УДК 517.949.8

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Жуманова З.Ж., Диярова Л.Д.

Мұнай, кен орындарында құбырдың төменгі қабырғасының ішкі бетінің істен шығуына байланысты, құбыр өткізгіштердің жарылуы жиеленіп кетті. Істен шығудың осындай түрі «жылғалану эффекті» деп аталынады. Осыған байланысты бұл жұмыста цилиндрлік құбырларға беттік тартылу күштерін есебінен және оларды ескермеген жағдайдағы қосқабатты араласпайтын сүйықтардың (мұнай және су) ағысының зандылықтары мен сандық шешімі қарастырылған.

Because of wearing out of surface of metallic pipes in bottom wall breaks of pipe lines become more frequent in oil-fild. This type of wear is called «effect os stream». In conjunction with it is considered trends of flow of liquid with two stratums (oil and water) in flat and cylindrical canals with taking into account the forces of surface stretch and without it.

На месторождениях нефти участились аварии трубопроводов ввиду их порывов. Для того, чтобы прогнозировать эти ситуации, в работе исследуется движение двухслойной стратифицированной жидкости (нефти и воды) в трубопроводе. В частности, рассматривается ламинарное движение вязкой несжимаемой двухслойной жидкости в круглой трубе с учетом сил поверхностного натяжения. Для аппроксимации уравнения используем конечно-разностную схему, обладающей свойством консервативности и однородности. В этом случае условие сопряжений на границе раздела сред, выражающие непрерывность скорости и касательного напряжения, будут выполняться автоматически. В работе приводится численное решение задачи.
Рассмотрим ламинарное движение вязкой несжимаемой двухслойной жидкости в круглой трубе с учетом сил поверхностного натяжения. Такая краевая задача об осесимметричном движении жидкости в декартовой системе координат будет иметь вид с определенными граничными условиями

$$\mu(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2})=\frac{dP}{dz},-\frac{dP}{dz}=const, \qquad \textbf{(1)}$$

где ω- скорость, P- давление, μ- динамическая вязкость, x,y,z- декартовы координаты, причем z направлено по длине канала в сторону движения жидкости.[1].
Для удобства решения запишем уравнение (1) в безразмерном виде, принимая:

$$\breve{x}=\frac{x}{D},\breve{y}=\frac{y}{D},\breve{z}=\frac{z}{D},\breve{\mu}=\frac{\mu}{\mu_2},\breve{P}=\frac{P}{\rho_2\omega_2^0},\breve{\omega}=\frac{\omega}{\omega_2^0},$$

где D- диаметр трубы, ω_2^0 - среднерасходная скорость жидкости, ρ- плотность. Значок «˘» для краткости опустим, тогда уравнение (1) примет вид :

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial\omega}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial\omega}{\partial y})\right]=\frac{dP}{dz},$$

где $\mathrm{Re}=\frac{D\cdot\omega_2^0\cdot\rho_2}{\mu_2}$ - число Рейнольдса.

Так как $\frac{1}{\mathrm{Re}}=const$, то

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial\omega}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial\omega}{\partial y})\right]=\mathrm{Re}\cdot\frac{dP}{dz} \qquad \textbf{(2)}$$

Для аппроксимации уравнения (2) воспользуемся конечно-разностной схемой, обладающей свойством консервативности и однородности.[5]. В этом случае условие сопряжений на границе раздела сред, выражающие непрерывность скорости и касательного напряжения, будут выполняться автоматически. Численное решение уравнения (2) можно произвести методом сквозного счета. Преимущество сквозного счета очевидны по сравнению с методом раздельного решения задачи в каждой области течения двух жидкостей (нефти и воды) путем склеивания их на границе раздела сред с использованием условий сопряжения. Непрерывный сквозной счет более точен и эффективен по сравнению с методом раздельного счета. [6,3]. Поэтому для конечно-разностного представления уравнения (2) используем однородную схему.

Конечно-разностную схему уравнения (2) можно получить методом контрольного объема и для этого плоскость поперечного сечения трубы покрываем согласованной сеткой с неравномерными шагами как по оси Ох, так и по оси Оу

Интегрирование уравнения (2) производим по элементарной площади согласованной сетки. [2,3,5].

