда симметриялы орналасқан (4-сурет).

2) $x^2 = 2py$-парабола Оу өсіне қарағанда симметриялы орналасқан.

Парабола төбесі оның симметрия өсінде орналасқан, координаталардың бас нүктесінде жатады.

$y^2 = 2px$ парболасының фокусы $F(\frac{p}{2};0)$, ал директрисасы $x = -\frac{p}{2}$ - түзуі. М(х;у) нүктесінің фокустық радиус-векторы:

$$r = x + \frac{p}{2}$$

<u>Өз бетінше шығарылатын есептер.</u>

1. F(0;2) нүктесі мен у=4 түзуінен бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орнының теңдеуін жазыңдар. Бұл сызықтың координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін табыңдар және сызбасын салыңдар.
2. Центрі $y^2 = 2px$ параболасының фокусында жататын және парабола директрисасына жанасатын шеңбер теңдеуін жазыңдар. Парабола мен шеңбердің қиылысу нүктелерін табыңдар.
3. Фокустық радиус- векторы 4,5-ке тең $y^2 = 6x$ параболасының нүктесін табыңдар.
4. Координаталар бас нүктесінен және х=4 түзуінен бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орнын тауып теңдеу құрыңдар. Алынған қисық сызықтың координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін тауып сызбасын салыңдар.
5. А(0;-2) нүктесінен $y^2 = 8x$ параболасына жүргізілген жанамалардың теңдеулерін жазыңдар.

Полярлық координаталар

Жазықтықта полярлық координаталардың О-полюс нүктесі және ОР-полярлық өсі берілсін. Сонда жазықтықтағы М нүктесі:

1) Полярлық бұрыш $\varphi = \angle MOP$ және

2) Радиус-вектор r= ОМ арқылы анықталады.

Егер полюс О-ны координаталар бас нүктесі, ал полярлық өсті – Ох өсі деп алсақ, онда М нүктесінің декарттық координаталары (х;у) және полярлық координаталары (φ;r) мына байланыста болады(7-сурет):

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \; ; \qquad (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad t\ \varphi = \frac{y}{x} \qquad (2)$$

Егер эллипстің, гиперболаның және параболаның фокусын полюс деп, ал фокустық симметрия өсін полярлық өс деп алсақ, онда үш сызықтың полярлық координаталар жүйесіндегі теңдеулері мына жалпы теңдеу арқылы өрнектеледі:

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi'} \qquad (3)$$

мұндағы ε- эксцентриситет, ал p- параметр; эллипс пен гипербола үшін $p = \frac{b^2}{a}$.

<u>Өз бетінше шығарылатын есептер</u>.

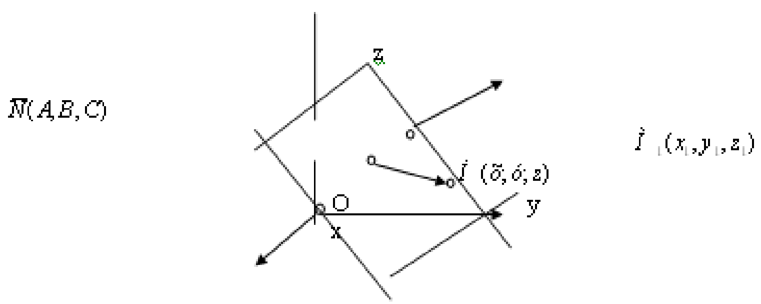
1. Полярлық координаталар жүйесінде $(\varphi; r)$ мына нүктелерді салыңдар: A(0;3); B($\frac{\pi}{4}$;2); C($\frac{\pi}{2}$;3); D(π;2); E($\frac{3\pi}{2}$;3).
2. Мына нүктелерді салыңдар: A($\frac{\pi}{2}$;–2); B($-\frac{\pi}{2}$;3); C($-\frac{\pi}{4}$;–4); D($\frac{2\pi}{3}$;–3);
3. Полярлық координаталар жүйесінде: 1) полярлық өске перпендикуляр, полярлық өстен а кесіндісін қиятын; 2) полярлық өске параллель, A($\alpha; a$) нүктесін басып өтетін түзулер теңдеулерін жазыңдар.
4. A($\alpha; a$) нүктесін басып өтетін және полярлық өспен β бұрышын жасайтын түзу теңдеуін полярлық координаталар жүйесінде жазыңдар.

Полярлық координаталар жүйесінде центрі С(0;а) нүктесінде жатқан және радиусы а-ға тең шеңбер теңдеуін жазыңдар.

