ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш.ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ
ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСЫ

Э.Ұ. УРАЗМАГАМБЕТОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДЕН ЕСЕПТЕР ЖИНАҒЫ

Оқу құралы

Ақтау 2012

ӘОЖ 517(075.8)
ББК22.14я73
Пікір берушілер: Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті профессоры, ф.-м.ғ.д. С.Т. Мұхамбетжанов
Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті профессоры, ф-м.ғ.к. З.Ж. Жұманова
Алматы энергетика және байланыс институтының доценті, ф-м.ғ.к. М.Ж. Байсалова

Уразмагамбетова Э.Ұ.
У67 Дифференциалдық теңдеулерден есептер жинағы: Оқу құралы / Э.Ұ. Уразмагамбетова - Ақтау, Ш.Есенов атындағы КМТжИУ, 2012. - 91б.

ISBN 978-601-7349-23-3

Бұл оқу құралы Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінде оқитын математика мамандығының «Дифференциалдық теңдеулер» пәнінің бағдарламасына сәйкес жасалған.

ӘОЖ 517(075.8)
ББК22.14я73

Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің Оқу-әдістемелік Кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылды

ISBN 978-601-7349-23-3

КІРІСПЕ

Оқу құралы кредиттік технология бойынша жоғарғы оқу орнының математика, физика, информатика мамандықтары үшін, кредиттік оқу формасына даярланған.

Физикалық құбылыстарды зерттеу барысында айнымалы x пен оның функциясы y арасындағы байланысты табу қиынға соғады, бірақ функция мен оның туындылары арасындағы байланысты табуға болады. Ізделінді функция бір немесе бірнеше айнымалыға тәуелді болуы мүмкін. Егер ізделінді y функциясы бір айнымалыға тәуелді болса, онда дифференциалдық теңдеу қарапайым дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Дифференциалдық теңдеулер тарауын жақсы игерту, оларды шешу әдістерін жетік білдіру мақсатында бірінші ретті, жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер, олардың жүйелері бойынша теориялық бөлімінен анықтамалар, теоремалар, формулалар енгізіліп, типтік тапсырмалардың шешу үлгілері талқыланады, сонымен қатар үлгі-мысалдардың шешу жолдары көрсетіліп, соңында өзбетімен орындау үшін жаттығулар жауаптарымен берілген. Олардың жеткілікті сан мөлшері осы оқу құралын тәжірибелік сабақтарда жаттығулар жинағы ретінде қолдануға мүмкіндік береді. Аталған мамандықтарда оқитын әрбір студент белгілі бір процестерді тану, оны игеру барысында айнымалылар арасындағы функционалдық тәуелділіктің аналитикалық мәнімен жиі кездеседі. Сондай-ақ, айнымалылар арасындағы байланысты іздеуге арналған көпшілік есептер белгісіз функциялардың туындысы немесе дифференциалы қатыстырылған теңдеулерді шешуге әкеледі. Дифференциалдық теңдеулер тарауы туынды және интегралдар тарауымен тығыз байланысты болғандықтан осы тараулардың әрбір элементін жетік білу қажеттілігі туындайтынын ескерте кеткен жөн.

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

1.1 Негізгі түсініктер

1-анықтама. Дифференциалдық теңдеу деп айнымалы шамаға, ізделінді функцияға және оның туындыларына (немесе дифференциалына) байланысты болатын теңдеуді айтады.

Егер айнымалы шама біреу болса, онда теңдеуді қарапайым дифференциалдық теңдеу, ал айнымалы шама екеу немесе одан көп болса, онда оны дербес туындылы дифференциалдық теңдеу деп атайды.

2-анықтама. Дифференциалдық теңдеудің құрамына енетін туындының ең үлкен ретін дифференциалдық теңдеудің реті дейді.
Мысалы:

а) $xy' + y = x^2 + 1$ - бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу;

ә) $(y')^2 + y''y = 0$- екінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу;

б) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$ - бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу;

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$-екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу;

г) $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$-n-ші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі.

Енді бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеуді қарастырайық. Ары қарай «қарапайым дифференциалдық теңдеу» орнына «дифференциалдық теңдеу» деп айтылады.

Дифференциалдық теңдеуді шешу дегеніміз-сол теңдеуді қанағаттандыратын барлық шешімдерді табу.

Мысалға, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = y$ теңдеудің шешімі $y = e^x$ және $y = e^{-x}$, себебі $(e^x)'' \equiv e^x$ және $(e^{-x})'' \equiv e^{-x}$.

Дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің графигі интегралдық қисық деп аталады. Дифференциалдық теңдеудің шешімін іздеу процесін дифференциалдық теңдеуді интегралдау деп атайды.

Егер теңдеу айқын түрде немесе қандайда бір шектік $\phi(x, y) = 0$ теңдеуі түрінде айқын емес түрде шешілсе, онда теңдеу интегралданған деп аталады.
Дифференциалдық теңдеудің шешімін анықтайтын шектік $\phi(x, y) = 0$ теңдеуі осы теңдеудің интегралы деп аталады.

Бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу деп

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

немесе

$$y' = f\,(x,\ y) \qquad (1.1')$$

$$M(x,y)\,d\,x + N\,(x,y)\,d\,y = 0. \qquad (1.1'')$$

теңдеуін айтады.

Бірінші ретті $\frac{dy}{dx} = f\,(x,y)$ дифференциалдық теңдеуді шешсек:

y функциясын интегралдау арқылы табылады:

$$y = \int f\,(x)dx + C\,.$$

Егер $x = x_0$ мәнінде $y = y_0$ болса, онда

$$y = \int_{x_0}^{x} f\,(x)dx + y_0\ .$$

$\frac{dy}{dx} = f\,(x,y)$ дифференциалдық теңдеуі туындының мәні мен *(x,y)* координаталар нүктелері арасында тәуелділік орнатады. Осылайша $\frac{dy}{dx} = f\,(x,y)$ теңдеуі өріс бағытын анықтайды.

3-анықтама. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі деп төмендегі шарттарды қанағаттандыратын кез келген C тұрақтыға байланысты $y = \varphi(x,C)$ түрінде берілген функцияны айтады:

а) осы шешім C тұрақтының кезкелген сандық мәнінде берілген теңдеудің шешімі болады;

ә) қандай да болмасын $y(x_0) = y_0$ алғашқы шарты үшін жалғыз $C = C_0$ сандық мәні табылады және осы шартты қанағаттандыратын $y = \varphi(x,C)$ функциясы берілген теңдеудің шешімі болады.

Егер дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі

$$\Phi(x,y,C) = 0 \qquad (1.2)$$

түрінде берілсе, онда оны дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы дейді.

$C = C_0$ сандық мәні үшін $y = \varphi(x,C)$ жалпы шешімінен алынған $y = \varphi(x,C_0)$ шешімін дербес шешім дейді.

Осы сияқты $\Phi(x,y,C_0) = 0$ интегралын дифференциалдық теңдеудің дербес интегралы дейді.

$y(x_0) = y_0$ алғашқы шартын қанағаттандыратын $y' = f\,(x,\ y)$ теңдеуінің дербес шешімін (интегралын) табу есебі Коши есебі деп аталады.

ОХУ жазықтығындағы дифференциалдық теңдеудің $y = f(x)$ шешімінің графигін осы теңдеудің интегралдық қисығы дейді.
Сонымен ОХУ жазықтығында бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің $y = \varphi(x, C)$ жалпы шешімінің графигі бір ғана C параметрге байланысты интегралдық қисықтар жиынтығы, ал $y(x_0) = y_0$ алғашқы шартты қанағаттандыратын $y = \varphi(x, C_0)$ дербес шешімінің графигі $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтетін интегралдық қисық болады.

1-теорема. Егер $f(x, y)$ және $\dfrac{\partial f(x, y)}{dy}$ функциялары $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің аймағында үздіксіз болса, онда Коши есебінің

$$y' = f(x, y)$$

$M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің аймағында бір ғана шешімі бар.

$\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ үшін $\dfrac{dy}{dx} = const$ теңдеуін қанағаттандыратын геометриялық нүктелер жиынын *изоклина* деп атайды, демек $f(x, y) = k$ изоклиналарының теңдеуі болып табылады.

$$k = tg\alpha, \ \alpha = arctg\, k.$$

Берілген дифференциалдық теңдеудің изоклиналарын құрып алғаннан кейін берілген теңдеудің қисықтар бірлестігін жуықтап табуға болады. Изоклиналарды қиып өтетін барлық қисықтар бірлестігі Ox өсімен бірдей бұрыш құрайды.

1-мысал. $y = x^2 + \dfrac{c}{x}$ функциясы $x y' + y = 3x^2$ дифференциалдық теңдеуінің шешімі бола ма?
Шешуі: Алдымен берілген функцияның туындысын табамыз.

$$y' = 2x - \frac{c}{x^2}.$$

Енді y, y' -ті теңдеуге қойсақ, онда $x\left(2x - \dfrac{c}{x^2}\right) + x^2 + \dfrac{c}{x} = 3x^2$,

$$2x^2 - \frac{c}{x} + x^2 + \frac{c}{x} = 3x^2,$$

$$3x^2 \equiv 3x^2$$

болады. Яғни берілген функция дифференциалдық теңдеудің шешімі болады.
Көрсетілген функциялар берілген дифференциалдық теңдеудің шешімі бола ма?

1. $y = \sqrt{x^2 + c}$, $\quad y y' = x.$ $\qquad$ 2. $e^{y/x} = c y$, $\quad x y y' = y^2 + x^2 y'.$

3. $y = cx + \frac{1}{c}$, $\quad y' - \frac{y}{x}.+\frac{1}{xy} = 0.$ 4. $y = (x+c)e^{-4x}$, $\quad y' + 4y = e^{-4x}.$

5. $y = \frac{c^2 - x^2}{2x}$, $\quad x + y + xy' = 0.$

Жауаптары: 1. Болады. 2. Болмайды. 3. Болмайды. 4. Болады. 5. Болады.

1.2 Айнымалыларын бөліп алуға болатын дифференциалдық теңдеулер

$$y' = f_1(x)\cdot\ f_2(y) \tag{1.3}$$

түрінде берілген теңдеуді айнымалыларын бөліп алуға болатын дифференциалдық теңдеу дейді.

(1.3) теңдеуінің екі жағын $f_2(y)$ -ке бөліп, dx -қа көбейтсек, онда

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Оны интегралдасақ

$$\int\frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$$

болады. Яғни (1.3) теңдеуінің жалпы интегралын аламыз.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді мына түрде жазуға болады

$$M(x,y)dx = N(x,y)dy\,. \tag{1.3$'$}$$

Дифференциалдық теңдеудің бұлай жазылуының артықшылығы мынада: $(1.3')$ теңдеуінде x пен y айнымалылары тең құқықта қатысады. Айталық, $M(x,y), N(x,y)$ функцияларын $M(x,y) = M_1(x)M_2(y)$ және $N(x,y) = N_1(x)N_2(y)$ түрінде жазуға мүмкіндік болсын. Сонда $(1.3')$ теңдеуді айнымалылары ажыратылатын теңдеу деп атайды. Енді

$$M_1(x)M_2(y)dx = N_1(x)N_2(y)dy$$

теңдеуінің екі жағын $M_2(y)N_1(x)$ көбейтіндісіне бөлсек:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{M_2(y)}{M_2(y)} = 0 \tag{1.3$''$}$$

теңдеуі шығады. $(1.3'')$ теңдеуде x пен y айнымалылары ажыратылған: dx дифференциалының алдындағы коэффициент тек қана x- ке, ал dy алдындағы - тек қана y- ке байланысты.
Оны интегралдасақ

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = C$$

болады. Яғни $(1.3')$ теңдеуінің жалпы интегралын аламыз.

2-мысал. $y' = 2xy$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ немесе $\dfrac{dy}{y} = 2x\,dx.$

Екі жағын интегралдасақ

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int x\,dx + \ln c, \quad \ln y = x^2 + \ln c.$$

Немесе берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі

$$y = ce^{x^2}.$$

3-мысал. $x(y^2+1)dx + y(x^2-1)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі. Теңдеудің екі жағын $(y^2+1)\cdot(x^2-1)$ -ке бөлеміз.

$$\frac{x}{x^2-1}dx + \frac{y}{y^2+1}\,dy = 0.$$

Оны интегралдасақ

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx + \int \frac{y}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\ln c$$

$$(x^2-1)\cdot(y^2+1) = C.$$

Яғни $(x^2-1)\cdot(y^2+1) = C$ - теңдеудің жалпы интегралы.

4-мысал. $y(1) = 5$ алғашқы шартын қанағаттандыратын $y' + \dfrac{y}{x} = 0$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табу керек.

Шешуі. Берілген теңдеуді $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ түрінде жазып, екі жағын $\frac{1}{y}dx$ -ке көбейтсек $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$ болады. Теңдеуді интегралдасақ:

$$\int\frac{d\,y}{y}=-\int\frac{d\,x}{x}+\ln C,\quad \ln y=\ln x+\ln C \quad \text{немесе} \quad y=\frac{C}{x}.$$

Алғашқы шартты пайдалансақ $5=\frac{C}{1}$, яғни $C=5$.

Сондықтан алғашқы шартты қанағаттандыратын дербес шешім $y=\frac{5}{x}$.

5-мысал. Қисық (2;-1) нүктесі арқылы өтеді және кезкелген нүктесіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті жанасу нүктесінің ординатасының квадратына к=3 коэффициентімен пропорционал. Қисықтың теңдеуін табыңыз.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $y'=\kappa\,y^2,\quad \kappa=3\ \Rightarrow\ y'=3y^2.$

Бұл айнымалылары ажыратылған теңдеу $\frac{d\,y}{d\,x}=3y^2,\quad \frac{d\,y}{y^2}=3d\,x$

Интегралдасақ, онда $-\frac{1}{y}=3x+C$

$x=2,\quad y=-1$ болғанда $1=6+C\ \Rightarrow\ C=-5.$

Онда қисықтың теңдеуі $-\frac{1}{y}=3x-5,\ \frac{1}{y}=5-3x,$ ал $y=\frac{1}{5-3x}.$

Бұл гиперболаның теңдеуі.

6-мысал. Тынық суда жылдамдығы $\vartheta_0=5\,м/с$ болатын моторлы қайық моторын сөндіріп, $t=20$ секундтан кейін жылдамдығы $\vartheta_1=3\,м/с$ -ке дейін төмендеді. Судың қарсылық күші жылдамдыққа тура пропорционал деп есептеп, 2 минуттан кейінгі қайықтың жылдамдығын табу керек.

Шешуі. Ньютон заңы бойынша

$$\frac{d\vartheta}{d\,t}=k\,\vartheta$$

немесе

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta}=k\,dt.$$

Оны интегралдасақ

$$\ln \vartheta = k\,t + \ln C$$

немесе

$$\vartheta = C\,e^{k\,t}, \quad t_0 = 0,\ \ \vartheta = \vartheta_0 = 5$$

осыдан

$$\vartheta = 5e^{k\,t}, \quad t_1 = 20\,сek,\ \ \vartheta = \vartheta_1 = 3 = 5\,e^{20k},\ \ k = \frac{1}{20}\ln 0{,}6$$

яғни

$$\vartheta = 5e^{\frac{1}{20}t\cdot\ln 0{,}6} = 5\cdot(0{,}6)^{0{,}05t}$$

енді

$$t_2 = 2\,мин \ = 120\,сek.$$

болғанда

$$\vartheta_2 = 5\cdot(0{,}6)^{0{,}05\cdot 120} 5\cdot(0{,}6)^{6} = 0{,}23\,м/сек.$$

Жауабы: 2 минуттан кейін моторлы қайықтың жылдамдығы 0,23 м/сек болады.

7-мысал. Оқ $\vartheta_0 = 400\,м/с$ жылдамдықпен қалың қабырғаға кіріп кетеді. Қабырға кедергісі оққа кері үдеу береді, ол жылдамдық квадратына $k = 7\,м^{-1}$ коэффициентімен пропорционал. Қабырғаға кіргеннен кейін 0,001 секунд өткенде оқ жылдамдығы қандай болды?

Шешуі. Ньютон заңы бойынша

$$m\frac{d\vartheta}{d\,t} = -k\,\vartheta^2, \qquad \frac{d\vartheta}{d\,t} = -K\vartheta^2, \quad K = \frac{k}{m}.$$

немесе

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta^2} = -7\,dt.$$

Оны интегралдасақ

$$-\frac{1}{\vartheta} = -7t - C, \qquad \frac{1}{\vartheta} = 7t + C,$$

немесе

$$t_0 = 0,\ \ \vartheta = \vartheta_0 = 400, \qquad C = \frac{1}{400},$$

яғни

$$\vartheta = \frac{1}{7t + \frac{1}{400}} = \frac{400}{2800t + 1}$$

енді

$$t_2 = 0{,}001\,сek.$$

болғанда

$$\vartheta_1 = \frac{400}{2800 \cdot 0{,}001 + 1} = 105{,}26\, м/сек.$$

Жауабы: Қабырғаға кіргеннен кейін $0{,}001$ секунд өткенде оқ жылдамдығы 105,26 м/сек. болды.