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial\omega}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial\omega}{\partial y})\right]dxdy=\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\left[\mathrm{Re}\cdot\frac{dP}{dz}\right]dxdy$$

Интегрируя двойной интеграл и используя теорему о среднем, получим:

$$\left[\mu_{i+\frac{1}{2}j}\cdot\frac{\omega_{i+\frac{1}{2}j}-\omega_{i-\frac{1}{2}j}}{x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}}}-\mu_{i-\frac{1}{2}j}\,\frac{\omega_{i+\frac{1}{2}j}-\omega_{i-\frac{1}{2}j}}{x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}}}\right]\cdot(y_{j+\frac{1}{2}}-y_{j-\frac{1}{2}})+$$

$$\left[\mu_{ij+\frac{1}{2}}\cdot\frac{\omega_{ij+\frac{1}{2}}-\omega_{ji-\frac{1}{2}}}{y_{j+\frac{1}{2}}-y_{j-\frac{1}{2}}}-\mu_{ij-\frac{1}{2}}\frac{\omega_{ij+\frac{1}{2}}-\omega_{ij-\frac{1}{2}}}{y_{j+\frac{1}{2}}-y_{j-\frac{1}{2}}}\right]\cdot(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}})=$$
$$=(\mathrm{Re}\cdot\frac{dP}{dz})\cdot(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}})\cdot(y_{j+\frac{1}{2}}-y_{j-\frac{1}{2}}) \qquad \textbf{(3)}$$

После несложных преобразований найдем:

$$\frac{(\mu_{i+1j}+\mu_{ij})\cdot(\omega_{i+1j}-\omega_{ij})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})}-\frac{(\mu_{ij}-\mu_{i-1j})(\omega_{ij}-\omega_{i-1j})}{(x_i-x_{i-1})(x_{i+1}-x_{i-1})}+$$
$$+\frac{(\mu_{ij-1}+\mu_{ij})(\omega_{ij+1}-\omega_{ij})}{(y_{j+1}-y_j)(y_{j+1}-y_{j-1})}-\frac{(\mu_{ij}-\mu_{ij-1})(\omega_{ij}-\omega_{ij-1})}{(y_j-y_{j-1})(y_{j+1}-y_{j-1})}= \qquad \textbf{(4)}$$
$$=(\mathrm{Re}\frac{dP}{dz})$$

Суммирование разностного аналога (4) по всей области позволяет получить разностное выражение интегрального условия сохранения импульса, что и показывает консервативность выбранной схемы [4].

В разностном аналоге (4) градиент давления и число Рейнольдса исключим с помощью замены переменной

$$\omega_{ij}=v_{ij}\cdot(\mathrm{Re}\cdot(-\frac{dP}{dz}))$$

и получим

$$\frac{(\mu_{i+1j}+\mu_{ij})\cdot(v_{i+1j}-v_{ij})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})}-\frac{(\mu_{ij}-\mu_{i-1j})(v_{ij}-v_{i-1j})}{(x_i-x_{i-1})(x_{i+1}-x_{i-1})}+$$
$$+\frac{(\mu_{ij-1}+\mu_{ij})(v_{ij+1}-v_{ij})}{(y_{j+1}-y_j)(y_{j+1}-y_{j-1})}-\frac{(\mu_{ij}-\mu_{ij-1})(v_{ij}-v_{ij-1})}{(y_j-y_{j-1})(y_{j+1}-y_{j-1})}=-1 \qquad \textbf{(5)}$$

Вводя разностные операторы, (5) перепишем в виде:

$$\Lambda v_{ij}=(\Lambda_1+\Lambda_2)\cdot v_{ij}=-1 \qquad \textbf{(6)}$$

где Λ_1 - оператор по координате x, Λ_2 - оператор по координате y.

