ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті
«Жоғары математика» кафедрасы

Э.У. Уразмагамбетова

Жоғары математика курсы

Оқу құралы

Ақтау қаласы
ӘОЖ 510(075.8)
ББК 22.12 я73
Пікір берушілер: Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті профессоры, ф.-м.ғ.д. С.Т. Мұхамбетжанов
С. Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің доценті, ф-м.ғ.к. Е. Ақжігітов

Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар
және инжиниринг университеті доценті, ф-м.ғ.к. Б.Т. Құлжағарова

Уразмагамбетова Э.У.
У67 Жоғары математика курсы: Оқу құралы - Ақтау, Ш.Есенов атындағы КМТжИУ, 2010. - 164 б.

ISBN 978-601-7276-27-0

Бұл оқу құралы Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінде инженер - техникалық мамандықтарда оқитын «Математика», «Жоғары математика» пәндерінің бағдарламасына сәйкес жасалған.

ӘОЖ 510(075.8)
ББК 22.12 я73

Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің Оқу-әдістемелік Кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылды

ISBN 978-601-7276-27-0

Кіріспе

Қазіргі ғылым мен техникада математикалық зерттеулер, модельдер,
жобалар өте үлкен роль атқарады. Ол қазіргі ақпараттар жүйесінің дамуына тікелей байланысты, демек математикалық нақты сандар шешімін табуға табысты қолдану мүмкіншілігін кеңейтеді.

Математика фундаменталды пән, одан дәріс беру төменгі жағдайды қарастырады:
а) ойдың логикалық және алгоритмдік дамуын;

ә)негізгі зерттеу әдістерін меңгеру және математикалық есептердің шешімдерін таба білу;
б) математикалық негізгі сандық әдістерін меңгеру және оны компьютерде орындау;
в) математикалық білімді өз бетінше ұғып алуға еңбектену, қолданбалы инженерлік және экономикалық есептерге талдау жүргізу.

Математиканың жалпы курсы дәстүрлі мамандар үшін оқу жоспары бойынша арнайы және жалпы техникалық пәндерді табысты оқытуға маңызды мәні бар инжерлер білімдерінің математикалық фундаментін қалайды.

«Жоғары математика курсы» оқулығы, «Математика», «Жоғары математика» пәндерінің бағдарламасына сәйкес кредиттік жүйеге лайықты етіліп жазылған.

Мұнда аналитикалық геометрия және векторлық алгебра, бір айнымалы функциялар, оларды дифференциалдау және интегралдау, көп айнымалы функциялар, оларды дифференциалдау және интегралдау, дифференциалдық теңдеулер, қатарлар және ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика тақырыптары бойынша теориялық материалдар, сонымен қатар оларды толықтырып, таңдап алынған үлгі-мысалдар шешімдерімен берілген.

1.Анықтауыштар

1.1 Екінші және үшінші ретті анықтауыштар

1.1-анықтама. Екінші ретті анықтауыш деп $\grave{a}_{11} \cdot \grave{a}_{22} - \grave{a}_{12} \cdot \grave{a}_{21}$ санын айтады, ол мына таңбамен белгіленеді

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \qquad (1.1)$$

мұндағы a_{ij} $(i = 1,2,\ j = 1,2)$ сандары – екінші ретті анықтауыш элементтері. Анықтауыштың, мысалға, a_{21} элементі “a екі бір” деп оқылады. Екінші ретті анықтауыш екі жатық және екі тік жолдардан тұрады, $a_{i\,j}$ анықтауыш элементінің бірінші i индексі жатық жолының нөмірін, ал екінші j индексі тік жолының нөмірін анықтайды. Анықтауыштың жоғарғы сол элементі (a_{11}) мен төменгі оң элементі (a_{22}) осы анықтауыштың негізгі диагоналын, ал жоғарғы оң элементі (a_{12}) мен төменгі сол элементі (a_{21}) қосалқы диагоналын білдіреді.

Екінші ретті анықтауышты есептеу үшін оның негізгі диагональ элементтерінің көбейтіндісінен $(a_{11} \cdot a_{22})$ қосалқы диагональ элементтерінің көбейтіндісін $(a_{21} \cdot a_{12})$ шегеру жеткілікті ((1.1) - формуласымен есептеледі).

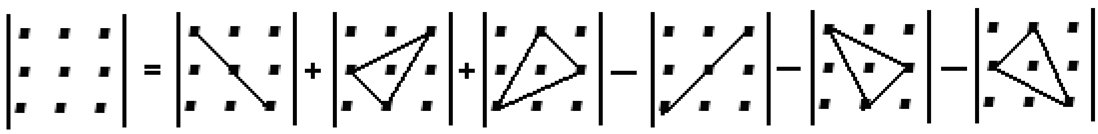
1.2-анықтама. Үшінші ретті анықтауыш деп

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \tag{1.2}$$

санын айтады, мұндағы a_{ij} $(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,3})$ анықтауыш элементтері, i жатық, ал j тік жолдарының нөмірін анықтайды. Үшінші ретті анықтауыш үш жатық және үш тік жолдардан тұрады, a_{11}, a_{22}, a_{33} - анықтауыштың негізгі диагоналының элементтері.

Үшінші ретті анықтауыштың мәні үшбұрыштар немесе Саррюс ережесі деп аталатын сұлба бойынша бірінші үш қосылғыш “+” таңбасымен, ал екінші үш қосылғыш “-” таңбасымен алынып, былай есептелінеді:



Үшінші ретті анықтауыштың есептелуіндегі әр қосылғыш (алты қосылғыш бар) үш көбейткіштен, әр көбейткіш осы анықтауыштың жатық немесе тік жолдарының тек бір ғана элементінен анықталған.

Төртінші және одан да жоғарғы ретті анықтауыштарды есептеу үшін анықтауыштың қасиеттерін білу қажет.

1.2 n- ші ретті анықтауыш және оның қасиеттері

1.3-анықтама. n- ші ретті анықтауыш деп

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots \ldots \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[j_1 j_2 \ldots j_k]} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.3}$$

қосындыны айтады, мұндағы қосу белгісі 1,2,3,…, n сандарынан анықталған барлық алмастырулар бойынша алынған (барлық алмастыру саны n!- ға тең), $a_{ij}\,(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$ анықтауыштың элементтері және ол i- жатық пен j- тік жолдарының қиылысуында орналасқан. n-ші ретті анықтауыш n жатық және n тік жолдардан тұрады, бірінші i индексі жатық жолдың, ал екінші j индексі тік жолдың нөмірін көрсетеді. Барлық элемент саны n^2-қа тең, ал оның $\frac{n!}{2}$ қосылғышының (мүшесінің) таңбасы плюс, қалғаны минус таңбасымен алынған, яғни плюс пен минус таңбасымен алынған қосылғыштардың саны тең. Әр қосылғыш осы анықтауыштың n элементінің көбейтіндісінен, ал әр көбейткіш анықтауыштың жатық және тік жолдарының тек бір ғана элементінен анықталады.

Екінші ретті анықтауыштың қасиеттері кез келген анықтауыштарға да орындалады, сондықтан біз оның қасиеттерін тек екінші ретті анықтауыш үшін дәлелдейік.

1-қасиет. Анықтауыштың жатық (тік) жолдарын оның сәйкес тік (жатық) жолдарымен орын алмастырсақ (транспонирлесек), онда оның мәні өзгермейді:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_2 .$$

Дәлелдеуі: Δ_1 анықтауышында бірінші жатық жолын бірінші тік жолымен орын алмастырайық, сонда Δ_2 анықтауышын аламыз. Осы анықтауыштарды тікелей есептеу арқылы олардың өзара тең екендігіне оңай көз жеткізуге болады.

2-қасиет. Анықтауыштың екі тік (жатық) жолдарының сәйкес элементтерінің орнын алмастырсақ, онда оның тек таңбасы қарама- қарсы таңбаға өзгереді.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = \Delta_2 .$$

Дәлелдеуі. Шынында

$$\Delta_1 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22} = -\Delta_1 .$$

3-қасиет. Анықтауыштың бір тік (жатық) жолының барлық элементтерін k санына көбейтсек, онда анықтауыш мәні k есе артады.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & k a_{12} \\ a_{21} & k a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\Delta .$$

Дәлелдеуі. $\Delta = a_{11} k a_{22} - k a_{12} a_{22} = k(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{22}) = k\Delta .$

1–салдар. Анықтауыштың тік (жатық) жолының әр элементіндегі ортақ көбейткішті анықтауыш таңбасының алдына шығаруға болады.

2-салдар. Анықтауыштың екі тік (жатық) жолының сәйкес элементтері пропорционал болса, онда ол нөлге тең болады.

4-қасиет. Анықтауыштың k-ші жатық (тік) жолының элементтері екі қосылғыштан тұрса, яғни $a_{kj} = в_{kj} + c_{kj}, \ j = \overline{1,k}$, онда ол анықтауыш мәні екі анықтауыштың мәндерінің қосындысына тең болады.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & в_{12} \\ a_{21} & в_{22} \end{vmatrix} = \Delta + \Delta_1 .$$

Дәлелдеуі. Шынында

$$\Delta = \begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & b_{12} \\ \grave{a}_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}b_{22} - b_{12}a_{21}.$$

$$\Delta_2 = a_{11}(a_{22}+b_{22}) - (a_{12}+b_{12})a_{21} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}b_{22} - b_{12}a_{21}) = \Delta + \Delta_1.$$

3-салдар. Анықтауыштың кез-келген тік (жатық) жолының барлық элементтерін k санына көбейтіп, екінші бір тік (жатық) жолының сәйкес элементтеріне коссақ, онда оның мәні өзгермейді.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + k\,a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + k\,a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Дәлелдеуі: $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k\,a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + k\,a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + k\,a_{12})a_{22} - a_{12}(a_{21} + k\,a_{22}) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) +$$
$$+ k(a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta.$$

1.3 Минор және алгебралық толықтауыштар

1.4-анықтама. n-ші ретті анықтауыштың a_{ij} элементінің M_{ij} миноры деп, осы анықтауыштың i-ші жатық, j-ші тік жолдарынсыз алынған (n-1)-ші ретті анықтауышты айтады, яғни

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} \;\dots\; a_{1,j-1} & a_{1,j+1} \;\dots\; a_{1n} \\ \dots \;\; \dots \;\; \dots & \dots \;\; \dots \;\; \dots \\ a_{i-1,1} \dots a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} \dots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} \dots a_{i+1,j-1} & a_{j+1,j+1} \dots a_{i+1,n} \\ \dots \;\; \dots \;\; \dots & \dots \;\; \dots \;\; \dots \\ a_{n1}, \dots a_{n,j-1} & a_{n,j+1} \;\dots\; a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1.5-анықтама. Анықтауыштың a_{ij} элементінің A_{ij} алгебралық толықтауышы деп, $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынған осы элементтің минорын айтады, яғни

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

1.1-теорема. Егер Δ анықтауышының j-ші тік (жатық) жолының a_{ij} элементінен өзге барлық элементтері нөлге тең болса, онда Δ анықтауыштың мәні a_{ij} элементі мен оның A_{ij} алгебралық толықтауышының көбейтіндісіне тең болады.

$$\Delta = A_{ij} \cdot a_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Дәлелдеуі. Үшінші ретті анықтауыш үшін

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) == a_{11} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11}.$$

Теорема дәлелденді.

1.2-теорема (анықтауышты тік немесе жатық жолдары арқылы жіктеу).

Анықтауыштың кез-келген тік (жатық) жолдарының элементтері мен оның алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы осы анықтауыштың мәніне тең болады.

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} a_{i\,j}\,A_{i\,j}\,,\ j = \overline{1,n} \quad \left(\Delta = \sum_{j=1}^{m} a_{i\,j}\,A_{i\,j}\,, i = \overline{1,n}\,\right).$$

Дәлелдеуі. Үшінші ретті анықтауышты бірінші тік жолы арқылы жіктейік, сонда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,A_{11} + a_{21}\,A_{21} + a_{31}\,A_{31}\,.$$

Осы теңдікті дәлелдейік

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} = \\ &= a_{11}(\,a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}\,) - a_{21}(\,a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}\,) + a_{31}(\,a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22}\,) = \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{21}\cdot(-1)^{2+1}M_{21} + a_{31}\cdot(-1)^{3+1}M_{31} = a_{11}\,A_{11} + a_{21}\,A_{21} + a_{31}\,A_{31}\,.\end{aligned}$$

Теорема дәлелденді.

1-мысал. $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеу керек.

Шешуі. $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 5 - (-3)\cdot(-2) = 14.$

2-мысал. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеу керек.

Шешуі. Саррюс ережесі бойынша, яғни (1.2) формуланы пайдалансақ, онда

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-6) + 3\cdot 4\cdot 1 + (-1)\cdot(-5)\cdot(-3) - 3\cdot 2\cdot(-3) - 2\cdot(-5)\cdot 1 - (-1)\cdot 4\cdot(-6) = -23.$$

3-мысал. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ анықтауышын екінші баған элементтері арқылы жіктеп есептеу керек.

Шешуі.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot A_{12} + 2\cdot A_{22} + 1\cdot A_{32} =$$

$$= -(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -23.$$

4-мысал. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышының a_{21} элементінің минорын есептеу керек. Шешуі.

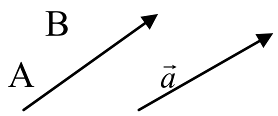
$a_{21} = -5, M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$

2. Векторлық алгебра элементтері
2.1 Негізгі ұғымдар

Кез келген сандар математикада, физикада, механикада және т.б. қолданбалы мамандықтарда екі түрлі шамамен сипатталады. Оң немесе теріс санмен толық сипатталатын шамаларды скаляр шамалар деп, ал сандық мәнімен қоса бағытын да білу қажет шамаларды векторлық шамалар деп атайды. Мысалы, үдеу, жылдамдық, күш– векторлық шамалар болып табылады.

2.1-анықтама. Вектор деп бағытталған кесіндіні айтады.

Берілген вектор үлкен екі латын әріпімен немесе кіші бір латын әріптерімен белгіленеді. Мысалы, $\overrightarrow{AB}$ - вектор, A нүктесі осы вектордың бастапқы нүктесі, ал B - соңғы нүктесі, вектордың бағыты A нүктеден B нүктеге бағытталған.



2.1 Сурет

Берілген $\overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығы: $|\overrightarrow{AB}|$ немесе $|\vec{a}|$ деп белгіленеді.

$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ - нөлдік вектор. $|\vec{e}| = 1$ болса, онда $\vec{e}$ - бірлік вектор.

Үш өлшемді R^3 кеңістігінде декарттық координат жүйесі енгізілсін.

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ - нүктелері берілсе, онда

$\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ немесе $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$;

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ - вектор ұзындығы.

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \{a_x, a_y, a_z\}$ векторының ұзындығы $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$,

$\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ болса, $|\vec{e}| = 1$, $\vec{e}$ - бірлік вектор, $\vec{a} // \vec{e}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}$ - бағыттас векторлар.

$\vec{a}$ векторының координата өстерімен жасайтын бұрыштары α, β, γ болсын

$\alpha = (\vec{a}\,\hat{}\,, OX)$, $\beta = (\vec{a}\,\hat{}\,, OY)$, $\gamma = (\vec{a}\,\hat{}\,, OZ)$.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – $\vec{a}$ векторының бағыттаушы косинустары деп аталады.

$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$, сонда $a_x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $a_y = |\vec{a}|\cos\beta$, $a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$.

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ теңдігі орындалады.

5-мысал. $\vec{a} = \{3 : -3; -4\}$ векторының модулін және бағыттауыш косинустарын табу керек.

Шешуі. $|\vec{a}| = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34}$; $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$; $\cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{34}}$; $\cos\gamma = -\frac{4}{\sqrt{34}}$.

2.2-анықтама. Егер векторлар бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жатса, онда мұндай векторлар коллинеар векторлар деп аталады.

2.3-анықтама. Коллинеар, бағыттас және модульдері бірдей векторларды тең векторлар дейді.

2.4-анықтама. $\vec{a}$ векторына параллель, модулі тең, бірақ бағыты қарама-қарсы вектор қарама-қарсы бағытталған вектор деп аталады. $\vec{a}$ және $-\vec{a}$ -қарама-қарсы векторлар.

2.5-анықтама. Параллель жазықтықтардың немесе бір жазықтықтың бойында жатқан векторларды компланар векторлар дейді.

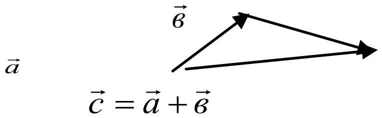
2.2 Векторларға амалдар қолдану

Коллинеар емес $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторлары берілсін:

а) векторларды қосу.

2.6-анықтама. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторлардың қосындысы деп бас нүктесі $\vec{a}$ векторының бас нүктесімен үйлесетін, ал соңғы нүктесі $\vec{в}$ векторының соңғы нүктесімен үйлесетін $\vec{c} = \vec{a} + \vec{в}$ векторын айтады:

1) үшбұрыш ережесі;

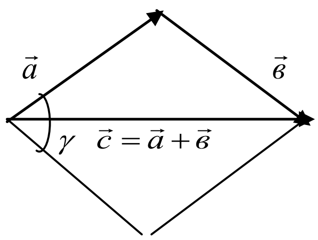


2.2 Сурет

2) параллелограмм ережесі;

вектор ұзындығы косинустар теоремасы бойынша есептеледі:

$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{в}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{в}|\cos\alpha}$, ал бағыты синустар теоремасы бойынша есептелінеді:



$$\frac{|\vec{a}|}{\sin\gamma} = \frac{|\vec{в}|}{\sin\beta} = \frac{|\vec{c}|}{\sin\alpha}.$$

2.3 Сурет

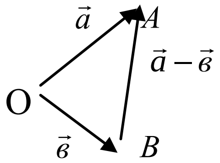
3) $\vec{a} = a_x i + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},\ \vec{в} = в_x \vec{i} + в_y j + в_z \vec{k}$ векторлары берілсін.

Векторларды қосқанда сәйкес координаталары қосылады

$$\vec{a} + \vec{в} = (a_x + в_x)\vec{i} + (a_y + в_y)\vec{j} + (a_z + в_z)\vec{k};$$

ә) векторлардың айырымы.

2.7-анықтама. $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторларының айырымы деп бастапқы нүктесі $\vec{в}$ векторының соңғы нүктесімен үйлесетін, ал соңғы нүктесі $\vec{a}$ векторының соңғы нүктесімен үйлесетін $\vec{c} = \vec{a} - \vec{в}$ векторын айтады.



Векторлардың айырымын қосу амалын пайдаланып та табуға болады

$$\vec{a} - \vec{в} = \vec{a} + (-\vec{в});$$

2.4 Сурет.

б) векторды санға көбейту.

2.8-анықтама. Берілген $\vec{a}$ векторын скаляр λ санына көбейту деп мына үш шартты қанағаттандыратын $\vec{в} = \lambda \vec{a}$ векторын айтады:

1) $|\vec{в}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$;

2) $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторлары коллинеар;

3) егер $\lambda > 0$ болса, онда $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторлары бағыттас, ал $\lambda < 0$ болса, онда олардың бағыттары қарама-қарсы бағыттас болады.

2.3 Векторлардың сызықты тәуелділігі

2.9-анықтама. Берілген $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ векторларының сызықты комбинациясы деп $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_m\vec{a}_m$ өрнегін айтады, мұндағы $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ - кез келген нақты сандар.

2.10-анықтама. Берілген $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ векторлары үшін кемінде біреуі нөлге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ сандары табылып, олардың сызықты комбинациясы нөлге тең болса, онда бұл векторлар сызықты тәуелді деп, қарсы жағдайда сызықты тәуелсіз деп аталады.

2.11-анықтама. Егер $\vec{в}$ векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ векторларының сызықты комбинациясы арқылы өрнектелсе, онда $\vec{в}$ векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ векторлары арқылы жіктелінеді дейді.

Егер $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ векторларының бірі қалған векторлар арқылы жіктелсе, онда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ векторлары сызықты тәуелді векторлар деп аталады.

2.4 Базис

2.12-анықтама. Түзу бойындағы базис деп осы түзу бойындағы кез келген нөл емес векторды айтады.

2.13-анықтама. Жазықтықтағы базис деп осы жазықтықтың кез келген коллинеар емес екі векторын айтады.

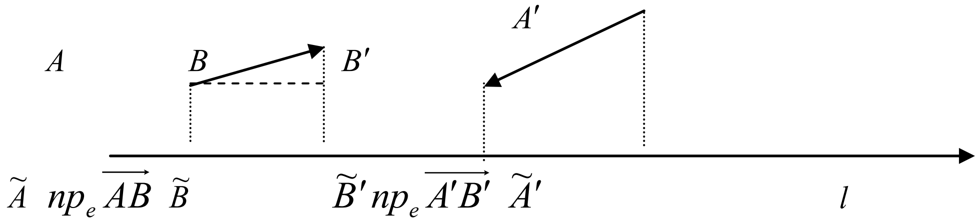
Жазықтықтағы кез келген $\vec{c}$ векторы үшін α мен β нақты сандары табылып, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{в}$ теңдігі орындалса, онда $\vec{c}$ векторы $\vec{a}, \vec{в}$ базисінде жіктелінген деп аталады.

2.14-анықтама. Кеңістікте компланар емес (сызықты тәуелсіз) $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ векторлары базис құрайды.

Кез келген $\vec{d}$ векторы осы векторлардың сызықты комбинациясы болса, яғни α, β, γ нақты сандары табылып, $\vec{d} = \alpha\,\vec{a} + \beta\vec{в} + \gamma\vec{c}$ теңдігі орындалса, онда $\vec{d}$ векторы $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ базисінде жіктеледі дейді.

2.5 Вектордың өске проекциясы

Бізге кеңістікте бағытталған l өсі, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ векторлары берілсін.



$$np_e\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi > 0, \quad онда \quad l\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}.$$

$$np_e\overrightarrow{A'B'} = \left|\overrightarrow{A'B'}\right|\cos\varphi < 0, \; онда \quad l\uparrow\downarrow\overrightarrow{A'B'}.$$

$\vec{a} = \{\, a_x, a_y, a_z \}$ векторы үшін $a_x = np_{ox}\vec{a}, \;\; a_y = np_{oy}\vec{a}, \;\; a_z = np_{oz}\vec{a}$.