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін (интегралын) табу керек:

6. $y' = x^3 y^3$; 7. $y' = -5y^2$; 8. $y' = 4y$; 9. $y' = -5y$; 10. $y' = \frac{2y}{x}$;

11. $y' = -\frac{3y}{x}$; 12. $y' = \frac{y}{4x}$; 13. $y' = \frac{y}{2\sqrt{x}}$; 14. $y' = tg\, x \cdot tg\, y$;

15. $x(y^2+5)dx + y\,dy = 0$; 16. $(x^2+9)dy + y\,d\,x = 0$; 17. $x \cdot \sqrt{1+y^2}\,dx + y \cdot \sqrt{1+x^2}\,dy = 0$;

18. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$; 19. $y'\,tg\,x = y$; 20. $tg\,x \cdot \sin^2 y\,dx + \cos^2 x \cdot ctg\,y\,dy = 0.$

Жауаптары: 6. $\frac{1}{y^2} = C - \frac{x^4}{4}$; 7. $y = \frac{1}{C+5x}$; 8. $y = C e^{4x}$; 9. $y = C e^{-5x}$;

10. $y = C x^2$; 11. $y = \frac{C}{x^3}$; 12. $y = C \sqrt[4]{x}$; 13. $y = C e^{\sqrt{x}}$; 14. $\sin y \cdot \cos x = C$;

15. $y^2 + 5 = C e^{-x^2}$; 16. $y = C e^{-\frac{1}{3} arctg \frac{x}{3}}$; 17. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$;

18. $y = \frac{C-x}{1+Cx}$; 19. $y = C \sin x$; 20. $ctg^2 y = tg^2 x + C.$

Алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу керек.

21. $y' = y^2$, $y(0) = 0{,}5$; 22. $y' = 5y$, $y(1) = 3$; 23. $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 1$;

24. $(xy^2 + x)dx + (x^2 y - y)dy = 0$, $y(0) = 1$; 25. $y\,y' = -2x \sec y$, $y(0) = 0$;

26. $M_0(3{,}4)$ нүктесі арқылы өтетін, координата өстерінің арасында жатқан жанаманың кесіндісін жанасу нүктесі тең екіге бөлетіндей қисықтың теңдеуін жазу керек.

27. Заттың уақыт өткен сайын ескіруіне байланысты оның бағасының төмендеу жылдамдығы оның бағасына тура пропорционал. Алғашқы кезде заттың бағасы m_0-ге тең. Уақытқа байланысты заттың бағасының өзгеру заңдылығын табу керек.

Жауаптары: 21. $y = \frac{1}{2-x}$; 22. $y = 3e^{5(x-1)}$; 23. $y = tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

24. $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$; 25. $x^2 + y \sin y + \cos y = 1$; 26. $y = \frac{12}{x}$; 27. $m = m_0 e^{-kt}$.

1.2. Айнымалылары бөлінетін теңдеуге келтіруге болатын дифференциалдық теңдеу

$$y' = f\,(a\,x + b\,y + c) \tag{1.4}$$

дифференциалдық теңдеуі (1.3) теңдеуіне келтіруге болатын теңдеу болып табылады. Бұл жағдайда $a\,x + b\,y + c = t$ ауыстыру әдісі қолданылады, мұндағы $t -$ жаңа ізделінетін функция.

$$t' = a\ + b\,y'$$

туындысын тауып, (1.4) теңдеуіне қойғанда

$$t' = a\ + b\cdot f(t)$$

теңдеуі шығады. Бұл теңдеу айнымалылары ажыратылатын теңдеу болып табылады.

8-мысал. $y' = (4x + y + 2)^2$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі. $t = 4x + y + 2$ деп белгілеп, $t' = 4 + y'$ табайық.

$$t' = 4 + t^2 \quad \text{немесе} \quad \frac{d\,t}{4 + t^2} = d\,x$$

Оны интегралдасақ, онда

$$\int \frac{d\,t}{4 + t^2} = \int dx + \frac{1}{2}C, \qquad \frac{1}{2}arctg\,\frac{t}{2} = x + \frac{1}{2}C, \quad arctg\,\frac{t}{2} = 2\,x + C, \quad t = 2\,tg\,(2\,x + C).$$

Осыдан
$4x + y + 2 = 2\,tg\,(2\,x + C)$ немесе $y = 2\,tg\,(2\,x + C) - 4\,x - 2$ теңдеудің жалпы шешімі.
Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табу керек:
28. $y' = (x + y)^2$; 29. $y' = 2\,x + y + 4$; 30. $y' = (8\,x + 2\,y + 1)^2$.
Жауаптары: 28. $y = tg(x + C) - x$; 29. $y = C\,e^x - 2\,x - 6$; 30. $y = tg(4\,x + C) - 4\,x - \frac{1}{2}$.

1.4 Қос аргумент бойынша біртекті дифференциалдық теңдеу

4-анықтама. Егер кез келген λ саны үшін

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \tag{1.5}$$

теңдігі орындалса, онда $f(x, y)$ x және y айнымалылары бойынша n өлшемді біртекті функция деп, *ал* n санын біртекті функцияның көрсеткіші деп атайды. Мәселен, $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f(x,y) = \frac{x^3}{y^2}$ және $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ функцияларының біртектілік көрсеткіштері сәйкес 2-ге, 1-ге және 0-ге тең.

5-анықтама. Егер

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

дифференциалдық теңдеуінің оң жағы 0 көрсеткішті біртекті функция болса, онда дифференциалдық теңдеудің өзін біртекті дифференциалдық теңдеу деп атайды.

Біртекті дифференциалдық теңдеуді шешудің әдісі мынадай :

$$y = xu$$

теңдігі арқылы жаңадан $u(x)$ функциясын енгіземіз. Сонда:

$$f(x,y) = f(x,xu) = f(1,u)$$

Осы алмастырудан кейін берілген дифференциалдық теңдеу айнымалылары бөлектенетін дифференциалдық теңдеу болады.

6-анықтама. Егер $M(x,y)$ және $N(x, y)$ функциялары бірдей өлшемді біртекті функциялар болса, онда $M(x,y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ теңдеуін қос аргумент бойынша біртекті дифференциалдық теңдеу дейді.

9- мысал. $y' = \frac{y}{x} - 1$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Дифференциалдық теңдеудің оң жағы 0 көрсеткішті біртекті функция. $y = xu$ ауыстыруын қолданамыз:

$$u + xu' = u - 1$$

Бұдан

$$du = -\frac{dx}{x}$$

Интегралдасақ: $u = C - \ln x.$

Енді бастапқы ізделінді $y = y(x)$ функциясына көшсек:

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = x\left(C - \ln x\right)$$

берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі шығады.

10- мысал. $\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xy\,dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $M(x,y) = x^2 + y^2$ және $N(x,y) = -2xy$ функциялары бірдей өлшемді біртекті функциялар. $y = xu$ ауыстыруын қолданамыз. Осыдан $dy = x\,du + u\,dx$, яғни

$$\left(x^2 + x^2u^2\right)dx - 2x^2u\left(u\,dx + x\,du\right) = 0$$

$$\left(x^2 + x^2u^2 - 2x^2u^2\right)dx - 2x^3u\,du = 0$$

$$x^2\left(\left(1 - u^2\right)dx - 2xu\,du\right) = 0$$

немесе $\frac{dx}{x} + \frac{2u\,du}{u^2 - 1} = 0$

оны интегралдасақ, онда $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2u\,du}{u^2 - 1} = \ln C$

$$\ln x + \ln(u^2 - 1) = \ln C, \quad x\left(u^2 - 1\right) = C, \quad x\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = C, \quad y^2 - x^2 = Cx$$

теңдеудің жалпы интегралы.

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табу керек.

31. $y' + \frac{y}{x} = -1;$ 32. $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1;$ 33. $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2};$

34. $\left(xy + y^2\right)dx + \left(2xy - x^2\right)dy = 0;$ 35. $y' = \frac{x + y}{x - y};$ $\left(x^2 + 9\right)dy + y\,dx = 0;$

36. $\left(xy + y^2\right)dx - \left(2x^2 - xy\right)dy = 0;$ 37. $\left(2x^2 + y^2\right)dx - xy\,dy = 0.$

Жауаптары: 31. $y = x\ln\frac{C}{x};$ 32. $y = x\,tg\left(\ln x + C\right);$ 33. $\frac{x^2}{2y^2} + \ln y = C;$

34. $y^2 e^{\frac{x}{y}} = Cx;$ 35. $arctg\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + C;$ 36. $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}};$

37. $\frac{y^2}{4x^2} = \ln x + C.$

Алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу керек.

38. $\left(y + x\,tg\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx - x\,dy = 0, \qquad y(1) = \frac{\pi}{2};$ 39. $y' = 2\left(\frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right), \qquad y(-1) = -1;$

40. $\left(4x^2 + xy + y^2\right)dx - x^2\,dy = 0, \quad y(1) = 2.$

Жауаптары: 38. $y = x \cdot \arcsin x$; 39. $4\sqrt{xy} = x^2 + y + 4x$; 40. $arctg\,\frac{y}{2x} - 2\ln|x| = \frac{\pi}{4}$.

1.5 Қос аргумент бойынша біртекті теңдеуге келтірілетін дифференциалдық теңдеулер

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

дифференциалдық теңдеуі қос аргумент бойынша біртекті теңдеуге келтіруге болатын теңдеу болып табылады.

Егер $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ болса, онда $a_1x + b_1y = t$ айнымалысын ауыстыру арқылы айнымалылары бөлінетін теңдеу шығады.

Егер $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ болса, онда $x = \bar{x} + h_1, \quad y = \bar{y} + h_2$ ауыстыруы арқылы қос аргументі бойынша біртекті теңдеуге келеді, мұндағы h_1, h_2 сандары $\begin{cases} a_1\,h_1 + b_1\,h_2 + c_1 = 0, \\ a_2\,h_2 + b_2\,h_2 + c_2 = 0 \end{cases}$ жүйесінің шешімі.

11-мысал. $y' = \frac{2x - 3y + 1}{4x - 6y + 5}$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0,$ сондықтан $z = 2x - 3y, \quad z' = 2 - 3y'.$

Яғни, $y' = \frac{z+1}{2z+5}$ болғандықтан $\frac{dz}{dx} = z' = 2 - 3\frac{z+1}{2z+5} = \frac{z+7}{2z+5}$ бұл айнымалылары бөлінген теңдеу. Осыдан $\frac{(2z+5)dz}{z+7} = dx.$

Енді интегралдасақ, онда

$$\int \frac{2z+5}{z+7}\,dz = \int dx + C$$

$$\int\left(2 - \frac{9}{z+7}\right)dz = x + C$$

$$2z - 9\ln|z+7| = x + C$$

$$4x - 6y - 9\ln|z+7| = x + C$$

$$3x-6y-9\ln|z+7|=C$$

немесе $x-2y-3\ln|z+7|=C$ дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы.

12-мысал. $y'=\dfrac{x+7y+5}{9x-y-19}$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $\begin{vmatrix}1 & 7\\ 9 & -1\end{vmatrix}\neq 0,$ сондықтан $\begin{cases}x=\bar{x}+h_1,\\ y=\bar{y}+h_2\end{cases}$ жаңа айнымалыларын енгізейік.

$\begin{cases}h_1+7h_2+5=0,\\ 9h_1-h_2-19=0\end{cases}$ осыдан, $h_1=2,\ h_2=-1.$

Сондықтан $\begin{cases}x=\bar{x}+2,\\ y=\bar{y}-1\end{cases}$ немесе $\begin{cases}\bar{x}=x-2,\\ \bar{y}=y+1\end{cases}$

$y'=\dfrac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\dfrac{\bar{x}+7\bar{y}}{9\bar{x}-\bar{y}}$ бұл қос аргументі бойынша біртекті теңдеу. Сондықтан $\bar{y}=t\bar{x}$ ауыстыруын қолдансақ

$$\bar{x}\frac{dt}{d\bar{x}}+t=\frac{\bar{x}+7t\bar{x}}{9\bar{x}-t\bar{x}}$$

немесе

$$\bar{x}\frac{dt}{d\bar{x}}=\frac{1+7t}{9-t}-t,$$

$$\bar{x}\frac{dt}{d\bar{x}}=\frac{1-2t+t^2}{9-t},$$

$$\frac{(9-t)dt}{1-2t+t^2}=\frac{d\bar{x}}{\bar{x}}$$

Оны интегралдасақ, онда

$$\int\frac{(9-t)dt}{1-2t+t^2}=\int\frac{d\bar{x}}{\bar{x}}+C,$$

$$\int\left(\frac{8}{(t-1)^2}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\ln x+C,$$

$$-\frac{8}{t-1}-\ln|t-1|=\ln\bar{x}+C,$$

$$\frac{8}{1-t}=\ln|\bar{x}t-\bar{x}|+C,$$

$t=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ орнына қойсақ, онда

$$\frac{8}{1-\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}=\ln|\bar{y}-\bar{x}|+C$$

немесе

$$\frac{8\bar{x}}{\bar{x}-\bar{y}}=\ln|\bar{y}-\bar{x}|+C.$$

$\bar{x}=x-2,\quad \bar{y}=y+1$ орнына қойсақ, онда

$$\frac{8(x-2)}{x-y-3}=\ln|y-x+3|+C$$

теңдеудің жалпы интегралы.

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табу керек:

41. $y'=\frac{2x+3y-1}{-4x-6y+5}$; 42. $y'=\frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$; 43. $y'=\frac{x-2y+5}{-2x+y-4}$;

44. $y'=\frac{2x+y+1}{x+2y-1}$; 45. $y'=\frac{x+6y-7}{8x-y-7}$; 46. $y'=\frac{x+2y+1}{4x-y-5}$.

Жауаптары: 41. $x+2y+7\ln|2x+3y-15|=C$; 42. $8y-4x+\ln|4x+8y+5|=C$;

43. $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$; 44. $(x+y)(x-y+2)^3=C$; 45. $y-x=Ce^{\frac{7(x-1)}{x-y}}$;

46. $y-x+2=Ce^{\frac{3(x-1)}{x-y-2}}$.

1.6 Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

7-анықтама. Егер берілген дифференциалдық теңдеуде ізделінді функция $y=y(x)$ және оның туындысы $y'=\frac{dy}{dx}$ бірінші дәрежеде енсе, онда мұндай дифференциалдық теңдеуді *бірінші ретті сызықты теңдеу* деп атайды. Оның жалпы түрі мынадай:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), \tag{1.6}$$

мұндағы $Q(x)$ функциясы (1.6) теңдеудің оң жағы деп аталады. Егер $Q(x)=0$ болса, онда (1.6) теңдеу біртекті деп, ал $Q(x)\neq 0$ болса, онда біртекті емес деп аталады.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімін табу үшін екі әдіс қолданылады. Олар: кез келген тұрақтыны варияциялау және ауыстыру әдісі.

Бірінші, тұрақтыны варияциялау (Лагранж) әдісі.

Берілген біртекті емес (1.6) теңдеуді шешудің орнына оған сәйкес біртекті теңдеуді шешеміз:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \tag{1.7}$$

Бұл – айнымалылары бөлектенетін теңдеу. Оның жалпы шешімін тапсақ

$$y=ce^{-\int P(x)dx} \tag{1.8}$$

(1.8) теңдікпен анықталған y функциясы біртекті емес (1.6) теңдеудің шешімі бола алмайды, өйткені оны осы теңдеуге апарып қойсақ, теңдіктің сол жағы 0-ге тең болар еді де, ал оның оң жағында 0-ден өзгеше $Q(x)$ функциясы қалып қояр еді. Енді (1.8) теңдіктегі C тұрақтысын x- ке тәуелді деп қарап, оны $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ теңдеудің шешімі болатындай етіп таңдап аламыз, екінші сөзбен айтқанда тұрақтыны варияциялаймыз. Сөйтіп, (1.8) теңдігінен туынды алып, оны (1.6) теңдеуге апарып қойсақ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int Pdx}-C(x)P(x)e^{-\int Pdx}, \qquad \frac{dC(x)}{dx}e^{-\int Pdx}=Q(x).$$

Бұдан :

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1 \tag{1.9}$$

Сөйтіп, $C(x)$ функциясы қойып отырған талабымызға орай табылды. Міне, осыларды ескеріп, берілген бірінші ретті дифференциалдық сызықты теңдеудің жалпы шешімі табылды:

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1\right].$$

Екінші, Бернулли әдісі.

Кейде біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеуді шешу үшін $y=uv$ алмастыруын қолданамыз, яғни шешімді белгісіз екі функцияның көбейтіндісі түрінде іздейміз. Мұнда, туындыны $y'=u'v+uv'$ өрнегімен алмастырамыз.

Теңдеуге апарып қойсақ, онда

$$u'v + uv' + P(x)\, uv = Q(x).$$

Ендігі жерде v функциясын $v' + P(x)v = 0$ теңдеуінің дербес шешімі ретінде таңдап аламыз. Яғни $v = e^{-\int P(x)dx}$

Сондықтан алдыңғы теңдеуіміз $u'v = Q(x)$ болады. Немесе

$$u' = Q(x)\, v^{-1} = Q(x)\, e^{\int P(x)dx}.$$

Осыдан $u = C + \int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx.$

Яғни $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C\right]$ берілген теңдеудің жалпы шешуі болады.