3. КЕҢІСТІКТЕГІ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ
Жазықтық теңдеуі

1°. <u>Кеңістіктегі $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесінен өтетін және $\overline{N}(A,B,C)$ векторына перпендикуляр жазықтық теңдеуі.</u>

$M(x, y, z)$ – жазықтықтың кез-келген нүктесі дейік(12-сурет).



Сонда $\overline{M_1M} \perp \overline{N}$. Демек,

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \qquad (1)$$

2°. Жазықтықтың жалпы теңдеуі:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2)$$

$N(\grave{A};B;C)$ векторы берілген жазықтықтың нормальдық векторы болады.

3°. $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығының кейбір ерекше жағдайлары.

$$Ax+By+Cz+D=0:$$

1) $D=0; Ax+By+Cz=0;$ жазықтық координаталардың бас нүктесінен өтеді.

2) $\tilde{N}=0; Ax+By+D=0-$жазықтық Oz өсіне параллель.

3) $C=D=0; Ax+By=0-$жазықтық Oz өсі арқылы өтеді.

4) $B=C=0; Ax+D=0-$жазықтық yoz жазықтығына параллель.

5) Координаталық жазықтықтар теңдеулері:

$x=0; y=0; z=0.$

4°. Координата өстерінен кесінділер қиатын жазықтық:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (3)$$

<u>1-мысал:</u> $M_1(0;-1;3)$ және $M_2(1;3;5)$ нүктелері берілген. M_1 нүктесінен өтетін және $\overline{N}=\overline{M_1M_2}$ векторына перпендикуляр жазықтық теңдеуін жазыңдар.

<u>Шешуі:</u> $M_1(0;-1;3)$ және $M_2(1;3;5)$

$\overline{N}=\overline{M_1M_2}=\{1;4;2\}$

$1\cdot(\tilde{o}-0)+4\cdot(\acute{o}+1)+2\cdot(z-3)=0$

$x+4y+2z-2=0$

<u>Өз бетінше шығаратын есептер:</u>

1.Мына жазықтықтарды салыңдар:

1) $5x-2y+3z-10D=0$;

2) $3x+2y-z=0$;

3) $3x+2z=6$;

4) $2z-7=0.$

2. $2x+3y+6z-12=0$ жазықтығын салыңдар; жазықтыққа жүргізілген нормалдің координаталар өстерімен жасайтын бұрыштарын табыңдар.

3. $A(a;\frac{a}{2};a)$ және $B(0;\frac{a}{2};0)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орнын табыңдар.

4. Ox өсіне параллель және $M_1(0;1;3), M_2(2;4;5)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазып, суретін салыңдар.

5. Ox өсі және $\grave{I}_1(0;-2;3)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңдар. Жазықтық суретін салыңдар.

6.Oz өсі және $\grave{I}_1(2;-4;3)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазып, сол жазықтықты салыңдар.

7. Oy өсіне параллель, Ox,Oz өстерінен сәйкес a және c кесінділерін қиатын жазықтық теңдеуін жазыңдар. Осы жазықтықты салыңдар.

8. M(2;-1;3) нүктесі арқылы өтетін және координаталар өсінен тең кесінділер қиатын жазықтық теңдеуін жазыңдар.

9. OM кесіндісіне перпендикуляр M(-1;2;3) нүктесін басып өтетін жазықтық теңдеуін жазыңдар.

10. Оу өсі және (4;0;3) нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазып, чертежін салыңдар.

Жазықтыққа берілген негізгі есептер

1°. Екі жазықтық қиылысынан құралған бұрыш.

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overline{NN_1}}{|N||N_1|} = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \qquad (1)$$

Мұндағы $\overline{N}$ және N_1 сәйкес $Ax + By + Cz + D = 0$ және $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ жазықтықтарына түсірілген нормальдар.
Екі жазықтықтың параллелдік белгісі:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} \qquad (2)$$

Екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісі :

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \qquad (3)$$

2°.$M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінің $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығына дейінгі қашықтығы:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\left|\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\right|}. \qquad (4)$$

3°. Екі жазықтықтың қиылысу түзуінен өтетін шоқ жазықтықтар теңдеуі:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0, \qquad (5)$$

мұндағы $\alpha = 1$ және $\beta = 0$ деп алуға болады.
1-мысал: $2x - y + 3z - 9 = 0, x + 2y + 2z - 3 = 0$ және $3x + y - 4z + 6 = 0$ жазықтықтарының қиылысу нүктесін табыңдар.