Проекцияның негізгі қасиеттері:

а) $np_e\, AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\alpha$, $\alpha = (e\wedge, \overrightarrow{AB})$;

ә) векторды параллель көшіргеннен проекциясы өзгермейді;

б) $np_e \vec{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l \perp \vec{a}$;

в) қосынды проекциясы $\quad np_e(\vec{a} + \vec{в}) = np_e \vec{a} + np_e \vec{в}$;

г) $np_e \lambda \vec{a} = \lambda\; np_e \vec{a}$.

2.6 Векторлардың скаляр көбейтіндісі

2.15-анықтама. Екі $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторларының скаляр көбейтіндісі деп осы векторлардың ұзындықтары мен арасындағы бұрышының косинусының көбейтіндісіне тең скаляр шаманы айтады. $\quad \vec{a} \cdot \vec{в} = (\vec{a}, \vec{в}) = |\vec{a}|\, |\vec{в}| \cos(\vec{a}\wedge, \vec{в})$.

$|\vec{a}| \cos(\vec{a}\wedge, \vec{в}) = np_{\vec{в}} \vec{a}$, $|\vec{в}| \cos(\vec{a}\wedge, \vec{в}) = np_{\vec{a}} \vec{в}$ формулаларын пайдаланып скаляр көбейтіндіні мына түрде жазады $\quad \vec{a} \cdot \vec{в} = |\vec{в}|\; np_{\vec{в}} \vec{a} = |\vec{a}|\; np_{\vec{a}} \vec{в}$.

Егер $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{в} = в_x \vec{i} + в_y \vec{j} + в_z \vec{k}$ берілсе, онда $\vec{a} \cdot \vec{в} = a_x в_x + a_y в_y + a_z в_z$.

Скаляр көбейтіндінің кейбір қасиеттері:

а) орын ауымтырымдылық заңы: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;

ә) терімділік заңы: $(\alpha\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$;

б) үлестірімділік заңы: $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;

в) $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 > 0$, егер $\vec{a} \neq \vec{0}$ (скаляр квадрат деп аталады);

г) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ - болса, онда екі вектордың біреуі нөлдік вектор, немесе олардың арасындағы бұрыш – тік, яғни өзара перпендикуляр.

Скаляр көбейтіндіні физикалық тұрғыдан қарастырайық.

Айталық, материалдық нүктені $\vec{F}$ күші әсерінен $\vec{S}$ жолға жылжыту кезіндегі істелетін жұмыс мөлшерін табайық. Ол үшін берілген $\vec{F}$ және $\vec{S}$ векторларының скаляр көбейтіндісін тапсақ жеткілікті, $(\vec{F}, \vec{S}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos\varphi$,

мұндағы φ - $\vec{F}$ және $\vec{S}$ векторларының арасындағы бұрыш.

Скалярлық көбейтіндінің координаттық түрін пайдаланып, олардың арасындағы бұрыштың косинусын мына формула бойынша табамыз:

$$\cos\varphi = \frac{\grave{a}_X \hat{a}_X + \grave{a}_Y \hat{a}_Y + \grave{a}_Z \hat{a}_Z}{\sqrt{\grave{a}_X^2 + \grave{a}_Y^2 + \grave{a}_Z^2} \cdot \sqrt{\hat{a}_X^2 + \hat{a}_Y^2 + \hat{a}_z^2}}$$

$\vec{a}\{\grave{a}_X, \grave{a}_Y, \grave{a}_Z\}$ векторының модулі: $\qquad |\vec{a}| = \sqrt{\grave{a}_X^2 + \grave{a}_Y^2 + \grave{a}_Z^2}$

Сонымен екі вектордың перпендикулярлық шарты:

$$\grave{a}_X \hat{a}_X + \grave{a}_Y \hat{a}_Y + \grave{a}_Z \hat{a}_Z = 0$$

6-мысал. $\vec{a}$ және $\vec{a}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табу керек**.**

$\vec{a}$ = {1, -5, 12}, $\vec{a}$ = {1, 5, 2}.

Шешуі. $\vec{a}\vec{a}$ = 1·1 + (-5) ·5 + 12·2 = 1 – 25 + 24 = 0.

$\vec{a}$ және $\vec{a}$ векторлары ортогональды.

2.7 Векторлардың векторлық көбейтіндісі

2.16-анықтама. $\vec{a}$ және $\vec{в}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{в} = [\vec{a}, \vec{в}]$ белгіленетін және келесі шарттармен анықталатын векторды айтады:

а) $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{в}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \sin\varphi$, $\varphi = (\vec{a}\wedge, \vec{в})$;

ә) $\vec{c}=[\vec{a},\vec{в}]$ векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$ векторлардың әрқайсысына перпендикуляр;
б) $\vec{c}$ векторы OX, OY өстері OZ өсіне қарағанда қалай бағытталса $\vec{a}, \vec{в}$ векторларына қарағанда солай бағытталған, яғни $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ -оң үштік құрайды.
Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:
а) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{в}|\sin\varphi, \varphi=(\vec{a}\hat{\ },\vec{в})$;
ә) $\vec{a}\times\vec{в}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\,//\,\vec{в}, \vec{a}\times\vec{a}=0$;
б) векторлық көбейту қарсы коммутативті: $[\vec{в},\vec{a}]=-[\vec{a},\vec{в}]$;
в) терімділік заңы: $(\lambda\,\vec{a})\times\vec{в}=\vec{a}\times(\lambda\,\vec{в})=\lambda(\vec{a}\times\vec{в})$;
г) үлестірімділік заңы: $(\vec{a}+\vec{в})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{в}\times\vec{c}, \quad c\times(\vec{a}+\vec{в})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{в}$.

Егер $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}, \ \vec{в}=в_x\vec{i}+в_y j+в_z\vec{k}$ векторлары өз координаталарымен берілсе, онда $\vec{a}$ және $\vec{в}$ векторларының векторлық көбейтіндісі $\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ в_x & в_y & в_z\end{vmatrix}$ формуласымен есептелінеді.

Физикалық тұрғыдан екі вектордың векторлық көбейтіндісі арқылы, А нүктесіне бекітілген дененің В нүктесіне әсер етуші $\vec{F}$ күші әсерінен туатын $\vec{M}$ - айналу моментін есептеуге болатындығын атап өтуге болады - $\vec{M}=[\vec{AB},\vec{F}]$

1-салдар. Ортақ бір нүктеге үйлестірілген коллинеар емес $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторларынан құралған параллелограмм және үшбұрыш аудандары

$$S=|\vec{a}\times\vec{в}|=\sqrt{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ в_y & в_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ в_x & в_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ в_x & в_y\end{vmatrix}^2}\ ;\ S_\nabla=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{в}|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ в_y & в_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ в_x & в_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ в_x & в_y\end{vmatrix}^2}$$

формуласымен табылады.

2-салдар. Егер $\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ в_y & в_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ в_x & в_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ в_x & в_y\end{vmatrix}=0$ немесе $\frac{a_x}{в_x}=\frac{a_y}{в_y}=\frac{a_z}{в_z}$ теңдігі орындалса, онда $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторлары коллинеар болады.

7-мысал. $\bar{a}$ = {3, -4, 2} және $\bar{a}$ = {1, 5, 1} векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек

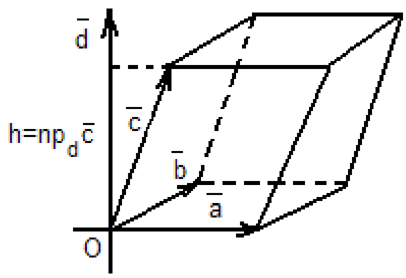
$$[\bar{a}, \bar{a}] = \left\{\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & 5\end{vmatrix}\right\} = \{-14, -1, 19\}.$$

2.8 Үш вектордың аралас көбейтіндісі

2.17-анықтама. $(\vec{a}\times\vec{в},\vec{c})$ санын $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп атап, $\vec{a}\vec{в}\vec{c}$ немесе $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})$ деп белгілейді.

2.1-теорема. Компланар емес $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісінің модулі осы векторлар арқылы тұрғызылған параллелепипед көлеміне тең болады, егер векторлар оң үштік құраса бұл көбейтінді “оң”, ал
теріс үштік құраса «теріс» болады.

$$|(\vec{a}\times\vec{в})\cdot\vec{c}\,|=|\vec{d}\cdot\vec{c}|=|\vec{d}|np_{\vec{d}}\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{в}|\cdot np_{\vec{d}}\vec{c}=$$



$$= \left| \begin{matrix} \vec{d} = \vec{a} \times \vec{в} \\ \left\| \vec{a} \times \vec{в} \right| = S_{таб} \right\| \end{matrix} \right| = S_{таб} \ h = V \ .$$

2.6 Сурет $\vec{V} = \left| (\vec{a} \times \vec{в}) \cdot \vec{c} \right|$, $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ -оң үштік құрайды.

Аралас көбейтіндінің кейбір қасиеттері.

а) көбейткіштердің орнын циклді ауыстырғаннан аралас көбейтінді өзгермейді.
$\vec{a} \times \vec{a} \cdot \vec{n} = \vec{a} \times \vec{n} \cdot \vec{a} = \vec{n} \times \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{n} \cdot \vec{a} \times \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n} \times \vec{a};$

ә) үш вектордың аралас көбейтіндісі нөлге тең болса, онда олар компланар болады.

2.2-теорема. Егер $\vec{a} = a_x i + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{в} = в_x i + в_y \vec{j} + в_z \vec{k}$, $\vec{c} = c_x i + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$, онда аралас көбейтіндісі $(\vec{a} \times \vec{в}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ формуласымен есептелінеді.

1-салдар. Бір нүктеге үйлестірілген компланар емес $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісінің модулінің $1/6$ бөлігі осы векторлар арқылы тұрғызылған пирамида көлеміне тең болады.

2-салдар. Өз координаталарымен берілген $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ векторлары компланар болуы үшін мына теңдіктің $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$ орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

8-мысал**.** $\vec{a}$ = {-3, 2, -1}, $\vec{a}$ = {2, 1, 0}, $\vec{c}$ = {-1, 3, -1} векторларының аралас көбейтіндісін табу керек.

Шешуі. $\vec{a}\vec{в}\vec{c} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$ векторлар компланар.

9-мысал**.** $\vec{a} = \{1,3,1\}$, $\vec{b} = \{-2,4,-1\}$, $\vec{c} = \{2,4,-6\}$ векторларын компланарлыққа тексеру керек.

Шешуі.

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Демек, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары компланарлы емес.

3 Матрица

3.1 Негізгі ұғымдар

3.1-анықтама. m– жатық және n- тік жолдардан құралған тік бұрышты кесте түрінде берілген сандар жиынын $m \times n$ өлшемді матрица дейді, ол былай белгіленеді:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}\,a_{m2}\ldots a_{mn} \end{Vmatrix} \text{ немесе } A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}\,a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix},$$

мұндағы $(a_{ij}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$,- матрицаның элементтері деп аталады, бірінші индекс i - матрицаның жатық жолының, ал екінші индекс j – тік жолының нөмірін анықтайды.

3.2-анықтама. Егер m = n болса, онда ол матрица квадрат матрица деп, ал n матрица реті деп аталады.

Квадрат матрицаның $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ элементтері оның негізгі диагоналы, ал $a_{1n},a_{2n-1},\ldots,a_{n1}$ элементтері қосалқы диагоналы деп аталады.

3.3-анықтама. Квадрат матрица элементтерінен құралған анықтауышты матрица анықтауышы деп атап, $\det A$ немесе $\Delta(A)$ деп белгілейді.

Ескерту. Квадрат емес матрица анықтауышы болмайды, себебі анықтауыштар тек квадратты кесте түрінде беріледі.

3.4-анықтама. Егер $\Delta(A)\neq 0$, онда A матрица ерекше емес матрица деп, ал егер $\Delta(A)=0$ болса, онда ол ерекше матрица деп аталады.

3.5-анықтама. Егер A матрицаның жолдары A^* матрицаның бағандары болып келсе, онда A^* матрицасын A матрицасының транспонирленген матрицасы деп атайды.

3.6-анықтама. Егер квадрат A матрица элементтері үшін $a_{ij}=a_{ji},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$, теңдігі орындалса, онда A матрицасын симметриялы деп, ал $a_{ij}=-a_{ji}$ теңдігі орындалса, онда қиғаш симметриялы деп атайды.

3.7-анықтама. Егер квадрат матрицаның негізгі диагоналының элементтерінен өзге элементтері нөлге тең болса, онда ол матрица диагоналды матрица деп аталады.

3.8-анықтама. Егер диагоналды матрицаның барлық элементтері бірге тең болса, онда ол бірлік матрица деп аталады және ол E символымен белгіленеді.

3.9-анықтама. Егер негізгі диагоналынан төмен орналасқан (жоғары орналасқан) элементтері нөлге тең болса, онда квадратты матрица жоғары (төменгі) үшбұрышты матрица деп аталады.

3.10-анықтама. Егер матрица бір тік (жатық) жолдан анықталса, онда ол матрица тік (жатық) жолды матрица деп аталады.

3.11-анықтама. Бірдей ретті A және B матрицаның сәйкес элементтері тең болса, яғни $a_{ij}=в_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k}$, онда A және B тең матрицалар деп аталады.

3.2 Матрицаларға амалдар қолдану

а) матрицаларды қосу. Бірдей ретті $A=(a_{ij})$ мен $B=(в_{ij})$ матрицала- рының алгебралық қосындысы деп сол ретті $C=(c_{ij})$ матрицасын айтады: $C=A\pm B$ және оның кез келген элементтері мына формуладан анықталады

$$c_{ij}=a_{ij}\pm в_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k};$$

ә) матрицаларды санға көбейту. Кез келген A матрицаның α санына көбейтіндісі деп C матрицаны айтады: $C=\alpha\cdot A$ немесе $C=A\cdot\alpha$ және оның кез келген элементтері мына формуладан анықталады: $c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k}$.

Матрицаны санға көбейткенде мына қасиеттер орындалады:

1) сандар көбейткіштеріне терімділік қасиет $(\alpha\cdot\beta)A=\alpha(\beta A)$;

2) үлестірімділік қасиет $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

3) сандардың қосындысына үлестірімділік қасиет $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

4) $(-1)\cdot A=-A$;

5) $0\cdot A=0$;

6) $A-B=A+(-1)\cdot B$;

б) матрицаны матрицаға көбейту. Берілген $m\times n$- ретті A матрицаның $n\times k$- ретті B матрицаға көбейтіндісі деп, $m\times k$- ретті C матрицаны айтады: $C=A\cdot B$. Ал оның кез келген элементтері $c_{i\,j}$ мына формуладан анықталады

$$\tilde{n}_{i\,j}=\sum_{l=1}^{n}a_{i\,j}\,\hat{a}_{i\,j,}\;\; i=\overline{1,m},\; j=\overline{1,k}.$$

A матрицасын B матрицасына көбейту үшін A матрицасының тік жол саны B матрицасының жатық жол санына тең болуы қажет, басқаша жағдайда көбейту мүмкін емес.

Үшінші ретті A және B квадрат матрицаларының $A\cdot B$ көбейтіндісін қарастырайық:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11}\; a_{12}\; a_{13}\\ a_{21}\; a_{22}\; a_{23}\\ a_{31}\; a_{32}\; a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} в_{11}\; в_{12}\; в_{13}\\ в_{21}\; в_{22}\; в_{23}\\ в_{31}\; в_{32}\; в_{33}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\,в_{11}+a_{12}\,в_{21}+a_{13}\,в_{31} & a_{11}\,в_{12}+a_{12}\,в_{22}+a_{13}\,в_{32} & a_{11}\,в_{13}+a_{12}\,в_{23}+a_{13}\,в_{33}\\ a_{21}\,в_{11}+a_{22}\,в_{21}+a_{23}\,в_{31} & a_{21}\,в_{12}+a_{22}\,в_{22}+a_{23}\,в_{32} & a_{21}\,в_{13}+a_{22}\,в_{23}+a_{23}\,в_{33}\\ a_{31}\,в_{11}+a_{32}\,в_{21}+a_{33}\,в_{31} & a_{31}\,в_{12}+a_{32}\,в_{22}+a_{33}\,в_{32} & a_{31}\,в_{13}+a_{32}\,в_{23}+a_{33}\,в_{33}\end{pmatrix}.$$

Берілген A мен B матрицаларын көбейткенде AB мен BA матрицалары бар болу үшін A мен B матрицалары бірдей ретті квадрат матрица болуы қажетті әрі жеткілікті. AB көбейту орындалғанынан BA көбейтуі бар екені шықпайды. AB мен BA көбейтінділері бар болғанымен де олар өзара тең емес, яғни $AB\neq BA$, жалпы жағдайда матрицалар көбейтінділеріне ауыстырымдылық қасиет орындалмайды. Матрицалардың көбейтінділеріне мына қасиеттер орындалады (егер көбейтулер бар болса):

1) терімділік қасиет $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$;

2) үлестірімділік қасиет $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;

$C(A+B)=CA+CB$;

3) $A\cdot E=E\cdot A=A$.

10-мысал. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\\ 0 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}$ матрицалары берілген. AB = C матрицасын табу керек.

Шешуі. C = AB = $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\\ 0 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0+0+10 & 4+0+3+0\\ 1+9+0+5 & 2+6+6+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 7\\ 15 & 14\end{pmatrix}$.

3.3 Кері матрица

Бізге n-ші ретті A мен B матрицалары берілсін.

3.13-анықтама. Егер A мен B матрицалары үшін AB мен BA көбейтінділері бар және $AB = BA = E$ болса, онда B матрицасын A матрицасының кері матрицасы деп атап, былай белгілейді: $B = A^{-1}$, яғни $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, мұндағы $E - n$-ші ретті бірлік матрица.

3.1-теорема (кері матрицаның бар болуы). Кез келген квадратты A матрицаның кері A^{-1} матрицасы бар болуы үшін матрица ерекше емес $(\Delta(A) \neq 0)$ матрица болуы қажетті әрі жеткілікті және ол мына төмендегі

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}\, A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12}\, A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ A_{1n}\, A_{2n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix}$$

формуласымен анықталады, мұндағы A_{ij} берілген A матрицаның элементтерінің алгебралық толықтауыштары, $\Delta(A)$- берілген A матрицасының анықтауышы.

$\Delta(A) = 0$ жағдайда A матрицасының кері матрицасы жоқ, яғни кері матрицасы болмайды.

11-мысал. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$-матрицасының кері матрицасын табу керек.

Шешуі. Алдымен матрицаның анықтауышын есептейді.

$\Delta = \det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$, олай болса,кері матрица табылады.

Ол мына формуламен анықталады: $\mathrm{A}^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{31} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{32} \\ \mathrm{A}_{13} & \mathrm{A}_{23} & \mathrm{A}_{33} \end{pmatrix}$,

$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6,$ $\qquad \mathrm{A}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6,$

$\mathrm{A}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$ $\qquad \mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$

$\mathrm{A}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$ $\qquad \mathrm{A}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6,$

$\mathrm{A}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$ $\qquad \mathrm{A}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$

$\mathrm{A}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6,$

Олай болса, $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

3.4 Матрица рангысы

Біз $m \times n$-ші ретті A матрицасын қарастырайық.

Берілген $m \times n$-ші ретті матрицадан k ретті $C_m^k \cdot C_n^k$ - минор құруға болады, мұндағы $k \leq n$, $k \leq m$ $\left(C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} \right)$.

Бұл минорлардың кейбіреулері нөлге тең, ал кейбіреулері нөлден өзгеше.

3.14-анықтама. A матрицаның нөлге тең емес минорларының ең жоғарғы реті оның рангісі деп аталады және ол $rang\, A$ немесе $r(A)$ деп белгіленеді.

Сонда, егер матрицаның рангісі r-ге тең болса, онда барлық r-ші ретті минорлардың кем дегенде біреуінің мәні нөлге тең емес, ал r- ден жоғарғы ретті минорлардың барлығының мәні нөлге тең. Берілген матрицаның рангісін табу үшін жоғарыдағыдай барлық минорларды есептемей табу әдістеріне тоқталайық. Матрицаның рангісін табу үшін элементар түрлендірулер, көмкерілген минорлар әдістері қолданады.

Элементар түрлендірулер деп мына түрлендірулерді айтады:

1) матрицаны транспонирлеу, яғни барлық тік жолдарын сәйкес жатық жолдарымен орын ауыстыру;

2) екі тік (жатық) жолдарының орнын ауыстыру;

3) кез келген тік (жатық) жол элементтерін $\lambda \neq 0$ санына көбейту;

4) кез келген тік (жатық) жолының элементтерін $\lambda \neq 0$ санына көбейтіп, келесі кез келген тік (жатық) жолының сәйкес элементтеріне қосу.

Элементар түрлендірулер матрицаның рангісін өзгертпейді. Элементар түрлендіру жасап түгелдей нөлден тұратын тік (жатық) жолы бар матрица алуға болады. Мұндай тік (жатық) жолды алып тастағаннан матрица рангісі өзгермейді. Элементар түрлендіру жасап кез келген матрицаны $\begin{pmatrix} 100\ldots0 \\ 010\ldots0 \\ \cdots\ldots\ldots \\ 000\cdots1 \end{pmatrix}$ диагоналы 1- ден, ал қалған элементтері 0- ден тұратын матрица түріне келтіруге болады. Диагональ бойындағы 1- лер саны матрицаның рангісіне тең болады.

4 Сызықты теңдеулер жүйесі

4.1 Негізгі ұғымдар

n белгісізі бар m сызықты теңдеулер жүйесі берілсін.

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = в_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = в_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ \ldots\ \ldots\ \ \ \ldots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n в_m \end{cases} \qquad (4.1)$$

мұндағы a_{ij} - жүйенің коэффициенттері, нақты сандар,

x_i - белгісіз шамала, $в_i$ - бос мүшелер, $i = \overrightarrow{1,m}$, $j = \overrightarrow{1,k}$.,

a_{ij} - коэффициенттері екі индекспен берілген, бірінші индексі i теңдеу нөмірін, ал екінші индекс j белгісіз нөмірін көрсетеді. $в_i \neq 0$ болса, онда жүйе біртекті емес жүйе деп аталады.

Сызықты теңдеулер жүйесінің коэффициенттерінен анықталған мына матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$ - жүйе матрицасы, $$A'=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n}\, в_1 \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} в_2 \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \dots a_{mn} в_m \end{pmatrix}$$ - жүйенің кеңейтілген матрицасы деп аталады.