13-мысал. $y' - \dfrac{y}{x} = x\cos x$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Лагранж әдісін қолданамыз. Берілген теңдеуге сәйкес біртекті $y' - \dfrac{y}{x} = 0$ теңдеуін интегралдайық.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \qquad \ln y = \ln x + \ln C, \qquad y = C\, x.$$

Енді берілген теңдеудің жалпы шешімі $y = C(x) \cdot x$ түрінде ізделінеді.

$y' = C'(x) \cdot x + C(x)$ өрнегімен алмастырамыз

$$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{C(x) \cdot x}{x} = x\cos x,$$

$$C'(x) \cdot x = x\cos x, \quad C'(x) = \cos x$$

Осыдан

$$C(x) = \sin x + C_1.$$

Сонымен $y = x\,(\sin x + C_1)$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

14-мысал. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бернулли әдісін қолданайық. $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2} \text{ немесе } u'v + u\,(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$$

Ендігі жерде v функциясы $v' + 2xv = 0$ теңдеуінің дербес шешімі болғандықтан $\frac{dv}{v} = -2x\,dx$, $\ln v = -x^2$ немесе $v = e^{-x^2}$.

Енді u функциясын табу үшін $u'v = xe^{-x^2}$ теңдеуін қарастырамыз.

$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$ немесе $u' = x$

осыдан $u = \int x\,dx + C = \frac{x^2}{2} + C.$

Сонымен $y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

15-мысал. $y(4) = -1$ алғашқы шартын қанағаттандыратын $y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табу керек.

Шешуі. Алдымен берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі табылады.

$y = uv$, $y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \sqrt{x}, \quad u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = \sqrt{x}.$$

v функциясы $v' + \frac{v}{x} = 0$ теңдеуінің дербес шешімі болғандықтан $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, $\ln v = -\ln x$, $v = \frac{1}{x}$.

Енді u функциясын табу үшін $u'v = \sqrt{x}$ теңдеуін қарастырамыз.

$$u'\frac{1}{x} = \sqrt{x} \text{ немесе } u' = x\sqrt{x},$$

осыдан $u = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C.$

Сонымен $y = \left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C\right)\cdot\frac{1}{x} = \frac{2}{5}x\sqrt{x} + \frac{C}{x}$ берілген теңдеудің жалпы шешімі. Енді берілген алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімді табайық. $x = 4$, $y = -1$ болғандықтан $-1 = \frac{2}{5}4\sqrt{4} + \frac{C}{4}$, $C = -16{,}8.$

Осыдан $y = 0{,}4x\sqrt{x} - \frac{16{,}8}{x}$ берілген дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі.

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табу керек.

47. $y' - \frac{2y}{x} = x^3;$ 48. $y' - 2xy = e^{x^2} \cos x;$ 49. $y' + \frac{5}{x} y = \frac{8}{x^5};$

50. $y' \cos x + y = tg\, x;$ 51. $y' + y \cos x = \sin 2x;$ 52. $y' - y \cdot th\, x = ch^2 x;$

53. $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x;$ 54. $y' - \frac{2xy}{x^2+3} = (x^2+3) cos\, x;$ 55. $xy' = y + x^2;$

56. $y' + 3y\; tg\, 3x = \sin 6x.$

Жауаптары: 47. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) \cdot x^2;$ 48. $y = (\sin x + C) \cdot e^{x^2};$ 49. $y = \frac{1}{x^5}(8x + C);$

50. $y = tg\, x - 1 + Ce^{-tg\, x};$ 51. $y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x};$ 52. $y = (C - sh\, x) ch\, x;$

53. $y = C\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1;$ 54. $y = (\sin x + C) \cdot (x^2 + 3);$ 55. $y = Cx + x^2;$

56. $y = \cos 3x \cdot (C - \frac{2}{3} \cos 3x).$

Алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу керек.

57. $y' - y \cdot tg\, x = cos\, x,$ $y(0) = 2;$ 58. $y' + \frac{2y}{x} = x^3,$ $y(1) = 0;$

59. $y' + \frac{8}{x} y = \frac{5}{x^8},$ $y(1) = 0;$ 60. $y' + \frac{y}{1+x^2} = \frac{arctg\, x}{1+x^2},$ $y(0) = 0.$

Жауаптары: 57. $y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + 2\right) \cdot \frac{1}{\cos x};$ 58. $y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6x^2};$

59. $y = 5(x - 1)x^8;$ 60. $y = arctg\, x - 1 + e^{-arctg\, x}.$

1.7 Бернулли теңдеуі

8-анықтама. $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ түріндегі дифференциалдық теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады, мұндағы - $P(x), Q(x)$берілген үзіліссіз функциялар, n≠0, n≠1. Бернулли теңдеуінің сызықтық теңдеуден айырмашылығы оң жақ бөлігінде у-тің белгілі бір дәрежесі бар, шешілуі сызықтық теңдеулер сияқты жүргізіледі. Шешімін табу үшін теңдеудің екі жағын да y^n-ге бөлеміз:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)y}{y^n} = y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \tag{1.10}$$

$z = y^{1-n},\; z' = (1-n)y^{-n}y'$ алмастыруы арқылы

$$\frac{z'}{1-n}+P(x)\,z=Q(x)$$

бірінші ретті сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеуіне айналады. Кейде осы әдісті қолданбай, бірден Лагранж немесе Бернулли әдістерін қолдануға болады.

16-мысал. $y'+\frac{2y}{x}=3x^2\,y^{4/3}$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бұл Бернулли теңдеуі, $n=\frac{4}{3}$.

$z=y^{-\frac{1}{3}}$, $y=z^{-3}$ ауыстыруын қолданамыз.

Сонда
$$-3z'+\frac{2z}{x}=3x^2$$

немесе
$$z'-\frac{2z}{3x}=-x^2.$$

Бұл теңдеу біртекті емес сызықты теңдеу. Сондықтан $z=uv,\quad z'=u'v+uv'$

$$u'v+uv'-\frac{2}{3}\frac{uv}{x}=-x^2,\quad u'v+u\left(v'-\frac{2}{3}\frac{v}{x}\right)=-x^2.$$

v функциясы $v'-\frac{2}{3}\frac{v}{x}=0$ теңдеуінің дербес шешімі болғандықтан

$$\frac{dv}{v}=\frac{2}{3}\frac{dx}{x},\quad \ln v=\frac{2}{3}\ln x,\quad v=x^{\frac{2}{3}}.$$

Енді u функциясын табу үшін $u'v=-x^2$ теңдеуін қарастырамыз.

$$u'x^{\frac{2}{3}}=-x^2 \text{ немесе } u'=-x^{\frac{4}{3}},$$

осыдан $u=-\int x^{\frac{4}{3}}\,dx+C=C-\frac{3}{7}\,x^{7/3}$.

Сонымен $z=uv=x^{\frac{2}{3}}\left(C-\frac{3}{7}x^{7/3}\right)$

немесе

$$z=\left(C\,x^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{7}x^{3}\right)$$

Яғни $y=\left(C\,x^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{7}x^{3}\right)^{-3}$ берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі.

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табу керек.

61. $y'+y=x\;y^{1/2}$; 62. $y'+\frac{y}{x}=-x\;y^{2}$; 63. $y'-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}$;

64. $y'+\frac{y}{x}=x^{2}\;y^{4}$; 65. $y'+\frac{y}{x}=\frac{y^{2}\ln x}{x}$; 66. $y'-x\,y=-y^{3}\,e^{-x^{2}}$;

67. $y'-\frac{y}{2x}=-\frac{1}{2y}$; 68. $y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\;y^{3}$.

Жауаптары: 61. $y=\left(x+C\,e^{-\frac{x}{2}}-2\right)^{2}$; 62. $y\left(x^{2}+C\,x\right)=1$; 63. $y=x^{4}\,(\frac{1}{2}\ln|\;x\;|+C)^{2}$;

64. $x\,y\sqrt[3]{3\ln\frac{C}{x}}=1$; 65. $\left(\ln x+1-C\,x\right)y=1$; 66. $y^{2}=\frac{e^{x}}{2\,x+C}$;

67. $y^{2}=x\ln\frac{C}{x}$; 68. $y^{2}=\frac{1}{x+C\,x^{2}}$.

Алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу керек.

69. $x\,y'+y=y^{2}\ln x,\qquad y(1)=-1$; 70. $y'+\frac{y}{x}=-x\;y^{2},\qquad y(-1)=-\frac{1}{2}$.

Жауаптары: 69. $y=\frac{1}{\ln x+1-2\,x}$; 70. $y=\frac{1}{x\left(x+3\right)}$.

1.8 Толық дифференциалды теңдеулер

9-анықтама. Егер

$$M(x,y)dx+N(x,y)=0 \tag{1.11}$$

теңдеуінің сол жағы $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болса, яғни:

$$d\,u(x,y)\equiv M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

теңдігі орындалса, онда (1.11) теңдеуді толық дифференциалдық теңдеу деп атайды. Мұндай жағдайда (1.11) теңдеуді былай жазуға болады

$$du(x,y)=0.$$

Бұл теңдеуді интегралдасақ:

$$u(x,y)\equiv C.$$

Сөйтіп, толық дифференциалды теңдеу оңай шешіледі.

10-анықтама. Егер $M(x, y)dx + N(x, y) = 0$ теңдеуі $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ шартын қанағаттандырса, яғни теңдеудің сол жағы қайсыбір $u(x, y)$ функциясының дифференциалы болса, онда ол толық дифференциалды теңдеу деп аталады.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

dx, dy алындағы коэффициенттерді теңестіреміз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Бұл теңдіктердің біріншісін y бойынша, екіншісін x бойынша дифференциалдайық.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}; \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ал, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ теңдігі орындалатындықтан $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Оның жалпы шешімі (интегралы)

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)d\,x + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)d\,y = C$$

болады, мұндағы x_0, y_0-кез келген нақты сандар.

17-мысал. $(3x^2 y + 2y + 3)\,dx + (x^3 + 2x + 3y^2)\,dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $M(x, y) = 3x^2 y + 2y + 3,\quad N(x, y) = x^3 + 2x + 3y^2.$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2,\quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2.$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ шарты орындалады, берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу болғандықтан жалпы шешімі $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\left(3x^2 y + 2y + 3\right)d\,x + \int_{y_0}^{y}\left(x_0^3 + 2x_0 + 3y^2\right)d\,y = C$.

$x_0 = 0,\ y_0 = 0$ деп алсақ, онда $\displaystyle\int_{0}^{x}\left(3x^2 y + 2y + 3\right)d\,x + \int_{0}^{y} 3y^2\,d\,y = C$

немесе $(x^3 y + 2xy + 3x) + y^3 = C$

осыдан $x^3 y + 2xy + 3x + y^3 = C$ - берілген теңдеудің жалпы интегралы.

1.9 Интегралдаушы көбейткіш

Егер $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ теңдеудің сол жағы қайсыбір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болмаса, яғни

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.12}$$

онда теңдеудің барлық мүшесін оған көбейткенде толық дифференциалды теңдеуге айналатындай $\mu(x,y)$ функциясынын табуға болады. Сондағы алынған теңдеудің шешімі бастапқы берілген теңдеудің шешімімен бірдей болады. Бұл $\mu(x,y)$ функциясы интегралдаушы көбейткіш деп аталады.

1) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ функциясы тек x-тен тәуелді болса, оны K(x) деп белгілесек, онда интегралдаушы көбейткіш $\mu=e^{\int K(x)dx}$ функциясы болады.

2) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}$ функциясы тек y-тен тәуелді болса, оны K(y) деп белгілесек, онда интегралдаушы көбейткіш $\mu=e^{-\int K(y)dy}$ функциясы түрінде алынады.

18-мысал. $y\,dx-(x+y^2)\,dy=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. $M(x,y)=y,\qquad N(x,y)=-x-y^2.$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-1.\qquad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.\qquad \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{2}{y},\qquad \mu(y)=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln y}=\frac{1}{y^2}.$$

Енді берілген теңдеудің екі жағын да $\dfrac{1}{y^2}$-қа көбейтсек, онда $\dfrac{1}{y}dx-(\dfrac{x}{y^2}+1)\,dy=0.$

Бұл теңдеу толық дифференциалды теңдеу, себебі

$$M_1(x,y)=\frac{1}{y},\qquad N_1(x,y)=-\frac{x}{y^2}-1.\ \frac{\partial M_1}{\partial y}=-\frac{1}{y^2},\qquad \frac{\partial N_1}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}.$$

Оны интегралдап

$$\int_{x_0}^{x}\frac{1}{y}d\,x-\int_{y_0}^{y}\left(\frac{x_0}{y^2}+1\right)d\,y=C\ .$$

$x_0=0,\ y_0=1$ деп алсақ, онда

$$\int_{0}^{x}\frac{1}{y}d\,x-\int_{1}^{y}d\,y=C,\qquad \frac{x}{y}-(y-1)=C$$

немесе $\frac{x}{y} - y = C_1$ - берілген теңдеудің жалпы интегралы, мұндағы $C_1 = C - 1$.

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табу керек.

71. $(3x^2 + 2y)\,dx + (2x - 3)\,dy = 0;$ 72. $(x^2 + 4y)\,dx + (4x + y^2)\,dy = 0;$

73. $(3x^2 y - 4xy^2)\,dx + (x^3 - 4x^2 y + 12y^3)\,dy = 0;$ 74. $(x\cos 2y + 1)\,dx - x^2 \sin 2y\,dy = 0;$

75. $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}\,dy = 0;$ 76. $3x^2 e^y\,dx + (x^2 e^y - 1)\,dy = 0;$

77. $e^{-y}\,dx + (1 - x e^{-y})\,dy = 0;$ 78. $2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2 \sin 2y)\,dy = 0;$

79. $(3x^2 + y^2 + y)\,dx + (2xy + x + \cos y)\,dy = 0;$ 80. $(y + x\ln y)\,dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy = 0.$

Жауаптары: 71. $x^3 + 2xy - 3y = C;$ 72. $x^3 + 12xy + y^3 = C;$ 73. $x^3 y - 2x^2 y^2 + 3y^4 = C;$ 74. $x^2 \cos 2y + 2x = C;$ 75. $4x^2 + y^2 = Cx;$ 76. $x^3 e^y - y = C;$ 77. $y + x e^{-y} = C;$ 78. $x^2 \cos^2 y + y^2 = C;$ 79. $x^3 + xy^2 + xy + \sin y = C;$ 80. $x^2 \ln y + 2y\left(x + 1\right) = C.$

Интегралдаушы көбейткіштерін тауып, берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табу керек.

81. $y^2\,dx + (xy - 1)\,dy = 0;$ 82. $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0;$

83. $(e^{2x} - y^2)\,dx + y\,dy = 0;$ 84. $(1 + 3x^2 \sin y)\,dx - x\,ctg\,y\,dy = 0.$

Жауаптары: 81. $\mu = \frac{1}{y};\quad xy - \ln y = C;$ 82. $\mu = \frac{1}{x^2};\quad y^2 = Cx^3 + x^2;$

83. $\mu = e^{-2x};\quad y^2 = \left(C - 2x\right)e^{2x};$ 84. $\mu = \frac{1}{\sin y};\quad \frac{x}{\sin y} + x^3 = C.$

1.10 Туындылары арқылы шешілмеген бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

$y = f\left(y'\right)$ және $x = f\left(y'\right)$ түріндегі теңдеулер

Бірінші теңдеуде - аргумент x, екіншісінде - функция y қатыспаған жағдайда бұл теңдеулер шешімдерін параметрлік түрде іздейміз, параметр ретінде белгісіз функция туындысы алынады:

$$y' = p$$

$$y = f(p);\quad y' = f'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Бірінші теңдеу үшін $p = f'(p)\frac{dp}{dx}$ алмастыруды қолданамыз.

Нәтижесінде айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу аламыз:

$$dx = \frac{f'(p)}{p}dp; \qquad x = \int \frac{f'(p)}{p}dp + C.$$

Жалпы шешімі параметрлік түрде теңдеулер жүйесі арқылы беріледі:

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{f'(p)}{p}dp + C, \\ y = f(p). \end{cases}$$

Бұл жүйеден p параметрді жоя отырып, параметрден тәуелсіз жалпы интегралды аламыз.

$x = f(y')$ түріндегі дифференциалдық теңдеулер үшін дәл сондай алмастыру мен түрлендірулер қолданып, келесі нәтижені аламыз:

$$\begin{cases} y = \int p\, f'(p)\,dp + C, \\ x = f(p). \end{cases}$$

19-мысал. $x = y'\sin y' + \cos y'$ теңдеуін шешіңіз.

Шешуі: $p = y'$ делік, сонда $x = p\sin p + \cos p.$ Берілген теңдеуді дифференциалдасақ:

$$dx = (\sin p + p\cos p - \sin p)\,dp = p\cos p\,d\,p$$

және dx-тің осы мәнін $d\,y = p\,d\,x$ теңдігіне қойсақ, онда $dy = p^2\cos p\,dp,$ яғни бұл сызықты теңдеуді шешейік, сонда:

$$y = \int p^2\cos p\,d\,p = (p^2 - 2)\sin p + 2p\cos p + C.$$

Ендеше, жалпы интеграл келесі жүйе түрінде болады:

$$\begin{cases} x = p\sin p + \cos p, \\ y = (p^2 - 2)\sin p + 2p\cos p + C. \end{cases}$$

20-мысал. $x = y' + \ln y'$ теңдеуін шешіңіз.