Градиент давления $\frac{dP}{dz}$ определяется из разностного выражения интегрального условия сохранения расхода сопряжения на границе раздела двух сред. Используя известный метод трапеции [3], условие сопряжения на границе раздела нефти и воды представим в разностной форме

$$\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{N_2}\rho_{ij}\omega_{ij}\Delta x_i\Delta y_j=const_1,$$
$$const=\rho_1\omega_1^0\Omega_1+\rho_2\omega_2^0\Omega_2,$$

Тогда

$$\mathrm{Re}\cdot(-\frac{dP}{dz})=\frac{const}{const_1} \qquad \textbf{(7)}$$

Таким образом, конечно-разностное выражение (5) и (7) позволяет построить алгоритм численного решения уравнения (2).

Для решения разностного аналога уравнения (2) рассмотрим итерационную схему стабилизирующей поправки [3,5]. Используя метод установления при $t \to \infty$, решим уравнение

$$\frac{dv_{ij}}{dt} + \Lambda \cdot v_{ij} + 1 = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

В качестве итерационной схемы возьмем продольно-поперечную схему с переменным шагом по времени [1]:

$$\frac{v_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - v_{ij}^{n}}{\tau} + \Lambda_1 \cdot v_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 \cdot v_{ij}^{n} + 1 = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

$$\frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^{n}}{\tau} + \Lambda_1 \cdot v_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 \cdot v_{ij}^{n+1} + 1 = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

Введем поправки:

$$\xi_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = v_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - v_{ij}^{n} \qquad \text{и} \qquad \xi_{ij}^{n+1} = v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^{n} \qquad \textbf{(11)}$$

Подставляя их в (9) и (10) и, производя некоторые вычисления, получим:

$$(E + \tau \cdot \Lambda_1) \cdot \xi_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \tau \cdot (\Lambda \cdot v_{ij}^{n} + 1) = 0 \qquad \textbf{(12)}$$

$$(E + \tau \cdot \Lambda_2) \cdot \xi_{ij}^{n+1} = \xi_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, \left\| \frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^{n}}{\tau} \right\| \le \varepsilon = 10^{-4} \qquad \textbf{(13)}$$

Далее, применяем метод прогонки [5] сначала по оси Ox, а затем по оси Oy. Выражение (12) можно записать в виде

$$\tau \cdot \frac{(\mu_{i+1j} + \mu_{ij})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \cdot \xi_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \tau \cdot \left[\frac{\mu_{i+1j} + \mu_{ij}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} + \frac{\mu_{ij} + \mu_{i-1j}}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})} \right]) \cdot \xi_{ij}^{n+\frac{1}{2}} +$$
$$+ \tau \cdot \frac{\mu_{ij} + \mu_{i-1j}}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})} \cdot \xi_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}} = -\tau \cdot (\Lambda \cdot v_{ij}^{n} + 1)$$

(14)

Аналогичным образом запишем трёхточечную форму для (13):

$$\tau \cdot \frac{(\mu_{ij+1} + \mu_{ij})}{(y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} - y_{j-1})} \cdot \xi_{ij}^{n+1} + (1 - \tau \cdot \left[\frac{\mu_{ij-1} + \mu_{ij}}{(y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} - y_{j-1})} + \frac{\mu_{ij} + \mu_{ij-1}}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})} \right]) \cdot \xi_{ij}^{n+1} +$$
$$+ \tau \cdot \frac{\mu_{ij} + \mu_{ij-1}}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})} \cdot \xi_{ij}^{n+1} = \xi_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$$

(15)

Трехточечные формы (14), (15) легко решаются методом прогонки.

Для апробации выбранной конечно-разностной схемы и метода численного решения был проведен расчет ламинарного движения однородной жидкости в трубе. Профиль такого течения является параболой, где максимум скорости находится на оси трубы. Это убеждает нас в правильности решения уравнения (2), так как решение есть ни что иное как течение Пуазейля [6].

Литература:

1. Богданова В.В. Ламинарный пространственный пограничный слой с продольным и поперечным перепадом давления. Изв.АН СССР, ОНТ,серия мех.и машин,1960.-1.
2. Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М.: изд-во МГУ,1987.-163с.
3. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Наука. 1967.-368с.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир,1980.-616с.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука,1977.-653с.
6. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.-738с.