4.1-анықтама. Егер $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2,\dots,x_n=\alpha_n$- сандар жиыны (4.1) теңдеулер жүйесіндегі теңдеулердің барлығын қанағаттандырса, онда осы сандар жиыны сызықты теңдеулер жүйесінің шешімі деп аталады.

Егер (4.1) сызықты теңдеулер жүйесінің кем дегенде бір шешімі бар болса, онда ол үйлесімді жүйе, ал егер бірде-бір шешімі болмаса (жоқ болса), онда ол үйлесімсіз жүйе деп аталады. Тек бір ғана шешімі бар жүйе анықталған жүйе деп, ал кем дегенде екі шешімі бар жүйе анықталмаған жүйе деп аталады.

4.2 Крамер ережесі

n белгісізі бар біртекті емес n сызықты теңдеулер жүйесі берілсін

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\dots+a_{1n}\,x_n=в_1, \\ a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\dots+a_{2n}\,x_n=в_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}\,x_1+a_{n2}\,x_2+\dots+a_{nn}\,x_n=в_n. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Берілген жүйенің белгісіздер саны теңдеулер санына тең, жүйенің негізгі матрицасы n жатық, n тік жолдардан тұрады.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

А матрицасының анықтауышы берілген сызықты теңдеулер жүйесінің анықтауышы деп аталады. (4.2) жүйенің анықтауышы нөлге тең болмасын, яғни $\Delta(A)\neq 0$.

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1;k-1}\, a_{1k}\, a_{1,k+1} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2,k-1}\, a_{2k}\, a_{2,k+1} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{n,k-1}\, a_{nk}\, a_{n,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

анықтауышының бірінші тік жолының элементтері x_1 белгісіздің коэффициенттері, ал екінші тік жолының элеметтері x_2 белгісіздің коэффициенттері, т.с.с.

Осы анықтауыштың кез келген тік жолының (мысалы, k-ші тік жолының - x_k белгісізінің коэффициенттерін) элементтерін (4.2) жүйенің сәйкес бос мүшелерімен орын алмастырғанда алынған анықтауышты Δ_k таңбасымен белгілейік

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1;k-1} & в_1 & a_{1,k+1} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2,k-1} & в_2 & a_{2,k+1} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{n,k-1} & в_n & a_{n,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad k=\overrightarrow{1,n}.$$

4.1-теорема (Крамер теоремасы). Егер (4.2) біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесінің негізгі матрицасының анықтауышы нөлге тең болмаса, онда ол анықталған жүйе (үйлесімді жүйе). Бұл жүйенің шешімі Крамер формуласымен анықталады: $x_k = \Delta_k / \Delta(A), k = \overline{1,n}.$

12-мысал. Берілген $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$

теңдеулер жүйесін Крамер тәсілімен шешу керек.

Шешуі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 102 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -10 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 306, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 13 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -10 \end{vmatrix} = -102,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

4.3 Кронекер – Капелли теоремасы

4.2-теорема. Біртекті емес (4.1) сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді болуы үшін жүйенің матрицасының рангісі оның кеңейтілген матрицасының рангісіне тең болуы, яғни $rang\, A = rang\, A'$, қажетті әрі жеткілікті.

Теоремадан мынадай қорытынды аламыз:

а) егер $rang\, A' = r = n$, онда (4.1) жүйенің тек бір ғана шешімі бар;

б) егер $rang\, A = rang\, A' = r < n$ болса, онда (4.1) жүйенің шексіз көп шешімі бар және ол шешімдер r теңдеуден тұратын жүйеден анықталады.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = в_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = в_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (4.3)$$

мұндағы $x_{r+1,} \ldots, x_n$ белгісіздер бос мүшелер, олар кез келген тұрақты сандарды қабылдайды. (4.3) жүйеден анықталған $x_1, x_2, \ldots, x_r$ шешімдері (4.1) жүйенің жалпы шешімі деп аталады.

4.4 Гаусс әдісі

Кез келген квадрат матрицаға элементар түрлендірулер қолданып үшбұрышты матрица аламыз. Берілген жүйені шешу үшін осы жүйенің кеңейтілген матрицасына элементар түрлендірулер жасау арқылы алынған үшбұрышты матрицаға сәйкес жүйені шешсек жеткілікті.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = в_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m \end{cases}$$

n белгісізі бар біртекті емес m сызықты теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешейік.

Айнымалыларды бірте-бірте жоя отырып жүйені өзіне эквивалент баспалдақты түрге келтіреміз.

Баспалдақты түр деп

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = в_1 \\ \qquad\qquad a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = в_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mm}\,x_m + \cdots a_{mn}\,x_n = в_m \end{cases}$$

түрдегі жүйені айтады. Егер $m = n$ болса,онда жүйе үшбұрышты түрге келеді.

Айнымалыларды бірте-бірте жою жүйені элементар түрлендіру арқылы жасалады. Элементар түрлендірулер матрицаның рангісін өзгертпейді.

Оған келесі түрлендірулер жатады:

а) екі теңдеудің орнын алмастыру;

ә) нөлден өзге санға теңдеудің екі жағын да көбейту;

б) кез келген $c \neq 0$ санға көбейтілген бір теңдеудің екі жағын да басқа теңдеуге сәйкесінше қосу.

Егер элементарлық түрлендіру нәтижесінде теңдеудің екі жағында да коэффициенттер нөлге тең болса, онда бұл теңдеуді кез келген айнымалы қанағаттандырады. Бұл теңдеуді алып тастай салуға болады. Ал сол жағындағы коэффициенттер нөлге тең болып, оң жағындағы бос мүше нөлге тең болмаса, онда жүйе үйлесімсіз, оған эквивалент берілген жүйе де үйлесімсіз болады.

Егер жүйе үйлесімді болса, онда шешімдерді табу үшін жүйенің ең соңғы n- ші теңдеуінен x_n белгісізін тауып, оны $n-1$-ші теңдеуге қойып, одан x_{n-1} белгісізді табады. Осылайша, ең соңында бірінші теңдеуден x_1- ді табады.

13-мысал. $\begin{cases} 2\tilde{o}_1 + \tilde{o}_2 - \tilde{o}_3 = 5 \\ \tilde{o}_1 - 2\tilde{o}_2 + 3\tilde{o}_3 = -3 \\ 7\tilde{o}_1 + \tilde{o}_2 - \tilde{o}_3 = 10 \end{cases}$ жүйесін Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешуі. Кеңейтілген матрицасын құрамыз:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \tilde{o}_1 - 2\tilde{o}_2 + 3\tilde{o}_3 = -3 \\ 5\tilde{o}_2 - 7\tilde{o}_3 = 11 \\ -\tilde{o}_3 = -2 \end{cases} \qquad x_1 = 1;\ x_2 = 5;\ x_3 = 2.$$

4.5 Матрица әдісі

n белгісізі бар біртекті емес n сызықты теңдеулер жүйесі берілсін.

$$\begin{cases} a_n\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n = в_1 \\ a_{21}\,x_1 + \cdots + a_{2n}\,x_n = в_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}\,x_1 + \cdots + a_{nn}\,x_n = в_n \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}\,a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ \vdots \\ в_n \end{pmatrix}$$

мұндағы A - жүйе матрицасы, $\Delta(A) \neq 0$, X -белгісіз, $n \times 1$ өлшемді матрица, B - бос мүше, $n \times 1$ өлшемді матрица.

Матрицаларға қолданылатын амалдарға сүйене отырып A мен X матрицалардың көбейтіндісі (бұл көбейтінді анықталған – бар) мына матрицаға тең деп аламыз. Сонда

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n \end{pmatrix}$$

$A\ X$ пен B матрицаларының теңдігінен мына теңдеуді аламыз.

$$A \cdot X = B. \tag{4.4}$$

(4.4) теңдеуі берілген жүйенің матрица түріндегі теңдеуі деп аталады.

Берілген жүйенің матрицасы ерекше емес $(\Delta(A) \neq 0)$матрица, олай болса оның кері матрицасы бар.

Енді (4.4) теңдеуінің шешімін табу үшін осы теңдеуді солдан оңға қарай A матрицасының кері матрицасына көбейтейік $A^{-1}A\ X = A^{-1} \cdot B$, мұндағы $A^{-1} \cdot A = E$ және $E \cdot X = X$. Олай болса

$$X = A^{-1}B$$

болады, мұндағы $A^{-1}B$ - көбейтіндісі бар.

14-мысал. Жүйені матрицалық әдіспен шешу керек. $\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ 2x - y - 5z = -15. \\ 5x + y + 4z = 19 \end{cases}$

Шешуі.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -15 \\ 19 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $\Delta_A = -105$. Кері матрицаны табамыз. A^{-1}:

$A_{11} = 1, A_{12} = -33, A_{13} = 7, A_{21} = -13, A_{22} = 9, A_{23} = 14, A_{31} = -16, A_{32} = 3, A_{33} = -7.$

$$A^{-1} = -\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 1 & -13 & -16 \\ -33 & 9 & 3 \\ 7 & 14 & -7 \end{pmatrix}, A^{-1}B = -\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 1 \cdot 4 - 13(-15) - 16 \cdot 19 \\ -33 \cdot 4 + 9(-15) + 3 \cdot 19 \\ 7 \cdot 4 + 14(-15) - 7 \cdot 19 \end{pmatrix} = -\frac{1}{105}\begin{pmatrix} -105 \\ -210 \\ -315 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

x = 1, y = 2, z = 3.

4.6 Біртекті теңдеулер жүйесі

n белгісізі бар біртекті m теңдеулер жүйесі берілсін.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

немесе $A \cdot X = 0, \quad 0 = (0,0\ldots,0)'$.

(4.5) жүйе үшін $rang\,A = rang\,A'$, Кронекер – Капелли теоремасы бойынша берілген (4.5) біртекті жүйе әрқашанда үйлесімді және оның әрқашанда нөлдік шешімі бар: $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$, ал бізге (4.5) жүйенің нөлдік шешімінен өзге шешімдерін табу керек.

Енді (4.5) жүйенің рангісі r- ге тең болсын деп ұйғарайық: $rang\,A = r$. A матрицасының алғашқы r жатық жолы сызықты тәуелсіз болады.

4.3-теорема. (4.5) біртекті сызықты теңдеулер жүйесінің нөлден өзге шешімдері бар болуы үшін $r < n$ теңсіздігінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

4.4-теорема. n белгісізі бар $m = n$ біртекті сызықты теңдеулер жүйесінің нөлден өзге шешімдері бар болуы үшін жүйенің анықтауышы нөлге тең болуы ($\Delta(A) = 0$) қажетті әрі жеткілікті.

(4.5) жүйенің $x_1, x_2, \ldots, x_r, c_{r+1}, \ldots c_n$ шексіз көп шешімдері болады, мұндағы $c_i = x_i$, $i = \overline{r+1, n}$- кез келген сандар.

4.2-анықтама. Біртекті сызықты (4.5) теңдеулер жүйесінің кез келген $n-r$ сызықты тәуелсіз шешімі осы жүйенің іргелі шешімі деп аталады, мұндағы n- жүйенің белгісіздер саны, r саны A- матрицаның рангісі $rang\,A = r$.

4.3-анықтама. Егер $rang\,A = r < n$ (4.5) жүйенің кез келген X шешімінде $n-r$ тұрақты сан болса, онда ол шешім осы жүйенің жалпы шешімі деп аталады.

5 Аналитикалық геометрия есептері

5.1 Нүктелердің ара қашықтығы. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

Егер кеңістікте тік бұрышты OXYZ координаталар жүйесі берілсе, онда осы жазықтықтың x,y және z координаталары бар М нүктесін – M(x;y;z) деп белгілейді.

$M_1(x_1;y_1;z_1)$ және $M_1(x_2;y_2;z_2)$ нүктелерінің ара қашықтығы d мына формула арқылы анықталады:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$A(x_1;y_1;z_1)$ және $B(x_2;y_2;z_2)$ нүктелерінің арасындағы кесіндіні берілген λ қатынаста бөлетін C(x;y;z) нүктесінің координаталары келесі формулалармен анықталады:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Дербес жағдайда, $\lambda = 1$ болғанда кесіндінің ортасының координаталары:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

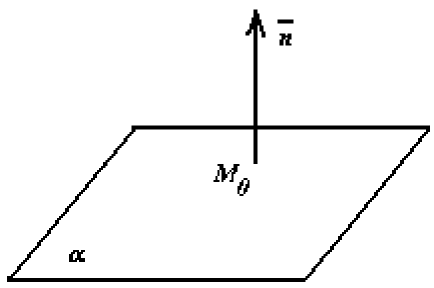
Төбелері $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ нүктелері болып келетін үшбұрыштың ауданы:

$$S = \frac{1}{2}|\Delta|, \quad \text{мұндағы} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

5.2. Жазықтық теңдеуі

5.1-теорема. Кеңістікте декарттық координат жүйесінде берілген кез келген жазықтыққа бірінші дәрежелі теңдеу сәйкес келеді және керісінше бірінші дәрежелі теңдеуге кеңістікте жазықтық сәйкес келеді. Жазықтықтың жалпы теңдеуі

$$\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (5.1)$$



$\bar{n} = \{A; B; C\}$- жазықтықтың нормаль векторы, $\bar{n} \perp \alpha$.

Бізге $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі, $\bar{n} = \{A; B; C\}$ жазықтықтың нормаль векторы берілсе, онда M_0 нүктесі арқылы өтетін

$\bar{n}$ - нормаль векторы болатын жазықтық теңдеуі мына түрде жазылады

5.1 Сурет

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (5.2)$$

Жазықтықтардың өз-ара орналасуы. Екі жазықтық арасындағы бұрыш. Екі жазықтық арасындағы бұрышты олардың нормальдарының арасындағы бұрыш есебінде алуға болады. $\alpha_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \alpha_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ теңдеулерімен α_1,α_2 жазықтықтары берілсін.

$\overline{N_1}=\{A_1,B_1,C_1\}\perp\alpha_1,\quad \overline{N_1}-\alpha_1$ жазықтығының нормаль векторы;

$\overline{N_2}=\{A_2,B_2,C_2\}\perp\alpha_2,\quad \overline{N_2}-\alpha_2$ жазықтығының нормаль векторы.

Жазықтықтардың арасындағы бұрышты θ деп белгілейік. Осы бұрыштың косинусы былай есептелінеді

$$\cos\theta=\frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right|\cdot\left|\overline{N_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (5.3)$$

Егер $\alpha_1 \ // \ \alpha_2 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

«Кесінді» түріндегі жазықтық теңдеуі. Жазықтықтың жалпы теңдеуі $Ax+By+Cz+D=0$ берілсін. Осы теңдеуді түрлендірейік.

$$Ax+By+Cz=-D \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Егер $-\dfrac{D}{A}=a,\ -\dfrac{D}{B}=в,\ -\dfrac{D}{C}=c$ деп белгілесек, онда $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{в}+\dfrac{z}{c}=1. \qquad (5.4)$

Жазықтықтың “кесінді” түріндегі теңдеуін аламыз.

$\overline{N}$ нормаль векторы OX,OY,OZ координат өстерімен сәйкесінше α,β,γ бұрыштарын жасасын, 0 нүктесінен M нүктесіне қарайғы бағытты оң бағыт деп алайық, p OM кесіндісінің ұзындығы $p=|OM|$ болсын.

Бағыттаушы косинустар $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ белгілі деп есептеп жазықтық теңдеуін жазайық. $\forall A(x,y,z)\in\alpha$ нүктесін алайық. $np_{\overline{N}}\overrightarrow{OA}=p$.

$\overrightarrow{OA}=\{x;y;z\};\ \overline{N}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}. \qquad np_{\overline{N}}\overrightarrow{OA}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$.

Осыдан $np_{\overline{N}}\overrightarrow{OA}=p$ екенін ескеріп, $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (5.5)$

жазықтықтың нормаль теңдеуін аламыз.

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесінен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығына дейінгі қашықтық d мына формуламен есептелінеді:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (5.6)$$

Жазықтық теңдеуін құруға арналған негізгі есептер

а) $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесі арқылы өтетін $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\ \bar{в}=\{в_x,в_y,в_z\}$ ($\bar{a}$ мен $\bar{в}$ коллинеар емес векторлар) векторларына параллель α жазықтық теңдеуін жазыңыз.

α жазықтығында жататын кез келген $M(x,y,z)$ нүктесін алайық. $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\},\bar{a},\bar{в}$ - векторлары компланар векторлар. Олай болса $\overrightarrow{M_0M}\cdot\bar{a}\cdot\bar{в}=0$. Осыдан α жазықтығының теңдеуі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \end{vmatrix} = 0; \qquad (5.7)$$

ә) $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ векторына параллель жазықтық теңдеуін жазыңыз.

$M(x, y, z) \in \alpha$. $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$,

$\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \bar{a}$ - компланар векторлар. Олай болса $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \bar{a} = 0$.Осыдан α жазықтығының теңдеуі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0; \qquad (5.8)$$

б) $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңыз. $M(x, y, z) \in \alpha$. Мына векторларды табайық

$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$,

$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$.

$\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ компланар векторлар. $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$. Осыдан α жазықтығының теңдеуі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.9)$$

5.3. Жазықтықтағы түзу теңдеуі

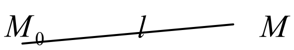
Жазықтықта OXY декарттық координат жүйесі берілсін.

Бірінші ретті екі айнымалы x, y арқылы анықталған кез келген теңдеу түзу сызықты (l) анықтайды.

$$Ax + By + C = 0, \qquad (5.10)$$

мұндағы A, B, C- нақты сандар.

$\vec{N} = \{A, B\}$. l түзуінен $M(x, y)$, $M_0(x_0, y_0)$ нүктелерін алайық. $l \perp \vec{N}$.



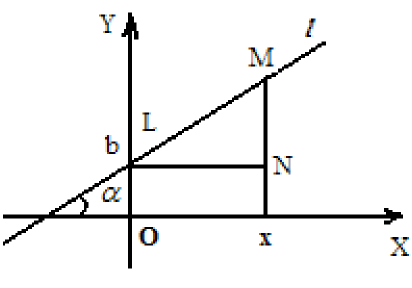
$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$. $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}$, осыдан $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$,

5.2 Сурет

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \qquad (5.11)$$

M_0 нүктесі арқылы өтетін $\vec{N}$ векторына перпендикуляр түзу теңдеуін аламыз.

Бұрыштық коэффициент арқылы берілген түзу теңдеуі. Жазықтықта $M(x, y)$, $N(x, в)$ нүктелері берілсін.



$L(o, в)$ нүктесі арқылы өтетін Ox өсінің оң бағытымен α бұрышын жасайтын l түзуі үшін $tg\,\alpha = \dfrac{y - в}{x} = k$ деп берілсін, онда түзу теңдеуі былай жазылады $y - в = kx$, осыдан $y = kx + в$, мұндағы $k = tg\,\alpha$ - бұрыштық коэффициенті деп аталады, $в$-түзудің $OУ$ өсінен қиып өтетін кесіндісі, x,y- түзу бойындағы М 5.3 Сурет нүктесінің ағымдық координаталары.

Сонымен $y = kx + в$ - түзудің бұрыштық коэффициент арқылы жазылған теңдеуі.

$tg\,\alpha = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = k$, осыдан $y - y_1 = k(x - x_1)$ - $M_1(x_1, y_1)$ нүктесі арқылы өтетін k - бұрыштық коэффициенті болатын түзу теңдеуі.

$\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n}$ - түзудің канондық теңдеуі, мұндағы $\overline{S} = \{m; n\}$- түзудің бағыттаушы векторы деп аталады.

$tg\,\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$, $y - y_1 = k(x - x_1)$ теңдігіне k-ның мәнін қойсақ, онда M_1, M_2 нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуі $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t$ деп белгілесек, онда

$\begin{cases} x = tm + x, \\ y = tn + y_1. \end{cases}$ - түзудің параметрлік теңдеуі, t - параметр.

Екі түзу арасындағы бұрыш.

Бізге $l_1 : y = k_1x + в_1$, $l_2 : k_2x + в_2$ түзулері берілсін.

$tg\varphi = tg(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{tg\varphi_1 - tg\varphi_2}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2}$. Осыдан $tg\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$- екі түзу арасындағы бұрыш тангенсін есептейтін формула.

Егер $l_1 \,//\, l_2$ болса, онда $\alpha = 0;\ k_1 = k_2$- (параллельдік шарты)

Егер $l_1 \perp l_2$ болса, онда $\alpha = \dfrac{\pi}{2}; 1 + k_1k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ (перпендикулярлық шарты).

Егер түзулер теңдеуі жалпы түрде берілсе, яғни

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

а) $l_1 \,//\, l_2$ болса, онда мына шарт орындалады $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$;

ә) $l_1 \perp l_2$ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;

б) $l_1 = l_2$ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

$M_0(x_0, y_0)$ нүктеден түзуге дейінгі арақашықтық мына формуламен есептелінеді $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

15-мысал. A(2,-3), B(-4, 3) нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу керек.

Шешуі. $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ формуласын қолданады. x + y + 1 = 0.

16-мысал. A(2;3) нүктесінен 2x- 3y +4 = 0 түзуіне дейінгі қашықтықты табу керек.

Шешуі. $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, олай болса $d = \dfrac{|4 - 9 + 4|}{\sqrt{4 + 9}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

5.4 Кеңістіктегі түзу теңдеуі

Кеңістікте түзу екі жазықтық қиылысуы арқылы анықталады

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad \alpha_1 \neq \alpha_2 . \tag{5.12}$$

Бұл жазықтықтардың нормаль векторлары $\alpha_1 : \ \overrightarrow{N_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\alpha_2 : \ \overrightarrow{N_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$.

Түзулердің бағыттаушы векторы $\vec{S} \perp \overrightarrow{N_1}$, $\vec{S} \perp \overrightarrow{N_2}$, олай болса $\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \{l; m; n\}$- бағыттаушы вектор.

Түзудің жалпы (5.12) түрдегі теңдеуінен канондық теңдеуіне көшуді қарастырайық.

Бағыттаушы вектор $\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = l\,\vec{i} + m\,\vec{j} + n\vec{k}$ - ға тең болсын.

$z = z_1$ мән беріп, (5.12) жүйеден $x = x_1$, $y = y_1$ табамыз.

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$ - түзудің канондық теңдеуі.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуі

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}; \ \vec{S} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

Түзудің канондық теңдеуін $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n} = t$ параметріне теңестірсек, онда

$\begin{cases} x = l\,t + x_1, \\ y = m\,t + y_1, \\ z = n\,t + z_1 \end{cases}$ түзудің параметрлік теңдеуі шығады.