Шешуі: Берілген теңдеуде $p = y'$ делік, сонда $x = p + \ln p.$ Осы теңдеуді дифференциалдасақ, онда $d\,x = d\,p + \dfrac{d\,p}{p}.$ $d\,y = p\,d\,x$ болғандықтан

$$d\,y = p\,d\,x = p\left(d\,p + \frac{d\,p}{p}\right) = (p+1)\,d\,p.$$

Интегралдасақ, онда: $y = 0{,}5(p+1)^2 + C.$

Берілген теңдеудің параметрлік түрдегі жалпы интегралы келесі жүйе болады:

$$\begin{cases} x = p + \ln p, \\ y = 0{,}5(p+1)^2 + C. \end{cases}$$

Мұндағы p параметрін жою үшін екінші теңдеуден $p = \sqrt{2(y-C)} - 1$ ($p > 0$ болғандықтан түбірдің алдына плюс таңбасы қойылады). p -ның осы мәнін екінші теңдеуге қойсақ, онда жалпы шешім келесі түрде болады:

$$x = \sqrt{2(y-C)} - 1 + \ln\left[\sqrt{2(y-C)} - 1\right].$$

21-мысал. $y' = arctg\left(\dfrac{y}{y'^2}\right)$ теңдеуін шешіңіз.

Шешуі: Берілген теңдеуден $y = y'^2\, tg\, y'$ теңдеуін аламыз. $p = y'$ делік, сонда $y = p^2\, tg\, p.$ Осы теңдеуді дифференциалдасақ, онда $dy = (2p\, tg\, p + p^2 \sec^2 p)\, dp.$ dy -ті $dy = p\, dx$ теңдігіне алмастырсақ, онда

$$p\, dx = (2p\, tg\, p + p^2 \sec^2 p)\, dp.$$

p -ға қысқартып, интегралдасақ, онда:

$$x = \int (2\, tg\, p + p \sec^2 p)\, dp = p\, tg\, p - \ln\cos p + C.$$

Берілген теңдеудің жалпы интегралы келесі жүйе түрінде болады:

$$\begin{cases} y = p^2\, tg\, p, \\ x = p\, tg\, p - \ln\cos p + C. \end{cases}$$

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табу керек.

85. $\arcsin(x/y') = y';$ 86. $y = e^{y'}(y'-1);$ 87. $x = 2(\ln y' - y');$

88. $y(1+y'^2)^{1/2} = y';$ 89. $x = 2y' + 3y'^2;$ 90. $x = y'(1+e^{y'});$

91. $x = e^{2y'}(2y'^2 - 2y' + 1);$ 92. $y = y' \ln y';$ 93. $x = \sin y' + \ln y';$

94. $4y = x^2 + y'^2;$ 95. $y = y'^2 + 2\ln y'.$

Жауаптары: 85. $x = p\sin p,\ y = (p^2 - 1)\sin p + p\cos p + C.$ 86. $x = e^p + C,\ y = e^p(p-1).$

87. $x = 2(\ln p - p),\ y = 2p - p^2 + C.$ 88. $x = \ln\left[\left(\sqrt{1+p^2} - 1\right)/p\right] + p/\sqrt{1+p^2} + C,$ $y = p/\sqrt{1+p^2}.$ 89. $x = 2p + 3p^2,\ y = 2p^3 + p^2 + C.$

90. $x = p(1+e^p),\ y = 0{,}5p^2 + (p^2 - p + 1)e^p + C.$

91. $x = e^{2p}(2p^2 - 2p + 1),\ y = e^{2p}(2p^3 - 3p^2 + 3p - 1{,}5) + C.$

92. $x = 0{,}5\ln^2 p + \ln p + C,\ y = p\ln p.$ 93. $x = \sin p + \ln p,\ y = p\sin p + p\cos p + p + C.$

94. $4y = x^2 + p^2,\ \ \ln|p - x| = C + \dfrac{x}{p-x}.$ 95. $x = 2p - \dfrac{2}{p} + C,\ \ y = p^2 + 2\ln p.$

1.11 Лагранж және Клеро теңдеулері

11-анықтама. Лагранж теңдеуі деп x пен y қатысты сызықты, коэффициенттері y'-тің функциялары болатын дифференциалдық теңдеулерді атайды:

$$P(y')\,x+Q(y')\,y+R(y')=0$$

Жалпы шешімін табу үшін келесі алмастыру қолданылады: $p=y'$

$$y=x\,f(p)+\varphi(p),\qquad f(p)=-\frac{P(y')}{Q(y')},\quad \varphi(p)=-\frac{R(y')}{Q(y')}.$$

Бұл теңдеуді $dy=pdx$ екенін ескере отырып дифференциалдайық:

$$p\,d\,x=f(p)\,dx+x\,f'(p)\,dp+\varphi'(p)\,dp.$$

Егер бұл (x -ке қатысты сызықты) теңдеудің шешімі $x=F(p,C)$ болса, онда Лагранж теңдеуінің жалпы шешімі келесі түрде болады:

$$\begin{cases} x=F(p,C), \\ y=x\,f(p)+\varphi(p)=F(p,C)\,f(p)+\varphi(p). \end{cases}$$

12-анықтама. Клеро теңдеуі деп $y=x\,y'+\varphi(y')$ түріндегі (x аргументі мен y функциясына қатысты сызықты) дифференциалдық теңдеуді айтады.

Жалпы алғанда, Клеро теңдеуі Лагранж теңдеуінің дербес жағдайы болады, $y'=p$ алмастыруын жасаймыз, сонда теңдеу былайша түрленеді:

$$y=x\,p+\varphi(p)$$

$$y'=p+x\frac{dp}{dx}+\varphi'(p)\frac{dp}{dx};\qquad p=p+x\frac{dp}{dx}+\varphi'(p)\frac{dp}{dx};$$

$$\left[x+\varphi'(p)\right]\frac{dp}{dx}=0.$$

Бұл теңдеудің екі шешімі болуы мүмкін:

$$d\,p=0 \quad \text{немесе} \quad x+\varphi'(p)=0.$$

Бірінші жағдайда: $\quad p=C;\qquad y=C\,x+\varphi(C).$

Бұдан, Клеро теңдеуінің жалпы интегралы түзу сызықтар жиынтығы екендігі көрініп тұр.

Екінші жағдайда шешімі параметрлік түрде келесі теңдеулер жүйесі арқылы беріледі:

$$\begin{cases} y=xp+\varphi(p) \\ x+\varphi'(p)=0 \end{cases}$$

p параметрін жоя отырып, екінші шешімді аламыз: $F(x,y)=0.$ Бұл шешімде кез келген C тұрақты болмайды және бұл шешім жалпы шешімнен алынған жоқ, ендеше ол дара шешім емес. Бұл шешім ерекше интеграл болады.

22-мысал. $y = 2y'x + \frac{1}{y'}$ теңдеуін шешіңіз.

Шешуі: $p = y'$ делік, сонда $y = 2px + \frac{1}{p}$ болады. Берілген теңдеуді дифференциалдасақ және dy-ті pdx-пен алмастырсақ, онда:

$$pdx = 2pdx + 2xdp - \frac{dp}{p^2}$$

немесе $$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p^3}.$$

Бұл сызықтық теңдеуді шешейік, сонда: $x = \frac{1}{p^2}(\ln|p| + C).$

Ендеше, жалпы интеграл келесі жүйе түрінде болады:

$$\begin{cases} y = 2px + \frac{1}{p}, \\ x = \frac{1}{p^2}(\ln|p| + C). \end{cases}$$

Ерекше интегралды табу үшін келесі жүйені құрастырамыз:

$$y = 2px + \frac{1}{p}, \quad 0 = 2x - \frac{1}{p^2}$$

Бұдан, $x = \frac{1}{2p^2}, \quad y = \frac{2}{p} \ \Rightarrow \ p = \frac{2}{y}. \qquad y = 2\cdot\frac{2}{y}x + \frac{y}{2} \ \Rightarrow \ \frac{y}{2} = \frac{4x}{y} \ \Rightarrow \ y^2 = 8x$.

Сондықтан $y = \pm 2\sqrt{2x}$. y-ті берілген теңдеуге қоя отырып, табылған функцияның оның шешімі болмайтындығына көз жеткізуге болады, сол себепті берілген теңдеудің ерекше интегралы жоқ.

23- мысал. $(y')^3 - y' - 1 - x = 0$.

Оны мынадай түде жазайық $x = (y')^3 - y' - 1$. $y' = p$ деп, параметр енгіземіз

$$x = p^3 - p - 1, \quad dx = (3p^2 - 1)dp; \quad dy = pdx = p(3p^2 - 1)dp,$$

$$y = \int p(3p^2 - 1)dp = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + C.$$

Сонымен, $x = p^3 - p - 1, \quad y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{1}{2}p^2 + C.$

24- мысал. $y = xy' - (y')^2$.

Теңдеу жаңа ғана қарастырылған түрге жатады, яғни бұдан $y = cx - c^2$ интегралдық түзулер тобынан болады және де бұл бірлестіктің орайжанаушысы интегралдық қисық болып табылады. $y = cx - c^2$ және $x - 2c = 0$ теңдеуінен c параметірін жою арқылы, біз $y = \frac{x^2}{4}$ теңдеуінің орайжанаушысын табамыз.

25-мысал. $y = x y'^2 + y'^2$ теңдеуін шешіңіз.

Шешуі: Бұл Лагранже теңдеуі. $p = y'$ делік, сонда $y = x p^2 + p^2$ болады. Берілген теңдеуді дифференциалдасақ және dy-ті pdx-пен алмастырсақ, онда:

$$pdx = p^2 dx + 2p\,xdp + 2\,p\,dp.$$

p -ға қысқартсақ, онда айнымалылары ажыратылатын теңдеу аламыз:

$$(1 - p)d\,x = 2\,(x + 1)d\,p$$

немесе

$$\frac{d\,x}{x+1} = \frac{2\,d\,p}{1-p}.$$

Интегралдасақ, онда $\ln(x+1) = -2\ln|1-p| + \ln C, \quad x + 1 = C/(p-1)^2.$

Алынған шаманы пайдаланып, $y = p^2(x+1)$ мәнін былай жазуға болады:

$$y = C\,p^2/(1-p)^2.$$

p -ға қысқартып жіберіп берілген теңдеудің ерекше шешімін жоғалтып алдық. $p = 0$ десек, онда $y = 0$- ерекше шешім болады. Сонымен, берілген теңдеудің жалпы интегралы келесі жүйе түрінде болады:

$$\begin{cases} x + 1 = C/(p-1)^2, \\ y = C\,p^2/(p-1)^2. \end{cases}$$

ал $y = 0$ - ерекше шешім болады.

Жалпы шешімдегі p параметрін жойып шешімді келесі түрде жазуға болады: $\left(\sqrt{y} + \sqrt{x+1}\right)^2 = C.$

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табу керек.

96. $y = x\,y' + \sqrt{b^2 + a^2 y'^2}.$ 97. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}.$ 98. $y = x\,y' + y' - y'^2.$

99. $y = x\left(\frac{1}{x} + y'\right) + y'.$ 100. $2\,y(\,y' + 1) = x\,y'^2.$

Жауаптары: 96. Жалпы шешім: $y = Cx + \sqrt{b^2 + a^2\,C^2}.$ Ерекше шешім: $\begin{cases} x = -a^2\,p/\sqrt{b^2 + a^2\,p^2}, \\ y = b^2/\sqrt{b^2 + a^2\,p^2}, \end{cases}$ немесе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

97. Жалпы шешім: $y = Cx - 1/C.$ Ерекше шешім: $\begin{cases} x = -1/p^2, \\ y = -2/p, \end{cases}$ немесе $y^2 = -4x.$

98. Жалпы шешім: $y = Cx + C(1-C).$ Ерекше шешім: $\begin{cases} x = 2p - 1, \\ y = p^2, \end{cases}$ немесе $y = \frac{1}{4}(x+1)^2.$

99. Жалпы шешім: $y = Cx + C^2 + 1.$ Ерекше шешім: $\begin{cases} x = -2p, \\ y = 1 - p^2, \end{cases}$ немесе $y = 1 - \frac{x^2}{4}.$ 100. Жалпы шешім: $\begin{cases} x = C(p+1), \\ y = C\,p^2/2, \end{cases}$ немесе $y = \frac{(x-C)^2}{2C}.$ Ерекше шешім: $y = 0, \quad y = -2x.$

2. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер

2.1 Негізгі түсініктер мен анықтамалар

13-анықтама.

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.1}$$

түрінде берілген теңдеуді n - ші ретті дифференциалдық теңдеу дейді.
n -ші ретті туындыға қарасты шешілген дифференциалдық теңдеудің түрі:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{2.2}$$

мұндағы f функциясы $D \subseteq R^{n+1}$ облысында үзіліссіз.
$I = (a,b)$ интервалда (2.2) теңдеуінің шешімі деп келесі шарттарды қанағаттандыратын $y(x)$ функциясын айтамыз :

1) I - де $y(x)$ функциясы n рет үзіліссіз дифференциалданады;
2) $\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \in D, \quad \forall x \in I$;
3) $y(x)$ функциясы (2.2)-ні теңбе – теңдікке айналдырады, яғни $y^{(n)}(x) \equiv f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right), \quad \forall x \in I$.

(2.1) теңдеуінің шығарылуы аналогиялық түрде анықталады.
Коши есебі (немесе бастапқы есеп) деп бастапқы шарттарды қанағанаттандыратын

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{2.3}$$

(2.2) теңдеуінің $y(x)$ шешімін табу есебін айтамыз.

2-теорема (Коши – Пикар теоремасы). Егер f функциясы D облысында үзіліссіз және $y, y', ..., y^{(n-1)}$ айнымалылары бойынша, Липшиц шарттарын қанағаттандырса, онда $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right) \in D$ кез – келген нүктесі үшін (2.2) теңдеуінің $x_0 \in I$ нүктесінің аймағында анықталған және (2.3) шарттын қанағаттандыратын жалғыз шешімі бар болады

$$y = \varphi(x, C, C_1, ..., C_n), \tag{2.4}$$

функциясы, мұндағы $C, C_1, ..., C_n$- кез-келген тұрақтылар, D облысында (2.2) теңдеудің жалпы шешімі деп аталады, егер:

1) φ функциясының x бойынша n-ші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар болса ;

2) $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right) \in D$ кез-келген нүкте үшін келесі жүйе:

$$\begin{gathered} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) \end{gathered}$$

$C_1, C_2, ..., C_n$ қатысты жалғыз түрде шешіледі:

$$\begin{gathered} C_1^0 = \psi_1\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right), \\ C_2^0 = \psi_2\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right), \\ C_n^0 = \psi_n\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right); \end{gathered} \tag{2.5}$$

3) $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$ нүктесі D облысынан алынғанда $\varphi\left(x_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right)$ функциясы (2.5) теңдіктеріндегі кез келген $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$ тұрақтылар үшін (2.2) теңдеуінің шешімі болады. Бұл шешімді дербес шешім дейді.

3-теорема (Коши есебінің шешімінің бар болу және жалғыздығы туралы теорема). G облысында F функциясы үзіліссіз және $y, y', ..., y^{(n)}$ бойынша үзіліссіз дербес туындылары бар болсын, онда $F\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)}\right) = 0,$ $\dfrac{\partial F}{\partial y^n}\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)}\right) \neq 0$ болатындай кез келген $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)}\right) \in G$ нүктесі үшін $x_0 \in I$ нүктенің аймағында анықталатын және (2.3) шарттарын қанағанаттанатын (2.1) теңдеуінің жалғыз шешімі бар болады.

2.2 Квадратураларда шешілетін жоғарғы ретті теңдеулердің түрлері

$$\text{а) } F\left(x, y^{(n)}\right) = 0, \tag{2.6}$$

(2.6) теңдеуі көп жағдайда параметрлік түрде өрнектелуі мүмкін: $x = \varphi(t), y^{(n)} = \psi(t)$, мұндағы $\varphi(t)$ - дифференциалданатын функция. Бұл жағдайда параметрлік түрдегі жалпы интегралды табамыз. $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, $dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)dt$, бұдан $y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 \equiv \psi_1(t, C_1)$.

Аналогия бойынша $y^{(n-2)}$ табамыз және т.б.

y үшін $y = \psi_n(t, C_1, C_2, ..., C_n)$ түріндегі теңдікті аламыз. Сондықтан $x = \varphi(t), y = \psi_n(t, C_1, C_2, ..., C_n)$ жүйесі (2.6) теңдеуінің параметрлік түрдегі жалпы интегралы деп аталады. (2.6) теңдеуінің дербес жағдайы:

$$y^{(n)} = f(x), \tag{2.7}$$

мұндағы $f(x)$ функциясы $I = (a, b)$ аралығында үзіліссіз.

Егер $x = x \in I$ параметр деп қарастырылса, онда (2.7) теңдеуінің жалпы шешімі:

$$y = \underbrace{\int\int...\int}_{n} f(x)dxdx...dx + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + ...C_{n-1}x + C_n .$$

(2.7) теңдеуінің Коши түрінде жалпы шешімнің түрі:

$$y = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}...\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx...dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + ... + y_0'(x - x_0) + y_0,$$

мұндағы $x_0 \in I$, $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ - кез келген сандар.

