ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш. ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР
ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ
ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР ИНСТИТУТЫ
«ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА» КАФЕДРАСЫ

ЖҰБАЕВА З.Қ.

МЕКТЕП КУРСЫНДАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ

Ақтау, 2011ж

ӘОЖ 515(075)

З.Қ. Жұбаева. Мектеп курсындағы геометрия / Әдістемелік нұсқау- Ақтау: КМТжИУ, 2011.- 35 бет.

Пікір жазған: ф.-м.к., доцент Э.У. Уразмагамбетова

Әдістемелік нұсқау математика мамандығында оқитын жоғары оқу орындары студенттеріне арналып жазылған.

Әдістемелік нұсқауда мектеп геометрия курсының толық теориясы мен оны оқытудың әдістемесі қамтылған және әртүрлі тақырыптардағы есептердің шығару үлгілері көрсетілген. Бұл әдістемелік нұсқаудың студенттерге де, орта мектеп мұғалімдері мен оқушыларына да берер көмегі мол болмақ.

Баспаға Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің оқу-әдістемелік кеңесінің шешімімен ұсынылған.

© Ш.Есенов атындағы КМТжИУ, 2011ж

КІРІСПЕ

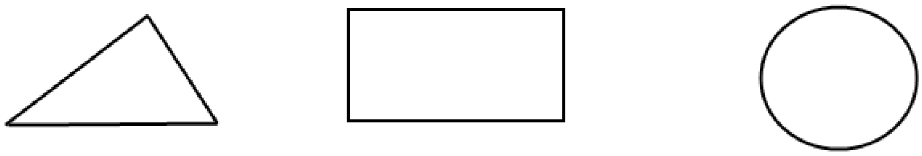
Бүгінгі таңда ғылым мен техниканың, ЭЕМ-ның қарқынды дамуына зор үлес қосатын болашақ математика пәні мұғалімдерін дайындауда «Мектеп курсындағы геометрия» пәнінің маңызы зор. Қазіргі орта мектеп математика курсындағы берілуі ойдағыдай болмай отырған геометрия пәнінің жағдайын оңалтуға септігін тигізу- осы нұсқауды ұсынып отырған автордың мақсаты. Сонымен қатар мектеп геометрия курсындағы алған білімдерін кеңейтіп, студенттердің геометриядан есептер шығаруда икемділігін, машығын, білімі мен біліктілігін қалыптастыру.

Математика мамандықтары студенттерінің жалпы математикалық дайындығын қамтамасыз етуде «Мектеп курсындағы геометрия» пәнінің алатын орыны ерекше. Студенттерді «Аналитикалық геометрия», «Дифференциалдық геометрия», «Топология» сияқты іргелі, негізгі математикалық пәндерді оқып-үйренуге дайындайды. Сонымен қатар студенттердің мектеп математика курсы бойынша алған білімдерін, машықтарын, икемділіктерін жүйелеуді; стандарт және стандарт емес геометриялық есептерді шешу техникасында тәжірибелік дағдыларды игеруді; оқу-танымдық белсенділігін дамыту мен қалыптастыруды мақсат етеді.

I. ПЛАНИМЕТРИЯ

1.Геометриялық фигураларлар және олардың қасиеттері

Геометрия-геометриялық фигуралардың қасиеттері туралы ғылым. «Геометрия» грек сөзі, оны қазақ тіліне аударғанда «жер өлшеу» дегенді білдіреді.Геометриялық фигуралардың мысалдары: үшбұрыш, тіктөртбұрыш, шеңбер.



Геометриялық фигуралар алуан түрлі болып келеді.Кез келген геометриялық фигураның бөлігі де геометриялық фигура болып табылады. Бірнеше геометриялық фигураның бірігуі де геометриялық фигура болып табылады. Геометрия практикада кеңінен қолданады. Оны жұмысшы да, инженер де, сәулетші де, суретші де білуі керек. Планиметрия-геометрияның жазықтықтағы фигураларды зерттейтін бөлімі.

Нүкте және түзу

Нүкте мен түзу жазықтықтағы негізгі геометриялық фигуралар болып табылады. Нүктелерді латынның бас әріптерімен белгілеу қабылданғын: A, B, C, D….Түзулер латынның кіші әріптерімен белгіленеді: a, b, c, d…. Түзу шектеусіз.Суретте бір түздің бөлігін ғана кескіндейміз, бірақ ол екі жаққа қарай да шектеусіз созылған деп түсінеміз. А және С нүктелері *a* түзуінде *жатыр*.Сондай-ақ A және С нүктелері а түзуіне *тиісті* немесе а түзуі А және С нүктелері арқылы *өтеді* деп те айтуға болады. В нүктесі түзуінде жатыр.Ол нүкте а түзуінде жатқан жоқ.Ал С нүктесі а түзуінде де, түзуінде де жатыр. А және түзулері С нүктесінде *қиылысады*.С нүктесі а және түзулерінің қиылысу нүктесі болып табылады.

Жазықтықтағы нүктелер мен түзулердің негізгі тиістілік қасиеттері деп мына қасиеттерді атаймыз: ***Қандай түзуді алсақ та, ол түзуге тиісті нүктелер де, оған тиісті емес нүктелер де бар болады. Кез келген екі нүкте арқылы түзу жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.***

Кесінді

а түзуінде және осы түзуде жатқан В нүктесі А және С нүктелерінің *арасында* жатыр.Ол А және С нүктелерін бөледі. *Кесінді* деп түзудің берілген екі нүктесінің арасында жатқан барлық нүктелерінен тұратын бөлігін айтады.Бұл екі нүкте кесіндінің ұштары деп аталады. Кесіндіні оның ұштары арқылы белгілейді. «АВ кесіндісі» дегенде ұштары А және В нүктелері болатын кесіндіні ұғамыз.

Келесі қасиетті нүктелердің түзуде орналасуының негізгі қасиеті деп айтатын болады: ***Түзудегі үш нүктенің біреуі және тек қана біреуі қалған екеуінің арасында жатады.***

Кесінділерді өлшеу

Кесінділерді өлшеудің негізгі қасиеттері деп біз келесі қасиеттерді айтатын боламыз:

Әрбір кесіндінің нөлден үлкен белгілі бір ұзындығы болады.Кесіндінің ұзындығы өзінің кез келген нүктесімен бөлінген бөліктері ұзындықтарының қосындысына тең болады.

Есеп.Үш нүкте А,В,С бір түзудің бойында жатыр.АВ=4,3 см, АС=7,5 см, ВС= 3,2 см екені белгілі.А нүктесі В және С нүктелерінің арасында жата ала ма? С нүктесі А және В нүктелерінің арасында жата ала ма?А,В,С нүктелерінің қайсысы қалған екеуінің арасында жатады? Шешуі.Егер А нүктесі В мен С нүктелерінің арасында жатса, онда кесінділерді өлшеудің қасиеті бойынша былай болуы тиіс: АВ+АС=ВС.Ал 4,3+7,5≠3,2.Демек А нүктесі В және С нүктелерінің арасында жатпайды. Егер С нүктесі А және В нүктелерінің арасында жатса, онда былай болуы тиіс: АС+ВС=АВ. Ал 7,5+3,2≠4,3. Демек С нүктесі А және В нүктелерінің арасында жатпайды. Түзудегі А,В,С нүктелерінің біреуі қалған екеуінің арасында жатады.Демек, бұл нүкте В болады.

Жарты түзу

Түзудің берілген нүктесінің бір жағында жатқан барлық нүктелерінен тұратын бөлігі жарты түзу немесе сәуле деп аталады.Берілген нүкте жарты түзудің бас нүктесі деп аталады.Бір түзудің бас нүктелері ортақ әр түрлі жарты түзулері толықтауыш жарты түзулер деп аталады. Түзулер сияқты,жарты түзулер де кіші латын әріптерімен белгіленеді.Жарты түзуді екі нүктемен: бас нүктесімен және жарты түзуге тиісті тағы да бір нүктемен белгілеуге де болады.Бұлай белгіленгенде бас нүкте бірінші жазылады.

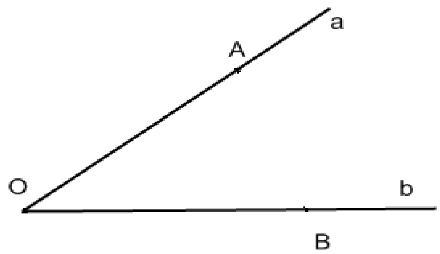
Есеп. АВ кесіндісінің бойынан С нүктесі алынған. АВ, АС, СА және СВ жарты түзулерінің ішінен бірімен-бірі беттесетін жарты түзулер парын және толықтауыш жарты түзулер парын атаңдар. Жауаптарыңды түсіндіріңдер.

Шешуі.Бұл жарты түзулердің бас нүктесі не А, не С болады. Алдымен бас нүктесі А болатын жарты түзулерді (АВ және АС жарты түзулерін) қарастырайық.С нүктесі А және В нүктелерінің арасында жатады, өйткені есептің шарты бойынша ол АВ кесіндісіне тиісті.Демек, А нүктесі В және С нүктелерінің арасында жатпайды,яғни В және С нүктелері А нүктесінің бір жағында жатады. Сондықтан АВ және АС жарты түзулері-беттесетін жарты түзулер.

Енді бас нүктесі С болатын жарты түзулерді (СА және СВ жарты түзулерін) қарастырайық.С нүктесі А және В нүктелерін бөліп тұр.Сондықтан А және В нүктелері бір ғана жарты түзуге тиісті бола алмайды,демек, СА және СВ-толықтауыш жарты түзулер.

Бұрыш

Бұрыш деп *бұрыштың төбесінен*-нүктеден-және сол нүктеден шығатын әр түрлі екі жарты түзуден-*бұрыштың қабырғаларынан*-құралатын фигураны айтады.



Егер бұрыштың қабырғалары бір түзудің толықтауыш жарты түзулері болса, онда бұрыш *жазыңқы бұрыш* деп аталады.

Егер сәуле бұрыштың төбесінен шығып, ұштары бұрыштың қабырғаларында жататын кесіндіні қиятын болса, онда сәуле бұрыштың қабырғаларының арасымен өтеді дейтін боламыз.

Әрбір бұрыштың нөлден үлкен белгілі бір градустық өлшеуіші бар болады. Жазыңқы бұрыш 180°-қа тең. Бұрыштың градустық өлшеуіші оның қабырғаларының арасымен өтетін кез келген сәулемен бөлінетін бөліктерінің градустық өлшеуіштерінің қосындысына тең болады.