Екі түзудің өз-ара орналасуы

$\tilde{l}_1 : \dfrac{x - a_1}{l_1} = \dfrac{y - в_1}{m_1} = \dfrac{z - c_1}{n_1}$, $\tilde{l}_2 : \dfrac{x - a_2}{l_2} = \dfrac{y - в_2}{m_2} = \dfrac{z - c_2}{n_2}$ түзулері канондық теңдеулерімен берілсін. $M_1(a_1, в_1, c_1) \in \tilde{l}_1$, $M_2(a_2, в_2, c_2) \in \tilde{l}_2$. $\overrightarrow{S_1} = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\overrightarrow{S_2} = \{l_2, m_2, n_2\}$, $\overrightarrow{S_1} \,//\, \tilde{l}_1$, $\overrightarrow{S_2} \,//\, \tilde{l}_2$, $\alpha = (\tilde{l}_1, \wedge \tilde{l}_2)$, $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{S_2}}{|\overrightarrow{S_1}| \cdot |\overrightarrow{S_2}|} = \dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$.

$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0$ немесе $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$. $l_1 \,//\, l_2 \Rightarrow \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

Түзу мен жазықтыққа арналған есептер

$\dfrac{x - a}{l} = \dfrac{y - в}{m} = \dfrac{z - c}{n}$ түзу және $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығы берілсін.

Анықтама. Түзу мен жазықтық арасындағы сүйір бұрыш деп түзу мен проекциясының арасындағы бұрышты айтады.

Бұл бұрыштың синусы мына формуламен анықталады

$$\sin\alpha = \frac{\overline{N}\cdot\overline{S}}{|\overline{N}|\cdot|\overline{S}|} = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Егер $\tilde{l}\,//(\alpha)$, онда $\overline{N}\cdot\overline{S}=0$. $Al+Bm+Cn=0$, ал $\tilde{l}\perp(\alpha)$ болса, онда $\overline{N}\,//\,\overline{S}$, $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ теңдігі орындалады.

5.5 Екінші ретті қисықтар және беттер

Кез келген қисық жазықтықта $\Phi(x,y)=0$ теңдеуімен беріледі.

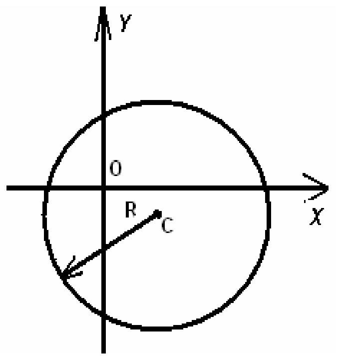
5.1-анықтама. Берілген жүйеде $\Phi(x,y)=0$ теңдеуін тек осы қисық бойында жататын нүктенің координаталары қанағаттандырады, ал қисық бойында жатпайтын нүкте координаталары қанағаттандырмайды.

Декарттық координат жүйесінде екінші ретті қисықтар $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Дx+2Ey+F=0$- жалпы теңдеуімен беріледі.

A,B,C- бірдей нөлге тең емес сандар.

Жазықтықта екінші ретті теңдеумен өрнектелетін қисықтар: шеңбер, эллипс, гипербола, парабола.

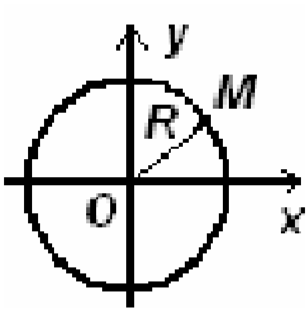
5.2-анықтама. Центр деп аталатын $C(\alpha,\beta)$ нүктесінен бірдей қашықтықта орналасқан нүктелердің геометриялық орнын шеңбер дейді.



5.1 Сурет

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

$C(\alpha;\beta)$ – центрі, R – радиусы



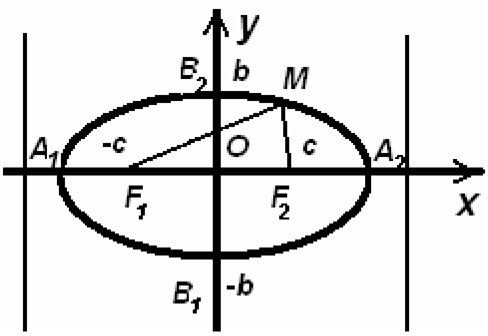
5.2 Сурет

$$x^2+y^2=R^2,$$

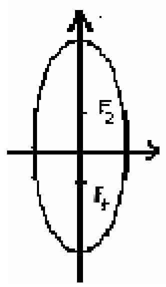
$O(0;0)$ – центрі, R – радиусы

5.3-анықтама. Фокус деп аталатын жазықтықтың $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ екі нүктесінен ара қашықтықтарының қосындысы тұрақты 2a санына тең болатын нүктелердің геометриялық орнын эллипс дейді:

а) $b<a$; ә) $b>a$.



5.3 Сурет

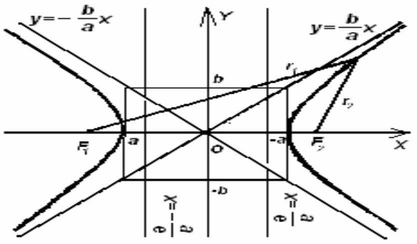


5.4 Сурет

$F_1M + F_2M = 2a, \;\; 2a > 2c \Rightarrow a > c$ үлкен жарты өс, b- кіші жарты өс, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет, $\varepsilon < 1$. $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ - директриса.

5.4-анықтама. Фокус деп аталатын жазықтықтың $F_1(-c,\,0), F(c,\,0)$ екі нүктесінен ара қашықтықтарының айырымы тұрақты 2а санына тең болатын нүктелердің геометриялық орнын гипербола дейді:

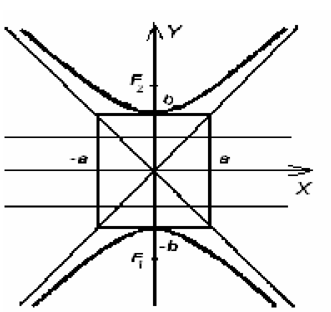
а) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\quad F_1,\, F_2 \in OX$, a, b - жарты өстері;



5.5 Сурет

ә) $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\quad F_1,\, F_2 \in OY$, $F_1(0,-c), F_2(0,c)$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, $\quad y = \pm\dfrac{b}{a}x$ - асимптоталары

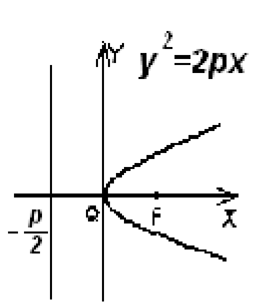
$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет, $\varepsilon > 1$



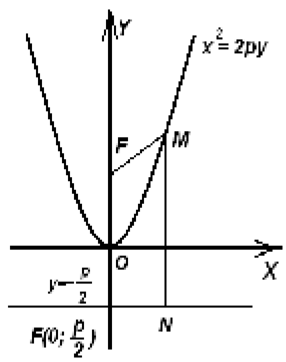
5.6 Сурет

5.5-анықтама. Фокус деп аталатын нүкте мен директриса деп аталатын түзуге дейінгі ара қашықтықтары тең болатын нүктелердің геометриялық орнын парабола дейді:

а) $y^2 = 2px$, $\quad x = -\dfrac{p}{2}$ - директриса; $\qquad$ ә) $x^2 = 2py$, $\quad y = -\dfrac{p}{2}$ - директриса.

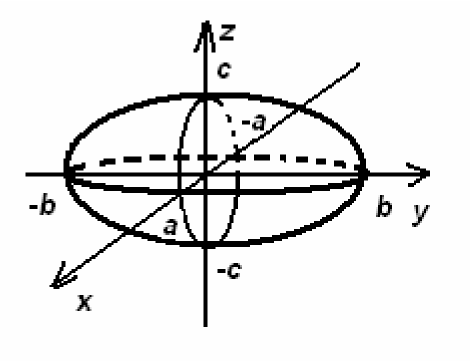


5.7 Сурет



5.8 Сурет

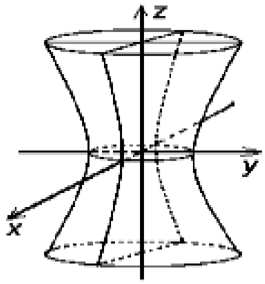
5.6-анықтама. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y_2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ теңдеуімен берілген бетті эллипсоид дейді.



$$\begin{cases} z=h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \end{cases}, \ |h|<c \text{ - эллипс.}$$

5.9 Сурет

5.7-анықтама. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ теңдеуімен берілген бетті бір қуысты гиперболоид дейді.

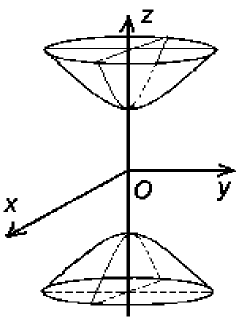


$$\begin{cases} z=0, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases} \text{ - эллипс,} \qquad \begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \text{ - гипербола}$$

$$\begin{cases} z=h, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2} \end{cases} \text{ - эллипс}$$

5.10 Сурет

5.**8-анықтама.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ теңдеуімен берілген бетті екі қуысты гиперболоид дейді.



$$\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \end{cases} \text{ - гипербола,}$$

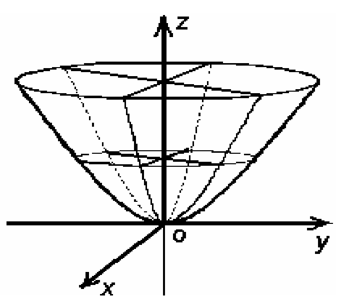
$$\begin{cases} z=h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1 \end{cases}, \ |h|>c \text{ - эллипс,}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \end{cases} \text{ - гипербола.}$$

5.11 Сурет

5.9-анықтама. $2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}$ теңдеуімен берілген бетті эллипстік параболоид дейді.

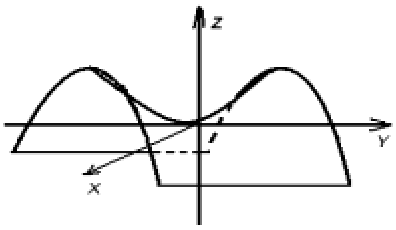
$$\begin{cases} z=h \\ \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h \end{cases} \qquad \frac{x^2}{2hp}+\frac{y^2}{2hq}=1 \text{ - эллипс,}$$



$$\begin{cases} x=0 \\ y^2=2qz \end{cases} \text{ - парабола,} \begin{cases} y=0 \\ x^2=2pz \end{cases} \text{ - парабола.}$$

5.12 Сурет

5.10-анықтама. $2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$ теңдеуімен берілген бетті гиперболалық параболоид дейді.

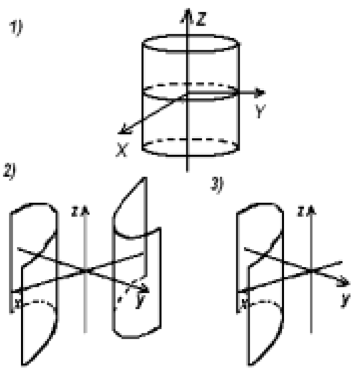


$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = -2qz \end{cases}$ - парабола, $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2pz \end{cases}$ - парабола,

$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}x$ - түзулер

5.13 Сурет

5.11-анықтама: а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллипстік цилиндр:



1) $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm b \end{cases}$ - түзулер;

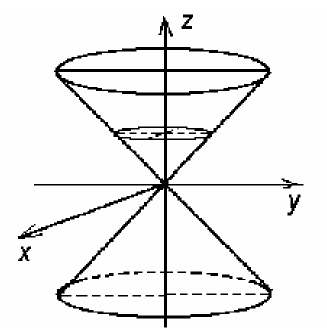
2) $\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm a \end{cases}$ - түзулер;

ә) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболалық цилиндр;

б) $y^2 = 2px$ - параболалық цилиндр.

5.14 Сурет

5.12-анықтама. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ теңдеуімен берілген бетті конус дейді.



$\begin{cases} z = c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ -эллипс.

$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{a} = \pm\frac{z}{c}$ - түзулер. $\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$ - нүкте.

5.15 Сурет

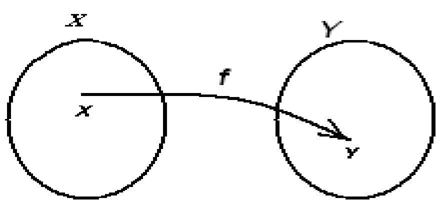
6 Функциялар

6.1 Негізгі ұғымдар

6.1–анықтама. x айнымалысының әрбір мәніне $x \in X$ белгілі бір $y \in У$ мәні сәйкес келсе, онда y-ті x-тің функциясы деп атап, оны $y = f(x), y = \varphi(x)$, т.с.с деп белгілейді, мұндағы x- тәуелсіз айнымалы немесе аргумент деп аталады.

6.2–анықтама. x тәуелсіз айнымалысының қабылдайтын мәндер жиынын анықталу облысы деп, ал y функциясының f сәйкестігі бойынша қабылдайтын мәндер жиынын өзгеру облысы деп атайды.

Сонымен $y = f(x)$ функциясының X- анықталу облысы, $У$- өзгеру облысы, ал f- x тәуелсіз айнымалысы мен y функциясының арасындағы сәйкестік.



6.1 Сурет

6.3–анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы үшін аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келсе, онда функция өспелі, керісінше жағдайда, яғни аргументтің үлкен мәніне функцияның кіші мәні сәйкес келсе, онда кемімелі функция деп аталады.

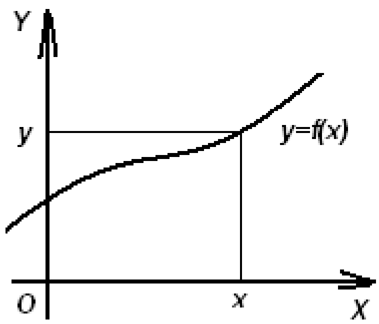
Егер x аргументке бір емес, бірнеше y сәйкес келсе, онда y функциясы көп мәнді функция деп, ал бір мән сәйкес келсе, онда бірмәнді функция деп аталады.

Функцияның берілу тәсілдері.

1. Кестелік берілуі. Бұл әдіс бойынша белгілі бір ретпен x- тің мәндері және оған сәйкес y мәндері жазылады.

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

2. Графиктік берілуі. Сан жиындарының арасындағы қатынасты (тәуелділікті) көрнекі түрде, оның графигін пайдалана отырып көрсетуге болады. Ол үшін жазықтықта барлық (x,y) нүктелерін салу жеткілікті, сонда (x,y) парларының бірінші элементі-x- абсциссалар да, ал екіншілері - y- ординаталар. Осы нүктелер графикпен анықталған функцияны береді.



6.2 Сурет

3. Аналитикалық тәсілмен берілуі. Математикада формула түрінде жазылған екі айнымалы өрнекпен сан функциясының берілуі аса жиі кездеседі.

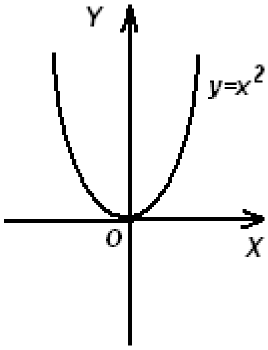
Сандар мен тұрақты, айнымалы арасындағы математикалық амалдар нәтижесінде пайда болған өрнекті функцияның аналитикалық тәсілмен берілуі деп атайды.

Мысалға, $\tilde{o}^4 - 2;\ (l\,g\,x - \sin x)/(5x^2+1);\ 2^x - \sqrt{5+3x}$.

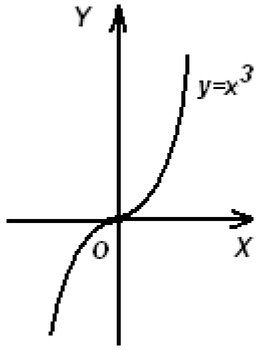
Негізгі элементар функциялар

6.4-анықтама. Негізгі элементар функциялар деп келесі аналитикалық түрде берілген функцияларды айтады.

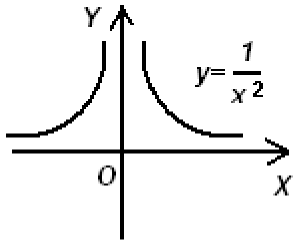
1. Дәрежелік функция $y = x^{\alpha}$, α- нақты сан.



6.3 Сурет

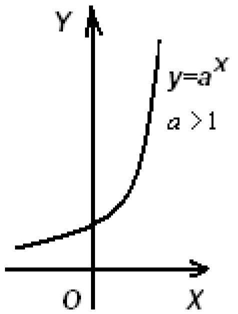


6.4 Сурет

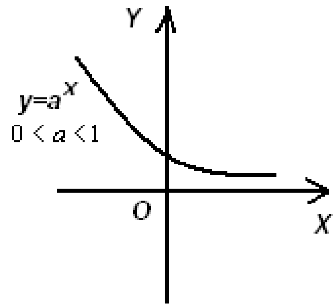


6.5 Сурет

2. Көрсеткіштік функция $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.

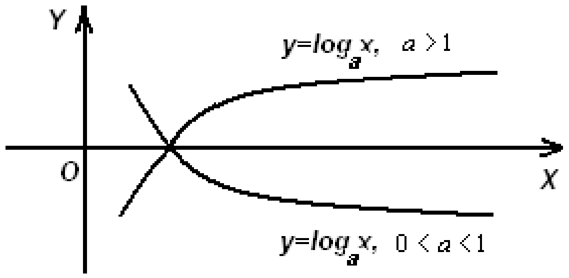


6.6 Сурет



6.7 Сурет

3. Логарифмдік функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0$.



6.8 Сурет

4. Тригонометриялық функциялар

$$y = \sin x;\ y = tg\,x;\ y = ctg\,x;\ y = \sec x;\ y = \cos ec\,x..$$

5. Кері тригонометриялық функциялар

$$y = \arcsin x;\ y = \arccos x;\ y = arctg\,x;\ y = arcctg\,x.$$

6.5–анықтама. Егер қандай да бір T саны табылып $y(x+T) = y(x)$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясын периодты функция дейді. T - периоды.

$y = \sin x,\ y = \cos x,\ T = 2\pi;\ y = tg\,x,\ y = ctg\,x;\ T = \pi$.

6.6–анықтама. Егер $\alpha(-x) = -\alpha(x)$ теңдігі орындалса, онда $\alpha(x)$- тақ функция, ал $\alpha(-x) = \alpha(x)$, онда $\alpha(x)$- жұп функция.

6.7–анықтама. Қандай да бір оң M саны табылып $|f(x)| < M$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$- шектелген функция.

6.8–анықтама. Егер $y = F(u),\ u = \varphi(x)$ болса, онда $y = F[\alpha(x)]$- күрделі функция. $y = \sin u,\ u = x^2 \Rightarrow y = \sin x^2$.

6.9–анықтама. Негізгі элементар функцияларға амалдар қолдану арқылы жасалған функцияны элементар функция дейді.

6.2 Сандық тізбектер және функция шектері

Математикадағы негізгі түсініктің бірі – сан. $N = \{1,2,\ldots\}$- натурал сандар жиыны.

6.10-анықтама. Реттері өсуіне қарай бүтін сандармен нөмірленген сандар жиынын тізбек деп атайды: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ немесе былай белгілейді $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

6.11–анықтама. Егер кез келген оң ε санына сәйкес натурал $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, барлық $n > N(\varepsilon)$ нөмірлері үшін $|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда a саны $\{x_n\}$ тізбегінің шегі деп аталады және былай жазылады: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ немесе $n \to \infty$ жағдайда $x_n \to a$.

6.12-анықтама. Шегі бар болатын тізбек жинақты тізбек деп, ал шегі болмайтын тізбек жинақсыз тізбек деп аталады.

6.1-теорема. Егер тізбек жинақты болса, оның тек бір ғана шегі болады.

6.13–анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін x айнымалысының $|x - a| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын мәндері табылса, онда a санын x айнымалысының шегі деп атайды. $x \to a$ немесе $\lim x = a$ деп жазады.

$a-\varepsilon$ $\qquad\qquad$ a $\qquad\qquad$ $a+\varepsilon$

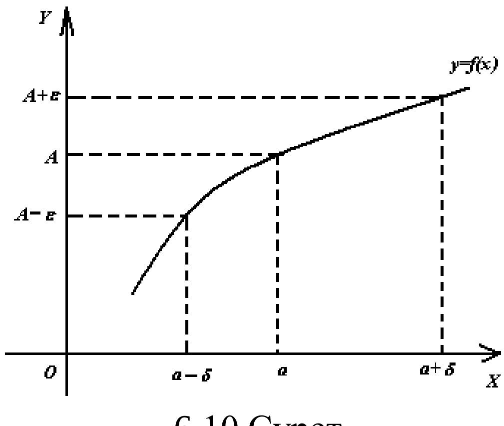
6.9 Сурет

6.14–анықтама. Егер оң M саны табылып, $|x| > M$ болса, онда x- шексіз үлкен айнымалы шама деп аталады.

6.15–анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta > 0$ саны табылып, $0 < |x - a| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A санын f функциясының x- тің a- ға ұмтылғандағы шегі деп атайды және $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ деп жазады.

(символдар арқылы:

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow\ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$



6.10 Сурет

6.3 Шектер туралы теоремалар

6.1–теорема. Екі, үш немесе белгілі бір санға дейінгі айнымалылардың алгебралық қосындысының шегі олардың шектерінің қосындысына тең болады.

$$\lim(\grave{E}_1+\grave{E}_2+\ldots+\grave{E}_n)=\lim\grave{E}_1+\lim\grave{E}_2+\ldots+\lim\grave{E}_n.$$

6.2–теорема. Екі, үш немесе белгілі бір санға дейінгі айнымалылардың көбейтіндісінің шегі олардың шектерінің көбейтіндісіне тең болады.

$$\lim(\textit{И}_1\cdot\textit{И}_2\ldots\textit{И}_n)=\lim\textit{И}_1\cdot\lim\textit{И}_2\cdot\ldots\cdot\lim\textit{И}_n.$$

Салдар. Тұрақтыны шек таңбасының сыртына шығаруға болады.

$$\lim C\textit{И}_1=\lim C\cdot\lim\textit{И}_1=C\lim\textit{И}_1.$$

6.3–теорема. Бөлшектің шегі олардың шектерінің қатынасына тең болады.

$$\lim\frac{\textit{И}}{V}=\frac{\lim\textit{И}}{\lim V},\quad \text{егер}\quad \lim V\neq 0.$$

6.4 Тамаша және бір жақты шектер

Тамаша шектер. Берілген $y=\frac{\sin x}{x}$ функция $x=0$ нүктесінде $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық болғандықтан, оны шешу үшін бірінші тамаша шек қолданылады.