Шешуі: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + y - 4z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + y - 4z = -6 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \tilde{o} + \; 2\acute{o} + \; 2z = 3 \\ \quad y + \; 2z = 3 \\ \quad z = 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \tilde{o} = 1 \\ \acute{o} = -1 \\ z = 2 \end{matrix}$$

Үш түзудің қиылысу нүктесінің координатасы (1;-1;2)

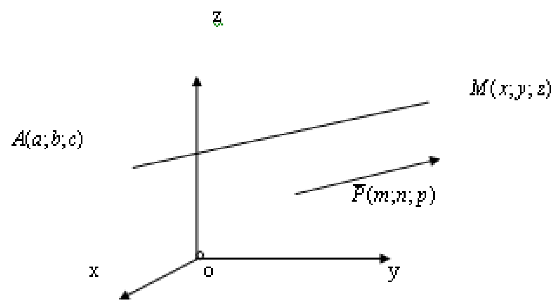
<u>Өз бетінше шығаратын есептер.</u>

1. $x-2y-3z=0$ жазықтығына параллель (2;2;-2) нүктесін басып өтетін жазықтық теңдеуін жазыңдар.
2. (-1;-1;2) нүктесі арқылы өтетін және $x-2y+z-4=0$; $x+2y-2z+4=0$ жазықтықтарына перпендикуляр жазықтық теңдеуін жазыңдар.
3. $M_1(1;-1;2), M_2(2;1;2)$ және $M_3(1;1;4)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңдар.
4. $2x+y-\sqrt{5}z=0$ жазықтығымен $60°$ бұрыш жасайтын және Oz өсі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңдар.
5. (5;1;-1) нүктесінен $x-2y-2z+4=0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
6. $2x-y+3z-6=0, x+2y-z+3=0$ жазықтықтарының қиылысу сызығы және (1;2;4) нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңдар.
7. $M_1(a;0;0), M_2(0;a;0)$ және $M_3(a;a;a)$ нүктелерін басып өтетін жазықтық пен координаталар бас нүктесінің ара қашықтығын табыңдар.
8. Ох өсі арқылы өтетін және $y=x$ жазықтығымен $60°$ бұрыш жасайтын жазықтық теңдеуін жазыңдар.
9. $2x+2y+z-8=0$ жазықтығына параллель және одан $d=4$ тең қашықтықта жатқан жазықтықтар теңдеулерін жазыңдар.

Түзу теңдеулері

1. $\overline{P}(m;n;p)$ векторына параллель $A(a;b;c)$ нүктесі арқылы өтетін түзу теңдеуі. $M(x;y;z)$ түзудің кез келген нүктесі дейік (13-сурет), сонда $\overline{AM} \,||\, \overline{P}$ және екі вектордың параллельдік шарты бойынша

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \qquad (1)$$



(1)-теңдеу түзудің канондық теңдеуі деп аталады. $\overline{P}(m;n;p)$ векторы түзудің бағыттауыш векторы деп аталады.

2. Түзудің параметр арқылы берілген теңдеуін (1)- қатынасты t параметріне теңестіріп шығарып аламыз.

$$x=mt+a; y=nt+b; z=pt+c \qquad (2)$$

3.Берілген екі нүкте $M_1(x_1;y_1;z_1)$ және $M_2(x_2;y_2;z_2)$ арқылы өтетін түзу теңдеуін былай жазамыз:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (3)$$

4. Түзудің жалпы теңдеуі берілген екі жазықтықтың қиылысу сызығы арқылы өрнектеледі:

$$Ax+By+Cz+D=0A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad (4)$$

1-мысал. 1) (-2;1;-1) нүктесін басып өтетін және $\bar{Ð}(1;-2;3)$ векторына параллель түзудің параметрлік теңдеуін жазыңдар.
2) A(3;-1;4) және B(1;1;2) нүктелері арқылы өтетін түзудің параметрлік теңдеуін жазыңдар.

Шешуі: $\frac{\tilde{o}+2}{1}=\frac{\acute{o}-1}{-2}=\frac{z+1}{3}$

Өз бетінше шығарылатын есептер.

1.A(-1;2;3) және B(2;6;-2) нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуін жазып, оның бағыттауыш косинустарын табыңдар.
2. A(2;-1;3) және B(2;3;3) нүктелерін басып өтетін түзу теңдеуін жазып, оның бағыттауыш косинустарын табыңдар.
3. $(\grave{a};\hat{a};\tilde{n})$ нүктесі арқылы өтіп: 1) Oz өсіне параллель; 2)Oz өсіне перпендикуляр түзулердің теңдеулерін жазыңдар.
4. (-4;3;0) нүктесі арқылы өтіп $x-2y+z=4{,}2x+y-z=0$ түзуіне параллель түзу теңдеуін жазыңдар.