Есеп. Егер $<(ac)=30^\circ$, $<(cb)=80^\circ$,$<(ab)=50^\circ$ болса, c сәулесі (ab) бұрышының қабырғаларының арасымен өте ала ма?

Шешуі.Егер c сәулесі (ab) бұрышының қабырғаларының арасымен өтсе, онда бұрыштарды өлшеудің қасиеті бойынша былай болуы тиіс:

$$<(ac)+<(bc)=<(ab)$$

Бірақ $30^\circ+80^\circ\neq 50^\circ$

Демек, c сәулесі (ab) бұрышының қабырғаларының арасымен өте алмайды.

Кесінділерді және бұрыштарды өлшеп салу

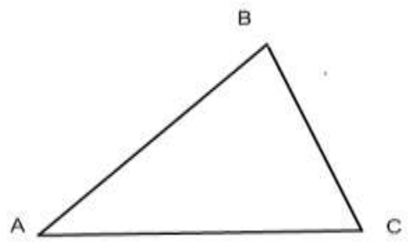
Келесі қасиеттерді кесінділерді және бұрыштарды өлшеп салудың негізгі қасиеттері деп айтатын боламыз:

Кез келген жарты түзудің бойына оның бас нүктесінен бастап ұзындығы берілген кесіндіні өлшеп салуға болады және ол кесінді тек біреу ғана болады. Кез келген жарты түзуден бастап берілген жарты жазықтыққа берілген градустық өлшеуіші 180°-тан кем бұрышты өлшеп салуға болады және ол бұрыш тек біреу ғана болады.

Үшбұрыш

Үшбұрыш деп бір түзуде жатпайтын үш нүктеден және осы нүктелерді қос-қостан қосатын үш кесіндіден тұратын фигураны атайды.Нүктелер үшбұрыштың *төбелері*, ал кесінділер *қабырғалары* деп аталады.

Үшбұрыш былай белгіленеді: Δ ABC



ABC үшбұрышының A төбесіндегі бұрышы деп AB және AC жарты түзулерімен жасалатын бұрышты айтады.

Есеп. ABC және PQR үшбұрыштары тең.AB қвбырғасы 10 м-ге, ал C бұрышы 90°-қа тең екені белгілі. Қабырғасы және R бұрышы неге тең?Жауаптарыңды түсіндіріңдер.

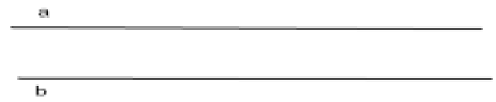
Шешуі. ABC және PQR үшбұрыштары тең болғандықтан, оларда AB=PQ, $<C=<R$.Демек PQ=10м,$<R=90°$

Берілген үшбұрышқа тең үшбұрыштың бар болатыны туралы:

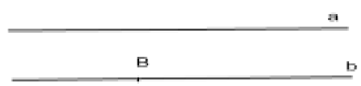
Үшбұрыш қандай болса да,берілген жарты түзуге қатысты көрсетілген қалыпта орналасқан оған тең үшбұрыш бар болады.

Параллель түзулер

Егер екі түзу қиылыспайтын болса, олар парллель түзулер деп аталады.
Түзулердің параллельдігін белгілеу үшін ‖ таңбасы пайдаланылады.а ‖b жазуы былай оқылады: « а түзуі b түзуіне параллель»



Параллель түзулердің негізгі қасиеті мынадай:
Берілген түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге параллель бір және тек бір ғана түзу жүргізуге болады.



Есеп. Параллель екі түзудің біреуін қиятын түзу екіншісін қимау мүмкін бе? Жауаптарыңды түсіндіріңдер
Шешуі. a және b параллель түзулер болсын, ал c түзуі a түзуін A нүктесінде қисын.Егерде c түзуі a түзуін қимайтын болса, онда A нүктесі арқылы b түзуін қимайтын a және c екі түзу өткен болар еді.Ал параллель түзулердің қасиеті бойынша бұл мүмкін емес.Демек, a түзуін қиып өтетін c түзуі b түзуін де қиюы тиіс.

Теоремалар және дәлелдемелер

Қандай да бір геометриялық фигураның қасиеті туралы тұжырымның дұрыстығы пайымдау жолымен анықталады.Бұл пайымдау *дәлелдеме* деп аталады.Дәлелденетін пікірдің өзі *теорема* деп аталады.

Теорема. ***Егер үшбұрыштың ешбір төбесі арқылы өтпейтін түзу оның бір қабырғасын қиса, онда ол түзу қалған екі қабырғаның тек біреуін ғана қияды.***

Теореманың тұжырымдамасы әдетте екі бөлімнен тұрады.Бір бөлімде берілгендер туралы айтылады.Бұл бөлім теореманың *шарты* деп аталады.Екінші бөлімде нені дәлелдеу керек екені айтылады.Бұл бөлім теореманың *қорытындысы* деп аталады. 1.теореманың шарты- түзу үшбұрыштың ешбір төбесі арқылы өтпейді және оның қабырғаларының біреуін қияды.Теореманың қорытындысы-бұл түзу үшбұрыштың қалған екі қабырғасының тек біреуін ғана қияды.

Аксиомалар

Қарапайым фигуралардың негізгі қасиеттерін білдіретін тұжырымдар дәлелденбейді және олар *аксиомалар* деп аталады.Аксиома гректің *аксиос* деген сөзінен шыққан, ол күмән тудырмайтын пікір дегенді білдіреді.
Теоремаларды дәлелдегенде қарапайым фигуралардың негізгі қасиеттерін,яғни аксиомаларды, сондай-ақбұрын дәлелденген қасиеттерді, яғни дәлелденген теоремаларды пайдалануға рұқсат етіледі.Фигуралардың басқа ешқандай қасиеттерін, тіпті соншама айқын болып көрінсе де, пайдалануға болмайды.

Геометрияда аксиома мен теорема сияқты сөздермен қатар «анықтама» сөзі де пайдаланылады. Бір нәрсеге *анықтама* беру деген-оның не нәрсе екенін түсіндіру.

2. Үшбұрыштар

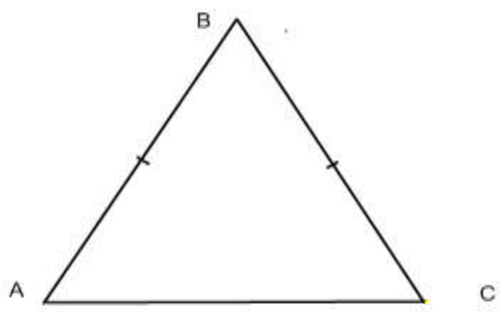
Үшбұрыштардың теңдік белгілері

I белгі. Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы сәйкесінше екінші үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады.

II белгі. Егер бір үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған іргелес бұрыштары сәйкесінше екінші үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған іргелес бұрыштарына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады.

III белгі. Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы сәйкесінше екінші екінші үшбұрыштың үш қабырғасына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады.

Егер үшбұрыштың екі қабырғасы тең болса, ол тең бүйірлі үшбұрыш деп аталады. Бұл тең қабырғалар үшбұрыштың бүйір қабырғалары деп ,ал үшінші қабырғасы үшбұрыштың табаны деп аталады.



Тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштары тең болады.

Барлық қабырғалары тең болатын үшбұрыш тең қабырғалы үшбұрыш деп аталады.

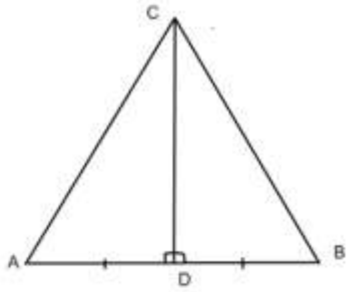
Егер үшбұрыштың екі бұрышы тең болса, онда ол тең бүйірлі болады.

Үшбұрыштың берілген төбесінен түсірілген *биіктігі* деп осы төбеден үшбұрыштың қарсы жатқан қабырғасын қамтитын түзуге жүргізілген перпендикулярды айтады.

Үшбұрыштың берілген төбесінен жүргізілген *биссектрисасы* деп үшбұрыш бұрышының биссектрисасының осы төбені қарсы жатқан қабырғадағы нүктемен қосатын кесіндісін айтады.

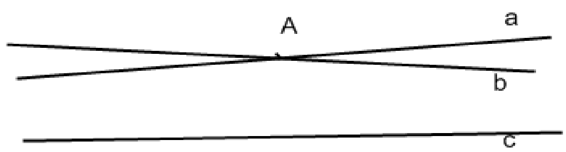
Үшбұрыштың берілген төбесінен жүргізілген *медианасы* деп осы төбені қарсы жатқан қабырғаның ортасымен қосатын кесіндіні айтады.

Тең бүйірлі үшбұрыштың медианасының мынадай қасиеті бар: Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген медианасы оның биссектрисасы да, биіктігі де болып табылады.



Түзулердің параллельдігі

Үшінші бір түзуге параллель екі түзу өзара да параллель болады.



Егер B және D нүктелері AC түзуіне қарағанда бір ғана жарты жазықтықта жатса, онда BAC және DCA бұрыштары *ішкі тұстас бұрыштар* деп аталады.

Егер B және D нүктелері AC түзуіне қарағанда әр түрлі жарты жазықтықта жатса, онда BAC және DCA бұрыштары *ішкі айқыш бұрыштар* деп аталады.

(түзулердің параллельдік белгісі). Егер ішкі айқыш бұрыштар тең болса,немесе ішкі тұстас бұрыштардың қосындысы 180^0-қа тең болса,онда түзулер параллель болады.

Салдар: үшінші бір түзуге перпендикуляр екі түзу өзара параллель болады.

Егер сәйкес бұрыштар тең болса, онда түзулер параллель болады.

Түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге параллель түзу жүргізуге және ол тек біреу ғана болады.

Параллель екі түзуді үшінші түзумен қиғанда ішкі айқыш бұрыштар өзара тең, ал ішкі тұстас бұрыштардың қосындысы 180^0-қа тең болады.

Үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы 180^0-қа тең.

Кез келген үшбұрыштардың ең кемінде екі бұрышы сүйір болады.

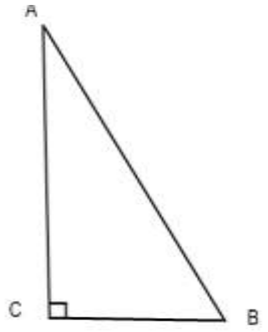
Үшбұрыштың берілген төбесіндегі *сыртқы бұрышы* деп осы төбедегі үшбұрыштың бұрышымен сыбайлас бұрышты айтады.