6.4–теорема. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (бірінші тамаша шек).

6.5–теорема. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (екінші тамаша шек)

немесе $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ (екінші тамаша шек).

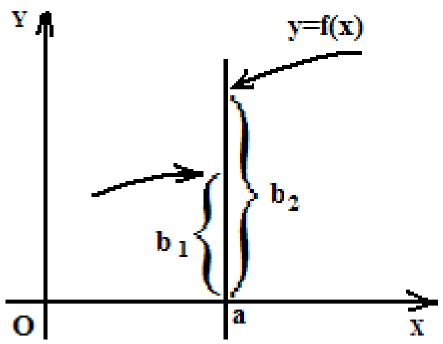
Бұл $\left|1^{\infty}\right|$ түріндегі анықталмағандықты шешу үшін қолданылатын тәсіл.

$y=\log_a x$ функциясында $a=e$ болса, онда $y=\ln x$- натурал логарифм деп аталады. $\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=\lg e\cdot\ln x$, $\lg\ e=M$ - ауысу модулі.

Сонда $\lg x=M\ln x$, $\ln x=\frac{1}{M}\lg x$, $\frac{1}{M}\approx 2{,}302585$.

Бір жақты шектер. Айталық, f функциясы $(c,d]$ жарты интервалында, мүмкін $a\in(c,d]$ нүктесінде де, анықталған дейік.

6.16–анықтама. Егер x айнымалысы a- дан кіші мәндер қабылдап a санына ұмтылғанда $f(x)$ функциясы $в_1$- ге ұмтылса, онда былай белгіленеді: $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=в_1$ және $в_1$- ді $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі сол жақ шегі деп атайды. Егер x айнымалысы a санынан тек үлкен мәндер қабылдап a- ға ұмтылса, онда былай белгіленеді $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=в_2$ және $в_2$- ні $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі оң жақ шегі деп атайды.



6.11 Сурет

6.5 Ақырсыз кішкене және ақырсыз үлкен шамалар

6.16–анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ немесе $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$ болса, онда $\alpha=\alpha(x)$ функциясы ақырсыз кішкене функция деп аталады. (символмен былай белгіленеді: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)\Rightarrow|x-a|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$)

6.6–теорема. Егер $y=f(x)$ функциясын $y=в+\alpha(x),\alpha(x)$- ақырсыз кішкене шама, түрінде жазуға мүмкін болса, онда $\lim y=в(x\to a$ немесе $x\to\infty)$. Керісінше $\lim y=в$ болса, онда $y=в+\alpha$, $\alpha\to 0$ түрінде жазуға болады.

6.7–теорема. Егер $\alpha(x)$ ақырсыз кішкене шама болса, яғни $\alpha(x)\to 0$, онда $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ ақырсыз үлкен шама деп аталады, $\dfrac{1}{\alpha(x)}\to\infty$.

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0,\ \text{онда}\ \lim_{x\to a}\frac{1}{\alpha(x)}=\infty.$$

6.8-теорема. Екі, үш немесе белгілі бір санға дейінгі ақырсыз кішкене шамалардың алгебралық қосындысы да ақырсыз кішкене шама болады.

6.9-теорема. Ақырсыз кішкене шама $\alpha=\alpha(x)$-тің шектелген $z=z(x)$ функциясына көбейтіндісі де ақырсыз кішкене шама болады (символ арқылы $\forall\varepsilon>0\ \exists M,\delta>0,|z|<M,\ |x-a|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)\cdot z(x)|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\alpha\cdot z=0$).

6.10-теорема. Ақырсыз кішкене шама $\alpha(x)$-тің $z(x)$, $\lim\limits_{x\to a}z(x)\neq 0$ функциясына қатынасы $\dfrac{\alpha(x)}{z(x)}$ да ақырсыз кішкене шама болады.

6.6 Ақырсыз кішкене шамаларды салыстыру

$\alpha,\beta,\gamma,\ldots$- ақырсыз кішкене шамалар болсын.

6.17–анықтама. Егер $\dfrac{\beta}{\alpha}$ қатынасының шегі ақырлы және нөлге тең емес болса, яғни $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=A\neq 0$ болса, онда ақырсыз кішкене α және β шамалары бірдей өлшемді ақырсыз кішкене шамалар деп аталады.

6.18–анықтама. Егер екі ақырсыз кішкене шамалардың қатынасы $\dfrac{\beta}{\alpha}\to 0$, яғни $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$ $(\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty)$ болса, онда β ақырсыз кішкене шамасы α- ға қарағанда жоғарғы ретті ақырсыз кішкене шама деп аталады.

6.19–анықтама. Егер $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=A\neq 0$ болса, онда β ақырсыз кішкене шама мен α^k ақырсыз кішкене шамалары бірдей өлшемді ақырсыз кішкене шамалар деп аталады.

6.20–анықтама. Егер $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$ болса, онда α және β эквивалент ақырсыз кішкене шамалар деп аталады.

6.11–теорема. Егер α мен β эквивалент ақырсыз кішкене шамалар болса, онда олардың айырымы $\alpha-\beta$ α мен β- ға қарағанда жоғарғы ретті ақырсыз кішкене шамалар болады.

6.12–теорема. Егер $\alpha-\beta$ айырымы α мен β- ға қарағанда жоғарғы ретті ақырсыз кішкене шама болса, онда α және β эквивалент ақырсыз кішкене шамалар болады.

Ескерту. Егер $\lim\frac{\beta}{\alpha}$- шегі жоқ болса және шексіздікке ұмтылса, онда α мен β салыстырылмайды дейді.

6.7 Эквивалент ақырсыз кішкене шамалар. Оларды шекті есептеуде қолдану

Егер $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$ болса, онда α және β эквивалент ақырсыз кішкене шамалар деп аталады. $(\alpha\approx\beta)$

$\alpha(x)$ функциясы $x\to a$ ақырсыз кішкене шама $\left(\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0\right)$ болсын.

Эквивалент ақырсыз кішкене шамаларды қарастырайық.

1. $\sin\alpha(x)\approx\alpha(x)$.

2. $tg\,\alpha(x)\approx\alpha(x)$.

3. $\arcsin\alpha(x)\approx\alpha(x)$.

4. $arctg\,\alpha(x)\approx\alpha(x)$.

5. $\log_a(1+\alpha(x))\approx\frac{\alpha(x)}{\ln a}$.

6. $\ln(1+\alpha(x))\approx\alpha(x)$.

7. $1-\cos\alpha(x)\approx\frac{(\alpha(x))^2}{2}$.

8. $a^{\alpha(x)}-1\approx a(x)\ln a$.

9. $e^{\alpha(x)}-1\approx\alpha(x)$.

10. $(1+\alpha(x))^a-1\approx a\cdot\alpha(x)$.

11. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\approx\frac{\alpha(x)}{n}$.

12. $(1+\alpha(x))^{1/\beta(x)}\approx e^{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}}$.

Эквивалент ақырсыз кішкене шамаларды пайдаланып шекті табады.

17-мысал. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{x}=5$.

18-мысал. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin3x}{\ln(1+7x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{7x}=\frac{3}{7}$.

19-мысал. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{e^x-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{(3x)^2}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{9x}{2}=0$.

20-мысал. $\lim\limits_{x\to a}[U(x)]^{V(x)}=\left|\begin{matrix}U(x)\to1\\1^{\infty}\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to a}e^{(U(x)-1)V(x)}$.

6.8 Функцияның нүктедегі және аралықтағы үзіліссіздігі

$y=f(x)$ функциясы берілсін. $x_0\in X$ - анықталу облысы болсын.

6.21–анықтама. Егер

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \qquad (6.1)$$

болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз функция деп аталады.

$x_0=\lim\limits_{x\to x_0}x$ болғандықтан $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$, яғни үзіліссіз функция үшін шекке көшкенде "lim" символы мен функция сипаттамасы "f" символының орындарын алмастырып жаза беруге болады.

Егер (6.1) теңдікте $f(x_0)$ санын теңдіктің сол жағына көшіріп және одан шек алатын болсақ, сонымен бірге $x \to x_0$ және $x - x_0 \to 0$ шарттарының мәндестігін ескерсек, онда

$$\lim_{x-x_0 \to 0} \left[f(x) - f(x_0) \right] = 0 \qquad (6.2)$$

$x - x_0$ айырмасын аргумент өсімшесі деп атап, $x - x_0 = \Delta x$ деп белгілейік. Сонда $x = x_0 + \Delta x$, ал $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$- функцияның x_0 нүктесіндегі сәйкес өсімшесі.

Сонда (6.2) теңдік мына түрде жазылады:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0 . \qquad (6.3)$$

Бұдан нүктедегі үзіліссіз функция үшін аргументтің ақырсыз кішкене өсімшесіне функцияның сол нүктеде ақырсыз кішкене өсімшесі сәйкес келетіндігі шығады.

Бірінші анықтама мынадай үш шарттың орындалуымен мәндес деп саналады:

а) x_0 нүктесі өзінің қандай да бір маңайымен қоса X анықталу облысына тиісті болады;

ә) x_0 нүктесінде функцияның бір жақты шектері бар болады және олар өзара тең, яғни

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x); \qquad (6.4)$$

б) функциясының бір жақты шектері оның осы x_0 нүктесіндегі мәніне

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \qquad (6.5)$$

тең болады.

6.22–анықтама. Егер

$$\lim_{\delta \to \delta_0 - 0} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right) \qquad (6.6)$$

теңдігі орындалса, онда f функциясы x_0 нүктесінде сол (оң) жақты үзіліссіз функция деп аталады.

6.23–анықтама. Егер f функциясы қандай да бір аралықтың әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол сол аралықта үзіліссіз функция деп аталады.

6.24-анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін оған тәуелді $\delta > 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесінде f функциясы үзіліссіз деп аталады (символдар арқылы $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad x_0$ нүктесінде f - үзіліссіз).

6.13–теорема. Егер $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы нүктеде мына функциялар да $f_1(x) \pm f_2(x), f_1(x) \cdot f_2(x), \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}, f_2(x) \neq 0$ үзіліссіз болады.

6.14–теорема. Егер $u = u(x)$ функциясы $x = x_0$ нүктесінде үзіліссіз болып, ал $f(M)$ функциясы $u_0 = u(x_0)$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f[u(x)]$ күрделі функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болады.

6.15–теорема. Кез келген элементар функция анықталу облысының әрбір нүктесінде үзіліссіз болады.

6.9 Кесіндіде үзіліссіз болатын функциялардың қасиеттері

6.16–теорема (үзіліссіз функцияның кез келген аралық мәнді қабылдауы туралы Коши теоремасы). Егер f функциясы $[a,в]$ кесіндісінде үзіліссіз болып және $f(a) = \alpha$, $f(в) = \beta$ теңдіктері орындалса, онда α мен β сандарының арасында орналасқан кез келген γ саны үшін a мен $в$ нүктелерінің арасынан ең болмаса бір c нүктесі табылып, $f(c) = \gamma$ теңдігі орындалады.

Салдар (үзіліссіз функциясының нөлдік мән қабылдауы туралы). Егер f функциясы $[a,в]$ кесіндісінде үзіліссіз болып, кесіндінің ұштарында таңбалары әр түрлі мәндер қабылдаса (яғни $f(a) \cdot f(в) < 0$), онда a мен $в$ нүктелерінің арасынан ең болмаса бір c нүктесі табылып, ол нүктеде f функциясы нөл мәнін қабылдайды.

6.17–теорема (үзіліссіз функциясының шектелгендігі туралы). Егер f функциясы $[a,в]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда кесіндіде ол шектелген функция болады.

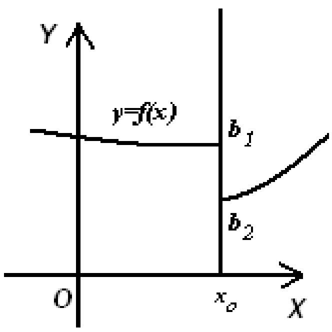
6.18–теорема (экстремал мәндерге жету туралы). Егер f функциясы $[a,в]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, ол осы кесіндіде өзінің дәл жоғары және дәл төменгі шекарасын қабылдайды.

6.10 Үзіліс нүктелері және оларды классификациялау

6.25–анықтама. Функцияның үзіліссіздік қасиеті орындалмайтын нүктелері осы функцияның үзіліс нүктелері деп аталады.

Функцияның әрбір үзіліс нүктесінде оның үзіліссіздігінің кемінде бір шарты бұзылады. Осы шарттардың бірі болмаса бірі орындалмауына қарай үзіліс нүктелері былайша классификацияға бөлінеді:

а) бірінші текті үзіліс. Егер x_0 нүктесінде f функциясының сол жақты және оң жақты шектері бар болып, бірақ олар бір-біріне тең болмаса, немесе олар бір-біріне тең, бірақ олар x_0 нүктесіндегі функцияның мәніне тең емес, немесе $f(x_0)$ анықталмаған болса, онда x_0 нүктесі f функциясының бірінші текті үзіліс нүктесі деп аталады.

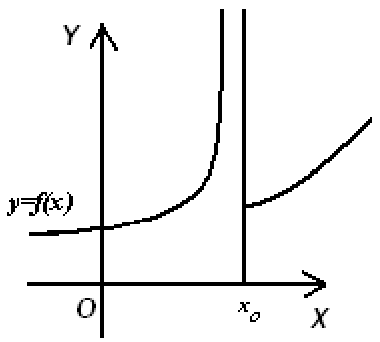


6.12 Сурет

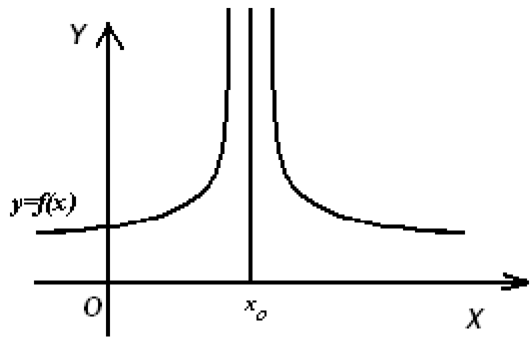
$$f(x_0 - 0) = в_1,\ f(x_0 + 0) = в_2,\ f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = в_2 - в_1 < \infty.$$

$в_1 \neq в_2$ x_0 нүктесінде 1- ші текті үзіліс;

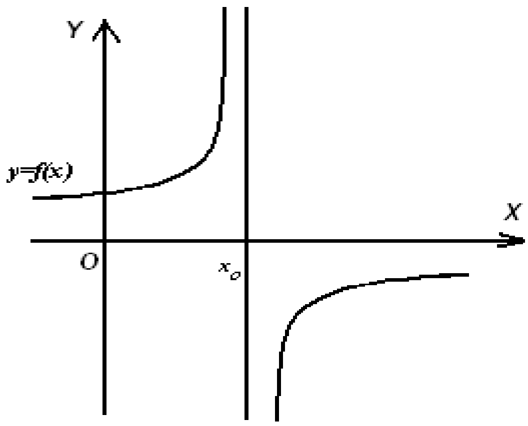
ә) екінші текті үзіліс. Егер x_0 нүктесінде алынған f функциясының бір жақты шектерінің кемінде бірі шексіз болып, не тіпті ол болмаса, онда сол x_0 нүктесі f функциясының екінші текті үзіліс нүктесі деп аталады.



6.13 Сурет



6.14 Сурет



6.15 Сурет

6.26–анықтама. Егер f функциясы бүкіл $[a,в]$ кесіндісінде анықталған болып және де кесіндінің, мүмкін бірінші текті үзіліс болатын саны шектеулі нүктелерден басқа барлық ішкі нүктелерінде үзіліссіз болса, мұнымен қоса a нүктесінде оң жақты үзіліссіз, ал $в$ нүктесінде сол жақты үзіліссіз болса, онда f функциясы $[a,в]$ кесіндісінде үздікті үзіліссіз функция деп аталады.

dy -ті табайық.

$y=f(x)$ функциясы $[a,в]$ кесіндісінде, ал $x=\varphi(t)$ функциясы $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде анықталған болсын. Онда күрделі функцияның дифференциалы

7 Функция туындысы

7.1 Функция туындысының анықтамасы

$y=f(x)$ функциясы $(a,в)$ интервалында анықталған болсын. Осы интервалдан $x_0+\Delta x$ нүктесі шықпайтындай етіп, x_0 аргументіне $\Delta x\neq 0$ өсімшесін берейік. Сонда $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі сәйкес өсімшесі

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

болады.

7.1–анықтама. $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы деп Δx нөлге ұмтылғанда функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының шегін айтады.
$y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысын $f'(x_0)$ немесе $y'(x_0)$ деп белгілейді

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (7.1)$$

Егер $y=f(x)$ функциясының $(a,в)$ интервалдың әрбір x нүктесінде туындысы бар болса, онда ол туынды x аргументінің функциясы болып табылады және оны

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

деп белгілейді.

Туынды табу амалы функцияны дифференциалдау деп аталады. Сонымен, функция туындысын табу үшін:

а) аргумент x-ке Δx өсімшесін береді;

ә) осыған сәйкес Δy функция өсімшесін табады;

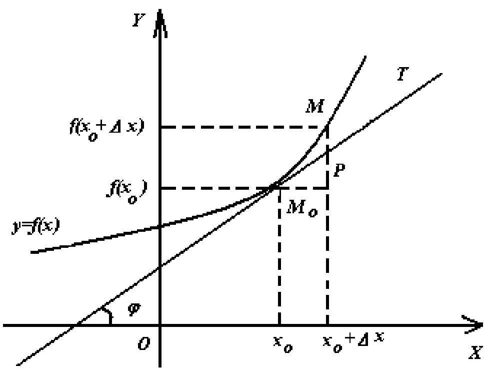
б) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынасын табады;

в) осы қатынастың $\Delta x\to 0$ шегін табады.

7.2 Туындының геометриялық және механикалық мағынасы

а) туындының геометриялық мағынасы. Алдымен қисық сызыққа жүргізілген жанаманың анықтамасын келтірейік.

$(a,в)$ интервалында анықталған және үзіліссіз $y=f(x)$ функциясының графигін қарастырайық.



$(a,в)$ $x_0\in(a,в)$, Δx- өсімше. $M_0(x_0\, f(x_0))$, $M(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$

7.2-анықтама. $y=f(x)$ қисығына M_0 нүктесінде жүргізілген жанама деп графиктің M нүктесі оның M_0 нүктесіне ұмтылғандағы ($\Delta x\to 0$) қиюшысының шектік орны (егер ол бар болса) M_0T түзуін атайды.

7.1 Сурет

Егер $f'(x_0)$ туындысы бар болса, онда $y=f(x)$ қисығы графигінің $M_0(x_0, f(x_0))$ нүктесінде M_0T жанамасын жүргізуге болады. Сонда $\Delta x\to 0$ жағдайда

$$M_0M\to M_0T \Rightarrow \varphi\to\varphi_0 \Rightarrow tg\,\varphi\to tg\,\varphi_0,$$

мұндағы φ мен φ_0 сәйкесінше OX өсімен (M_0M) қиюшысы және (M_0T) жанамасы жасайтын бұрыштар.

$$tg\,\varphi=\frac{MP}{M_0P}, \qquad MP=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x_0), \qquad M_0P=\Delta x.$$

$\Delta x\to 0$ $tg\,\varphi=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$ $\qquad \varphi\to\varphi_0$ болғандықтан

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} tg\,\varphi=tg\lim_{\Delta x\to 0}\varphi=tg\,\varphi_0=k$$

$y = f(x)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі жанамасының теңдеуі

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

болады, мұндағы $y_0 = y(x_0)$.

Егер осы жанамаға (x_0, y_0) нүктесінде перпендикуляр жүргізсек, онда осы түзуді нормаль түзу деп атайды және оның теңдеуі

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$$

болады.

ә) туындының механикалық мағынасы

$S = f(t)$ функциясының M материалдық нүктесінің түзу бойымен қозғалысының заңдылығын өрнектейтін болсақ, яғни S жолы t уақыт аралығындағы O нүктесінен M нүктесіне дейінгі жүрген жол.

$[t, t+\Delta t]$ аралығында жүрген жолы $\Delta S = f(t+\Delta t) - f(t)$ болса,

онда осы аралықтағы орташа жылдамдығы $V_{op} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$,

ал t уақыт аралығындағы лездік жылдамдығы $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = f'(t)$.

7.3 Дифференциалдаудың негізгі ережелері

Егер $u = u(x)$, $v = v(x)$ функцияларының x нүктесінде шенелген туындылары бар болса,онда

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

дербес жағдайда $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c}{v^2}v'$,

мұндағы $c = const$.

7.1-теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын функция болса, онда сол нүктеде функция үзіліссіз болады.

7.2-теорема. Егер $u = u(x)$ функциясының x нүктесінде туындысы бар және $y = F(u)$ функциясының сәйкес u нүктесінде туындысы бар болса, онда $y = F(u(x))$ күрделі функциясының x нүктесіндегі туынды бар және ол

$$\left[f(u(x))\right]' = f'(u)\cdot u'(x)$$

формуламен анықталады.

Дербес жағдайда $u = kx + b$, $y = f(kx+b)$ болса, онда $y' = kF'(u)$ болады.

7.3-теорема. Егер $y = f(x)$ функциясының x нүктесінде нөлге тең емес $y' = f'(x) \neq 0$ туындысы бар болса, онда сол x-ке сәйкес $y_0 = f(x_0)$ нүктесінде оған кері $x = \varphi(y)$ функциясының туындысы бар болады және ол

$$x'_y = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

тең болады.