б) Теңдеудің түрі

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0, \tag{2.8}$$

Егер (2.8) ден

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right), \tag{2.9}$$

ендеше, $u = y^{(n-1)}$ жаңа функция еңгізгенде:

$$u' = f(u), \tag{2.10}$$

(2.10) теңдеуінің жалпы интегралы

$$x + C_1 = \int \frac{du}{f(u)}, \qquad (f(u) \neq 0), \tag{2.11}$$

(2.11) u -ға қарағанда шешілсін:

$$u = \psi(x, C_1), \quad y^{(n-1)} = \psi(x, C_1). \tag{2.12}$$

(2.12) ескере отырып, (2.8) ден жалпы шешімді келесі түрде аламыз:

$$y = \underbrace{\int\int ... \int}_{n-1} \psi(x, C_1) dxdx...dx + C_2 x^{n-2} + ...C_{n-1}x + C_n$$

(2.12) – теңдеуі (2.7) теңдеуімен типтес, сондықтан (2.8) теңдеуінің жалпы шешімі келесі түрде анықталады:

$$y = \underbrace{\int\int ... \int}_{n-1} \psi(x, C_1) dxdx...dx + C_2 x^{n-2} + ...C_{n-1}x + C_n$$

Егер (2.8) теңдеуінің параметрлік түрі

$$y^{(n)} = \varphi(t), \quad y^{(n-1)} = \psi(t),$$

мұндағы $\psi(t)$ - дифференциалданатын функция болса, онда (2.8) теңдеуін интегралдау келесі жолмен орындалады:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$$

теңдігінен

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}$$

аламыз, бұдан

$$x = \int \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt + C_1 = \xi(t, C_1), \tag{2.13}$$

бұдан

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx = \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)}, \;\; y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_2,$$

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)} dx, ..., dy = y' dx,$$

$$y = \int y' dx + C_n \equiv \eta(t, C_2, ..., C_n), \tag{2.14}$$

(2.13), (2.14) жиынтығы параметрлік түрде (2.8) теңдеуінің жалпы интегралын анықтайды.

в) теңдеудің түрі

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0, \tag{2.15}$$

$$y^{(n-2)} = u\,, \tag{2.16}$$

ауыстыру көмегімен (2.15) теңдеуі екінші ретті теңдеуге келтіріледі

$$F(u, u'') = 0\,, \tag{2.17}$$

(2.17) теңдеуі u'' қарасты шешіледі деп қарастырамыз:

$$u'' = f(u), \tag{2.18}$$

(2.18) теңдеудің $\mu = 2u'$ интегралдық көбейткішіне көбейтіндісі келесі теңдеуге әкеледі

$$2u'u'' = 2f(u)u'\,, \tag{2.19}$$

(2.19) теңдеуден (2.18) теңдеудің бірінші интегралын аламыз:

$$u'^2 = 2\int f(u)du + C_1\,, \tag{2.20}$$

бұдан (2.20) – дан :

$$\frac{du}{\pm\sqrt{2\int f(u)du + C_1}} = dx, \qquad \left(2\int f(u)du + C_1 \neq 0\right),$$

(2.18) теңдеудің жалпы интегралын табамыз:

$$\int \frac{du}{\pm\sqrt{2\int f(u)du + C_1}} = x + C_2\,, \tag{2.21}$$

(2.16) алмастыруды ескере отырып, (2.21) теңдеуден (2.15) түрдегі аралық интеграл теңдеуін аламыз:

$$\Psi\left(x, y^{(n-2)}, C_1, C_2\right) = 0\,,$$

яғни (2.6) түріндегі квадратураларда интегралданатын $(n-2)$- ші ретті дифференциалдық теңдеу.

Егер (2.15) теңдеуі $y^{(n)} = \varphi(t),\ \ y^{(n-2)} = \psi(t)$ параметрлік түрде берілсе, ендеше (2.15) теңдеуді интегралдау үрдісі келесі түрде болады. $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx,\quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$ арақатынастан $y^{(n-1)}$ қарасты келесі теңдеу аламыз $y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = \varphi(t)\psi'(t)dt$, осыдан $y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \varphi(t)\psi'(t)dt + C_1} \equiv \xi(t, C_1).$

Бұдан, $y^{(n-1)}$ үшін $y^{(n)}=\varphi(t)$, $y^{(n-1)}=\xi(t,C_1)$ түрдегі $y^{(n)}$ параметрлік өрнектелуі болады , яғни есебіміз (2.8) түрдегі теңдеуді интегралдауға келтірілді.

26-мысал. $y''=(x+2)\,e^{x}$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бұл теңдеу екінші ретті дифференциалдық теңдеу.

$$y'=\int (x+2)\,e^{x}\,dx+C_1=(x+1)\,e^{x}+C_1,$$

$$y=\int (x+1)\,e^{x}\,dx+C_1x+C_2$$

немесе $y=xe^{x}+C_1x+C_2$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

27-мысал. $y(0)=1, y'(0)=0$ алғашқы шарттарын қанағаттандыратын $y''=\sin 4x$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табу керек.

Шешуі. Алдымен берілген теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

$$y'=\int \sin 4x\,dx+C_1=-\frac{1}{4}\cos 4x+C_1,$$

$$y=-\frac{1}{4}\int \cos 4x\,dx+C_1x+C_2=-\frac{1}{16}\sin 4x+C_1x+C_2.$$

Енді алғашқы шарттарды пайдаланып, C_1 және C_2 тұрақтыларының сандық мәндерін табайық.

$$x=0, \qquad y'=0=-\frac{1}{4}+C_1, \qquad y=1=C_2$$

Осыдан $C_1=\frac{1}{4}$, $C_2=1.$

$y=-\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{4}\,x+1$ берілген алғашқы шарттарды қанағаттандыратын теңдеудің дербес шешімі.

28-мысал. $y'''=x^2$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бұл теңдеу үшінші ретті дифференциалдық теңдеу.

$$y''=\frac{x^3}{3}+C_1, \quad y'=\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\left(\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2\right)dx+C_3=\frac{x^5}{60}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3$$

немесе $y=\frac{x^5}{60}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін табу керек.

101. $y'' = \cos 7x;$ 102. $y'' = \sin^2 x;$ 103. $y'' = \frac{1}{1+x^2};$

104. $y'' = \frac{2\cos x}{\sin^2 x};$ 105. $y^{IV} = 120x;$ 106. $y^{V} = 20x.$

Жауаптары: 101. $y = -\frac{1}{49}\cos 7x + C_1 x + C_2.$ 102. $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}\cos 2x + C_1 x + C_2.$

103. $y = x \cdot arctg\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 x + C_2.$ 104. $y = \ln\sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$

105. $y = x^5 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$ 106. $y = \frac{1}{36}x^6 + \frac{C_1}{24}x^4 + \frac{C_2}{6}x^3 + \frac{C_3}{2}x^2 + C_4 x + C_5.$

Алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу керек.

107. $y'' = x e^{-x};$ $y(0) = 3,$ $y'(0) = 1.$

108. $y'' = \frac{1}{cos^2 x};$ $y(0) = -2,$ $y'(0) = 2.$

109. $y''' = x\sin x;$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0,$ $y''(0) = 2.$

Жауаптары: 107. $y = (x+2)e^{-x} + 2x + 1.$ 108. $y = -\ln|\cos x| + 2x - 2.$

109. $y = x \cdot \cos x - 3\sin x + x^2 + 2x + 1.$

2.3 Реті төмендетілетін жоғарғы ретті теңдеулердің кейбір түрлері

а) Ізделінетін функция және бірнеше туындылар тізбектері жоқ теңдеулер.

Мына түрдегі теңдеуді қарастырамыз:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0, \quad (1 \le k < n). \tag{2.22}$$

$y^{(k)} = u$ алмастыру көмегімен, мұндағы u - белгісіз жаңа функция, (2.22) теңдеуі $(n-k)$- ші ретті теңдеуге келтіріледі:

$$F\left(x, u, u', ..., u^{(n-k)}\right) = 0. \tag{2.23}$$

y айнымалыға оралғанда (2.23) теңдеуі квадратураларда интегралдансын, (2.22) аралық интегралын аламыз:

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, ..., C_{n-k}),$$

немесе

$$\Phi\left(x, y^{(k)}, C_1, ..., C_{n-k}\right) = 0. \tag{2.24}$$

(2.24) теңдеуі (2.6) түрдегі теңдеуі болады.

29-мысал. $y'' - \frac{y'}{x} = x^2$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бұл теңдеудің құрамында y жоқ. Олай болса теңдеудің ретін төмендету үшін $y' = z(x),\ \ y'' = z'$ жаңа ауыстырылу жасалынады. Сонда $z' - \frac{z}{x} = x^2$ бірінші ретті біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеу.

$$z = u \cdot v,\ \ u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{u \cdot v}{x} = x^2,\ \ u' \cdot v + u \cdot \left(v' - \frac{v}{x} \right) = x^2.$$

$v' - \frac{v}{x} = 0$ теңдеуінің шешімі v функциясы ретінде алынады.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0; \qquad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}; \quad \ln v = \ln x$$

енді u функциясын табу үшін $u'v = x^2$ теңдеуін шешеміз.

$u' = x$ немесе $u = \frac{1}{2}x^2 + C_1$

осыдан

$$z = u \cdot v = x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1 \right) = \frac{1}{2}x^3 + C_1 x$$

немесе

$$y' = z(x),\ \ y = \int \left(\frac{1}{2}x^3 + C_1 x \right) dx + C_2,$$

$y = \frac{x^4}{8} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін табу керек.

110. $x y'' = y'$; 111. $x y'' + y' = 0$; 112. $(1 - x^2) y'' = x y'$;

113. $y'' + \frac{y'}{x} = x^2$; 114. $x^2 y'' + x y' = 1$.

Жауаптары: 110. $y = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2$. 111. $y = C_1 x \ln x + C_2$. 112. $y = C_1 \arcsin x + C_2$.

113. $y = \frac{1}{16} x^4 + C_1 \ln x + C_2$. 114. $y = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + C_1(\ln|x|) + C_2$.

Алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу керек.

115. $x\,y'' + y' + x = 0;\qquad y(1) = -\dfrac{1}{4},\quad y'(1) = -\dfrac{1}{2}.$

116. $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right);\qquad y(1) = \dfrac{1}{2},\quad y'(1) = 1.$

117. $\left(1 + x^2\right)y'' + y'^2 + 1 = 0;\qquad y(0) = 5,\quad y'(0) = 1.$

Жауаптары: 115. $y = -\dfrac{1}{4}x^2.$ 116. $y = \dfrac{1}{2}x^2.$ 117. $y = 2\ln\left|1 + x\right| - x + 5.$

ә) Құрамында айқын түрде тәуелсіз айнымалы болмайтын теңдеу.

$$F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0\ \left(1 \le k < n\right) \tag{2.25}$$

түрдегі теңдеудегі қарастырамыз.

$$y' = p\,, \tag{2.26}$$

ауыстыру арқылы, (мұндағы $p = p(y)$ - жаңа ізделінді функция, y – жаңа тәуелсіз айнымалы) (2.25) теңдеудің реті бірлікке төмендейді

$$\begin{gathered} y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = pp'\,, \\ y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \left(p''p + p'^2\right)p\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} = g\left(p, p', ..., p^{(n-1)}\right)\ \left(p^{(i)} = \frac{d^i p}{dy^i},\, i = 1,2,...,n-1\right) \end{gathered} \tag{2.27}$$

болғандықтан (2.26), (2.27) алмастыруларын (2.25) теңдеуіне қойғанда жаңа p белгісіз функцияға қатысты $(n-1)$- ші ретті теңдеуге келеміз:

$$F\left(y, p, p', ..., p^{(n-1)}\right) = 0\,, \tag{2.28}$$

Егер (2.28) жалпы интегралы белгілі болса:

$$\Phi\left(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}\right) = 0$$

бұдан

$$\Phi_1\left(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}\right) = 0\,, \tag{2.29}$$

(2.25) теңдеуінің аралық интегралы болады. (2.29) теңдеуінің жалпы интегралы $\Phi(y, y, C_1,...,C_n)=0$, мұндағы $C_1, C_2,...,C_n$ - кез келген тұрақтылар, болады.

30-мысал. $y\cdot y'' = y'^2$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі. Бұл теңдеудің құрамында х жоқ. Олай болса теңдеудің ретін төмендету үшін $y' = p(y), \quad y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ жаңа ауыстырылу жасалынады. Сонда $y\cdot p\dfrac{dp}{dy} = p^2$ осыдан $p=0, \quad y=const.$
немесе $y\cdot\dfrac{dp}{dy}=p; \quad \dfrac{dp}{p}=\dfrac{dy}{y}; \quad \ln p=\ln y+\ln C_1; \quad p=C_1\cdot y; \quad y'=C_1 y$
$\dfrac{dy}{y}=C_1\,dx; \quad \ln y = C_1 x+\ln C_2.$ Осыдан $y=C_2 e^{C_1 x}$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін табу керек.
118. $y y'' + y'^2 = 0;$ 119. $y y'' = y'(1+y');$ 120. $(y')^2 + 2yy'' = 0;$
121. $(y')^2 - y y'' = y^2 y';$ 122. $y'' + \dfrac{2}{1-y} y'^2 = 0.$

Жауаптары: 118. $y^2 = C_1 x + C_2.$ 119. $y = C_2 e^{C_1 x} + \dfrac{1}{C_1}.$ 120. $y=(C_1 x + C_2)^2.$
121. $C_2 + x = \dfrac{1}{C_1}\ln\left|\dfrac{y}{C_1 - y}\right|.$ 122. $y = \dfrac{C_1 x + C_2 - 1}{C_1 x + C_2}.$

Алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу керек.
123. $1 + y'^2 = 2 y y'';$ $y(0)=\dfrac{1}{2}, \quad y'(0)=1.$
124. $y^2 + y'^2 = 2 y y'';$ $y(0)=1, \quad y'(0)=1.$
125. $y y'' - y'^2 = y^4;$ $y(0)=1, \quad y'(0)=0.$
Жауаптары: 123. $y = x^2 + x + 0{,}5.$ 124. $y = e^x.$ 125. $y = \sec x.$

3 Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

3.1 Сызықты теңдеулердің жалпы қасиеттері

14-анықтама. n - ші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер деп мына түрдегі теңдеулерді атаймыз

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x) \qquad (3.1)$$

мұндағы $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ функциялар $I = (a,b)$ интервалында үзіліссіз, $a_0(x) \neq 0 \ \forall x \in I$.

(3.1) теңдеуді $a_0(x) \neq 0$ бөлгенде және $h_i(x) = \dfrac{a_i(x)}{a_0(x)} \ (i = 1, \ldots, n)$ белгілеп, $f(x) = \dfrac{F(x)}{a_0(x)}$ канондық түрдегі n -ші ретті сызықты дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$y^{(n)} + h_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + h_{n-1}(x)y' + h_n(x)y = f(x) \qquad (3.2)$$

Егер $f(x) \not\equiv 0$ болса $x \in I$, онда (3.2) біртекті емес сызықты теңдеу деп аталады. Егер $f(x) \equiv 0$ болғанда $x \in I$, ендеше (3.2) біртекті сызықты теңдеу деп аталады. Бұл жағдайда теңдеу

$$y^{(n)} + h_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + h_{n-1}(x)y' + h_n(x)y = 0$$

(3.2) біртекті емес теңдеуге сәйкес келетін біртекті сызықты теңдеу деп аталады. Біртекті сызықты теңдеудің әрқашанда мардымсыз шешім деп аталатын $y \equiv 0$ шешімі бар болады.

(3.2) теңдікті бұл түрде көшірген кезде

$$y^{(n)} = -\sum_{i=1}^{n} h_i(x)y^{(n-i)} + f(x) \equiv \Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad (3.3)$$

бұдан байқағанымыздай $x \in [a,b] \subset I$ және кез келген $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ болғанда $\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ функциясы $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-i)}} = -h_i(x) \ (i = 1, \ldots, n)$ туындылармен үзіліссіз болады, бұдан (3.2) теңдеудің оң бөлігі бар болу және жалғыздық туралы теореманы қанағанаттандыратындығын көруге болады.

3.2 Сызықты біртекті теңдеулер

n -ші ретті сызықты біртекті теңдеулер мына түрде беріледі:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (3.4)$$

мұндағы $a_i(x)$ функциясы $I=(a,b)$ аралығында үзіліссіз, $i=1,2,...,n.$

Бұл теңдеулердің шешімдерінің негізгі қасиеттерін келтірейік.

1. Егер $y_1, y_2,..., y_m$ - (3.4) теңдеудің шешімі болса, онда $c_i = const$ $i=1,2,...,m$ болғанда $\sum_{i=1}^{m} c_i y_i$ сызықты комбинация (3.4) теңдеудің шешімі болады.

2. Егер (3.4) сызықты біртекті теңдеуінің нақты коэффициенттермен $y=u+iv$ комплекстік шешімі бар болса, онда $u=\operatorname{Re} y$, $v=\operatorname{Im} y$ функциялары (3.4) теңдеудің шешімі болады.

$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 > 0$ болатындай $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_m$ тұрақтылар бар болып, келесі теңдік орындалса:

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+...+\alpha_m\varphi_m(x)\equiv 0,\ x\in I, \tag{3.5}$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_m(x)$ функциялар I аралығында сызықты тәуелді деп аталады.

Егер $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_m=0$ болғанда ғана (3.5) теңбе-теңдік орындалса, $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_m(x)$ функциялар I -да сызықты тәуелсіз деп аталады.