Үшбұрыштың сыртқы бұрышы онымен сыбайлас емес екі ішкі бұрыштың қосындысына тең болады.

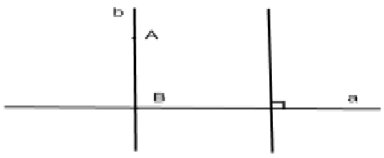
Тікбұрышты үшбұрыш

Егер үшбұрыштың тік бұрышы бар болса, ол *тік бұрышты үшбұрыш* деп аталады.

Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышына қарсы жатқан қабырғасы жатқан қабырғасы AB- *гипотенуза* деп, қалған екі қабырғасы AC мен BC- *катеттер* деп аталады.



Егер бір тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен катеті сәйкесінше екінші үшбұрыштың гипотенузасы мен катетіне тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады.
Берілген түзуде жатпайтын кез келген нүктеден осы түзуге перпендикуляр жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.

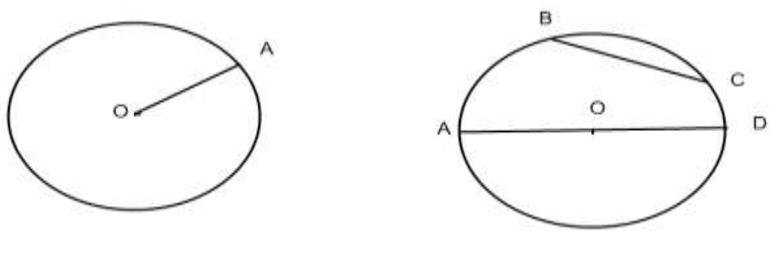


Берілген нүктеден түзуге түсірілген перпендикуляр ұзындығы нүктеден *түзуге дейінгі ара қашықтық* деп аталады: АВ кесіндісі.
Параллель түзулердің ара қашықтығы деп бір түзудің қайсыбір нүктесінен екінші түзуге дейінгі ара қашықтықты айтады.

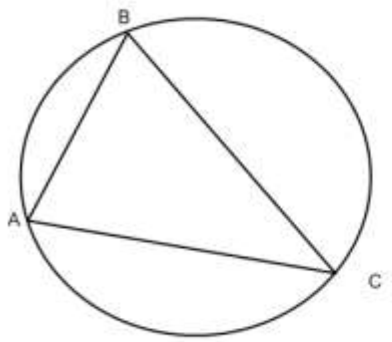
3. Шеңбер және оған іштей, сырттай сызылған үшбұрыштар

Шеңбер деп берілген нүктеден бірдей қашықтықта жатқан жазықтықтың барлық нүктелерінен тұратын фигураны айтады. Берілген нүкте шеңбердің *центрі* деп аталады. Шеңбердің нүктелерінен оның центріне дейінгі ара қашықтық шеңбердің *радиусы* деп аталады. Радиус деп, сондай-ақ шеңбер нүктесінен оның қосатын кез келген кесіндіні айтады.

Шеңбердің екі нүктесінен қосатын қосатын кесінді *хорда* деп аталады. Центр арқылы өтетін хорда *диаметр* деп аталады. ВС - хорда, AD – диаметр

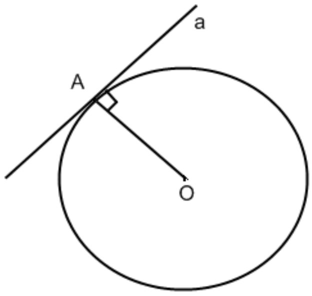


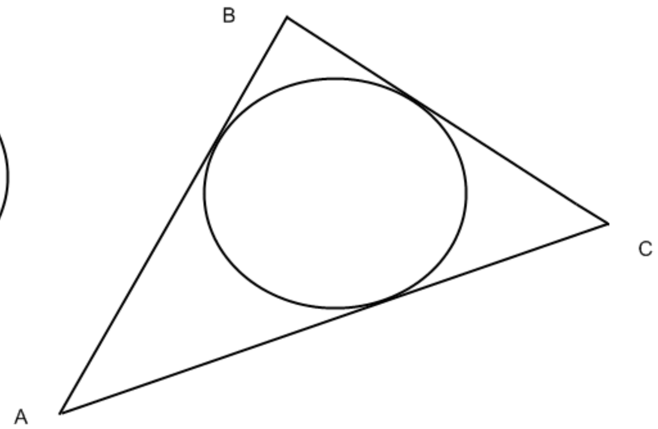
Егер шеңбер үшбұрыштың барлық төбелері арқылы өтсе, онда ол үшбұрышқа *сырттай сызылған шеңбер* деп аталады.



Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі үшбұрыш қабырғаларының орталары арқылы жүргізілген перпендикулярдың қиылысуы нүктесі болып табылады.

Шеңбердің бір нүктесі арқылы өтіп және осы нүктеге жүргізілген радиусқа перпендикуляр болатын түзу *жанама* деп аталады. Шеңбердің берілген нүктесі *жанасу нүктесі* деп аталады.





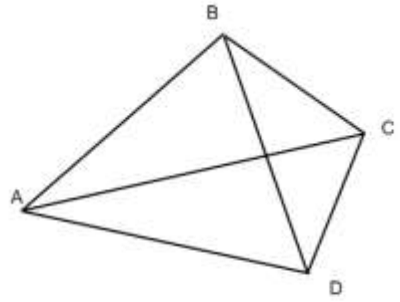
Егер шеңбер үшбұрыштың барлық қабырғаларын жанайтын болса, онда ол үшбұрышқа *іштей сызылған* деп аталады.

Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі оы үшбұрыштың биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады.

4. Төртбұрыш және оның түрлері

Төртбұрыш деп төрт нүктеден және оларды тізбектей қосатын төрт кесіндіден тұратын фигураны атайды. Берілген нүктелер төртбұырыштың-*төбелері* деп, ал оларды қосатын кесінділер төртбұрыштың *қабырғалары* деп аталады.

Төртбұрыштың бір қабырғасының ұштары болып келген төбелерін *көршілес төбелері* деп атайды. Көршілес емес төбелер оның *қарама-қарсы төбелер* деп аталады. Төрбұрыштың қарама-қарсы төбелерін қосатын кесінділер *диагональдар* деп аталады: AC мен BD.



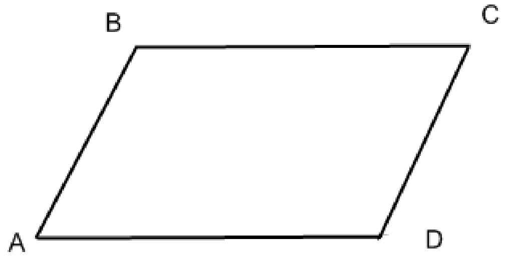
Төртбұрыштардың бір төбесінен шығатын қабырғалары *көршілес* қабырғалар деп аталады. Ортақ ұштары болмайтын қабырғалары *қарама-қарсы* қабырғалары деп аталады.

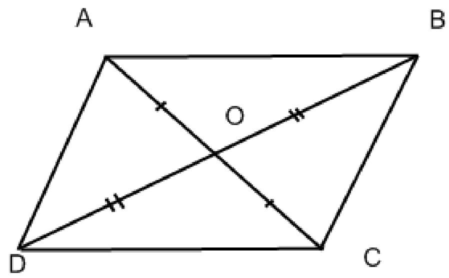
Төртбұрыштың барлық қабырғаларының қосындысын *периметр* деп атайды.

Параллелограмм

Параллелограмм дегеніміз – қарсы-қарсы қабырғалары параллель, яғни параллель түзулер бойында жататын төртбұрыш.

Егер төртбұрыштың диагональдары қиылысып және қиылысу нүктесінде қақ бөлінетін болса, онда бұл төртбұрыш – параллелограмм.



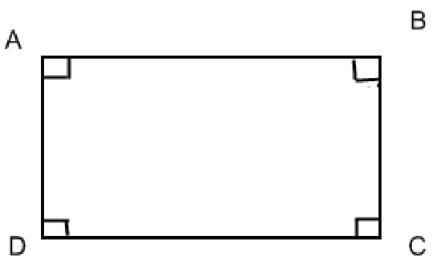


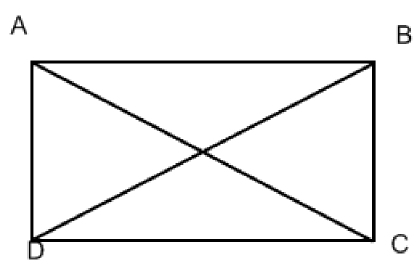
Параллелограмның диагональдары қиылысады және қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді.

Тік төртбұрыш

Тік төртбұрыш дегеніміз – барлық бұрыштары да тік болатын параллелограмм.

Тік төрбұрыштың диагональдары тең.

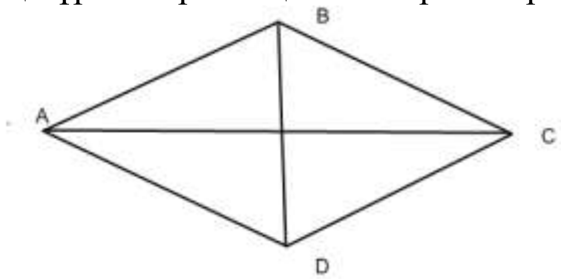




Ромб

Ромб дегеніміз – барлық қабырғалары тең болатын параллелограмм.

Ромбының диагональдары тік бұрыш жасап қиылысады. Ромбының диагональдары оның бұрыштарының биссектрисалары болып табылады.



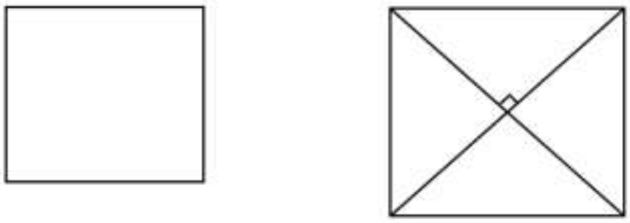
Квадрат

Квадрат дегеніміз – барлық қабырғалары тең болатын тік төртбұрыш.

Квадраттың қабырғалары тең болғандықтан, ол сондай-ақ, ромб болып табылады.