7.4 Негізгі элементар функциялардың туындылары

1. $c' = 0$	8. $(ctg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	15. $(arctg\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
2. $x' = 1$	9. $(a^x)' = a^x \ell na$	16. $(arcctg\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
3. $(x^n)' = n\,x^{n-1}$	10. $(e^x)' = e^x$	17. $(sh\,x)' = ch\,x$
4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	11. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ell na}$	18. $(ch\,x)' = sh\,x$
5. $(\sin x)' = \cos x$	12. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	19. $(th\,x)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$
6. $(\cos x)' = -\sin x$	13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	20. $(cth\,x)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$
7. $(tg\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

Осы кестеден кейбір формулаларды дәлелдейік. Мысалға:

а) $y = a^x$, $a \neq 1, a > 0$.

Егер x-тің өсімшесі Δx болса, онда

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\,(a^{\Delta x} - 1).$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ell na$$

яғни $(a^x)' = a^x \ell na.$

Дербес жағдайда: $y = e^x$, $y' = e^x$;

ә) $y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$.

Логарифмдік функция көрсеткіштік $y = a^x$ функциясына кері функция болғандықтан, кері функция туындысының формуласын қолдансақ, мына теңдік орындалады

$$y'_x = (\log_a x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Сонымен $y = \log_a x$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ell na}.$

7.5 Логарифмдік туынды

а) $y = f(x) > 0$ функциясы берілсін. Бұл функцияның екі жағын да логарифмдеп, соңынан туынды аламыз.

$$\ln y = \ln f(x) \Rightarrow (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = f'(x) = f(x)\left[\ln f(x)\right]';$$

ә) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функциясы берілсін. Осы теңдіктің екі жағын да логарифмдесек, онда $\ln y = x \ln a$ теңдігін аламыз. Екі жағын да дифференциалдасақ

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a \Rightarrow y' = y \ln a \Rightarrow y' = a^x \ln a$$

көрсеткіштік функция туындысы шығады;

б) $F(x) = \left[U(x)\right]^{V(x)}$, $U(x) > 0$ функциясынан туынды алайық. Берілген функцияның екі жағын да логарифмдейік.

$$\ln F(x) = V(x) \cdot \ln U(x) \Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = V'(x) \cdot \ln U(x) + V(x) \cdot \frac{U'(x)}{U(x)}.$$

Сонда

$$\left(\left[U(x)\right]^{V(x)}\right)' = \left[U(x)\right]^{V(x)} \cdot \left[V'(x) \cdot \ln U(x) + V(x) \cdot \frac{U'(x)}{U(x)}\right].$$

Ескерту: $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$ туындысын логарифмдік туынды дейді, мұндағы $y = y(x)$.

7.6 Айқын емес және параметрлік түрде берілген функция туындылары

Егер y пен x айнымалылары арасындағы тәуелділік $F(x, y) = 0$ теңдеуімен айқын емес түрде берілсе, онда y'_x туындысын табу үшін теңдеудің екі жағын, y- ті x- тің функциясы деп алып, дифференциалдау керек. Содан соң шыққан теңдеуден y'_x туындысын табу керек.

Егер $F(x, y) = x^2 + y^2 = 4$ болса, онда туындысы тең болады

$$2x + 2y\,y' = 0, \quad \text{осыдан} \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

y- тің x- ке тәуелділігі t параметрі арқылы $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [a, в] \end{cases}$

түрінде берілсін және $\varphi(t), \psi(t)$ функцияларының туындылары бар болсын.

7.6-теорема. Егер $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ туындылары бар және $\varphi(t) \neq 0$ болса, онда $y = f(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданады және $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, $x'_t \neq 0$ теңдігі орындалады.

21-мысал. $y = \sin x^2$, $\qquad y' = \cos x^2 \cdot \left(x^2\right)' = 2x \cos x^2.$

22-мысал. $y = \left(x + \frac{2}{x}\right)^{100}$, $\qquad y' = 100\left(x + \frac{2}{x}\right)^{99} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right)' = 100\left(x + \frac{2}{x}\right)^{99} \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2}\right).$

23-мысал. $y=\ln^3(x+3)$, $y'=3\cdot\ln^2(x+3)\cdot(\ln(x+3))'=\dfrac{3\ln^2(x+3)}{x+3}$.

7.7 Дифференциал және оның қолданылуы

7.3-анықтама. Егер f функциясының x нүктесіндегі Δy өсімшесін

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \underset{\Delta x\to 0}{0}(\Delta x) \qquad (7.2)$$

(A шамасы Δx- ке тәуелді емес, бірақ x- ке тәуелді) түрінде өрнектеуге болатын болса, онда оны осы x нүктесінде дифференциалданатын функция деп атайды. Бұл теңдіктегі $0(\Delta x)$ шамасы $\Delta x\to 0$ ұмтылғанда Δx- ке салыстырғанда жоғары ретті ақырсыз кішкене шама, яғни

$$\frac{0(\Delta x)}{\Delta x}\to 0,\ \Delta x\to 0.$$

(7.2) теңдіктегі бірінші қосылғыш Δx- ке пропорционал және оған сызықты тәуелді, ал екінші $0(\Delta x)$ қосылғыш Δx- ке салыстырғанда жоғары ретті ақырсыз кішкене. Осыған байланысты $A\Delta x = f'(x)\Delta x$ шамасын $\Delta x\to 0$ ұмтылғанда функция өсімшесінің басты мүшесі дейді және ол функцияның x нүктесіндегі дифференциалы немесе бірінші дифференциалы деп аталады да $dy, df(x)$ символдарының бірімен белгіленеді: $dy = df(x) = f'(x)\Delta x$.

$y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіне Δx өсімше берген кездегі дифференциалының геометриялық мағынасы – функция графигіне $M_0(x_0, f(x_0))$ нүктесіне жүргізілген жанаманың ординатасы болып табылады, ал функция өсімшесі Δy- функция ординатасы, яғни

$$dy = f'(x_0)dx,\ \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$

Егер $f(x)$ және $g(x)$ дифференциалданатын функциялар деп болжайтын болсақ, онда мына формулаларды жазуға болады

а) $d(af(x)+bg(x)) = a\cdot d\,f(x) + b\cdot d\,g(x)$;

ә) $d(f(x)\cdot g(x)) = d\,f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot d\,g(x)$;

б) $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{d\,f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot d\,g(x)}{g^2(x)},\ g(x)\neq 0$

теңдіктері орындалады.

Функция дифференциалы функция мәнін жуықтап есептеуде жиі қолданылады. Ол үшін дифференциалдың анықтамасы бойынша

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x = dy$$

теңдігінен $\qquad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

теңдігін алып, кез келген функцияның x нүктесіндегі мәнін жуықтап есептеуге болады.

Бірінші ретті дифференциал инвариантты, яғни сыртқы түрін сақтайды. $y=f(x)$ функциясының бірінші ретті дифференциалы $dy=f'(x)dx$ болса, $y=f[\varphi(t)]$ күрделі функциясының бірінші ретті дифференциалы

$$dy=y'_t\cdot dt=(y'_x\cdot x'_t)dt=y'_x(x'_t dt)=y'_x dx,\ \left(dy=f'(x)dx, dx=x'_t dt\right)$$

теңдігін аламыз.

7.8 Жоғарғы ретті туындылар мен дифференциалдар

Берілген $y=f(x)$ функциясының туындысы $y'=f'(x)$ тәуелсіз айнымалы x- тің функциясы болады.

$f'(x)$- бірінші ретті туынды деп аталады.

Бірінші ретті туындыдан алынған туынды - екінші ретті туынды, сол сияқты $(n-1)$- ші ретті туындыдан алынған туынды - n- ші ретті туынды деп аталады және сәйкес мына түрде жазылады

$$y'=f'(x), y''=(f'(x))'=f''(x),\ldots,y^{(n)}=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'=f^{(n)}(x).$$

$y=uv$, мұндағы $u=u(x), v=v(x)$ болсын. Онда

$$y=u'v+uv';\quad y''=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv'';$$
$$y'''=u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+uv'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

Бұдан $y=uv$ - көбейтіндінің жоғарғы ретті туындысын $(a+в)^{(n)}$ - Ньютон биномы жіктелуі формуласы бойынша алуға болатындығын көреміз. Сонымен,

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+nu'v^{(n)}.$$

Бұл формула көбейтіндінің жоғарғы ретті туындысы үшін Лейбниц формуласы деп аталады. Сонымен

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

мұндағы

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!};\quad u^{(0)}=u;\ v^{(0)}=v;\ 0!=1,$$

C_n^k - биномдық коэффициент.

Егер функция параметрлік түрде берілсе, яғни $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in(0,T)$

бұл функцияның бірінші ретті туындысы $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$, ал екінші ретті туындысы

$$y''_{xx}=\frac{y'_{tt}\cdot x'_t-x'_{tt}\cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

формуласымен есептелінеді.

24-мысал. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ параметрлі түрде берілген функцияның бірінші және екінші ретті туындыларын табу керек.

$$y' = \frac{\left(a\sin^3 t\right)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -tgt,$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(-tgt\right)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$

Жоғарғы ретті туындыларға сәйкес, функцияның бірінші ретті дифференциалынан алынған дифференциал – екінші, ал екінші ретті дифференциалдан алынған дифференциал – үшінші, сол сияқты $(n-1)$- ші ретті дифференциалдан алынған дифференциал n- ші ретті дифференциал деп аталады.

Егер $y = f(x)$ функциясының n- ші ретті туындысы болса, онда

$$dy = df(x) = f'(x)dx;$$
$$d^2 y = d^2 f(x) = d(f'(x)dx) = (f'(x)'dx)'dx = f''(x)dx^2;$$
$$d^3 y = d^3 f(x) = f'''(x)dx^3;$$
$$d^n y = d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$$

теңдіктерін аламыз.

Айталық, $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ - күрделі функция болсын. $y' = f'_x\, x'_t$, ал $d\,y = f'_x\, d\,x$ бірінші дифференциал үшін инварианттық қасиет орындалады, ал жоғарғы дифференциалдар үшін бұл қасиет орындалмайды.

$$d^2 y = d^2 f(x) = d(f'(x)dx) = d\, f'_x(x)\, dx + f'_x(x)d\,(dx) = f''_{xx}(x)dx^2 + f'_x(x)\; d^2 x$$

теңдігі шығады.

7.9 Дифференциалдық есептеудің негізгі теоремалары

Туынды ұғымы функцияларды зерттеу кезінде, олардың графиктерін салуда қолданылады. Туындыны қолдана білу үшін біз дифференциалдық есептеудің бірнеше негізгі теоремаларымен танысуымыз керек.

Ферма теоремасы. Егер $[a,в]$ сегментінде дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясы осы сегменттің ішінде жатқан бір x_0 нүктесінде өзінің ең үлкен немесе ең кіші мәнін қабылдаса, онда оның туындысы x_0 нүктесінде нөлге тең болады, яғни $f'(x_0) = 0$.

Ролль теоремасы. Егер $[a,в]$ сегментінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы $[a,в]$ интервалында дифференциалданатын болса және $f(a) = f(в)$ орындалса, онда $(a,в)$ интервалында жатқан ең болмағанда бір ξ нүктесінде функцияның туындысы нөлге тең болады, яғни $f'(\xi) = 0$.

Лагранж теоремасы. Егер $[a,в]$ сегментінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы $(a,в)$ интервалында дифференциалданатын болса, онда $f(в) - f(a) = f'(\xi)(в - a)$ теңдігі орындалатын $(a,в)$ интервалынан ең болмағанда бір ξ нүктесі табылады.

Коши теоремасы. Егер $[a,в]$ сегментінде үзіліссіз $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары (a,b) интервалында дифференциалданатын болса және $\varphi'(x)\neq 0$ болса, $\dfrac{f(в)-f(a)}{\varphi(в)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ теңдігі орындалатын, (a,b) интервалынан ең болмағанда бір ξ нүктесі табылады.

Лопиталь ережесі.. *f(x)* және *g(x)* функциялары [*a;b*] сегментінде Коши теоремасының шартын қанағаттандырса, әрі *f(a)=g(a)=0* болса, онда егер $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, шегі де бар болады, әрі $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Лопиталь ережесін $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ түрлеріндегі анықталмағандықтарды ашуға қолдануға болады.

Тейлор және Маклорен формулалары

y=f(x) функциясының *x=a* нүктесінің аймағында (n+1)-ші ретті ((n+1)-шіні қоса алғанда) туындыларына дейінгі барлық туындылары бар болсын. Онда

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

функцияның мұндай жіктелуін Тейлор формуласы, ал $R_n(x)$ Тейлор формуласының қалдық мүшесі деп аталады.

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)).$$

Егер Тейлор формуласында a = 0:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

- Маклорен формуласы.

Кейбір элементар функцияларды Тейлор формуласы бойынша жіктеу

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},0<\theta<1.$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2})=$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^{n+1}).$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^{n+1}).$$

Тейлор формуласы бойынша жіктелуі белгілі қандайда бір функцияны Тейлор көпмүшесімен алмастыра отырып, берілген дәлдіктегі функциясының жуық мәнін табуға болады. Тейлор көпмүшесінің дәрежесі, қалдық мүшенің мәні берілген қателіктің мәнінен аспайтындай етіп таңдап алынады. Енді Тейлор көпмүшесінің мәнін есептей отырып, e санының жуық мәнін табалық (n=8):

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828. \quad \text{Мұндағы } R_8 < \frac{1}{9!}\cdot 3 < 10^{-5}.$$

7.10 Функцияны туындының көмегімен зерттеу

Функцияның өсу және кему шарттары

7.4-анықтама. Егер $x_1 < x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын $(a,в)$ интервалында жататын аргумент мәндері үшін $y = f(x)$ функциясының мәндері $f(x_1) \le f(x_2)$ теңсіздігін қанағаттандыратын болса, онда берілген $f(x)$ функциясы $(a,в)$ интервалында кемімейтін функция деп аталады.

7.5-анықтама. Егер $x_1 < x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын $(a,в)$ интервалында жататын аргумент мәндері үшін $y = f(x)$ функциясының мәндері $f(x_1) \ge f(x_2)$ теңсіздігін қанағаттандыратын болса, онда берілген $f(x)$ функциясы $(a,в)$ интервалында өспейтін функция деп аталады.

7.6-анықтама. Егер қатаң $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$ теңсіздіктері орындалатын болса, онда функция қатаң өсетін (кемитін) функция деп аталады.

7.7–теорема. Дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының $(a,в)$ интервалында кемімейтін (өспейтін) болуы үшін, осы интервалда

$$f'(x) \ge 0 \ \ (f'(x) \le 0)$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Экстремум нүктесі. Экстремум бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары

7.8–анықтама. Егер x_0 нүктесінің $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ аймағының ішінде жатқан барлық x-тер үшін $f(x) \le f(x_0)$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде локальды максимумы бар деп атайды.

7.9-анықтама. Егер x_0 нүктесінің $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ аймағының ішінде жатқан барлық x-тер үшін $f(x) \ge f(x_0)$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде локальды минимумы бар деп атайды.

Локальды максимум жєне минимумды біріктіріп локальды экстремум деп атайды.

7.8–теорема (локальды экстремумның қажетті шарты).

Егер дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктеде локальды экстремумы бар болса, онда сол нүктеде $f'(x_0) = 0$ болады.

Осы теоремадан x_0 нүктесінде функцияның экстремумы бар болса, онда ол нүктеде оның туындысы нөлге тең, не ол нүктеде туындысы болмауы мүмкін деген қорытынды шығады.

7.9–теорема (локальды экстремум болуының жеткілікті шарты).

$y = f(x)$ функциясы экстремумы болуы мүмкін нүкте мен берілген x_0 нүктесінің белгілі бір маңайында дифференциалданатын, ал x_0 нүктесінің өзінде функция үзіліссіз болсын. Егер

$$x < x_0, \quad f'(x) \geq 0 \quad \left(f'(x) \leq 0 \right),$$
$$x > x_0, \quad f'(x) \leq 0 \quad \left(f'(x) \geq 0 \right),$$

теңсіздіктері орныңдалатын болса, онда берілген $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде өзінің локальды максимумын (минимумын) қабылдайды.

7.10–теорема. Егер x_0 нүктесінде $f''(x_0) > 0 \left(f''(x_0) < 0 \right)$ теңсіздігін қанағаттандыратын кризистік нүкте болса, онда берілген $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде өзінің локальды минимумын (максимумын) қабылдайды.

7.11-теорема (жеткілікті шарт). Егер x_0 нүктесінде $f'(x_0) = f''(x_0) = \\ = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$ және $f^{(n)}(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда n жұп болып $f^{(n)}(x_0) < 0 \ \left(f^{(n)}(x_0) > 0 \right)$ болғанда, $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде өзінің жергілікті максимумын (минимумын) қабылдайды, ал n тақ болса экстремумы болмайды.

Кесіндіде үзіліссіз функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

$y = f(x)$ функциясы $[a, в]$ кесіндісінде анықталған және үзіліссіз болсын.

7.12-теорема. $y = f(x)$ функциясы $[a, в]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде өзінің дәл жоғарғы және дәл төменгі мәндерін қабылдайды.

1. Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a, в]$ кесіндісінде өспелі немесе қатаң өсетін болса, онда оның ең кіші мәні - $\min\limits_{a \leq x \leq в} f(x) = f(a)$, ал ең үлкен мәні - $\max\limits_{a \leq x \leq в} f(x) = f(в)$ болады.

2. Егерде $f(x)$ функциясы $[a, в]$ кесіндісінде кемімелі немесе қатаң кемитін болса, онда $\min\limits_{a \leq x \leq в} f(x) = f(в)$, ал $\max\limits_{a \leq x \leq в} f(x) = f(a)$ болады.

3. $y = f(x)$ функциясы $[a, в]$ кесіндісінде анықталған және үзіліссіз, бар функция болсын. Функцияның берілген кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін келесі амалдар орындалады:

а) кесіндідегі барлық кризистік нүктелерін табу керек;

ә) шеткі $(x = a, x = в)$ нүктедегі мәндері, сонымен қатар $[a, в]$ аралығына тиісті болатын кризистік нүктелеріндегі функцияның мәндері есептелінеді;

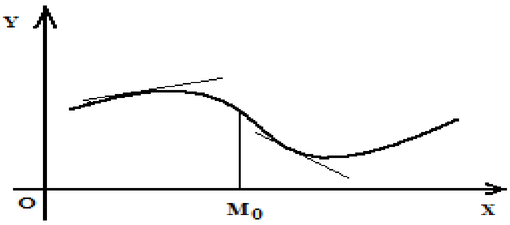
б) осы табылған функция мәндерінің ең үлкені $[a,в]$ аралығындағы функцияның ең үлкен мәні болып, ал ең кішісі – ең кіші мәні болып табылады.

Функцияның дөңестігі, ойыстығы және иілу нүктелері

$y = f(x)$ дифференциалданатын функциясы берілсін және $f(x)$ қисығының кез келген нүктесінде жанамасы бар болсын.

7.9-анықтама. Егер x_0 нүктесінің кез келген аймағында қисық өзіне жүргізілген жанамадан жоғары (төмен) жататын болса, онда қисықты сол аймақта ойыс (дөңес) деп атайды.

7.10-анықтама. Қисықтың ойыс жағын, дөңес жағынан бөлетін нүктені – иілу нүктесі деп атайды.



7.2 Сурет

7.13–теорема. Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде екі рет дифференциалданатын және

$$f''(x_0) > 0 \quad \left(f''(x_0) < 0\right)$$

болса, онда берілген функция x_0 нүктесінде ойыс (дөңес) болады.

7.14–теорема (иілу нүктесінің қажетті шарты).

Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының үзіліссіз екінші ретті туындысы бар және x_0 иілу нүктесі болса, онда $f''(x_0) = 0$.

7.15–теорема (иілу нүктесінің бірінші жеткілікті шарты).

Егер x_0 нүктесінің δ- маңайында екі рет дифференциалданатын және x_0 нүктесінде үзіліссіз болатын $y = f(x)$ функциясы үшін

$$x < x_0, \quad f''(x_0) < 0 \quad \left(f''(x_0) > 0\right);$$
$$x > x_0, \quad f''(x_0) > 0 \quad \left(f''(x_0) < 0\right),$$

теңсіздіктері орындалатын болса, онда x_0 нүктесі берілген функцияның иілу нүктесі болады.

7.16–теорема (иілу нүктесінің екінші жеткілікті шарты).

Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз үшінші ретті туындысы бар және

$$f''(x_0) = 0, \; f'''(x_0) \neq 0$$

болса, онда x_0 берілген функцияның иілу нүктесі болады.

Қисық асимптоталары

Берілген $f(x)$ функциясын $x \to \infty, x \to -\infty$ кездегі және үзіліс нүктелеріндегі тәртібін зерттеу нәтижесінде функция графигі белгілі бір түзуге мейілінше жақындауы байқалатын кездері болады. Осындай түзулер функцияның асимптоталары деп аталады. Асимптоталар тік, көлденең, көлбеу болып бөлінеді.

1. Тік асимптоталар. Егер $f(x)$ функциясының $x \to x_0$ кездегі екі жақ шектерінің ең болмағанда біреуі шексіздікке тең, яғни

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$$

болса, онда $x = x_0$ түзуі функция графигінің тік асимптотасы деп аталады.

2. Көлденең асимптоталар. Егер $y = f(x)$ функциясының $x \to \infty$ немесе $x \to -\infty$ кездегі шегі шектелуі (ақырлы) санға тең, яғни

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = A$$

болса, онда $y = A$ түзуі берілген функция графигінің көлденең (горизонталь) асимптотасы деп аталады.

3. Көлбеу асимптоталар. Егер $y = f(x)$ функциясын $y = kx + в + \alpha(x)$ түрінде жазуға болатын болса, онда $y = kx + в$ $(k \neq 0)$ түзуі берілген функция графигінің көлбеу асимптотасы деп аталады. Мұндағы $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$ кезде $\alpha(x) \to 0$- ақырсыз кішкене шама.

7.17–теорема. Берілген $y = f(x)$ функциясы графигінің $x \to \infty (x \to -\infty)$ кездегі көлбеу асимптотасы $y = kx + в$ $(k \neq 0)$ түзуі болуы үшін

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(f(x) - kx \right) = в$$

ақырлы шектерінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

Функцияны зерттеудің жалпы сұлбасы және графигін салу

$y = f(x)$ функциясын толық зерттеп, оның графигін салу үшін мынадай нұсқаулардың көмегі болуы мүмкін:

а) функцияның анықталу аймағын және үзіліс нүктелерін анықтау;
ә) функцияның өзгеру облысын табу;
б) функцияның координата өстерімен қиылысу нүктелерін, таңба тұрақтылық аралығын табу;
в) функцияның тақтығын, жұптығын және периодтылығын анықтау;
г) функцияның экстремумдарын тауып, өспелі және кемімелі болатын аралықтарын табу;
д) функцияның ойыс, дөңес болатын аралықтарын, иілу нүктелерін табу;
е) функцияның асимптоталарын табу;
ж) алынған мәліметтер бойынша функцияның графигін тұрғызу.