Егер

$$\begin{gathered}
y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0,...,\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0, \\
y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1,...,\ y_2^{(n-1)}(x_0)=0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n(x_0)=0,\ y_n'(x_0)=0,...,\ y_n^{(n-1)}(x_0)=1,
\end{gathered}$$

мұндағы $x_0 \in I$, орындалса, онда жүйенің фундаментальді шешімі $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ нормальді шешім болады. Берілген (3.4) сызықты біртекті теңдеудің жалпы шешімі $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x)$ түрінде анықталады, мұндағы $C_1, C_2,..., C_n$ - кез келген тұрақтылар, ал $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ - (3.4) теңдеудің фундаментальді шешімдер жүйесі деп аталады.

Егер $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ - (3.4) теңдеудің фундаментальді шешімдер жүйесі болса, $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ бастапқы шарттарын қанағаттандыратын (3.4) Коши есебінің шешімі мына түрде болады:

$$y=y_0y_1+y_0'y_2(x)+...+y_0^{(n-1)}y_n(x).$$

Екі $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функциялары үшін былай айтуға болады: егер $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=const$ болса, онда $y_1(x)$ және $y_2(x)$ сызықты тәуелді, ал $\frac{y_1}{y_2}\neq const$ болса, онда оларды сызықты тәуелсіз дейді.

Мысалы:

а) $y_1(x)=x^2$ және $y_2(x)=x^3$ функциялары сызықты тәуелсіз;

ә) $y_1(x)=e^{2x}$ және $y_2(x)=4e^{2x}$ функциялары сызықты тәуелді;

б) $y_1(x)=\sin x$ және $y_2(x)=\sin 2x$ функциялары сызықты тәуелсіз;

в) $y_1(x)=\ln x$ және $y_2(x)=\ln x^2$ функциялары сызықты тәуелді;

г) $y_1(x)=e^{2x}$ және $y_2(x)=e^{3x}$ функциялары сызықты тәуелсіз.

3.3 Сызықты тәуелді және тәуелсіз функциялардың шарттары

1. I аралығында өзінің $(m-1)$ - ші ретті туындыларға дейін үзіліссіз $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_m(x)$ функциялары I аралығында сызықты тәуелсіз болуы үшін, Вронскиан $W(x)\equiv W[\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m]$ анықтауышы I аралығында нөлден айырықша болуы қажетті және жеткілікті, яғни

$$W(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m)\equiv W(x)\equiv\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_m(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_m'(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \varphi_2^{(m-1)}(x) & \ldots & \varphi_m^{(m-1)}(x)\end{vmatrix}\neq 0,\ x\in I.$$

2. Егер $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_m(x)$ функциялар $I=(a,b)$-да сызықты тәуелді болса, онда

$$W(x)\equiv W[\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m]\equiv 0,\quad x\in I.$$

Вронскиан үшін n шешімдері бар (3.4) сызықты біртекті теңдеуде *Лиувиль-Остроградскийдің* формуласы орын алады

$$W(x)\equiv W[y_1,y_2,...,y_n]=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}a_i(s)ds}$$

Лиувиль-Остроградскийдің формуласынан келесі шарттар шығады:

$I=(a,b)$ аралығында $(n-1)$-ші ретке дейінгі туындылары үзіліссіз болатын $y_1,y_2,...,y_n$ функциялары сызықты тәуелсіз болуы үшін $W(x)\equiv W[y_1,y_2,...,y_n]$

вронскиан ең болмағанда бір нүктеде $x_0 \in I$ нөлге айналмауы қажетті және жеткілікті.

Екінші ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеу

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{3.6}$$

үшін фундаментальді шешімдер жүйесі екі $y_1(x)$ және $y_2(x)$ сызықты тәуелсіз шешімдерден тұрады. Егер (3.6) –шы теңдеудің дербес шешімі $y_1(x)$ белгілі болса, онда оның сызықты тәуелсіз дербес шешімі

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2} dx \tag{3.7}$$

формуласымен табылады.

31-мысал. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ дифференциалдық теңдеуінің $y_1 = \sin x / x$ дербес шешімі белгілі. Жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. (3.7) –ші формула бойынша

$$y_2 = \frac{\sin x}{x}\int \frac{e^{-2\int \frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} dx = \frac{\sin x}{x}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{x}.$$

Осыдан жалпы шешім $y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$ болады.

32-мысал. $y_1 = x^2 + 1$, $y_2 = 2x^2 + 1$, $y_3 = x^2 + 2$ функциялары сызықты тәуелді бола ма?

Шешуі. $y_1' = 2x$, $y_2' = 4x$, $y_3' = 2x$, $y_1'' = 2$, $y_2'' = 4$, $y_3'' = 2$

$$W(y_1, y_2, y_3) \equiv \begin{vmatrix} x^2+1 & 2x^2+1 & x^2+2 \\ 2x & 4x & 2x \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

сондықтан берілген функциялар сызықты тәуелді болады.

33-мысал. $y_1(x) = \sin x$ және $y_2(x) = \cos x$ функциялары $y'' + y = 0$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімдері. Осы функциялар фундаментальды жүйе құрай ма?

Шешуі. $\frac{y_1}{y_2} = tg\,x \neq 0$, онда оларды сызықты тәуелсіз дейді, яғни олар фундаментальды жүйе құрайды.

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін табу керек.

126. $y'' - 9y = 0$ дифференциалдық теңдеуінің $y = e^{3x}$ дербес шешімі. Жалпы шешімін табу керек.

127. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$ дифференциалдық теңдеуінің $y = x$ дербес шешімі. Жалпы шешімін табу керек.

128. $y'' - 2y' + y = 0$ дифференциалдық теңдеуінің $y = e^x$ дербес шешімі. Жалпы шешімін табу керек.

Жауаптары: 126. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$. 127. $y = C_1 x + C_2 x \ln x$. 128. $y = (C_1 x + C_2)\, e^x$.

Берілген функциялар өздерінің анықталған облыстарында сызықты тәуелді бола ма?

129. $x+4,\quad 3x+7,\quad 5x+8.$ 130. $2x^2+1,\ x^3+1,\ 4x^3.$ 131. $e^x,\ e^{-x},\ ch\,x.$

132. $\ln 4x,\ \ln 5x,\ \ln 6x.$ 133. $e^{2x},\ e^{3x},\ \cos x.$

Жауаптары: 129. Иә. 130. Жоқ. 131. Иә. 132. Жоқ. 133. Жоқ.

3.4 Сызықты біртекті емес теңдеулер

n-ші ретті сызықты біртекті емес теңдеу мынадай түрде беріледі

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x) \qquad (3.8)$$

мұндағы $f(x) \not\equiv 0, a_i(x)\,(i = 1,\ldots,n)$ функциялары $I = (a,b)$ аралығында үзіліссіз.

(3.8) теңдеудің жалпы шешімі мына формула бойынша табылады

$$y = \bar{y} + y* \qquad (3.9)$$

мұндағы $\bar{y}$ - $L(y) = 0$ (3.8) теңдеуге сәйкес сызықты біртекті теңдеудің жалпы шешімі, ал $y*$ - (3.8) біртекті емес теңдеудің дербес шешімі.

$L(y) = 0$ біртекті теңдеуге сәйкес $y_1, y_2, \ldots, y_n$ фундаментальді шешім берілген болса, (3.8) біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін тұрақтыларды варияциялау әдісі (*Ланграж әдісі)* арқылы табуға болады. (3.8) біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін мына түрде іздейміз

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i \qquad (3.10)$$

мұндағы $c_i(x)\ (i = 1,\ldots,n)$ функциялар келесі теңдеулер жүйесінен анықталады

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \ldots + c_n'(x)y_n = 0, \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \ldots + c_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases} \tag{3.11}$$

жүйенің негізгі анықтауышы

$$\Delta = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0, \quad \forall x \in I, \tag{3.12}$$

Сондықтан (3.11) жүйесінің жалғыз шешімі бар

$$c_i'(x) = \psi_i(x)\ (i = 1, \ldots, n), \tag{3.13}$$

осыдан
$$c_i(x) = \int \psi_i(x)dx + C_i \tag{3.14}$$

мұндағы $C_i\ (i = 1, \ldots, n)$ - кез келген тұрақтылар. (3.10) және (3.14) теңдіктерді ескере отырып, тұрақтыларды варияциялау әдісі арқылы біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін келесі түрде табамыз

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots C_n y_n + \sum_{i=1}^{n} \int \psi_i(x)dx \cdot y_i, \tag{3.15}$$

Екінші ретті сызықты біртекті емес $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ теңдеуі үшін сәйкес теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0, \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

болады. Осы жүйенің шешімі

$$c_1(x) = C_1 - \int \frac{y_2\ f(x)}{W(y_1, y_2)}dx,$$

$$c_2(x) = C_2 + \int \frac{y_1\ f(x)}{W(y_1, y_2)}dx, \tag{3.16}$$

формуласымен анықталады, мұндағы

$$W(y_1, y_2) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2,$$

C_1, C_2 - кез келген тұрақтылар.

Осыдан берілген біртекті емес сызықты теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_2 \int \frac{y_1\ f(x)}{W(y_1, y_2)} dx - y_1 \int \frac{y_2\ f(x)}{W(y_1, y_2)} dx. \qquad (3.17)$$

34-мысал. $y'' + \frac{2}{x}\ y' + y = \frac{ctg\ x}{x}$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Сәйкес біртекті сызықты теңдеудің жалпы шешімі $\bar{y} = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$ болады. Олай болса, берілген біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1(x)\ \frac{\sin x}{x} + C_2\ (x)\ \frac{\cos x}{x}$$

түрінде ізделінеді.

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}, \qquad y_1' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

$$y_2 = \frac{\cos x}{x}, \qquad y_2' = \frac{-x\ \sin x - \cos x}{x^2},$$

болғандықтан

$$W(y_1, y_2) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-x\ \sin x - \cos x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \cdot \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = -\frac{1}{x^2},$$

онда $$C_1(x) = C_1 - \int \frac{\frac{\cos x}{x} \cdot \frac{ctg\ x}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} dx\ =\ C_1 + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = C_1 + \left(\ln\left| tg\ \frac{x}{2}\right| + \cos x\right),$$

$$C_2(x) = C_2 + \int \frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{ctg\ x}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} dx\ =\ C_2 - \int \cos x\, dx = C_2 - \sin x$$

осыдан

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x} \ln\left| tg\ \frac{x}{2}\right|$$

берілген теңдеудің жалпы шешімі.

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін тұрақтыларды вариациялау әдісімен табу керек.

134. $y'' + 4y = ctg\,2x.$ 135. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$ 136. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$

137. $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}.$ 138. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$

Жауаптары: 134. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln|\, tg\, x\,|.$

135. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln|\cos x|.$

136. $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x e^x \ln|\,x\,|.$

137. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \ln(1+e^{2x}) - e^{-2x} + e^{-3x} arctg\, e^x.$

138. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln|\sin x|.$

4 Коэффиценттері тұрақты n- ші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

4. 1 Коэффиценттер тұрақты біртекті сызықты теңдеулер

15-анықтама. $L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$ (4.1)

теңдеуін коэффиценттері тұрақты *n*-ші ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеу дейді, мұндағы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ коэффициенттері тұрақты сандар.

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$ түрінде берілген теңдеудің шешімін $y = e^{kx}$ түрінде іздейміз (k – тұрақты).

$$y' = k e^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}; \ldots \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}; \ldots$$

болғандықтан $L\left(e^{kx}\right) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n) = 0.$

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0 \qquad (4.2)$$

теңдеуін коэффиценттері тұрақты сызықты дифференциалдық теңдеудің сипаттама (характеристикалық) теңдеуі дейді.

(4.1) теңдеуі *n* дәрежелі теңдеу, яғни оның *n* нақты немесе комплекс түбірлері бар. Сондықтан (4.1) –ші теңдеудің жалпы шешімі (4.2) сипаттама теңдеуіне байланысты құрылады:

а) әрбір k жәй нақты түбіріне Ce^{kx} шешімі сәйкес келеді.

ә) әрбір n еселі k нақты түбіріне $(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_n x^{n-1})e^{kx}$ шешімі сәйкес келеді.

б) әрбір $k = \alpha \pm i\beta$ жәй комплекс түбіріне $e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ шешімі сәйкес келеді.

в) әрбір n еселі $k=\alpha \pm i\beta$ комплекс түбіріне $e^{\alpha x}((C_1+C_2x+C_3x^2+...+C_nx^{n-1})cos\beta x+(C_1'+C_2'x+C_3'x^2+...+C_n'x^{n-1})\sin\beta x)$ шешімі сәйкес келеді.

Эйлер теңдеуі. Бұл мына түрдегі теңдеу:

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=0,$$

мұндағы $a_j=const$ (j=1,..., n). $x=e^{rt}=(e^t)^r=x^r$ ауыстыру жасалады. r –ды табу үшін сипаттама (характеристикалық) теңдеуді аламыз.

Сипаттама теңдеудегі r_1 жай түбір үшін x^{r_1} сай келеді, ал m-ретті түбірге $x^{r_1}, x^{r_1}\ln x, x^{r_1}(\ln x)^2,\ldots, x^{r_1}(\ln x)^{m-1}$ сызықты тәуелсіз шешімі сай келеді. Егер теңдеудің коэффициенттері тұрақты болса, ал сипаттама теңдеудің $r_0=\alpha_0\pm i\beta_0$ комплекстік түбірі μ ретті болса, онда Эйлер теңдеуінің 2μ сызықты тәуелсіз шешімі мына түрде болады:

$$x^{\alpha_n}\cos(\beta_0\ln x), x^{\alpha_n}\ln x\cos(\beta_0\ln x),..., x^{\alpha_n}(\ln x)^{\mu-1}\cos(\beta_0\ln x),$$
$$x^{\alpha_n}\sin(\beta_0\ln x), x^{\alpha_n}\ln x\sin(\beta_0\ln x),..., x^{\alpha_n}(\ln x)^{\mu-1}\sin(\beta_0\ln x).$$

Лагранж теңдеуі

$$(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_nx=0,$$

мұндағы $a,b,a_j=cont(j=1,2,\ldots,n)$.

Лагранж теңдеуі $ax+b=e^t$ ауыстыруы арқылы коэффиценттері тұрақты теңдеуге келтіріледі.

Чебышев теңдеуі

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0(n=const).$$

Чебышев теңдеуіндегі $x=cont(егер|x|<1)$ ауыстыруы арқылы мына теңдеуге келтіріледі:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$$

4.2 Екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықты

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \qquad (4.3)$$

дифференциалдық теңдеуін қарастырайық, мұндағы p, q тұрақты сандар. Осы теңдеудің сипаттама теңдеуі

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Бұл теңдеудің шешімі $$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

формуласымен табылады. Сондықтан **(**7) теңдеуінің шешімі былай табылады:

а) $D = \frac{p^2}{4} > 0, \quad k_1 \neq k_2$ болса, онда $y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$ -дербес шешімдері, ал $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ жалпы шешімі.

ә) $D = \frac{p^2}{4} - q = 0, \quad k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ болса, онда $y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = x\,e^{k_1 x}$ -дербес шешімдері, ал $y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}$ жалпы шешімі.

б) $D = \frac{p^2}{4} - q < 0, \quad k_1 = \alpha + i\beta, \; k_2 = \alpha - i\beta,$ мұндағы $\alpha = -\frac{p}{2}, \; \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ болса, онда $y_1 = e^{\alpha x} cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$ дербес шешімдері, ал $y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ жалпы шешімі.

35-мысал. $y'' - y' - 2y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі. Сипаттама теңдеуі

$$k^2 - k - 2 = 0$$

болады, ал оның шешімі $k_1 = 2 \neq k_2 = -1$ болғандықтан $y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-x}$ - дербес шешімдері болады, олай болса $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

36-мысал. $y'' - 10y' + 25y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі. Сипаттама теңдеуі

$$k^2 - 10k + 25 = 0$$

болады, ал оның шешімі $k_{1,2} = 5$ (екі еселі түбір), сондықтан $y_1 = e^{5x}, \quad y_2 = x e^{5x}$ -дербес шешімдері болады, олай болса $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{5x}$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

37-мысал. $y'' + 6y' + 25y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі. Сипаттама теңдеуі

$$k^2 + 6k + 25 = 0$$

болады, ал оның шешімі $k_{1,2} = -3 \pm 4i.$ Олай болса
$y_1 = e^{-3x}\cos 4x, \quad y_2 = e^{-3x}\sin 4x$ -дербес шешімдері, сондықтан
$y = e^{-3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

38-мысал. $y'' - 5y' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі. Сипаттама теңдеуі

$$k^2 - 5k = 0$$

болады, ал оның шешімі $k_1 = 0, \ k_2 = 5$ болғандықтан $y_1 = 1, \quad y_2 = e^{5x}$ -дербес шешімдері болады, олай болса $y = C_1 + C_2 e^{5x}$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

39-мысал. $y'' + 4y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі. Сипаттама теңдеуі

$$k^2 + 4 = 0$$

болады, ал оның шешімі $k_{1,2} = \pm 2i.$ Олай болса $y_1 = cos\, 2x, \quad y_2 = \sin 2x$ -дербес шешімдері, ал $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

40-мысал. $y'' - 4y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі. Сипаттама теңдеуі

$$k^2 - 4 = 0$$

болады, ал оның шешімі $k_1 = \pm 2,$ олай болса $y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-2x}$ -дербес шешімдері, ал $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

41-мысал. $y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$ алғашқы шарттарын қанағаттандыратын $y'' + 5y' + 6y = 0$ теңдеуінің дербес шешімін табу керек.
Шешуі. Алдымен жалпы шешімін табамыз. Сипаттама теңдеуі

$$k^2 + 5k + 6 = 0$$

болады, ал оның шешімі $k_1 = -2, \ k_2 = -3$ болғандықтан $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ берілген теңдеудің жалпы шешімі болады. Енді дербес шешімін табу керек. Ол үшін $y' = -2C_1 e^{-2x} - 3C_2 e^{-3x}$ тауып, $x = 0$ болғанда келесі жүйеден C_1 мен C_2-ні анықтаймыз:

$$\begin{cases} y = 1 = C_1 + C_2, \\ y' = -6 = -2C_1 - 3C_2 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{matrix} C_1 = -3, \\ C_2 = 4. \end{matrix}$$

Осыдан $y=-3C_1 e^{-2x}+4C_2 e^{-3x}$ берілген алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешім.