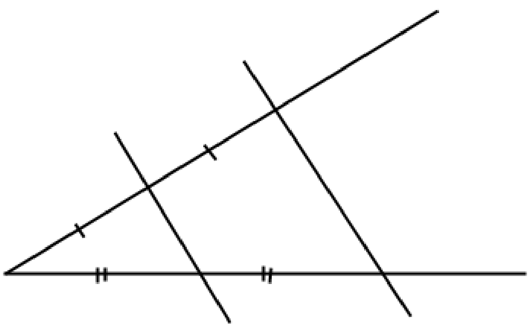
Сондықтан да оған тік төртбұрыш пен ромбының қасиеттері тән:

1. Квадраттың барлық бұрыштары тік.
2. Квадраттың диагональдары тең.
3. Квадраттың диагональдары тік бұрыш жасап қиылысады және оның бұрыштарының биссектрисалары болып табылады.



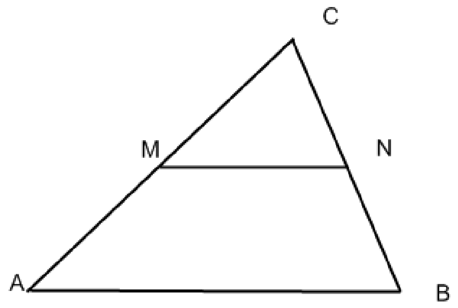
Фалес теоремасы

Егер бұрыштың қабырғаларын қиып өтетін параллель түзілер оның бір қабырғасынан тең кесінділер қиып түсетін болса, онда ол түзулер бұрыштың екінші қабырғасынан да тең кесінді қиып түседі.



Үшбұрыштың орта сызығы

Үшбұрыштың орта *сызығы* деп оның екі қабырғасының ортасын қосатын кесіндіні атайды. Үшбұрыштың берілген екі қабырғасының орталарын қосатын орта сызығы оның үшінші қабырғасына параллель және оның жартысына тең болады.



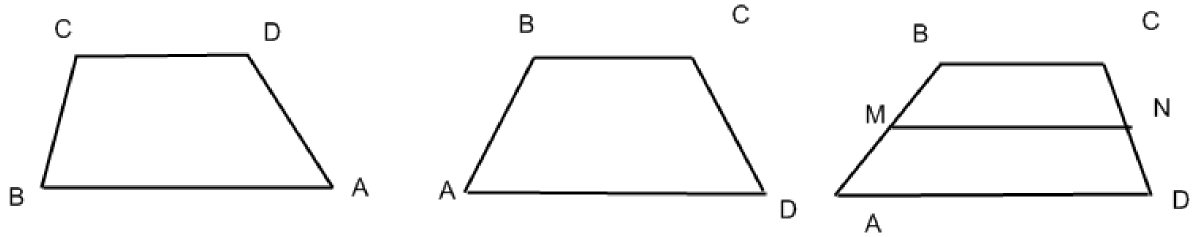
Трапеция

Трапеция деп тек қарама-қарсы екі қабырғасы параллель болатын төртбұрышты атайды. Бұл параллель қабырғалар трапецияның *табандары* деп аталады. Оның басқа екі қабырғасы *бүйір қабырғасы* деп аталады.

Бүйір қабырғалары тең болатын трапеция *тең бүйірл*і деп аталады. Бүйір қабырғаларының орталарын қосатын кесінді трапецияның *орта сызығы* деп аталады.

Трапецияның орта сызығы оның табандарына параллель және олардың жарым қосындысына тең болады:

$$MN=(BC+AD)/2$$



Бұрыштың косинусы

Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының *косинусы* деп іргелес жатқан катеттің гипотенузаға қатынасын айтады. α бұрышының косинусын былай белгілейді: cosα

α бұрышының косинусы осы бұрышқа іргедлес жатқан AC катетінің AB гипотенузасына қатынасына тең, яғни

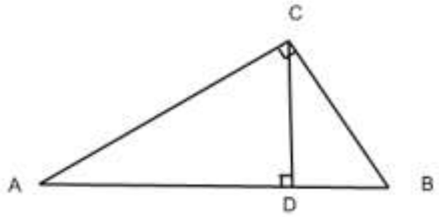
$$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}$$

5.Пифагор теоремасы

Тік бұрышты үшбұрыш гипотенузасының квадраты оның катеттерінің квадраттарының қосындысына тең болады:

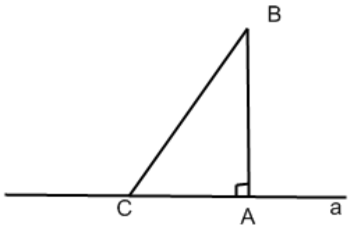
$$AB^2=AC^2+BC^2,$$

себебі $\cos A=AD/AC=AC/AB$, бұдан $AB\times AD=AC^2$, осылайша $\cos B=BD/BC=BC/AB$, бұдан $AB\times BD=BC^2$, сонда $AC^2+BC^2=AB\times(AD+BD)=AB^2$.



Перпендикуляр және көлбеу

BA – B нүктесінен a түзуіне түсірілген перпендикуляр де, ал C – a түзуінің A-дан өзге кез келген нүктесі болсын. BC кесіндісі B нүктесінен a түзуіне жүргізілген *көлбеу* деп аталады. C нүктесі *көлбеудің* табаны деп аталады. AC кесіндісі *көлбеудің проекциясы* деп аталады.



α бұрышының *синусы* деп (белгіленуі sin α) қарсы жатқан BC катеттің гипотенуза AB-ге қатынасын атайды:

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}$$

α бұрышының *тангенсі* деп (белгілінуі tg α) қарсы жатқан BC катеттің іргелес жатқан AC катетке қатынасын атайды:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}$$

6. *Векторлар және оларға амалдар қолдану*

Вектордың абсолют шамасы және бағыты

Вектор деп біз бағытталған кесінідіні айтатын боламыз. Вектордың бағытын анықтағанда оның бас нүктесі мен ұшын көрсетіп белгілейді. Сызбада вектордың бағытын стрелкамен белгілейді. Векторларды белгілеу үшін латынның кіші әріптерімен а,в,с... қолданады. Сондай-ақ оның бас нүктесі мен ұшын көрсетіп те векторды белгілеуге болады. Мұнда вектордың бас нүктесі алдымен жазылады. «Вектор» дегеннің орнына әріп белгілеменің үстіне кейде стрелка не сызықша койылады. а, а немесе AB, AB.

Егер AB мен CD жарты түзулері бірдей бағытталған болса, онда AB мен CD векторлары бірдей бағытталған деп аталады. Ал егер AB мен CD жарты түзулері *қарама-қарсы бағытталған* болса, AB мен CD векторлары қарама-қарсы бағытталған деп аталады.

Вектордың *абсолют шамасы* (*не модулі*)-деп векторды кескіндейтін кесіндінің ұзындығын атайды. a векторының абсолют шамасы /a/ деп белгілейді.

Вектордың бас нүктесі оның ұшымен дәл келіп беттеіп жатуы мүмкін.Ондай векторды *нөлдік* вектор деп атайды. Нөлдік вектордың үстіне сызықша қойып нөлмен (0) белгілейді. Нөлдік вектордың абсолют шамасы нөлге тең.

Векторлардың теңдігі

Егер екі вектор параллель көшіру арқылы үйлесетін болса, онда олар *тең* деп аталады. Оның мәнісі сол, бір вектордың бас нүктесі мен ұшын екінші вектордың сәйкесінше бас нүктесі мен ұшына көшіретін параллель көшіру бар болады. Осы берілген векторлар теңдігінің анықтамасынан шығатыны: тең векторлар бірдей бағытталған да және абсолют шамасы жағынан да тең болады. Керісінше: егер векторлар бірдей бағытталған болып және де абсолют шамасы жағынан да тең болып келсе, онда олар тең болады.

Есеп. АВСД төртбұрышы-параллелограмм. AB мен DC векторларының тең болатындығын дәлелдеңдер.

Шешуі. AB векторына A нүктесін D нүктесіне көшіретін параллель көшіруді қолданамыз. Бұлайша көшіргенде A нүктесі AD түзуінің бойымен жылжиды,олай болса, B нүктесі параллель түзу BC бойымен жылжитын болады. AB түзуі өзіне параллель түзуге көшеді,демек, DC түзуіне көшеді. Сонымен әлгінде қолданған параллель көшіру AB векторын DC векторына көшіреді,олай болса, ол векторлардың тең болғаны.

Вектордың координаттары

a векторының бас нүктесі - $A_1(x_1y_1)$,ал ұшы $A_2(x_2y_2)$ нүктесі болсын. a векторының *координаттары* деп $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$ сандарын атайды.Вектордың координаттарын оның әріптік белгіленуімен қатар жазады.Осы алынған жағдайда a $(a_1;a_2)$ немесе ($a_1;a_2$) деп жазылады.Нөлдік вектордың координаттары нөлге тең болады.Екі нүктенің ара қашықтығын олардың координаттары арқылы өрнектейтін формулалардан координаттары a_1, a_2 болатын вектордың абсолют шамасы $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ -на тең болатындығы шығады.

Тең векторлардың сәйкес координаттары тең болады. Керісінше де: егер векторлардың сәйкес координаттары тең болса, онда векторлар тең болады.

Есеп. Үш нүкте берілсін: A(1;1), B(-1;0), C(0;1). AB мен CD векторлары тең болатындай, D (x,y) нүктесін табыңдар.

Шешуі. AB векторының координаттары -2, -1 болады.Ал CD векторының координаттары: x-0, y-1 болады. Енді AB= CD болатындықтан, x-0=-2, y-1=-1 болады.Осыдан D нүктесінің координаттарын табамыз: x=-2,y=0.

Векторларды қосу

Координаттары a_1,a_2 мен b_1,b_2 болатын a мен b векторларының қосындысы деп координаттары a_1+b_1, a_2+b_2 болатын c векторын атайды, яғни

$$a(a_1;a_2)+ b(b_1;b_2)= c(a_1+b_1; a_2+b_2)$$

A,B,C нүктелері қандай болса да мынадай векторлық теңдік орындалады:

$$AB+BC= AC$$

Есеп.Бас нүктелері ортақ екі вектор AB мен AC берілген. Сонда

$$AC- AB =BC$$

болатындығын дәлелдеңдер.

Шешуі.Мынау белгілі AB+BC=AC.Бұл мынаны білдіреді:AC-AB=BC.

Екі вектордың айырмасын салу үшін келесі ережені шығарып аламыз. a мен b векторлары айырмасына тең векторды салу үшін,бір нүктеден бастап оларға тең a' мен b' векторларын өлшеп салу керек.Сонда бас нүктесі b' векторының ұшымен,ал ұшы- a' векторының ұшымен дәл келетін вектор сол a мен b векторларының айырмасы болады.