Функцияның сипатына және зерттеудің мақсатына байланысты сұлба өзгеруі және пункттермен толықтырылуы мүмкін.

Ұсынылған сұлба бойынша зерттеу салдарында функция туралы алынған мәліметтер сондайлық толық және айқын болғандықтан, функцияның графигін байқап және оны бірінші рет салу ешқандай айырықша қиындық тудырмайды. Осылайша салынған графиктің дәлдігіне, толық еместігіне қарамастан ол график берілген функцияның барлық негізгі ерекшеліктерін кескіндейді. Қисықтың кейбір жеке бір жерін толық анықтау керек болған жағдайда, бірнеше қосымша нүктелер қосып, графигін айқындауға болады.

8 Комплекс сандар

8.1-анықтама. $z=a+ib$ санын комплекс сан дейді, мұндағы a, b- нақты сандар, $i=\sqrt{-1}$ -жалған бірлік немесе $i^2=-1,$ a саны z санының нақты бөлігі, ал b саны жалған бөлігі деп аталады және оларды былай белгілейді $a=\operatorname{Re} z,\ b=\operatorname{Im} z.$

8.2-анықтама. $z=a+ib$ және $\bar{z}=a-ib$ комплекс сандарын түйіндес комплекс сандар дейді.

8.3-анықтама. $z_1=a_1+ib_1$ және $z_2=a_2+ib_2$ комплекс сандары үшін $a_1=a_2,\ b_1=b_2$ тең болса, онда $z_1=z_2$ болады.

8.4-анықтама. z комплекс саны $a=0,\ b=0$ болғанда ғана нөлге тең болады, яғни $z=a+ib=0$.

8.5-анықтама. z комплекс санының $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ түрін тригонометриялық түрде берілген комплекс сан дейді, мұндағы $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ - комплекс санның модулі, $\varphi=\arg z=Arctg\,\dfrac{b}{a}$ - аргументі деп аталады.

8.6-анықтама. z комплекс санының $z=re^{i\varphi}$ түрін көрсеткіштік түрде берілген комплекс сан дейді, мұндағы $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$ формуласын Эйлер формуласы деп атайды.

Комплекс сандарға амалдар қолдану

а) комплекс сандарды қосу. $z_1=a_1+ib_1$ және $z_2=a_2+ib_2$ комплекс сандарының қосындысы деп $z_1+z_2=(a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2)$ теңдігімен анықталатын комплекс санды айтады.

ә) комплекс сандарды азайту. $z_1=a_1+ib_1$ және $z_2=a_2+ib_2$ комплекс сандарының айырмасы деп $z_1-z_2=(a_1-a_2)+i\,(b_1-b_2)$ теңдігімен анықталатын комплекс санды айтады.

б) комплекс сандарды көбейту. $z_1=a_1+ib_1$ және $z_2=a_2+ib_2$ комплекс сандарының көбейтіндісі деп $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i\,(b_1a_2+a_1b_2)$ теңдігімен анықталатын комплекс санды айтады.

Егер комплекс сандар тригонометриялық түрде берілсе, онда $z_1\cdot z_2=r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$.

Ескерту. $z=a+ib$ және $\bar{z}=a-ib$ түйіндес комплекс сандарының көбейтіндісі $z\bar{z}=a^2+b^2=r^2$ нақты санға тең болады.

в) комплекс сандарды бөлу. $z_1=a_1+ib_1$ және $z_2=a_2+ib_2$ комплекс сандарының бөліндісі деп $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\dfrac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$ теңдігімен анықталатын комплекс санды айтады.

Егер комплекс сандар тригонометриялық түрде берілсе, онда $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$.

г) комплекс санды дәрежелеу. $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ комплекс санының n -ші дәрежесі деп $[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ түріндегі комплекс санды айтады. Бұл формуланы Муавр формуласы дейді. Егер $r=1$ болса, онда $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ формуласы шығады.

ғ) комплекс саннан түбір табу. $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ комплекс санының n-ші дәрежелі түбірі деп $\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ комплекс санын айтады, мұндағы $k=\overline{0,n-1}$.

25-мысал. 1 санының куб түбірінің барлық мәндерін табу керек.

Шешуі. 1 санының тригонометриялық түрі $1=\cos 0+i\sin 0$.

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+\sin\frac{0+2k\pi}{3}$$, мұндағы $k=0,1,2$.

Сонда $k=0$ болғанда $x_1=1$, $k=1$ болғанда $x_2=-1/2+i\sqrt{3}/2$, $k=2$ болғанда $x_3=-1/2-i\sqrt{3}/2$.

9 Анықталмаған интеграл

9.1 Анықталмаған интегралдың анықтамасы мен қасиеттері

9.1-анықтама. Егер [a;b] кесіндісінің кез келген нүктесі үшін $F'(x)=f(x)$ теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы деп аталады.

Бір функцияның шексіз көп алғашқы функциясы болуы мүмкін. Олардың бір-бірінен айырмасы қандай да бір тұрақты санға тең.

$$F_1(x)=F_2(x)+C.$$

9.2-анықтама. $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы деп келесі өрнекпен анықталатын алғашқы функциялардың жиынтығы $F(x)$ + C аталады

және былай белгіленеді

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Қасиеттері:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$
3. $\int dF(x)=F(x)+C$
4. $\int(u+v-w)dx=\int u(x)dx+\int v(x)dx-\int w(x)dx$ мұндағы u, v, w аргумент x-тің функциялары.
5. $\int \tilde{N}f(x)dx=C\cdot\int f(x)dx$
6. Егер $\int f(x)dx=F(x)+C,$ онда $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$

Негізгі интегралдау кестесі

1. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, x>0, \alpha>-1$

10. $\int ctgxdx=\ln|\sin x|+C$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x > 0$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \text{cîs}xdx = \sin x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

13^1. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

15^1. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

17. $\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C$

18. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

26-мысал. $\int\left(x^2 - 2\sin x + 1\right)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C$.

9.2 Айнымалыны алмастыру тәсілі

9.1-теорема. Егер $\int f(x)dx$ интегралын есептеу керек, бірақ алғашқы функциясын табу қиын болса, онда $x = \varphi(t)$ алмастыру жасаймыз $\Rightarrow$ $dx = \varphi'(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

27-мысал. $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx = |t = \sin x, dt = \cos xdx| = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + C$.

28-мысал. $\int \frac{xdx}{x^2+A} = |t = x^2 + A, dt = 2xdx| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + A\right| + C$.

29-мысал. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+A}} = \sqrt{x^2+A} + C$.

30-мысал. $\int \frac{xdx}{\sqrt{A-x^2}} = -\sqrt{A-x^2} + C$.

31-мысал. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = |\sin x = t, \cos xdx = dt| = \int\frac{dt}{\sqrt{t^3}} = -\frac{2}{\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C$.

32-мысал. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{9-1-2x-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{3} + C$.

33-мысал. $\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int\frac{5(x+3)-18}{(x+3)^2-49}dx = 5\int\frac{(x+3)dx}{(x+3)^2-49} - 18\int\frac{dx}{(x+3)^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|(x+3)^2 - 49\right| -$
$-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x+3-7}{x+3+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C$.

34-мысал. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}}dx = \int \frac{3x-9+13}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = 3\int \frac{x-3}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx + 13\int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-3)^2}} =$

$= -3\sqrt{16-(x-3)^2} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C = -3\sqrt{7+6x-x^2} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C.$

9.3 Бөліктеп интегралдау

Интегралдаудың бұл әдісі дифференциалданатын екі функцияның көбейтіндісін дифференциалдауға негізделген. Бізге $u = u(x)$, $v = v(x)$, $\tilde{o} \in \tilde{O}$ аралығында дифференциалданатын функциялар болсын. Осы функциялардың көбейтіндісінің дифференциалын табайық: $d(uv) = udv + vdu$. Осы теңдіктің екі жағын интегралдасақ, онда

$$uv = \int udv + \int vdu.$$

Осыдан

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Бұл формуланы бөліктеп интегралдау формуласы деп атайды.

Бөліктеп интегралдау формуласын пайдалану үшін u және dv өрнектерін қалауымызша алуға болмайды. Яғни vdu өрнегін интегралдау udv өрнегін интегралдаудан әлдеқайда оңай болуы керек. Көп жағдайда интеграл астындағы функция алгебралық және трансцендентті функциялар көбейтіндісі түрінде болып келсе, онда бөліктеп интегралдау формуласы қолданылады.

$$\int x^k \cdot e^{mx}dx,\ \int x^k \sin bxdx,\ \int x^k \cos bxdx$$

интегралдарын есептеген кезде $u = x^k$ деп таңдап алу керек.

$$\int x^k \ln^m xdx,\ \int x^k \arcsin^m xdx,\ \int x^k arctg^m xdx$$

интегралдарын есептеген кезде сәйкес $u = \ln^m x,\ u = \arcsin^m x,\ u = arctg^m x$ деп таңдап алу керек.

35-мысал.

$$\int x^2 \sin xdx = \begin{vmatrix} u = x^2; dv = \sin xdx \\ du = 2xdx; v = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x; dv = \cos xdx \\ du = dx;\ \mathrm{v} = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

9.4 Қарапайым бөлшектерді интегралдау

9.3-анықтама. Келесі берілген төрт бөлшек қарапайым бөлшектер деп аталады:

I. $\frac{1}{ax+b}$; II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

n, m – натурал сандар ($n > 2,\ m > 2$) және $b^2 - 4ac < 0$.

Алғашқы екі элементар бөлшектерден алынған интеграл $t = ax+b$ алмастыруы арқылы қарапайым таблицалық түрге келтіріледі.

I. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C;$

II. $\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$

III. III түрдегі бөлшектің интегралын есептеу үшін мынадай түрлендірулер жасалады:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B+\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| +$$

$$+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

36-мысал. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+16} = \frac{1}{4}arctg\,\frac{x-3}{4} + C.$

37-мысал. $\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{14(6x-5)+46}{(6x-5)^2+23}dx = 14\int \frac{6x-5}{(6x-5)^2+23}dx +$

$$+46\int \frac{dx}{(6x-5)^2+23} = \frac{7}{6}\ln\left((6x-5)^2+23\right) + \frac{\sqrt{23}}{3}arctg\,\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.$$

9.5 Рационал функцияларды интегралдау

Рационал бөлшектерді интегралдау үшін оларды төмендегідей элементар бөлшектерге жіктеу керек.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} +$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \ldots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \ldots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu},$$

мұндағы A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – тұрақты сандар.

A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i шамаларының мәндерін анықтау үшін белгісіз коэффициенттер әдісін қолданыламыз(екі көпмүше тең болуы үшін х-тің бірдей дәрежесіндегі коэффициенттердің тең болуы қажетті және жеткілікті).

38-мысал. $\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}dx = \int\left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Dx+E}{x^2+4}\right)dx.$

Ортақ бөлімге келтіре отырып, алымдарын теңестіреміз:

$$A(x-4)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Dx+E)(x-2)(x-4) = 9x^3-30x^2+28x-88$$

$$\begin{cases} A+B+D=9 \\ -4A-2B-6D+E=-30 \\ 4A+4B+8D-6E=28 \\ -16A-8D+8E=-88 \end{cases} \qquad \begin{cases} D=9-A-B \\ E=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4D-3E=14 \\ 2A+B-E=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 9 - A - B \\ E = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 4A + 5B = 35 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = 9 - A - B \\ E = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 5B = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ D = 1 \\ E = 2 \end{cases}$$

Сонымен

$$\int \frac{5dx}{x-2} + \int \frac{3dx}{x-4} + \int \frac{x+2}{x^2+4} dx = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + arctg\frac{x}{2} + C.$$

9.6 Иррационал функцияларды интегралдау

$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx$ интегралын қарастырайық. Осы интеграл $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ алмастыруын қолдану арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі, мұндағы k саны $m/n, ..., r/s$ бөлшектерінің ортақ бөліміне тең.

39-мысал. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left|\sqrt{x} = t, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t}\right| = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$

9.7 Кейбір тригонометриялық функцияларды интералдау

$$\int R(\cos x, \sin x)dx$$

Интегралдың бұл түрін есептеу үшін $t = tg\frac{x}{2}$ алмастыруы қолданылады мұны универсал алмастыру деп аталады Бұл арқылы $R(\cos x, \sin x)$. Функциясы жаңа t айнымалысының рационал функциясына түрленеді.

$$x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Тригономатриядан белгілі формулалар бойынша

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Сондықтан $\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2},$

мұндағы интегралданатын функция t айнымалысы бойынша рационал функция.

40-мысал. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} =$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C$$

Кейбір жағдайларда осындай алмастырулар күрделі есептеулерге кездестіреді, сондықтан басқа алмастырулар қолдануға болады. Солардың кейбіреулерін қарастырайық:

1) $\int R(\sin x)\cos xdx$ болса, онда $\sin x = t$

2) $\int R(\cos x)\sin xdx$ болса, онда $\cos x = t$

3) $\int R(tgx)dx$ болса, онда $tgx = t$

4) $\int R(\sin x, \cos x)dx$ интегралында $\sin x, \cos x$ функциялары тек жұп дәрежелерімен берілсе, онда $tgx = t$;

5) $\int \sin^m x \cos^n xdx$;

а) m тақ болса, онда $\cos x = t$;

ә) n тақ болса, онда $\sin x = t$;

б) n, m жұп, теріс емес болса онда $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ формулалары қолданылады;

в) n, m жұп, ең болмаса біреуі теріс болса, онда $tgx = t$ немесе $ctgx = t$;

6) Әртүрлі аргументтердің синус және косинустарының көбейтіндісінің интегралы берілсе, онда бұл жағдайда төмендегі 3 формуланың біреуін қолданамыз:

$$\int \cos mx \cos nxdx = \frac{1}{2}\int [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right];$$

$$\int \sin mx \cos nxdx = \frac{1}{2}\int [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m-n)x}{m-n} - \frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right];$$

$$\int \sin mx \sin nxdx = \frac{1}{2}\int [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right].$$

10 Анықталған интеграл

10.1 Анықталған интегралдың анықтамасы

10.1-анықтама. $f(x)$ функциясының $[a;b]$ аралығындағы анықталған интегралы деп $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ - интегралдық қосындының $(\max \Delta x_i \to 0)$ шегін айтады және былай белгіленеді $\int_a^b f(x)dx$

a – төменгі, b –жоғарғы шегі, x – айнымалы шама, $[a;b]$–интегралдау аралығы.

10.1-теорема. Егер $f(x)$функциясы $[a;b]$ аралығында үзіліссіз болса,онда осы аралықта интегралданады.

Анықталған интегралдың қасиеттері:

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$;

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

4) егер $[a;b]$, $a<b$ кесіндісінде $f(x)<\varphi(x)$онда, $\int_a^b f(x)dx<\int_a^b \varphi(x)dx$;

5) егер m және$M-$ $[a;b]$кесіндісіндегі $f(x)$функциясының ең кіші және ең үлкен мәндері болса, онда:

$$\grave{o}\,(b-a)<\int_a^b f(x)dx<M(b-a);$$

6) егер $f(x)$ функциясы $[a;b]$ аралығында үзіліссіз болса,онда осы аралықтан

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi);$$

болатындай ξ саны табылады.(орта мән туралы теорема)

7) кез келген a,b,c сандары үшін келесі теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;$$

8) $\int_a^b f(x)dx$=-$\int_b^a f(x)dx$.

\

10.2 Анықталған интегралды есептеу

10.2- теорема (Ньютон – Лейбниц формуласы). Егер F(x) функциясы – f(x) функциясының қандай да бір алғашқы функциясы болса,онда

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Бұл Ньютон – Лейбниц формуласы деп аталады.

41-мысал. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=\sin t \\ x=0, t=0 \\ x=1, t=\pi/2 \end{array}\right|=\int_0^{\pi/2}\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx=$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$$

10.3 Бөліктеп интегралдау.

Егер $u=u(x)$ және $v=v(x)$ функциялары және олардың туындылары $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса,онда анықталған интеграл үшін бөліктеп интегралдау формуласы тура болады:

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

10.4 Меншіксіз интегралдар

Ақырсыз шегі бар интеграл

10.2-анықтама. Егер $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ шегі бар болса, онда осы шекті $f(x)$ функциясының $[a,\infty)$ интервалындағы меншіксіз интегралы дейді және оны былай белгілейді

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Бұл жағдайда меншіксіз интегралын жинақты, қарсы жағдайда жинақсыз дейді. Осы сияқты

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{\infty} f(x)dx$$

интегралдарын да меншіксіз интегралдар дейді.

Үзілісті функцияның интегралы

10.3-анықтама. $x = c$ нүктесінде үзілісті болатын $f(x)$ функциясының $\int\limits_a^{ñ} f(x)dx$

интегралы былай анықталады: $\int\limits_a^{ñ} f(x)dx = \lim\limits_{b\to c-0}\int\limits_a^b f(x)dx.$

Егер осы шек бар болса, онда меншіксіз интегралын жинақты, қарсы жағдайда жинақсыз дейді.

Осы сияқты

$$\int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{a\to c+0}\int\limits_a^b f(x)dx, \qquad \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \text{ мұндағы } a \prec c \prec b,$$

интегралдарында меншіксіз интегралдар дейді.

10.5 Анықталған интегралдың қолданылысы.

Жазық фигураның ауданы

1) $y = f(x)$ қисығымен, $y = 0,\ x = a,\ \ x = b$ түзулерімен шектелген «қисық сызықты» трапециясының ауданы $S = \int\limits_a^b f(x)dx$ формуласымен есептеледі.

2) $ó = f_1(x),\ y = f_2(x)$ қисықтарымен ($f_2(x) > f_1(x)$) және $x = a, x = b$ түзулерімен шектелген жазық фигураның ауданы $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$ формуласымен есептеледі.

3) Параметрлік түрде берілген $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$ мұндағы $\alpha \le t \le \beta,\ \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b,$ қисықпен шектелген жазық фигураның ауданы $S = \int\limits_{\varepsilon}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt$ формуласымен есептеледі.

4) $r = f(\varphi), \varphi = \alpha, \varphi = \beta$ теңдеулерімен шектелген «қисық сызықты» сектордың ауданы $S = \frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)dx$ формуласымен есептеледі.

Қисықтың доғасының ұзындығы

1) Жазықтықта $y = f(x)$ теңдеуімен өрнектелген АВ доғасының ұзындығы, мұндағы $a \prec x \prec b$, $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ формуласымен есептеледі.

2) Жазықтықта параметрлік түрде берілген $x = \varphi(t), y = \psi(t),$ мұндағы $\alpha \le t \le \beta,$ АВ доғасының ұзындығы $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi''(t)]^2}\,dt$ формуласымен есептеледі.

3) Кеңістікте параметрлік түрде берілген $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$ мұндағы $\alpha \le t \le \beta,$ AB доғасының ұзындығы $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi''(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt$ формуласымен есептеледі.

4) Жазықтықта AB қисығы $r = f(\varphi)$ теңдеуімен берілсе, мұндағы $\alpha \le \varphi \le \beta,$ онда AB доғасының ұзындығы $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\,d\varphi$ формуласымен есептеледі.

Параллель қимасының $Q(x)$ауданы бойынша дененің көлемі $V = \int_A^B Q(x)dx,$ формуласымен есептеледі, мұндағы $a \le x \le b$

$y = f(x)$ қисығымен $y = 0,\ x = a,\ \ x = b$ түзулерімен шектелген «қисық сызықты» трапециясын $0X$ өсімен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі

$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$, ал бетінің ауданы $S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ формуласымен есептеледі.

11. Көп айнымалы функция

11.1 Көп айнымалы функцияның анықталу облысы (аймағы)

11.1-анықтама. Егер D облысында бір-бірінен тәуелсіз қос (x, y) айнымалыларының әрбір мәніне z айнымалысының анықталған бір мәні сәйкес келсе, онда z айнымалысы х және у айнымалыларына байланысты екі айнымалы функция деп аталады және оны

$$z = f(x, y), \qquad (11.1)$$

және тағы да басқа символдардың (ишараттардың) бірімен белгілейді.

11.2-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясы анықталатын x және y мәндерінің қос (x, y) жиынын осы функцияның анықталу облысы деп атайды.

Қарапайым жағдайда, $z = f(x, y)$ функциясының анықталу облысы Oxy жазықтығы, Oxy жазықтығының тұйық сызықтармен шектелген бөлігі немесе осы жазықтықтың бірнеше бөліктерінің жиынтығы болады.

$z = f(x, y)$ функциясының Oxy тік бұрышты координаттар жүйесіндегі геометриялық бейнесі (графигі) осы теңдеумен анықталатын бет болып табылады.

11.3-анықтама. Егер бір-бірінен тәуелсіз $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ айнымалыларының әрбір мәніне u айнымалысының анықталған бір мәні сәйкес келсе, онда u айнымалысы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалыларына байланысты көп айнымалы функция деп аталады да

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (11.2)$$

және тағы да басқа символдардың бірімен белгіленеді.

42-мысал. $z = x^2 + y^2$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция x пен y-тің кез келген мәнінде анықталған, яғни анықталу облысы бүкіл Oxy жазықтығы болып табылады.

43 - мысал. $z = \ln(2x - y)$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Логарифмдік функция $2x - y > 0$, яғни $y < 2x$ болғанда ғана анықталады. Осыдан функцияның анықталу облысы $2x - y = 0$ түзуінен төмен орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі болып табылады.

44-мысал. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Функция нақты мәндерін $x^2 + y^2 - a^2 \geq 0$ немесе $x^2 + y^2 \geq a^2$ болғанда ғана қабылдайды, яғни функцияның анықталу облысы центрі координаталар жүйесінің бас нүктесі, ал радиусы a-ға тең болатын дөңгелектен тыс орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

45-мысал. $z = \arcsin(y - x)$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция $-1 \leq y - x \leq 1$ теңсіздігі орындалғанда ғана анықталады. Осыдан функцияның анықталу облысы $y = x + 1$ және $y = x - 1$ түзулерінің арасында орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі болады.