42-мысал. $y^{IV}+5y''-36y=0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек. Шешуі. Сипаттама теңдеуі

$$k^4+5k^2-36=0$$

болады, ал оның шешімі $k_{1,2}=\pm 2,\quad k_{3,4}=\pm 3i.$

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

43-мысал. $y'''-3y''+3y'+y=0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек. Шешуі. Сипаттама теңдеуі

$$k^3-3k^2+3k+1=0$$

болады, ал оның шешімі $k_{1,2,3}=1$ (үш еселі түбір). Олай болса

$y=\left(C_1x^2+C_2x+C_3\right)e^x$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін табу керек.

139. $y''-3y'+2y=0.$ 140. $y''+9y=0.$ 141. $y''-6y'+9y=0.$

142. $y''+4y'+5y=0.$ 143. $y''-y'=0.$ 144. $y''+10y'+24y=0.$

145. $y''+4y'+4y=0.$ 146. $y''-4y=0.$ 147. $y''+2y'-35y=0.$

148. $y''+4y'=0.$ 149. $y''-4y'+13y=0.$ 150. $y''-2y'+y=0.$

151. $y''-6y'+5y=0.$ 152. $y''-3y'+y=0.$ 153. $y''+4y'+29y=0.$

154. $2y''+3y'+y=0.$ 155. $y''+16y=0.$ 156. $y''+8y'=0.$

157. $9y''+6y'+y=0.$ 158. $y''-6y'+10y=0.$ 159. $y''-9y=0.$

160. $y''+25y=0.$ 161. $y''-8y'+32y=0.$ 162. $5y''-8y'=0.$

163. $4y''+9y=0.$ 164. $y''-25y=0.$ 165. $y^{IV}-2y'''+y''=0$

166. $y^{IV}-5y''+4y=0$ 167. $y^{IV}+2y''+y=0.$ 168. $y'''+y''-y'-y=0.$

169. $y'''-13y''+40y'=0.$ 170. $y'''+8y=0.$

Жауаптары: 139. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$ 140. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$

141. $y=(C_1+C_2x)e^{3x}.$ 142. $y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$ 143. $y=C_1+C_2e^x.$

144. $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-6x}.$ 145. $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}.$ 146. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}.$ 147. $y=C_1e^{-7x}+C_2e^{5x}.$ 148. $y=C_1+C_2e^{-4x}.$ 149. $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$ 150. $y=(C_1+C_2x)e^x.$ 151. $y=C_1e^{5x}+C_2e^x.$

152. $y=(C_1+C_2x)e^{4x}.$

153. $y=e^{-2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)$. 154. $y=C_1e^x+C_2\ e^{\frac{1}{2}x}$. 155. $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x$.

156. $y=C_1+C_2\,e^{-8x}$. 157. $y=(C_1+C_2\,x)e^{-\frac{1}{3}x}$. 158. $y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

159. $y=C_1e^{3x}+C_2\ e^{-3x}$. 160. $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$.

161. $y=e^{4x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$. 162. $y=C_1+C_2\,e^{1,6x}$. 163. $y=C_1\cos\frac{3}{2}x+C_2\sin\frac{3}{2}x$.

164. $y=C_1e^{-5x}+C_2\ e^{5x}$.

165. $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4\,x)e^{\,x}$. 166. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$.

167. $y=(C_1x+C_2)\cos x+(C_3x+C_4)\sin x$. 168. $y=(C_1+C_2\,x)e^{-x}+C_3\,e^{\,x}$.

169. $y=C_1+C_2e^{5x}+C_3\ e^{8x}$. 170. $y=C_1\,e^{-2x}+e^x\,(C_2\cos\sqrt{3}\,x+C_3\sin\sqrt{3}\,x)$.

Алғашқы шарттарды қанағаттандыратын берілген дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу керек.

171. $y''-y'-2y\ =0,\qquad y(0)=0,\quad y'(0)=3.$

172. $y''+6y'+9y\ =0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$

173. $y''-2y'+10y\ =0,\qquad y(\pi/6)=0,\quad y'(\pi/6)=e^{\pi/6}.$

174. $y''+36y\ =0,\qquad y(0)=2,\quad y'(0)=6.$

175. $y''+3y'\ =0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=2.$

176. $y''-25y\ =0,\qquad y(0)=4,\quad y'(0)=0.$

177. $y'''-2y''-y'+2y\ =0,\qquad y(0)=2,\quad y'(0)=6,\quad y''(0)=8.$

Жауаптары: 171. $y=e^{2x}-e^x$. 172. $y=(1+4x)e^{-3x}$.

173. $y=-\frac{1}{3}e^{\,x}\cos 3x$. 174. $y=2\cos 6x+\sin 6x$. 175. $y=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}C_2\,e^{-3x}$.

176. $y=2e^{5x}+2\ e^{-5x}$. 177. $y=e^x-e^{-x}+2\ e^{2x}$.

4.3 Коэффиценттері тұрақты біртекті емес сызықты теңдеулер

16-анықтама. Коэффиценттері тұрақты n- ші ретті біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеу деп

$$L(y)\equiv y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \tag{4.4}$$

теңдеуін айтады, мұндағы $f(x)$ функциясы- I=(a,b) да үзіліссіз, $a_j=cont(j=1,\ldots,n)$.

(4.4) теңдеуінің жалпы шешімін екі әдіспен табуға болады: тұрақтыларды вариациялау әдісі және дербес шешімін таңдап алу әдісі.

Тұрақтыларды варияциялау әдісі алдыңғы тақырыптарда көрсетілген. Сондықтан осы тақырыпта дербес шешімін таңдап алу (анықталмаған коэффициенттер) әдісі қарастырылады.

(4.4) теңдеуінің жалпы шешімі $y=\bar{y}+y*$ болады, мұндағы $\bar{y}$ (4.4) теңдеуіне сәйкес $L(y)=0$ біртекті теңдеудің жалпы шешімі, ал $y*$ (4.4) теңдеуінің қандай-да бір дербес шешімі.

$L(y)=0$ сызықты біртекті теңдеудің фундаментальді жүйе түріндегі шешімі әрқашан табылатындықтан, (4.4) сызықты біртекті емес теңдеуді интегралдау осы теңдеудің дербес шешімін табуға келтіріледі.

Дербес шешімді таңдап алу әдісі тек төмендегідей жағдайларда ғана қолданылады:

№	$f(x)$ -теңдеудің оң жағы	Сипаттама теңдеудің түбірлері	Дербес шешім түрі
I	$P_n(x)$ $P_n(x)$-n-ші дәрежелі көпмүшелік	$\alpha-$ саны сипаттама теңдеудің түбірі емес	$y*=P_n^*(x)$
		$\alpha-$ саны сипаттама теңдеудің r еселі түбірі	$y*=x^r\ P_n^*(x)$
II	$e^{\alpha x}\ P_n(x)$ $P_n(x)$-n-ші дәрежелі көпмүшелік	$\alpha-$ саны сипаттама теңдеудің түбірі емес	$y*=e^{\alpha x}P_n^*(x)$
		$\alpha-$ саны сипаттама теңдеудің r еселі түбірі	$y*=x^r e^{\alpha x}P_n^*(x)$
III	$f(x)=P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x$	$\pm\beta i$ саны сипаттама теңдеудің түбірі емес	$y^*=P_\kappa^*(x)\cos\beta x+Q_\kappa^*(x)\sin\beta x$ $\kappa=\max(m,n)$
		$\pm\beta i$ саны сипаттама теңдеудің r еселі түбірі	$y^*=x^r(P_\kappa^*(x)\cos\beta x+Q_\kappa^*(x)\sin\beta x)$ $\kappa=\max(m,n)$
IV	$f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin$	$\alpha\pm\beta i$ саны сипаттама теңдеудің түбірі емес	$y^*=e^{\alpha x}(P_\kappa^*(x)\cos\beta x+Q_\kappa^*(x)\sin\beta x)$ $\kappa=\max(m,n)$
		$\alpha\pm\beta i$ саны сипаттама теңдеудің r еселі түбірі	$y^*=x^r e^{\alpha x}(P_\kappa^*(x)\cos\beta x+Q_\kappa^*(x)\sin\beta x)$ $\kappa=\max(m,n)$

4.4 Екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық теңдеулер

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ түріндегі теңдеу II ретті коэффициенттері тұрақты біртекті сызықты теңдеу деп аталады.

$a_1, a_2 -$ коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеудің шешімін табу үшін алдымен $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ сипаттама (квадраттық теңдеу болады) теңдеуін шешу керек. 3 жағдайға байланысты теңдеудің шешімі былайша анықталады:

Квадраттық теңдеудің түбірлері	Дара шешімі	Жалпы шешім
1) k_1, k_2- нақты әртүрлі түбірлер	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_1 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2) $k_1 = k_2$ - нақты бірдей түбірлер	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$e^{k_1 x}\left(C_1 + xC_2\right)$
3) $\alpha \pm \beta i$ түбірлер комплекс сандар	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$

44-мысал. $y'' + 2y' - 3y = x e^{4x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Берілген теңдеуінің жалпы шешімі $y = \bar{y} + y*$ болады. Сипаттама теңдеуі

$$k^2 + 2k - 3 = 0$$

Сипаттама теңдеуінің шешімі $k_1 = 1, \quad k_2 = -3.$ Олай болса біртекті теңдеудің жалпы шешімі $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$.

$$f(x) = x e^{4x} = e^{4x} P_n(x), \qquad \alpha = 4, \quad n = 1$$

болғандықтан $\alpha \neq k_1, \quad \alpha \neq k_2$, сондықтан дербес шешім $y* = (Ax + B)e^{4x}$ түрінде ізделінеді.

$$y*' = Ae^{4x} + 4\,(Ax + B)e^{4x}, \qquad y*'' = 8Ae^{4x} + 16\,(Ax + B)e^{4x}$$

Туындыларын есептеп, берілген теңдеуге қойсақ

$8Ae^{4x} + 16\,(Ax + B)e^{4x} + 2(A + 4Ax + 4B)e^{4x} - 3(Ax + B)e^{4x} = x e^{4x}$

теңдеуді e^{4x}-не қысқартып, ықшамдайық.

$$21Ax+10A+21B=x$$
$$x:\ 21A=1$$
$$x^0\ :10A+21B=0$$

осыдан $A=\dfrac{1}{21},\quad B=-\dfrac{10}{441}.$

Берілген теңдеудің жалпы шешімі $y=\bar{y}+y*=C_1\,e^{x}\ +C_2\ e^{-3x}+\dfrac{1}{21}x-\dfrac{10}{441}.$

45-мысал. $y''-5y'+6y=\left(3x^2+1\right)e^{2x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек. Шешуі. Берілген теңдеуінің жалпы шешімі $y=\bar{y}+y*$болады. Сипаттама теңдеуі

$$k^2-5k+6=0$$

Сипаттама теңдеуінің шешімі $k_1=2,\quad k_2=3.$ Олай болса біртекті теңдеудің жалпы шешімі $\bar{y}=C_1\,e^{2x}+C_2e^{3x}.$

$$f(x)=\left(3x^2+1\right)e^{2x}=e^{2x}P_n(x),\qquad \alpha=2,\quad n=2$$

болғандықтан $\alpha=2=k_1\neq k_2$, сондықтан дербес шешім

$y*=x\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{2x}=\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^{2x}$ түрінде ізделінеді.

$$y*'=(3Ax^2+2Bx+C)e^{2x}+2\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^{2x},$$

$$y*''=(6Ax+2B)e^{2x}+4\left(3Ax^2+2Bx+C\right)e^{2x}+4(Ax^3+Bx^2+Cx)e^{2x}$$

Туындыларын есептеп, берілген теңдеуге қойсақ

$$(6Ax+2B+4(3Ax^2+2Bx+C)+4\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right))e^{2x}-5(3Ax^2+2Bx+C+$$
$$+2\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right))e^{2x}+6\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^{2x}=(3x^2+1)e^{2x}$$

теңдеудің екі жағын e^{2x}-не қысқартып, ықшамдайық.

$$6Ax+2B-(3Ax^2+2Bx+C)=3x^2+1$$

немесе

$$-3Ax^2+(6A-2B)x+(2B-C)=3x^2+1$$
$$x^2:-3A=3;\qquad A=-1;$$
$$x:\ 6A-2B=0;\quad B=-3;$$
$$x^0:2B-C=1;\quad C=-7.$$

Берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$y=\bar{y}+y*=C_1\,e^{2x}\ +C_2\ e^{3x}+(-x^3-3x^2-7x)e^{2x}.$$

46-мысал. $y''-10y'+25y=\left(x+2\right)e^{5x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек. Шешуі. Берілген теңдеуінің жалпы шешімі $y=\bar{y}+y*$болады. Сипаттама теңдеуі

$$k^2-10k+25=0$$

Сипаттама теңдеуінің шешімі $k_1 = k_2 = 5.$ Олай болса біртекті теңдеудің жалпы шешімі $\bar{y} = (C_1 + C_2\, x)\, e^{5x}.$

$$f(x) = (\, x+2\,) e^{5x} = e^{2x} P_n(x), \qquad \alpha = k_1 = k_2 = 5, \quad n = 1$$

болғандықтан дербес шешім $y* = x^2\,(Ax + B)\, e^{5x} = (Ax^3 + Bx^2)\, e^{5x}$ түрінде ізделінеді.

$$y*' = (3Ax^2 + 2\,Bx) e^{5x} + 5\,(Ax^3 + Bx^2) e^{5x},$$

$$y*'' = (6Ax + 2B) e^{5x} + 10\,(3Ax^2 + 2Bx) e^{5x} + 25(\,Ax^3 + B\,x^2\,)\, e^{5x}.$$

Туындыларын есептеп, берілген теңдеуге қойсақ

$$(6Ax + 2\,B + 10(3Ax^2 + 2Bx) + 25(Ax^3 + Bx^2)) e^{5x} - 10(3Ax^2 + 2\,Bx +$$
$$+ 5\,(Ax^3 + Bx^2)) e^{5x} + 25(Ax^3 + B\,x^2) e^{5x} = (x+2)\, e^{5x}$$

теңдеудің екі жағын e^{5x} -не қысқартып, ықшамдайық.

$$6\,Ax + 2\,B = x + 2$$
$$x : 6\,A = 1; \quad A = \frac{1}{6};$$
$$x^0 : 2B = 2; \quad B = 1.$$

Берілген теңдеудің жалпы шешімі $y = \bar{y} + y* = (C_1 + C_2\, x)\, e^{5x} + (\frac{1}{6} x^3 + x^2)\, e^{5x}.$

47-мысал. $y'' + 9y = 6\cos 3x$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Берілген теңдеуінің жалпы шешімі $y = \bar{y} + y*$ болады. Сипаттама теңдеуі

$$k^2 + 9 = 0$$

Сипаттама теңдеуінің шешімі $k_{1.2} = \pm 3i.$ Олай болса біртекті теңдеудің жалпы шешімі $\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$

$$f(x) = \cos 3x, \qquad \alpha \pm \beta\, i = \pm 3i, \;\; \alpha = 0, \;\; \beta = 3, \quad n = 0$$

болғандықтан дербес шешім $y* = x\,(A\cos 3x + B\sin 3x)$ түрінде ізделінеді.

$$y*' = A\cos 3x + B\sin 3x + 3x(-A\sin 3x + B\cos 3x),$$

$$y*'' = -6A\sin 3x + 6B\cos 3x - 9x\,(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

Туындыларын есептеп, берілген теңдеуге қойсақ

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x - 9x\,(A\cos 3x + B\sin 3x) + 9x\,(A\cos 3x + B\sin 3x) = 6\cos 3x$$

немесе

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x = 6\cos 3x$$

$$\cos 3x: \quad 6B = 6, \quad A = 0;$$

$$\sin 3x: \quad -6A = 0, \ B = 1.$$

Осыдан берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$y = \bar{y} + y^* = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x\sin 3x.$$

4.5 Жоғарғы ретті тұрақты коэффициентті біртекті емес теңдеулерді шешудің Лагранж әдісі

Сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу үшін тәжірибеде Лагранж әдісін (тұрақтыны вариациялау әдісі) қолдану ыңғайлы.