Күштерді қосу

Денеге түсірілген күшті вектормен кескіндеп көрсету қолайлы,сонда оның бағыты күш әсерінің бағытымен бірдей болып, ал абсолют шамасы күш шамасына пропорционал болып келеді.Дененің A нүктесіне түсірілген екі күш a мен b векторларымен кескінделген.Ол күштердің тең әсерлі күші вектормен кескінделеді:

$$c = a+b$$

Күшті берілген екі бағытта әсер ететін күштердің қосындысы түрінле көрсету күшті осы бағыттар бойынша жіктеу деп аталады.

Векторды перпендикуляр екі ось бойына жіктеу қолайлы. Бұл жағдайда олардың құраушылары вектордың осьтердегі проекциялары деп аталады.

Векторды санға көбейту

$(a_1;a_2)$ векторының λ санымен көбейтіндісі деп $(\lambda a_1;\ \lambda a_2)$ векторын айтады,яғни $(a_1;a_2)\lambda=(\lambda a_1; \lambda a_2)$. Анықтама бойынша $(a_1;a_2)\lambda= \lambda(a_1;a_2)$

Қалауымызша алынған a векторы мен λ ,μ сандары үшін мынау орындалады:

$$(\lambda+ \mu)a= \lambda a+\mu a$$

Қалауымызша алынған a және векторлары мен саны үшін мынау орындалады: $\lambda(a+b)= \lambda a+ \lambda b$

λa векторының абсолют шамасы λ көбейтіндісіне тең болады. λa bекторының $a\neq0$ болғандағы бағыты, $\lambda>0$ болса, a векторының бағытымен бірдей де, ал егер $\lambda<0$ болса, a векторының бағытына қарама-қарсы болады.

Есеп. $A(x_1;y_1)$ мен $B(x_2;y_2)$ нүктелері берілген.Сонда АВ мен ВА векторларының қарама-қарсы бағытталғанын дәлелдеңдер.

Шешуі. АВ векторының координаттары x_2-x_1 мен y_2-y_1 болады.ВА векторының координаттары x_1-x_2 мен y_1-y_2 болады. Біз мынаны көріп отырмыз:

$$AB=(-1)XBA.$$

Олай болса АВ мен ВА векторлары қарама-қарсы бағытталған болып шығады.

Векторды коллинеар емес екі вектор бойынша жіктеу

Бір түзу бойында немесе параллель түзулер бойында жатқан нөлдік емес екі вектор *коллинеар векторлар* деп аталады.

Айталық а мен b-нөлден өзге коллинеар векторлар болсын. Сонда λ саны табылып,

$$b= \lambda a$$

теңдігі орындалады.

а мен b векторлары бірдей бағытталған болсын.Сонда

$$b \quad (b / a)a$$

векторлары да бірдей бағытталған және олардың абсолют шамасы b да бірдей болады. Демек,олар тең:

$$b= b / a\ a=\lambda a, \ \lambda= b / a$$

а мен в векторлары қарама-қарсы бағытталған болғанда былай тұжырымдалады:

$$b=- b / a\ a=\lambda a, \ \lambda=- b / a$$

а мен в векторлары коллинеар емес болсын.Кез келген с векторды

$$c= \lambda a+\mu b$$

түрінде көрсетуге болады.

Векторлардың скаляр көбейтіндісі

$a(a_1;a_2)$ мен векторларының скаляр көбейтіндісі деп $a_1b_1+a_2 b_2$ санын атайды.

Векторлардың скаляр көбейтіндісін де, сандарды көбейткендегідей, жазып орындайды.а*а скаляр көбейтіндісі a^2 деп белгіленеді де, скаляр квадрат деп аталады.

кез келген $a(a_1;a_2)$,$b(b_1;b_2)$,$c(c_1;c_2)$ векторлары үшін

$$(a+b)c=ac+bc$$

векторлардың скаляр көбейтіндісі олардың абсолют шамаларын олардың арасындағы бұрыштың косинусына көбейткенге тең болады.

Егер векторлар перпендикуляр болса,олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады.

Есеп.Параллелограмм диагональдары квадраттарының қосындысы оның қабырғалары квадраттарының қосындысына тең болатындығын дәлелдеңдер.

Шешуі. ABCD –төртбұрышы-параллелограмм болсын.Мынадай векторлық теңдіктер шығады:

$$AB+AD=AC, \quad AB-AD=DB$$

Бұл теңдіктерді екінші дәрежеге шығарамыз.Сонда

$$AB^2+2AB*AD+AD^2=AC^2$$
$$AB^2-2AB*AD+AD^2=DB^2$$

Бұл теңдіктерді мүшелеп қосамыз, сонда мынау шығады:

$$2AB^2+2AD^2=AC^2+DB^2$$

Параллелограммның қарама-қарсы қабырғалары тең болатындықтан, бұл теңдік параллелограмм диагональдары квадраттарының қосындысы оның қабырғалары квадраттарының қосындысына тең екенін білдіреді.

Векторды координаттық осьтер бойынша жіктеу

Егер вектордың абсолют шамасы бірге тең болса, оны *бірлік вектор* деп атайды.Бағыты координаттық оң жарты осьтердің бағытындай бірлік векторлар *координаттық векторлар* немесе *орттар* деп аталады. Біз оларды x осі бойында $e_1(1;0)$ және y осі бойында $e_2(0;1)$ деп белгілейміз.

Ал координаттық векторлар нөлдік вектордан өзге және де коллинеар емес болатындықтан,кез келген $a(a_1,a_2)$ векторды осы векторлар бойынша жіктеуге болады:

$$a= \lambda e_1+\mu e_2$$

Осы жіктеудің λ мен μ коэффициенттерін табамыз. Ол үшін (*) теңдіктің екі жақ бөлігін де e_1 векторына көбейтеміз.Сонда

$$a(a_1;a_2)e_1=a_1e_1*e_1 =1, e_2*e_1=0,$$

ендеше $a_1=\lambda$

(*) теңдіктің екі жақ бөлігін де e_2 векторына осылайша көбейтіп, $a_2= \mu$ екенін табамыз.

Сонымен кез келген $a(a_1;a_2)$ векторды былай жіктеуге болады:

$$a=a_1e_1+a_2e_2$$

II.Стереометрия

1. Нүкте, түзу және жазықтық

Стереометрия-геометрияның кеңістіктегі фигураларды зерттейтін бөлімі. Стереометрияда, планиметриядағы сияқты, геометриялық фигуралардың қасиеттері сәйкес теоремаларды дәлелдеу арқылы тағайындалады. Мұнда негіз болатын-негізгі геометриялық фигуралардың аксиомалармен өрнектелетін қасиеттері. Кеңістікте негізгі фигуралар болатындар:нүкте, түзу және жазықтық.

Жазықтықты біз үстелдің тегіс беті сияқты етіп көз алдымызға келтіреміз, сондықтан да оны параллелограмм түрінде кескіндейміз. Жазықтық, түзу сияқты шексіз болады. Суретте біз жазықтықтың тек бір бөлігін ғана кескіндейміз, бірақ оны барлық жаққа шексіз созылған деп түсінеміз. Жазықтықтар α, β, γ, ... грек әріптерімен белгіленеді.

Жаңа геометриялық бейне- жазықтықты енгізу аксиомалар жүйесін кеңейте түсуге мәжбүр етеді. Сондықтан біз жазықтықтардың кеңістіктегі негізгі қасиеттерін өрнектейтін аксиомалардың С тобын енгіземіз. Бұл топ мына үш аксиомаан тұрады:

С-1. Қандай жазықтық болса да, ол жазықтыққа тиісті нүктелер және оған тиісті емес нүктелер бар болады.

С-2. Егер әр түрлі екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда олар осы нүкте арқылы өтетін түзу бойымен қиылысады.

Бұл аксиома, егер әр түрлі α және β жазықтықтарының ортақ нүктесі бар болса, онда осы жазықтықтардың әрқайсысына тиісті с түзуі бар дегені білдіреді. Сонда, егер С нүктесі екі жазықтыққа да тиісті болса, онда ол с түзуіне тиісті болады.

С-3. Егер әр түрлі екі түзудің ортақ нүктесі болса, онда олар арқылы жазықтық жүргізуге болады және ол тек біреу ғана.

Теорема. Түзу және онда жатпайтын нүкте арқылы жазықтық жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.

Есеп. Бір түзу арқылы әр түрлі екі жазықтық жүргізуге болатынын дәлелдендер.

Шешуі. α –берілген түзу болсын. С-1 аксиома бойынша α түзуінде жатпайтын А нүктесі бар болады. Теорема бойынша α түзуі мен А нүктесі арқылы жазықтық жүргізуге болады, оны β деп белгілейміз. С-1 аксиома бойынша β жазықтығында жатпайтын В нүктесі бар болады. α түзуі мен В нүктесі γ жазықтығын жүргіземіз. Жазықтығының В нүктесі β жазықтығында жатпайтын болғандықтан, β мен γ жазықтықтары әр түрлі.

Түзудің жазықтықпен қиылысуы

Теорема. Егер түзудің екі нүктесі жазықтыққа тиісті болса, онда түзу тұтастай сол жазықтыққа тиісті болады.

Теоремадан мынау шығады: жазықтық пен бұл жазықтық бетінде жатпайтын түзу не қиылыспайды, не бір нүктеде қиылысады.

Берілген түзу және берілген нүкте арқылы өтетін жазықтықтың бар болуы

Теорема. Берілген түзуде жатпайтын үш нүкте арқылы жазықтық жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.

Теорема. Жазықтық кеңістікті екі жарты кеңістікке бөледі. Егер X пен Y нүктелері бір жарты кеңістікке тиісті болса, онда XY кесіндісіжазықтықты қимайды. Егер де X пен Y нүктелері әр түрлі жарты кеңістіктерге тиісті болса,онда XY кесіндісі жазықтықты қияды.

2.Кеңістіктегі параллель түзулер мен жазықтықтар

Кеңістіктегі екі түзу бір жазықтықта жатпайтын болып және өзара қиылыспайтын болса, ондай екі түзу параллель түзулер деп аталады. Өзара қиылыспайтын және бір жазықтықта жатпайтын түзулер айқас түзулер деп аталады.

Теорема. Берілген түзуден тыс жатқан нүкте арқылы сол түзуге параллель түзу жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.

Теорема. Қандай да бір түзуге параллель болатын екі түзу өзара параллель болады.

Түзу мен жазықтық қиылыспайтын болса, онда олар параллель деп аталады.

Теорема. Егер жазықтыққа тиісті емес түзу осы жазықтықтағы қандай да бір түзуге параллель болса, онда ол сол жазықтықтың өзіне де параллель болады.