11.2 Көп айнымалы функцияның дербес, толық өсімшілері және дербес туындылары

Oxy жазықтығының D обылысында анықталған $z = f(x, y)$ функциясын қарастырайық. Мұндағы x пен y-ті бекітіп алып, x айнымалысына Δx өсімшесін берейік. Сонда x айнымалысы бойынша z функциясының $\Delta_x z$ дербес өсімшесі

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \qquad (11.3)$$

формуласымен (кейіптемесімен) анықталады.

$z = f(x, y)$ функциясындағы x пен y айнымалыларын бекітіп алып, y айнымалысына Δy өсімшесін берсек, онда y айнымалысы бойынша дербес өсімшесі

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (11.4)$$

формуласымен анықталады.

Егер x пен y айнымалылары бекітіліп алынып, олар сәйкесінше Δx және Δy өсімшілерін қабылдаса, онда z функциясының толық өсімшесі

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (11.5)$$

формуласымен анықталады.

46-мысал. $z = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес өсімшілерін және толық өсімшесін табу керек.

Шешуі.

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = [(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) \cdot y + 3y^2 + 4(x + \Delta x) - 5y + 6] -$$
$$- (x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6) = (x + \Delta x)^2 - x^2 - 2y\Delta x + 4\Delta x =$$
$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2y\Delta x - 4\Delta x = (2x - 2y - 4 + \Delta x) \cdot \Delta x;$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \left[x^2 - 2x(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 4x - 5(y+\Delta y) + 6\right] -$$
$$-(x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6) = -2x\Delta y + 3(y+\Delta y)^2 - 3y^2 - 5\Delta y =$$
$$= -2x\Delta y + 6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 - 5\Delta y = (-2x + 6y - 5 + 3\Delta x)\cdot \Delta x\,;$$
$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = [(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 4(x+\Delta x) -$$
$$-5(y+\Delta y) + 6] - (x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 5y + 6) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y +$$
$$+6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 + 4\Delta x - 5\Delta y = (2x - 2y + 4)\Delta x + (-2x + 6y - 5)\Delta y + (\Delta x)^2 - 2\Delta x\Delta y + 3(\Delta y)^2.$$

11.4-анықтама. $z = f(x,y)$ функциясының x айнымалысы бойынша дербес туындысы деп

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x,y), \qquad (11.6)$$

шегін айтады. Бұл жағдайда y-ті тұрақты деп алу керек.

11.5-анықтама. $z = f(x,y)$ функциясының y айнымалысы бойынша дербес туындысы деп

$$\lim_{\Delta \acute{o}\to 0}\frac{\Delta_{\acute{o}} z}{\Delta \acute{o}} = \frac{\partial z}{\partial \acute{o}} = f_{\acute{o}}'(x,y) \qquad (11.7)$$

47-мысал. $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 5x + 6y + 4$ функцияның дербес туындысын табу керек.

Шешуі: y-ті тұрақты деп алып, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 5$ табамыз.

Осы сияқты, x-ті тұрақты деп алып, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y - 3x + 6$ табамыз.

48-мысал. $z = \arcsin(xy^2) + \dfrac{x}{y^2}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі: $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}}\cdot y^2 + \frac{1}{y^2} = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}} + \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}}\cdot 2xy - \frac{2x}{y^3} = \frac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}} - \frac{2x}{y^3}.$$

49-мысал. Үш айнымалы $u = e^{x^2+y^2+z^2}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$.

11.3 Көп айнымалы функцияның толық дифференциалы

$z = f(x,y)$ функциясының толық өсімшесі Δz-ті дербес $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ туындылары арқылы

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y, \qquad (11.8)$$

түрінде жазуға болады, мұндағы алдыңғы екі қосынды өсімшенің негізгі бөлігі, ал кейінгі екі қосынды қосалқы бөлігі деп аталады. Δx және Δy шамаларымен салыстырғанда қосалқы жоғары ретті ақырсыз аз шама болғандықтан $\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ ұмтылғанда $\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \to 0$.

Толық өсімшенің негізгі бөлігі функцияның толық дифференциалы деп аталып,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad (11.9)$$

арқылы белгіленеді, мұндағы $dx = \Delta x, dy = \Delta y$, ал $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx,\ d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$ сәйкес x және y айнымалылары бойынша дербес дифференциалдары деп аталады.

Егер $u = f(x, y, z, ..., t)$ көп айнымалы функциясы берілсе, онда оның толық дифференциалы

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + ... + \frac{\partial u}{\partial t}dt, \qquad (11.10)$$

формуласымен анықталады.

$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$-ң аз мәнінде дифференцианалданатын $z = f(x, y)$ функциясы үшін төмендегі жуықтап есептеу формуласы қолданылады.

$$\Delta z \approx dz.$$

осыдан $$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y \qquad (11.11)$$

50-мысал. $z = x^2 + xy^2 + \sin y$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Шешуі. Дербес туындыларын табайық.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + \cos y.$$

Осыдан $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (2x + y^2)dx + (2xy + \cos y)dy.$$

51-мысал. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Осыдан $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

52-мысал. $\sqrt{4{,}03^2 + 2{,}98^2}$ санының жуық мәнін табу керек.

Шешуі. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциясын қарастырайық.

$x + \Delta x = 4{,}03$ осыдан $x = 4,\ \Delta x = 0{,}03;$

$y + \Delta y = 2{,}98$ осыдан $y = 3,\ \Delta y = -0{,}02;$

$$z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{5},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{5},$$

$$\sqrt{4{,}03^2+2{,}98^2} \approx z+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = 5+\frac{4}{5}\cdot 0{,}03+\frac{3}{5}\cdot(-0{,}02) = 5{,}012.$$

11.4 Көп айнымалы функциялардың жоғары ретті дербес туындылары мен дифференциалдары

11.6-анықтама. $z=f(x,y)$ функциясының екінші ретті дербес туындысы деп осы функцияның дербес туындысының дербес туындысын айтады және оны былай белгілейді:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y). \qquad (11.12)$$

Осылай үшінші және жоғары ретті дербес туындылары табылады:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f'''_{xxx}(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=f'''_{xxy}(x,y). \qquad (11.13)$$

және т.с.с.

11.7-анықтама. $z=f(x,y)$ функциясы және оның $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ дербес туындылары D обылысында анықталған және үзіліссіз болса, онда осы облыста "аралас" туындылары тең болады:

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)., \qquad (11.14)$$

11.8-анықтама. $z=f(x,y)$ функциясының екінші ретті дифференциалы деп осы функцияның дифференциалының дифференциалын айтады:

$$d^2z=d(dz). \qquad (11.15)$$

Осы сияқты үшінші және жоғары ретті дифференциалдары анықталады:

$$d^3z=d(d^2z),\ldots,d^nz=d(d^{n-1}z). \qquad (11.16)$$

Егер x және y бір-бірінен тәуелсіз айнымалылар, ал $f(x,y)$ функциясының үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда жоғары ретті дифференциалдар

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{dx^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3, \qquad (11.17)$$

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

формулаларымен анықталады.

53-мысал. $z = x^3 + 5x^2y - 4y^3 - x^2 - 6xy + 3y^2$ функциясының екінші ретті дербес туындыларын және екінші ретті дифференциалын табу керек.

Шешуі. Алдымен дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 10xy - 2x - 6y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 - 12y^2 - 6x + 6y.$$

Енді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6x + 10y - 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -24y + 6,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 10x - 6,$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= (6x + 10y - 2)dx^2 + 2(10x - 6)dxdy + (-24y + 6)dy^2.$$

11.5 Күрделі функцияны дифференциалдау

Дифференциалданатын $z = F(u,v)$ функциясы берілсін, мұнда $u = u(x,y), v = v(x,y)$ функциясының дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}; \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (11.18)$$

формулаларымен есептеледі.

Дифференциалданатын $z = f(x,y)$ функциясы берілсін, мұнда $x = x(t), y = y(t)$. Бұл күрделі $z = f(x(t), y(t))$ функциясының t бойынша туындысы

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (11.19)$$

формуласымен есептеледі.

Дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясы берілсін, мұнда $y = y(x)$. Бұл $z = f(x, y(x))$ функциясының x бойынша туындысы

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{11.20}$$

формуласымен есептеледі.

54-мысал. $z = \cos(u^2 + \sqrt{v})$ функциясының, мұндағы $u = e^{xy}, v = x^2 + y^2$, дербес туындыларын табу керек.

Шешуі.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot 2u \cdot u_x^{'} - \sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v_x^{'} = -\left(2uye^{xy} + \frac{x}{\sqrt{v}}\right)\sin(u^2 + \sqrt{v}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = -\sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot 2u \cdot u_y^{'} - \sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v_y^{'} = -\left(2uye^{xy} + \frac{y}{\sqrt{v}}\right)\sin(u^2 + \sqrt{v}).$$

55-мысал. $z = x^2 + \sqrt{y}$ функциясы берілген, мұндағы $x = tgt, y = t^2 + 3t + 5 \cdot \frac{dz}{dt}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2x\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2t + 3}{2\sqrt{y}} = \frac{2\sin t}{\cos^3 t} + \frac{2t + 3}{2\sqrt{t^2 + 3t + 5}}.$

56-мысал. $z = x^3 + \sin(xy^2)$ функциясы берілген, мұндағы $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot$ $\frac{dz}{dx}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2\cos(xy^2),\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\cos(xy^2),\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Осыдан $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 3x^2 + y^2\cos(xy^2) + \frac{2x^2 y\cos(xy^2)}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

11.6 Бағыт бойынша туынды. Функция градиенті

11.9-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесінде $\vec{a} = \overrightarrow{MM_1}$ векторының бағыты бойынша туындысы деп

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \lim_{\left|\overrightarrow{MM_1}\right| \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta S}$$

шегін айтады, мұндағы $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Егер $f(x, y)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда бағыт бойынша туынды

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha, \tag{11.21}$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы $\alpha - \vec{a}$ векторы мен Ox осінің арасындағы бұрыш.

Үш айнымалы $u = f(x, y, z)$ функциясының бағыт бойынша туындысы

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ $\vec{a}$ векторының бағытталған косинустары.

11.10-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесіндегі градиенті деп

$$gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{t} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}, \qquad (11.22)$$

векторын айтады.

Функция градиенті мен $\vec{a}$ векторы бойынша туындысының арасындағы байланыс

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = n\rho_{\vec{a}}\, gradz$$

формуласымен анықталады.

Үш айнымалы $u = f(x, y, z)$ функциясының градиенті

$$gradz = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

векторына тең.

57-мысал. $z = x^2 - y^2$ функциясының $M(1;2)$ нүктесіндегі:

а) $gradz$,

б) $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ векторының бағыты бойынша $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = -4$

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \quad \cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = 0{,}6 \qquad \sin\alpha = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = 0{,}8$$

Осыдан $gradz = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = 2 \cdot 0{,}6 - 4 \cdot 0{,}8 = -2.$

58-мысал. $u = x^3y^2z$ функциясының $M(1, -2, 3)$ нүктесінде

а) $gradu$,

б) $\vec{MN}$ векторының бағыты бойынша туындысын табу керек, мұндағы $N(-1, 0, 2)$.

Шешуі. $\vec{a} = \vec{MN}$ векторы мен бағыттаушы косинустарын табайық.

$$\vec{a} = \{-2; 2; -1\}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3,$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 36; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = -12; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 4;$$

осыдан $\quad grad u = \{36; -12; 4\} \qquad \dfrac{\partial u}{\partial \vec{a}} = 36\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right) - 12\cdot\dfrac{2}{3} + 4\cdot\dfrac{1}{3} = -30\dfrac{2}{3}.$

11.7 Айқындалмаған функциялардың туындысы

11.11-анықтама. $F(x, y) = 0$ теңдеуі түрінде берілген айқындалмаған $y = y(x)$ функциясының туындысы

$$y' = -\frac{F_x'(x, ó)}{F_y'(x, ó)}$$

формуласымен анықталады, мұндағы $F(x, y)$ функциясы x және y айнымалылары бойынша дифференциалданатын әрі $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ функция.

$F(x, y, z) = 0$ теңдеуі түрінде берілген айқындалмаған $z = z(x, y)$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)} = -\frac{F_y'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)} \qquad (11.23)$$

формулаларымен анықталады, мұндағы $F(x, y, z)$ функциясы x, y және z айнымалылары бойынша дифференциалданатын әрі $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ функция.

59-мысал. $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6 = 0$ функциясы берілген. $\dfrac{dy}{dx}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\quad F(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6,$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y + 4, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 6y + 5,$$

Осыдан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 2y + 4}{2x + 6y + 5}.$$

60-мысал. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ функциясы берілген. $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ туындыларын табу керек.

Шешуі. $\quad F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3yz,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3xz,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

Осыдан

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 - 3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{y^2 - xz}{xy - z^2}.$$

11.8 Бетке жүргізілген жанама жазықтық және нормаль (тіктеме) түзу

Қарастырылатын σ беті $z = f(x, y)$ теңдеуімен берілсін. Беттің бойынан $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесін алайық. Осы нүктеде $f = (x, y)$ функциясы дифференциалданатын болсын.

11.12-анықтама. Беттің $Ì_0$ нүктесі арқылы өтетін барлық қисықтарға жүргізілген жанамалардан тұратын жазықтықты жанама жазықтық дейді. Оның теңдеуі

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}. \qquad (11.24)$$

11.13-анықтама. M_0 нүктесі арқылы өтетін және жанама жазықтыққа перпендикуляр болатын түзуді беттің нормалі дейді. Оның теңдеуі

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}, \qquad (11.25)$$

Егер σ беті $F(x, y, z) = 0$ теңдеуімен берілсе, онда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі жанама жазықтықтың теңдеуі

$$(x - x_0)\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = 0, \qquad (11.26)$$

ал нормалінің теңдеуі

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}}. \qquad (11.27)$$

61-мысал. $z = 1 + x^2 + y^2$ функциясының $M_0(1;2;3)$ нүктесіндегі жанама жазықтығының және нормалінің теңдеуін жазу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,\ M_0(1,2,3)$ нүктесінде $\frac{\partial z}{\partial x} = 2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4.$

Осыдан жанама жазықтығының теңдеуі:

$$z - 3 = 2(x - 1) + 4(y - 2) \text{ немесе } 2x + 4y - z - 7 = 0,$$

ал нормалінің теңдеуі

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 3}{-1}.$$

11.9 Екі айнымалы функцияның экстремумы

D аймағында анықталған $z = f(x, y)$ функциясы берілсін. Осы аймақта жататын $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің маңайында жататын барлық $M(x, y)$ нүктелерінде $f(x_0, y_0) > f(x, y)(f(x_0, y_0) < f(x, y))$ теңсіздігі орындалса, онда $z = f(x, y)$ функциясы M_0 нүктесінде максимум (минимум) мәнін қабылдайды. "Максимум" және "минимум" мәндері экстремум мәндері деп аталады. Үш және одан көп айнымалылардың функцияларының экстремумдары да осылайша анықталады. Кез келген дифференциалданатын екі айнымалы функция экстремум мәндерін тек оның барлық дербес туындылары нөлге тең болатын нүктелерінде ғана қабылдайды. Мұндай нүктелер стационарлық (тұрақты) нүктелер деп аталады. Мысалы, дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының стационарлық нүктесі $M_0(x_0, y_0)$

$$\begin{cases} f_x^{'}(x, y) = 0, \\ f_y^{'}(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (11.28)$$

жүйесін шешу арқылы анықталады. (1.28) – шарт $z = f(x, y)$ функциясының экстремум мәндерін қабылдауының шарты болып табылады. Яғни стационарлық нүктелердің барлығы бірдей экстремум нүктелері бола бермейді. Сондықтан олардың әрқайсысы төмендегі функцияның экстремум мәндерін қабылдауының жеткілікті шартын қанағаттандыру керек. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі $z = f(x, y)$ функциясының стационар нүктесі болсын.

$$\begin{aligned} &A = f_{xx}^{''}(x_0, y_0),\ B = f_{xy}^{''}(x_0, y_0),\ C = f_{yy}^{''}(x_0, y_0) \\ &\Delta = AC - B^2, \end{aligned} \qquad (11.29)$$

деп белгілейік. Егер стационарлық $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде:

а) $\Delta > 0$ және $A > 0$ болса, онда M_0 минимум нүктесі болады,
$\Delta > 0$ және $A < 0$ болса, онда M_0 максимум нүктесі болады;

б) $\Delta < 0$ болса, онда M_0 нүктесінде экстремум болмайды;

в) $\Delta = 0$ болса, онда бұл нүктеде экстремум болуы да, болмауы да мүмкін.

62-мысал. $z = 2x^2 - xy + 3y^2 - 5x + 7y$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - y - 5,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 6y + 7$$

болады, осыдан

$$\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ -x + 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің шешімі $x = 1,\ y = -1,\ M(1, -1)$ нүктесіндегі екінші ретті дербес туындылары

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$$

болады. Сонымен

$$\Delta = AC - B^2 = 4 \cdot 6 - (-1)^2 = 23 > 0,\ A > 0.$$

Яғни $M(1,-1)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды және ол

$$z_{\min} = z(M) = -6$$

болады.

11.10 Шартты экстремум. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

11.14-анықтама. $z = f(x,y)$ функциясының шартты экстремумы деп осы функцияның, x және y айнымалыларының $\varphi(x,y) = 0$ теңдеуімен байланысты болған жағдайдағы экстремум мәнін айтады. Мұндағы $\varphi(x,y) = 0$ теңдеуі байланыс теңдеуі деп аталады.

Шартты экстремумды табу үшін Лагранж функциясы деп аталатын $u(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$ функциясының экстремумын табу жеткілікті, мұндағы λ- анықталмаған тұрақты көбейткіш.

Лагранж функциясының экстремумының бар болуының қажетті шарты:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases} \qquad (11.30)$$

Осы үш теңдеуден тұратын жүйеден x, y және λ мәндерін табуға болады.

D тұйық облысында $z = f(x,y)$ функцияның ең үлкен M және ең кіші m мәндерін табу үшін:

а) D облысының ішінде жатқан барлық станционарлық нүктелерді тауып, осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептеу керек (бұл нүктелерде экстремум мәндерінің болуын не болмауын тексерудің қажеті жоқ);

б) D облысының шекарасында функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек;

в) барлық табылған мәндердің ең кішісін (бұл ең кіші мән) және ең үлкенін (бұл ең үлкен мән) таңдап аламыз.

63-мысал. $z = x^2 - \acute{o}^2$ функциясының байланыс теңдеуі $2x - y - 6 = 0$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек.

Шешуі. Лагранж функциясын қарастырайық:

$$u = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y - 6).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y - \lambda = 0, \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

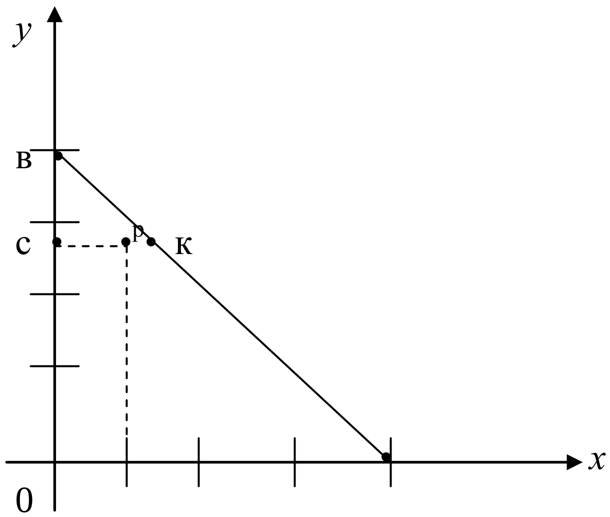
жүйесінен $\lambda = -4, x = 4, y = 2$ мәндері табылады. Осыдан $M(4, 2)$ нүктесінде $z = x^2 - ó^2$ функциясы шартты максимум мәнін қабылдайды және ол $z_{\max} = 12$ болады.

64-мысал. $z = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 10$ функциясының $ó = 0, x = 0,$ $3x + 4y = 12$ сызықтарымен шектелген тұйық D облысындағы (аймағындағы) ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Шешуі. Стационар (тұрақты) M нүктесін табайық.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x - ó - 4 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

Осы жүйеден $x = 1, y = 2, P(1, 2)$ нүктесі D облысының ішінде жатыр. $z(P) = z(1, 2) = 1.$



11.1 сурет.

Енді берілген функцияны D облысының шекарасында зерттейік. Облыс шекарасы *OA, AB* және *OB* кесінділерінен тұрады:

а) *OA* бөлігінде $y = 0, 0 \le x \le 4,$ осыдан $z = 3x^2 - 4x + 10, z'_x = 6x - 4 = 0,$

$$x = \frac{2}{3} \in [0, 4], \; N(\frac{2}{3}, 0), \; z(N) = 8\frac{2}{3};$$

OA кесіндісінің шеткі нүктелерінде $z(0) = z(0, 0) = 10, \; z(A) = z(4, 0) = 42;$

б) *OB* бөлігінде $x = 0, 0 \le y \le 3,$ осыдан

$z = 2y^2 - 7y + 10, \; z'_y = 4y - 7,$ $\qquad y = \dfrac{7}{4} \in [0, 3], \; C(0, \dfrac{7}{4}), \; z(C) = 4\dfrac{7}{8};$

OB кесіндісінің шеткі нүктелерінде $z(0)=10,\ z(B)=z(0,3)=7;$

AB бөлігінде $y=\frac{3}{4}(4-\tilde{o}),\ 0\le \tilde{o}\le 4,$

$z=3x^2-\frac{3}{4}x(4-x)+\frac{9}{8}(4-x)^2-4x-\frac{21}{4}(4-x)+10$ немесе

$z=\frac{39}{8}x^2-\frac{43}{8}x+7,\ z_x^{'}=\frac{39}{4}x-\frac{43}{4}=0,\ x=\frac{43}{39}=1\frac{4}{39}\in[0,4],\ y=2\frac{9}{52},\ K(1\frac{4}{39};2\frac{9}{52}),\ z(K)=1\frac{23}{312};$

AB кесіндісінің шеткі нүктеліріндегі мәндері белгілі.

Табылған $z(P),\ z(N),\ z(K),\ z(C),\ z(0),\ z(A),\ z(B)$ мәндерін салыстыра отырып, z функциясының D облысындағы ең үлкен мәні $M=z(A)=42,$ ал ең кіші мәні $m=z(P)=1$ болатындығын анықтаймыз.