Түзу мен жазықтық

1°. $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ түзуі мен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығы арасындағы бұрыш:

$$\sin\theta=\frac{\overline{N}\cdot\overline{P}}{|N|\cdot|P|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{|N|\cdot|P|} \qquad (1)$$

формуласы арқылы есептеледі.
Түзу мен жазықтық арасындағы параллелдік белгі $(\overline{N}|\ |\overline{P})$:

$$A\cdot m+B\cdot n+C\cdot p=0 \qquad (2)$$

Перпендикулярлвқ белгі $(\overline{N}\perp\overline{P})$:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (3)$$

1-мысал: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ түзуі арқылы өтіп және $2x+3y-z=4$ жазықтығына перпендикуляр болатын жазықтық теңдеуін табыңдар.

Шешуі: Берілген түзудің бағыттаушы векторы $\tilde{a}=\{1;2;2\}$ векторы мен берілген жазықтықтың нормаль векторы $N=\{2;3;-1\}$ векторларының векторлық көбейтіндісі іздеп отырған жазықтықтың нормаль векторы болады және бұл жазықтық та берілген түзу өтетін (1;-1;-2) нүктесінен өтеді.

$$\tilde{a}\times\overline{N}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=-2\bar{i}+4\bar{j}+3\bar{k}-4\bar{k}+\bar{j}-6\bar{i}=-8\bar{i}+5\bar{j}-\bar{k}$$

Сонда жазықтықтың теңдеуі:

-8(x-1)+5(y+1)-(z+2)=0 8x-5y+z-11=0

Өз бетінше шығаратын есептер:

1. $y=3x-1;2z=-3x+2$ түзуі мен $2x+y+z-4=0$ жазықтығы арасындағы бұрышты тап.

2. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ түзуі мен $2x+y-z=0$ жазықтығы параллель екенін көрсетіңдер.

3. (-1;2;-3) нүктесі арқылы өтіп, $x=2;y-z=1$ түзуіне перпендикуляр болатын жазықтық теңдеуін табыңдар.

4. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ түзуі мен (3,4;0) нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңдар.

Сфералық және цилиндрлік беттер

1°. Центрі $\tilde{N}(a;b;c)$ нүктесінде жатқан және радиусы R-ге тең сфералық беттің теңдеуі:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (1)$$

2°. Құрамында z белгісізі жоқ $F(x;y)=0$ теңдеуі жасаушы Oz өсіне параллель цилиндрлік бетті анықтайды. Осылайша, 1) $F(y;z)=0$ және 2) $F(x;z)=0$
1) Ox; 2) Oy өстеріне параллель цилиндрлік беттерді анықтайды.

Өз бетінше шығарылатын есептер.

1)Сфераның центрі мен радиусын табыңдар:
1) $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0;$
2) $x^2+y^2+z^2=2az.$

Эллипсоид, гиперболоидтар, параболоидтар

1°. Канондық теңдеулер.

I. Эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

II.Гиперболоидтар: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\text{á³ðêóûñòû} \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1-\text{åê³êóûñòû} \end{cases}$

III.Екінші ретті конус: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0.$

IV.Параболоидтар: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z \\ \dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z \end{cases}$

<u>Өз бетінше шығарылатын есептер.</u>

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1; y=0$ эллипсінің Oz өсінен айналдырғандағы шыққан беттің теңдеуін жазыңдар.
2. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{25}=1$ бетін салыңдар және оның 1) $z=3$; 2) $y=1$ жазықтықтармен қимасының аудандарын табыңдар.
3. 1) $x^2+y^2-z^2=4$; 2) $x^2-y^2+z^2+4=0$ беттерін салыңдар.
4. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{36}=1$ бетін салыңдар және оның (4;1;-3) нүктесі арқылы өтетін жасаушыларын табыңдар.

Әдебиеттер тізімі

1. Қасымов К.А., Қасымов Е.А. Жоғары математика курсы (Аналитикалық геометрия). Алматы, Санат,1994
2. Рашбаев Ж., Сейітов Х. Аналитикалық геометрия лекциялары. Алматы, РБК, 1996
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии М., Наука, 1980г.
4. Божанов Е.Т. Конспект лекции по высшей математике. Часть I, II, III. 1992г.
5. Сборник задач по геометрии (Под ред.Л.С. Атанасяна).М., Просвещение,1975
6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М. 1992-1995г.
7. Цубербиллер Задачи и упражнения по аналитической геометрии.
8. Кручкович К.И. Сборник задач по курсу высшей математики. 1998г.
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть1, М., Высшая школа, 1998г.
10. Шипачев В.С. Основы высшей математики. М., Высшая школа, 1989г.
11. Кафедралық методикалық құралдар.

Мазмұны

Формат 60x84 1/12
Объем 31 стр. 2,6 печатный лист
Тираж 20 экз.,
Отпечатано
в редакционно-издательском отделе
КГУТиИ им. Ш Есенова
г.Актау, 27 мкр.