Теорема. Егер бір жазықтықта жатқан қиылысатын екі түзу екінші жазықтықта жатқан қиылысатын екі түзуге сәйкесінше параллель болса, онда ол екі жазықтық параллель болады.

Теорема. Берілген жазықтықтан тыс нүкте арқылы берілген жазықтыққа параллель жазықтық жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.

Егер параллель екі жазықтықты үшінші жазықтық қиятын болса, онда қиылысу түзулері параллель болады.

Параллель екі жазықтықтың арасындағы параллель түзулердің кесінділері тең болады.

Фигураның түзу сызықты кескінділері сызба жазықтығында кесінді болып кескінделеді.

Фигураның параллель кесінділері сызба жазықтығында параллель кесінділермен кескінделеді.

Бір түзудің немесе параллель түзулердің кесінділерінің қатынасы параллель проекциялауда сақталып қалады.

3.Түзулер мен жазықтықтардың перпендикулярлығы

Теорема. Егер қиылысатын екі түзу перпендикуляр екі түзуге сәйкесінше параллель болса,онда олар өзара перпендикуляр болады.

Егер жазықтықты қиятын түзу сол жазықтықта жатқан және түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі арқылы өтетін кез келген түзуге перпендикуляр болса, онда түзу жазықтыққа перпендикуляр деп аталады.

Теорема. Егер жазықтықты қиятын түзу осы жазықтықта жатқан қиылысатын екі түзуге перпендикуляр болса, ол түзу жазықтыққа перпендикуляр болады.

Теорема. Егер жазықтық параллель екі түзудің біріне перпендикуляр болса, онда ол екінші түзуге де перпендикуляр болады.

Теорема. Бір ғана жазықтыққа перпендикуляр болатын екі түзу параллель болады.

Перпендикуляр және көлбеу

Жазықтық пен онда жатпайтын нүкте берілген болсын. Берілген нүктеден берілген жазықтыққа түсірілген перпендикуляр деп берілген нүктені берілген жазықтық нүктесімен қосатын және жазықтыққа перпендикуляр түзуде жатқан кесіндіні атайды. Бұл кесіндінің жазықтықта жатқан ұшы перпендикулярдың табаны деп аталады. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық деп осы нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығын атайды.

Берілген нүктеден берілген жазықтыққа жүргізілген көлбеу деп жазықтыққа перпендикуляр емес,бір ұшы берілген нүктеде, екінші ұшы жазықтықта жататын кез келген кесіндіні атайды. Кесіндінің жазықтықта жатқан ұшы көлбеудің табаны деп аталады. Бір нүктеден жүргізілген перпендикуляр мен көлбеудің табандарын қосатын кесінді көлбеудің проекциясы деп аталады.

Түзуден оған параллель жазықтыққа дейінгі қашықтық деп осы түзудің кез келген нүктесінен жазықтыққа дейінгі қашықтық аталады.

Жазықтықтың кез келген екі нүктесінен параллель жазықтыққа дейінгі қашықтықтардың ұзындығы тең.

Теорема. Жазықтықта көлбеудің табаны арқылы оның проекциясына перпендикуляр етіп жүргізілген түзу сол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады. Керісінше де : егер жазықтықтағы түзу көлбеуге перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің проекциясына да перпендикуляр болады.

Егер қиылысатын екі жазықтықтың қиылысу түзуіне перпендикуляр үшінші жазықтық оларды перпендикуляр түзулер бойымен қиятын болса, оларды перпендикуляр жазықтықтар деп атайды.

Теорема. Егер жазықтық басқа бір жазықтыққа перпендикуляр түзу арқылы өтетін болса, онда бұл жазықтықтар перпендикуляр болады.

Екі айқас түзудің ортақ перпендикуляры деп ұштары осы түзулерде жататын, олардың әрқайсысына перпендикуляр болып табылатын кесіндіні атайды.

Теорема. Айқас екі түзудің ортақ перпендикуляры болады және ол тек біреу ғана болады.

Айқас түзулердің ара қашықтығы деп олардың ортақ перпендикулярының ұзындығын айтады.

4.Көпжақтар

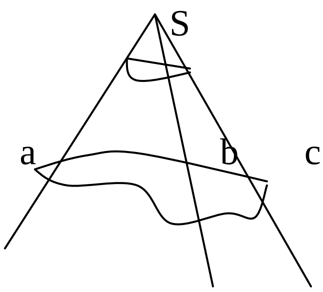
Екіжақты бұрыш

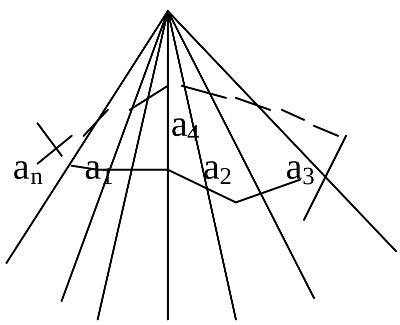
Екіжақты бұрыш деп ортақ бір түзумен шектелетін екі жарты жазықтықтан жасалған фигураны айтады.Жарты жазықтықтарды-екіжақты бұрыштың *жақтары* деп, ал оларды шектейтін түзуді *қыры* деп атайды.

Екіжақты бұрыштың қырына перпендикуляр жазықтық оның жақтарын екі жарты түзу бойымен қиып өтеді.Осы жарты түзулерден жасалған бұрышты екіжақты бұрыштың *сызықтық бұрышы* деп атайды.

Үшжақты және көпжақты бұрыштар

*Үшжақты бұрыш (*abc) деп үш жазық бұрыштан (ab),(bc) және (ac) құралған фигураны айтады. Бұл бұрыштар үшжақты бұрыштың *жақтары* деп, ал олардың қабырғалары *қырлары* деп аталады.Жазық бұрыштардың ортақ *төбесі* үшжақты бұрыштың төбесі деп аталады. Үшжақты бұрыштың жақтарынан жасалған *екіжақты бұрыштар үшжақты бұрыштың екіжақты бұрыштары* деп аталады.





Көпжақ

Көпжақ дегеніміз беті саны шектеулі жазық көпбұрыштардан құралатын дене. Егер көпжақ өзінің бетін құрайтын әрбір жазық көпбұрыш жазықтығының бір жағына орналасқан болса, оны дөңес *көпжақ деп* атайды.Осындай жазықтық пен дөңес көпжақтың бетінің ортақ бөлігі *жақ* деп аталады.Дөңес көпжақтың жақтары дөңес көпбұрыштар болып келеді.Жақтардың қабырғаларын-көпжақтың *қырлары* деп,ал төбелерін *көпжақтың төбелері* деп атайды.

Призма

Призма деп әр түрлі жазықтықтарда жататын және параллель көшіргенде бір-біріне дәл келіп беттесетін екі көпбұрыштан және осы көпбұрыштардың сәйкес нүктелерін қосатын барлық кесінділерден тұратын көпжақты атайды.Көпбұрыштар-*призманың табандары*, ал сәйкес төбелерді қосатын кесінділер *призманың бүйір қырлары* деп аталады.

Параллель көшіру дегеніміз қозғалыс, олай болса, призманың табандары тең болады.

Параллель көшіргенде жазықтық параллель жазықтыққа ауысады, олай болса, призманың табандары праллель жазықтықтарда жатады.

Параллель көшіргенде нүктелер параллель түзулердің бойымен бірдей қашықтыққа жылжитындықтан, призманың бүйір қырлары параллель және тең болады.

Призманың беті табандары мен бүйір бетінен құралады. Бүйір беті параллелограмдар болып келеді. Осы параллелограмдардың әрқайсысының екі қабырғасы-табандарының сәйкес қабырғалары, ал қалған екеуі көршілес бүйір қырлары болып табылады.

Призманың биіктігі деп оның табандарының ара қашықтығын айтады.Призманың бір жағына тиісті емес екі төбесін қосатын кесіндіні *призманың диагоналы* деп атайды.

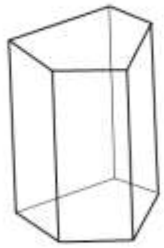
Тік призма

Егер призманың бүйір қырлары табандарына перпендикуляр болса, онда оны *тік призма* деп атайды. Олай болмаған жағдайда призма *көлбеу призма* деп аталады.

Егер тік призманың табандары дұрыс көпбұрыш болса, онда ол *дұрыс призма* деп аталады.

Призманың бүйір беті деп бүйір жақтары аудандарының қосындысын айтады. *Призманың толық беті* бүйір беті мен табандары аудандарының қосындысына тең.

Тік призманың бүйір беті табанының периметрін призманың биіктігіне, яғни бүйір қырының ұзындығына көбейткенге тең болады.



Есеп. Көлбеу призмаға бүйір қырларына перпендикуляр және барлық бүйір қырларын қиып өтетеін қима жүргізілген. Қиманың периметрі р-ге,ал бүйір қырлары l-ге тең деп алып, призманың бүйір бетін табыңдар

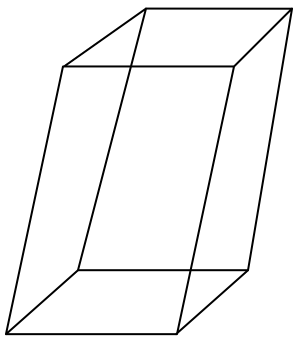
Шешуі. Жүргізілген қима жазықтығы призманы екі бөлікке бөледі.Олардың бірін, призма табандары беттесетіндей етіп,параллель көшіреміз.Сонда табаны алғашқы призманың қимасы болатын, ал бүйір қырлары l-ге тең тік призма шығарып аламыз.Бұл призманың бүйір беті алғашқы призманыкіндей. Сонымен, алғашқы призманың бүйір беті pl-ге тең.

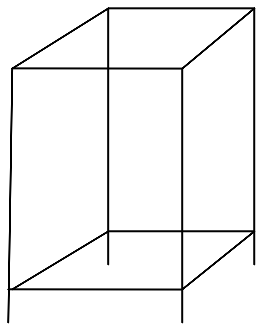
Параллелепипед

Егер призманың табаны праллелограмм болса, онда ол *параллелепипед* деп аталады.Параллелепипедтің барлық жақтары-параллелограммдар.

Параллелепипедтің ортақ төбелері болмайтын жақтары *қарама-қарсы жатқан жақтары* деп аталады.

Параллелепипедтің қарама-қарсы жатқан жақтары параллель және тең болады.





Параллелепипедтің центрлік симметриясы

Параллелепипедтің диагональдары бір нүктеде қиылысады және қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді.

Параллелепипедтің диагональдарының қиылысу нүктесі оның симметрия центрі болып табылатындығы шығады.

Тік бұрышты параллелепипед

Табаны тік төртбұрыш болатын тік параллелептпед *тік бұрышты параллелепипед* деп аталады.Тік бұрышты параллелепипедтің барлық жақтары-тік төртбұрыштар.

Барлық қырлары тең болатын тік бұрышты параллелепипед *куб* деп аталады.

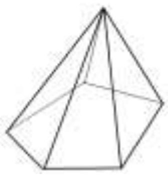
Тік бұрышты параллелепипедтің параллель емес қырларының ұзындықтары оның *сызықтық өлшемдері* деп аталады.Тік бұрышты параллелепипедтің сызықтық үш өлшеуіші бар.

Тік бұрышты параллелепипедтің кез келген диагоналының квадраты оның сызықтық үш өлшеуінің квадраттарының қосындысына тең болады.

Пирамида

Пирамида дегеніміз жазық көпбұрыштан - *пирамиданың табанынан*, табан жазықтығында жатпайтын нүктеден-пирамиадының төбесінен және пирамиданың төбесін табанының нүктелерімен қосатын барлық кесінділерден құралған көпжақ .

Пирамиданың төбесін табанының төбелерімен қосатын кесінділер пирамиданың *бүйір қырлары* деп аталады.



Пирамиданың беті табаны мен бүйір жақтарынан тұрады.Әрбір бүйір жағы-үшбұрыш.Оның бір төбесі пирамиданың да төбесі, ал қарама-қарсы жатқан қабырғасы пирамида табанының қабырғасы болып табылады.

Пирамиданың биіктігі деп пирамиданың төбесінен табан жазықтығына түсірілген перпендикулярды атайды.

Қиық пирамида

Пирамиданы қиып өтетін табанына параллель жазықтық одан ұқсас пирамида қиып түседі.

Пирамиданың табан жазықтығына парллель және оның бүйір қырларын қиып өтетін жазықтық одан ұқсас пирамида қиып түсіреді.оның екінші бөлігі көпжақ болып шығады, ол *қиық пирамида* деп аталады.Қиық пирамиданың параллель жазықтықтарда жататын жақтары *табандары* деп аталады; қалған жақтары *бүйір жақтары* деп аталады.

Есеп. Пирамиданың бүйір қыры тең төрт бөлікке бөлінген және бөліну нүктелері арқылы табанына параллель жазықтықтар жүргізілген. Табанының ауданы 400см^2. Қималардың аудандарын табыңдар.

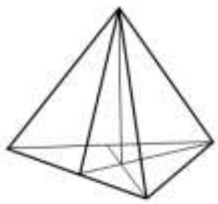
Шешуі. Қималар пирамида табанына ұқсас, ұқсастық коэффициенттері: 1/4, 2/4 және 3/4. Ұқсас фигуралардың квадраттарының қатынасындай.Сондықтан қималар аудандарының пирамиданың табан ауданына қатынастары $(1/4)^2$, $(2/4)^2$ және $(3/4)^2$ болады. Олай болса қималардың аудандары мынаған тең:
$400*(1/4)^2=25$ (см^2), $400*(2/4)^2=100$ (см^2), 400*(3/4)

Дұрыс пирамида

Егер пирамиданың табаны дұрыс көпбұрыш болып, ал биіктігінің табаны осы көпбұрыштың центрімен дәл келетін болса, онда ол *дұрыс пирамида* деп аталады. Дұрыс пирамиданың *осі* деп оның биіктігін қамтитын түзуді атайды. Дұрыс пирамиданың бүйір қырлары өзара тең екендігі айқын, олай болса, бүйір жақтары- өзара тең, тең бүйірлі үшбұрыштар.

Дұрыс пирамиданың бүйір жағының төбесінен жүргізілген биіктігі *апофема* деп аталады. *Пирамиданың бүйір беті* деп оның бүйір жақтары аудандарының қосындысын айтады.

Дұрыс пирамиданың бүйір беті табанының периметрінің жартысы мен апофемасының көбейтіндісіне тең.



Есеп. Дұрыс қиық пирамиданың бүйір беті табандары периметрлерінің қосындысының жартысы мен апофемасының көбейтіндісіне тең болатынын дәлелдеңдер.

Шешуі. Пирамиданың бүйір жақтары-жоғарғы табаны a, төменгі табаны b және биіктігі l болатын трапециялар.Сондықтан бір жағының ауданы мынаған тең:

$$1/2(a+b)l.$$

Барлық жақтарының аудандары, яғни бүйір беті мынаған тең:$1/2(an+bn)l$, мұндағы n-пирамида табанының төбелер саны, an және bn-пирамиданың табандарының периметрлері.

Дұрыс көпжақтар

Егер дөңес көпжақтың жақтары қабырғаларының саны бірдей дұрыс көпбұрыштар болса және көпжақтың әрбір төбесініе шығатын қырларының саны бірдей болса, онда оны дұрыс көпжақ деп атайды.

Дөңес дұрыс көпжақтың бес түрі бар: дұрыс тетраэдр, куб, октадэр, додекаэдр, икосаэдр.

Дұрыс тетраэдрдың жақтары-дұрыс үшбұрыштар: оның әрбір төбесінде үш қыры тоғысады.Тетраэдр-барлық қабырғалары тең болатын үшбұрышты пирамида.

Кубтың барлық жақтары- квадраттар; әрбір төбесінде үш қыры тоғысадыүКуб-барлық қырлары тең тік бұрышты параллелепипед.

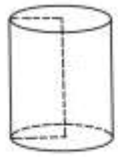
Октаэдрдың жақтары-дұрыс үшбұрыштар, бірақ тетраэдрдан айырмашылығы сол-оның әрбір төбесінде төрт қыры тоғысады.

Додекаэрдың жақтары-дұрыс бесбұрыштар, әрбір төбесінде үш қыры тоғысады.

Икосаэдрдың жақтары дұрыс үшбұрыштар, оның тетреэдр мен октаэдрден айырмашылығы оның әрбір төбесінде бес қыры тоғысады.

5.Айналу денелері

Цилиндр деп бір жазықтықта жатпайтын, параллель көшіргенде дәл беттесетін екі дөңгелектен және осы дөңгелектердің сәйкес нүктелерін қосатын барлық кесінділерден құралатын денені айтады. Дөңгелектерді *цилиндрдің табандары* деп, ал дөңгелектер шеңберлерінің сәйкес нүктелерін қосатын кесінділерді *цилиндрдің жасаушалары* деп атайды.



Параллель көшіру дегеніміз қозғалыс болғандықтан, цилиндрдің табандары тең болады. Параллель көшіргенде жазықьық параллель жазықтыққа ауысады, ендеше, цилиндрдің табандары параллель жазықтықтарда жатады. Параллель көшіргенде нүктелер параллель түзулердің бойымен бірдей ара қашықтыққа жылжитындықтан, цилиндрдің жасаушылары параллель және тең болады.

Егер цилиндрдің жасаушылары табан жазықтықтарына перпендикуляр болса, онда оны *тік цилиндр* деп атайды.

Цилиндрдің радиусы деп оның табанының радиусын атайды. *Цилиндрдің биіктігі* деп табан жазықтықтарының ара қашықтығын атайды. *Цилиндрдің осі* деп табандарының центрлерінен өтетін түзуді атайды. Ол түзу жасаушаларға параллель болады.

Цилиндрді жазықтықтармен қию

Цилиндрді осіне параллель жазықтықпен қиғанда қимасы тік төртбұрыш болып шығады.Оның екі қабырғасы-цилиндрдің жасаушылары, ал қалған екеуі табандарының параллель хордалары болады.Дербес жағдайда, остік қима тік төртбұрыш болып табылады. Бұл-цилиндрдің осі арқылы өтетеін жазықтықпен қиғандағы қима.

Цилиндрдің табанына параллель жазықтық оның бүйір бетін табан шеңберіне тең болатын шеңбер бойымен қиып өтеді.

Есеп.Цилиндрдің осьтік қимасы-квадрат, оның ауданы Q-ге тең.Цилиндрдің табанының ауданын табыңдар.

Шешуі.Квадраттың қабырғасы $\sqrt{Q}$.Ол цилиндр табанындағы дөңгелектің диаметріне тең. Сондықтан табанының ауданы мынаған тең болады:
$\pi(\sqrt{Q}/2)^{2}=\pi Q/4$

Іштей және сырттай сызылған призмалар

Цилиндрге іштей сызылған призма деп табан жазықтықтары-цилиндрдің де табан жазықтықтары, ал бүйір қырлары цилиндрдің жасаушылары болып табылатын призманы атайды.

Цилиндрге жанама жазықтық деп цилиндр жасаушысы арқылы өтетін, осы жасаушыны қамтитын осьтік қимаға перпендикуляр жазықтықты атайды.

Цилиндрге сырттай сызылған призма деп табан жазықтықтары цилиндрдің табан жазықтықтары, ал бүйір жақтары цилиндрге жанасатын призманы атайды.

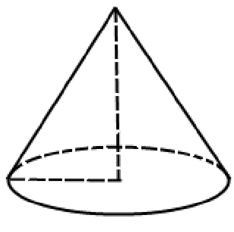
Есеп. Цилиндрге алтыбұрышты дұрыс призма іштей сызылған.Цилиндрдің биіктігі табан радиусына тең деп алып, призманың бүйір жағының диагоналы мен цилиндр осінің арасындағы бұрышта табыңдар.
Шешуі. Призманың бүйір жақтары-квадраттар, өйткені шеңберге іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың қабырғасы радиусқа тең.Призманың қырлары цилиндр осіне параллель,сондықтан жақтың диагоналы мен цилиндр осіне параллель,сондықтан жақтың диагоналы мен цилиндр осінің арасындағы бұрыш диагональ мен бүйір қырдың арасындағы бұрышқа тең.Бұл бұрыш 45°-қа тең,өйткені жақтары-квадраттар.

Конус

Конус деп дөңгелектен-*конустың табанынан*, бұл дөңгелектің жазықтығында жатпайтын нүктеден конустың төбесінен және *конустың төбесін* табанындағы шеңбердің нүктелерімен қосатын барлық кесінділерден құралған денені айтады.Конустың төбесін табанындағы шеңбердің нүктелерімен қосатын кесінділер *конустың жасаушылары* деп аталады.Конустың беті табаны мен бүйір бетінен құралады.

Егер конустың төбесін табанының центрімен қосатын түзу табан жазықтығына перпендикуляр болса,ол *тік конус* деп аталады.

Конустың биіктігі деп оның төбесінен табан жазықтығына түсірілген перпендикулярды атайды.Тік конус биіктігінің табаны табанының центрімен дәл келіп беттеседі.Тік дөңгелек *конустың осі* деп оның биіктігін қамтитын түзуді атайды.



Конустың жазықтықтарымен қиғандағы қималары

Конустың төбесі арқылы өтетін жазықтықпен қиғанда қимада бүйір қабырғалары конустың жасаушылары болып табылаиын, тең бүйірлі үшбұрыш шығады.Дербес жағдайда,конустың осьтік қимасы тең бүйірлі үшбұрыш болады.Осьтік қима конустың осі арқылы өтеді.

Конустың табан жазықтығына параллель жазықтық конусты дөңгелек бойымен, ал бүйір бетін центрі конустың осьінде жататын шеңбер бойымен қиып өтеді.

Есеп.Конус төбесінен d қашықтықта табанына параллель жазықтықпен қиылған.Конус табанының радиусы R, ал биіктігі H деп алып, қиманың ауданын табыңдар.

Шешуі.Конустың қимасын конустың табанынан конустың төбесіне гомотетия түрлендіруі арқылы шығарып алады, гомотетия коэффициенті $k=d/H$ болады.Сондықтан қимадағы дөңгелектің радиусы $r=Rd/H$. Олай болса, қиманың ауданы $S=\pi R^2 d^2/H^2$

Іштей және сырттай сызылған пирамидалар

Конусқа іштей сызылған пирамида деп табаны конус табанындағы шеңберге іштей сызылған көпбұрыш, ал төбесі конустың төбесі болып ьабылатын пирамиданы айтады.Конусқа іштей сызылған пирамиданың бүйір қырлары конустың жасаушылары болып табылады.

Есеп.Пирамиданың барлық бүйір қырлары тең.Оның қандай да бір конусқа іштей сызылғандығы дәлелдеңдер.

Шешуі.Пирамиданың төбесінен табан жазықтығына SO перпендикулярын түсіреміз және пирамиданың бүйір қырларының ұзындығын l арқылы белгілейміз.Табанының төбелері О нүктесінен бірдей

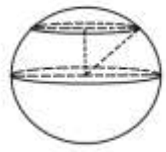
$R=\sqrt{l^2-Os^2}$ қашықтықта жатады.

Бұдан шығатыны,біздің пирамидамыз төбесі пирамиданың төбесі, ал табаны центрі О және R дөңгелек болып табылатын конусқа іштей сызылған.

Конусқа жанама жазықтық деп конустың жасаушысы арқылы өтетін және осы жасаушыны қамтитын осьтік қима жазықтығына перпендикуляр жазықтықты атайды.*Конусқа сырттай сызылған пирамида* деп табаны-конустың табанына сырттай сызылған көпбұрыш, ал төбесі конустың төбесімен дәл келетін пирамиданы атайды.Сырттай сызылған пирамиданың бүйір жақтарының жазықтығы конусқа жанама жазықтықтар болып табылады.

Шар

Шар деп берілген нүктеден берілген қашықтықтан артық емес қашықтықта жататын кеңістіктің барлық нүктелерінен тұратын денеі айтады.Бұл нүкте *шардың центрі* деп, ал берілген ара қашықтық *шардың радиусы* деп аталады.



Шардың шекарасы *шардың беті* немесе *сфера* деп аталады.

Шар бетінің екі нүктесін қосатын және шардың центрінен өтетін кесінді *диаметр* деп аталады.Кез келген диаметрдің ұштары *шардың диаметрлік қарама-қарсы нүктелері* деп аталады.

Шар да, цилиндр мен конус сияқты, айналу денесі болып табылады.Ол жарты дөңгелекті ось ретінде диаметрден айналдырғанда шығады.

Шарды жазықтықпен қию

Шарды жазықтықпен қиғандағы кез келген қимасы дөңгелек болады.Бұл дөңгелектің центрі шардың центрінен қиюшы жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың табаны болып табылады.

Есеп.Шар радиусының ортасынан оған перпендикуляр жазықтық жүргізілген.Шыққан қима ауданының үлкен дөңгелек ауданына қатынасы қандай болады?

Шешуі.Егер шар радиусы R болса,онда қимадағы дөңгелектің радиусы

$$\sqrt{R^2-(R/2)^2}=R\sqrt{3/4}.$$

Бұл дөңгелектің ауданының үлкен дөңгелектің ауданына қатынасы:

$$\pi(R\sqrt{3}/4)^2:\pi R^2=3/4$$

Шардың симметриясы

Шардың кез келген диаметрлік жазықтығы оның симметрия жазықтығы болып табылады.Шардың центрі оның симметрия центрі болып табылады.

Шарға жанама жазықтық

Шар бетінің А нүктесінен өтетін және А нүктесіне жүргізілген радиусқа перпендикуляр жазықтық *жанама жазықтық* деп аталады.А нүктесі жанасу нүктесі деп аталады.

Жанама жазықтықтың шармен бір ғана ортақ нүктесі-жанасу нүктесі болады.

Шарға жанама жазықтықта жататын және жанасу нүктесі арқылы өтетін түзу осы нүктеде шарға *жүргізілген жанама* деп аталады.

Екі сфераның қиылысуы

Екі сфераның қиылысу сызығы шеңбер болады.

Есеп.Радиусы R болатын тең екі шар, бірінің центрі екіншісінің бетінде жататындай болып орналасқан.Олардың беттерінің қиылысу сызығының ұзындығын табыңдар.

Шешуі.Шарлардың центрлері арқылы қима жүргіземіз.Есепте сөз болып отырған сызық шеңбер болып табыладф. Оның радиусы қабырғалары R болатын тең қабырғалары OAO_1 үшбұрышының биіктігіне тең.Биіктік $R\sqrt{3}/2$-ге тең.Олай болса, сызықтың ұзындығы $\pi R\sqrt{3}$-ке тең.

6.Көпжақтардың көлемі

Жазықтықтағы фигуралар үшін аудан ұғымы енгізілгені сияқты,кеңістіктегі денелер үшін көлем ұғымы енгізіледі.Ең алдымен қарапайым денелерді ғана қарастырамыз.Егер денені саны шектеулі үшбұрышты пирамидаларға бөлшектеуге болатын ьолса, онда оны *қарапайым дене* деп атайды.

Қарапайым денелер үшін көлем-*оң шама,оның сандық мәнінің төмендегідей қасиеттері бар:*

1.Тең денелердің көлемдері тең болады.

2.Егер дене қарапайым денелер болып табылатын бөліктерге бөлшектенетін болса,онда бұл дененің көлемі оның бөліктерінің көлемдерінің қосындысына тең болады.

3.Қыры ұзындық бірлігіне тең кубтың көлемі бірге тең болады.

Тік бұрышты параллелепипедтің көлемі

Сызықтық өлшемдері a,b,c болатын тік бұрышты параллелепипедтің көлемін V=abc формуласымен есептеп шығарады.

$$V=abc$$

Есеп. Егер кубтың әр қырын 2 см арттырса, оның көлемі 98 $см^2$ артады.Кубтың қыры неге тең?

Шешуі. Кубтың қырын x арқылы белгілейік, сонда $(x+2)^3-x^3=98$, яғни $x^2+2x-15=0$. Теңдеудің екі түбірі бар: x=3, x=-5. Оң түбірде ғана геометриялық мағына болады. Сөйтіп кубтың қыры 3 см-ге тең

Көлбеу параллелепипедтің көлемі

Кез келген параллелепипедтің көлемі табан ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең.

Есеп.Тік параллелепипедтің табандарының қабырғалары а және b,олар өзара 30° бұрыш жасайды.Бүйір беті S-ке тең.Оның көлемін табыңдар.

Шешуі. Биіктікті x арқылы белгілейік.Сонда

$$(2a+2b)=S$$ Бұдан

$$x = S/2(a+b)$$

Параллелепипед табанының ауданы мынаған тең:

$$absin30 = ab/2$$

Сонда оның көлемі мынадай болып шығады: $abS/4(a+b)$

Пирамиданың көлемі

Кез келген пирамиданың көлемі оның табан ауданы мен биіктігі көбейтіндісінің үштен біріне тең болады.

$$V=(1/2)SH$$

7.Айналу денелерінің көлемдері

Цилиндрдың көлемі

Егер берілген денені қамтитын және осы дене ішінде қамтылатын,көлемдерінің V-ден айырмашылығы барынша аз,қарапайым денелер бар болса, онда берілген дененің көлемі v болады.

Цилиндрдің көлемі табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болады.

$$V=SH=\pi R^2H$$

Конустың көлемі

Конустың көлемі табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең болады.

$$V=(1/2)SH=(1/3)\pi R^2H$$

8.Беттің аудандары

Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы

Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын

$$S=CH=2\pi RH$$

формуласымен есептеп шығарады, мұндағы R-цилиндрдің радиусы, ал H-оның биіктігі.

Конустың бүйір бетінің ауданы

$$S_n=(1/2)P_nl_n$$

P_n-пирамида табанының периметрі, ал l_n-апофемасы.

Конустың бүйір бетінің ауданы

$$S=(1/2)Cl=\pi Rl$$

формуласымен есептеп шығарылады, мұндағы R-конус табанының радиусы, ал l-жасаушысының ұзындығы.

$$S= \pi(R_1+R_2)\,l$$

Сфераның ауданы

Радиусы R сфераның ауданын мына формуламен есептеп шығарады:

$$S=4\pi R^2$$

Қолданылған әдебиеттер:

1. А.В. Погорелов. Геометрия 7-11. «Просвещение-Қазақстан», Алматы, 2002.
2. В. Гусев, Ж. Қайдасов, Ә. Қағазбаев. Геометрия 11. «Мектеп», Алматы, 2007.
3. В. Гусев, Ж. Қайдасов, Ә. Қағазбаев. Геометрия 11.Әдістемелік нұсқау, «Мектеп»,Алматы,2007.
4. В. Гусев, Ж. Қайдасов, Ә. Қағазбаев. Геометрия 10.Әдістемелік нұсқау, «Мектеп»,Алматы,2010.
5. С.Е. Шәкілікова, Б.М. Саяқова. Геометрия 9.Әдістемелік нұсқау, «Мектеп»,Алматы,2005.
6. Б. Баймұханов. Математика есептерін шығаруға үйрету. «Мектеп», Алматы, 1983.

Мазмұны

Пішімі 60х84 1/12
Көлемі 35 бет 3 шартты баспа табағы
Таралымы 20 дана.
Ш.Есенов атындағы КМТжИУ
Редакциялық - баспа бөлімінде басылды.
Ақтау қаласы, 32 ш/а.