Алдымен берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімін табу керек. Алдында қарастырылғандай ол мына түрде жазылады:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i.$$

Содан соң, C_i коэффициенттерін x-тің функциялары деп есептеп, біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табу керек:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i.$$

$C_i(x)$ функцияларын табу үшін келесі жүйені шешу керек:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

48-мысал. $y'' + y = x - \sin 2x$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі: 1) Әуелі $y'' + y = 0$ біртекті теңдеуді шешеміз.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = i, \ k_2 = -i.$$

$$y = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right); \quad \alpha = 0; \ \beta = 1;$$

$$y = A\cos x + B\sin x;$$

2) Біртекті емес теңдеудің шешімі келесі түрде болады:

$$y = A(x)\cos x + B(x)\sin x;$$

Теңдеулер жүйесін құрастырамыз:

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0, \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = x - \sin 2x. \end{cases}$$

Жүйені шешейік:

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x}, \\ -A'(x)\sin x - A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x, \\ B'(x) = \cos x\,(x - \sin 2x). \end{cases}$$

$A'(x) = 2\sin^2 x \cdot \cos x - x\sin x$ өрнегінен *A(x)* функциясын табамыз.

$$A(x) = \int (2\sin^2 x \cdot \cos x - x\sin x)\,dx = 2\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx - \int x\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u = x; & dv = \sin x\,dx; \\ du = dx; & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int \cos x\,dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1.$$

Енді *B(x)* функциясын табайық.

$$B(x) = \int x\cos x\,dx - 2\int \cos^2 x\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u = x; & dv = \cos x\,dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x\,dx +$$

$$+ \frac{2}{3}\cos^3 x = \frac{2}{3}\cos^3 x + x\sin x + \cos x + C_2.$$

Табылған мәндерді біртекті емес теңдеудің шешімінің формуласына қоямыз:

$$y = \frac{2}{3}\sin^3 x \cdot \cos x + x\cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + C_1\cos x + \frac{2}{3}\sin x \cdot \cos^3 x + x\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + C_2\sin x =$$

$$= \frac{2}{3}\sin x \cdot \cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) + x(\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Жауабы: $\quad y = \dfrac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x.$

Сөйтіп, біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін дара шешімін таппай жаздық.

Біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін табу керек.

178. $y'' - 2y' + 2y = x^2.$

179. $y'' - 8y' + 7y = 14.$

180. $y'' + y' - 2y = x^2 + 2x + 5.$

181. $y'' - 2y' = 3x^2 - 4.$

182. $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}.$

183. $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}.$

184. $y'' - 2y' + y = xe^x$.

185. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$.

186. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$.

187. $y'' + y' - 2y = 8\sin^2 x$.

188. $y'' + 6y' + 10y = 80e^x \cos x$.

189. $y'' + \omega^2 y = A\sin px, \quad p \neq \omega$.

190. $y'' + \omega^2 y = A\sin \omega x$.

191. $y'' + 2y' + 5y = -\dfrac{17}{2}\cos 2x$.

192. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$.

Жауаптары: 178. $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}$. 179. $y = C_1 e^x + C_2 e^{7x} + 2$.

180. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 2x^2 - 2x - 6$.

181. $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{5}{4}x$.

182. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-0,5x} + \left(\dfrac{4}{5}x - \dfrac{28}{25}\right)e^{2x}$.

183. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} - x e^{4x}$.

184. $y = (C_1 x + C_2)e^x + \dfrac{1}{6}x^2 e^x$.

185. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + 3xe^{2x}$.

186. $y = C_1 + C_2 e^{-2,5x} + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{7}{25}x$.

187. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \dfrac{6}{5}\sin 2x - \dfrac{2}{5}\cos 2x$.

188. $y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x(4\cos x + 2\sin x)$.

189. $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \dfrac{A}{\omega^2 - p^2}\sin px$.

190. $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \dfrac{A}{2\omega} x \cos \omega x$.

191. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \dfrac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x$.

192. $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x\cos x)$.

Алғашқы шарттарды қанағаттандыратын берілген теңдеулердің шешімін табу керек.

193. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 9$.

194. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

195. $y'' + y = \cos 3x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

196. $y'' - y' = 2(1 - x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

197. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3,2$.

Жауаптары: 193. $y = \dfrac{11}{4}e^{3x} + \dfrac{1}{8}e^x + \dfrac{1}{8}e^{5x}$. 194. $y = \left(\dfrac{1}{2}x^2 + 1\right)e^{4x}$.

195. $y=-\frac{11}{8}\cos x+4\sin x-\frac{1}{8}\cos 3x.$ 196. $y=e^{x}+x^{2}.$

197. $y=e^{x}(0{,}16\cos 3x+0{,}28\sin 3x)+x^{2}+2{,}2x+0{,}84.$

4.6 Дәрежелік қатарлардың көмегімен теңдеулерді интегралдау

Жоғарғы ретті коэффиценттері айнымалы сызықты дифференциалдық теңдеулерді интегралдау қиын мәселе.

Келтірілген теңдеуді шешудің кең таралған түрі ізделінді шешімді дәрежелік қатар түрінде табу. Екінші ретті теңдеуді қарастырайық:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{4.5}$$

Айталық, (4.5)-тің $p(x)$ және $q(x)$ коэффиценттері $|x-x_0|<a$ аралықта аналитикалық функциялар болсын, яғни $|x-x_0|<a$ аралығында жинақталатын дәрежелік қатарға жіктеледі.

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x-x_0)^k,\quad q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k(x-x_0)^k, \tag{4.6}$$

Теорема. Егер $p(x)$ және $q(x)$ функциялары $|x-x_0|<a$ аралықта аналитикалық болса, онда (4.5) теңдеуінің $y=y(x)$ кез-келген шешімі аналитикалық болады, яғни $|x-x_0|<a$ аралығында жинақталатын дәрежелік қатарға жіктеледі:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k,$$

Бұл теорема (4.5) теңдеуін интегралдауға мүмкіншілік береді, яғни бұл теңдеудің шешімі дәрежелік қатар түрінде болады. Түрлендірудің алгоритмі мына түрде болады. $x_0=0$ деп алайық. (4.5) теңдеуінің шешімін қатар түрінде іздейміз:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \tag{4.7}$$

(4.5) теңдуіне (4.7) теңдеуін қойсақ:

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}p_kx^k\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}q_kx^k\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0$$

$x^0,x^1,x^2,x^3,\dots,$ коэффиценттерін о-ге теңестірсек, $c_0, c_1, c_2\dots,$ анықталмаған коэффиценттерді анықтау үшін рекурентті жүйені аламыз:

$$
\begin{aligned}
&q_0 c_0 + p_0 c_i + 1\cdot 2c_2 = 0,\\
&q_1 c_0 + (q \ \ + p_0)c_1 + 2p_0 c_2 + 2\cdot 3c_0 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\textstyle\sum_{i=1}^{k}[q_{k-i}c_i + (i+1)p_{k-i}c_{i+1}] + (k+1)(k+2)c_{k+2} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\qquad (4.8)
$$

c_0 және c_1 коэффиценттерін еркін таңдап аламыз (екеуінің біреуі нөлден өзгеше болу керек). c0 және c1 таңдап алып, (4.5) теңдеуінің y(0)=c0, $y'(0) = c_1$ шартын қанағаттандыратындай шешімін іздейміз. Теңдеуден c_2 –ні табамыз және т.с.с.

49-мысал. $y'' - x^2 y = 0$ дифференциалдық теңдеуін шешу керек.

Шешуі: Бұл теңдеудің шешімін қатар түрінде іздейміз.

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots .$$

y және y''-ті берілген теңдеуге қойсақ

$$\left[2\cdot 1C_2 + 3\cdot 2C_3 x + 4\cdot 3C_4 x^2 + \ldots + (n+2)(n+1)C_{n+1}x^n + \ldots\right] -$$
$$- x^2\left[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots\right] \equiv 0.$$

x-тің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерді топтастырсақ:

$$2\cdot 1C_2 + 3\cdot 2C_3 x^2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+4)(n+3)C_{n+4} - C_n\right]x^{n+2} \equiv 0.$$

Алынған қатардың барлық коэффициенттерін нөлге теңестіріп (теңдеу тепе теңдікке айналуы үшін) белгісіз коэффициенттерді табамыз.

$$C_2 = C_3 = 0; \quad C_{n+4} = \frac{C_n}{(n+3)(n+4)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Соңғы қатынас ізделінді жіктелудің барлық коэффициенттерін табуға мүмкіндік береді (C_0 және C_1 кезкелген сан болып қала береді, интегралдау тұрақтысының рөлін атқарады):

$$C_{4k} = \frac{C_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\ldots(4k-1)\cdot 4k}; \quad C_{4k+1} = \frac{C_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\ldots 4k\cdot(4k+1)};$$
$$C_{4k+2} = C_{4k+3} = 0 \ \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Сонымен,

$$y = C_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\ldots(4k-1)\cdot 4k} + C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\ldots 4k\cdot(4k+1)}.$$

Алынған қатарлар $(-\infty; \infty)$ аралығында жинақты және берілген дифференциалдық теңдеудің екі өзара тәуелсіз дербес шешімдерін береді.

50-мысал. Тейлор қатарының көмегімен $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ дифференциалдық теңдеуін, нөлден өзге алты алғашқы мүшелерін алып, жуықтап шешу керек.

Шешуі: Алғашқы шартты ескеріп $y'(0)=0^2+1^2=1$ екендігін аламыз. Берілген теңдеуді дифференциалдап, бірте-бірте туындыларды табамыз

$$y''=2x+2yy',\quad y'''=2+2y'^2+2yy'',\quad y^{IV}=6y'y''+2yy''',$$

$$y^{V}=6y''^2+8y'y'''+2yy^{IV}.$$

$x=0$ және $y(0)=1,\ y'(0)=1$ екендігін ескеріп, бірте-бірте басқа туындылардың мәндерін табамыз.

Сонда $y''(0)=2,\ y'''(0)=8,\ y^{IV}(0)=28,\ y^{V}(0)=144.$

Ізделінді шешім

$$y=1+\frac{x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{28x^4}{4!}+\frac{144x^5}{5!}+\ldots .$$

Қатарға x-тің дәрежелері арқылы жіктеп келесі дифференциалдық теңдеулерді шешіңіз және алынған шешімнің жинақталу аралығын табыңыз.

198. $y'+xy=0.$

199. $y'=x-2y,\quad y(0)=0.$

200. $y''+xy'+y=0.$

201. $y''-xy'-2y=0.$

202. $y''+x^2y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

Жауаптары: 198. $y=C_0\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot4}-\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\ldots\right)=C_0e^{-x^2/2}$ (шешім барлық сан өсінде бар).

199. $y=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^n}{4\cdot n!}=\frac{1}{4}e^{-2x}-\frac{1}{4}+\frac{x}{2}$ (шешім барлық сан өсінде бар).

200. $y=C_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots2n}+C_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n+1)}$ (шешім барлық сан өсінде бар).

201. $y=C_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)}+C_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots2n}$ (шешім барлық сан өсінде бар).

202. $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\ldots4n\cdot(4n+1)}$ (шешім барлық сан өсінде бар).

5 Дифференциалдық теңдеулер жүйесі

5.1 Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі

Дифференциалдық теңдеу жүйесі

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)\ (i=\overline{1,n}) \tag{5.1}$$

қалыпты түрдегі жүйе немесе $x_i=x_i(t)$ функциясының туындысына қарасты шешілген жүйе (қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі) деп аталады.

(5.1) жүйенің $I \subset R$ аралығындағы шешімі деп $I \subset R$ аралағында үзіліссіз дифференциалданатын және $\frac{d\varphi_i}{dt} = f_i(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$ $t \in I$ қанағаттандыратын $x_i = \varphi_i(t)$ $i = \overline{1,n}$ функцияларды айтады.

Егер (5.1) жүйеде

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n),$$

нөлге тең болса, онда үзіліссіз дифференциалданатын $\psi(t, x_1, ..., x_n)$ функциясы осы жүйенің бірінші интегралы деп аталады, (5.1) жүйесінің n тәуелсіз интегралы $\psi_1(t, x_1, ..., x_n)$, $\psi_2(t, x_1, ..., x_n)$, …, $\psi_n(t, x_1, ..., x_n)$ белгілі болса, онда келесі теңдіктер

$$\psi_i(t, x_1, ..., x_n) = C_i \ (i = \overline{1,n}), \tag{5.2}$$

мұндағы C_i - кез келген тұрақты, осы жүйенің жалпы интегралы деп аталады.

Егер осы жүйенің бір бірінші интегралы белгілі болса, онда $x_1, x_2, ..., x_n$ айнымалыларының біреуіне қарасты $\psi(t, x_1, ..., x_n) = C$ шешіп, мысалы

$$x_n = \Phi(t, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, C), \tag{5.3}$$

(5.3) теңдуін (5.1) жүйесінің $n-1$ алғашқы теңдеулеріне қоямыз, сонда пайда болған жүйенің реті төмендейді.

Қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешудің екі әдісін көрсетейік. Бірінші әдіс бойынша теңдеулер жүйесін бір n-ші ретті теңдеуге келтіреміз.

Келтірудің жалпы сұлбасы мына түрге болады. Мысалы, (5.1) жүйесінің бірінші теңдеуін кезекпен $n-1$ рет дифференциалдайды және $\frac{dx_i}{dt}$ орнына мәндерін қояды, онда басқа теңдеулерден мына теңдеу шығады:

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), ..., \frac{d^{(n)}x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \tag{5.4}$$

(5.4) жүйесінің $n-1$ ең алғашқы теңдеулерінен $x_2, x_3, ..., x_n$ анықтап және ең соңғы теңдікке қойып n-ші ретті дифференциалдық теңдеуді алады:

$$\frac{d^{(n)}x_1}{dt^n} = F\ (t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{n-1}}).$$

Бұл теңдеуді шешіп, алдыңғы жүйенің шешімін табады.

(5.1) жүйесіннің шешімін интегралданатын комбинациялар құру арқылы шешуге болады.

51-мысал.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y + 4z = 2x, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z + x \end{cases}$$

жүйесінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Бірінші теңдеуден z -ті анықтап, оны дифференциалдасақ

$$z = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}\cdot\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\frac{d^2y}{dx^2}$$

енді z пен $\dfrac{dz}{dx}$-ті жүйенің екінші теңдеуіне қойсақ

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\frac{d^2y}{dx^2} = y + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}\cdot\frac{dy}{dx} + x$$

немесе

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = -6x + 2.$$

Бұл теңдеудің жалпы шешімі $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} - 6x + 14$ болады.

Яғни $$z = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\left[(C_1 + C_2 x)e^{-x} - 6x + 14\right] - \frac{1}{4}\left[(C_1 + C_2 x)e^{-x} - 6x + 14\right]$$

немесе

$$z = -\frac{1}{4}(2C_1 + C_2 + 2C_2 x)e^{-x} + 5x - 9.$$

52-мысал.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{3y + 4z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{3y + 4z} \end{cases}$$

жүйесінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Алдымен бірінші теңдеуді екінші теңдеуге бөліп одан соң интегралдасақ, онда

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y}{z}, \quad \ln y = \ln z + \ln C_1, \quad y = C_1 z.$$

Енді бірінші теңдеудің екі жағын 3-ке, ал екіншісін 4-ке көбейтіп екеуін қоссақ, онда

$$3\frac{dy}{dx}+4\frac{dz}{dx}=1; \qquad 3dy+4dz=dx$$

$3y+4z=x+C_2$ осыдан $C_1 z+4z=x+C_2$.

Сонда $z=\dfrac{x+C_2}{C_1+4}$, $\qquad y=\dfrac{C_1(x+C_2)}{C_1+4}$.

Берілген дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің жалпы шешімін табу керек.

203. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2y+z, \\ \dfrac{dz}{dx}=y+2z. \end{cases}$

204. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+2y+4z=1+4z, \\ \dfrac{dz}{dx}+y-z=\dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$

205. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y+5z, \\ \dfrac{dz}{dx}+y+3z=0. \end{cases}$

206. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2y+z, \\ \dfrac{dz}{dx}=3y+4z. \end{cases}$

207. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=z, \\ \dfrac{dz}{dx}=y+e^x+e^{-x}. \end{cases}$

208. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=4y+6z, \\ \dfrac{dz}{dx}=2y+3z+x. \end{cases}$

209. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y+z, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y-z, \\ \dfrac{dz}{dt}=2x-y. \end{cases}$

210. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2y+3z}, \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z}{2y+3z}. \end{cases}$

211. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y^2+yz, \\ \dfrac{dz}{dx}=yz+z^2. \end{cases}$

212. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-z^2}, \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2xz}{x^2-y^2-z^2}. \end{cases}$

Жауаптары: 203. $\begin{cases} y=C_1e^{3x}+C_2e^x, \\ z=-C_1e^{3x}+C_2e^x. \end{cases}$ 204. $\begin{cases} y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x^2+x, \\ z=-C_1e^{2x}+\dfrac{1}{4}C_2e^{-3x}-\dfrac{1}{2}x^2. \end{cases}$

205. $\begin{cases} y = e^{-x}\,(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \\ z = \dfrac{1}{5} e^{-x}\big((C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x\big). \end{cases}$ 206. $\begin{cases} y = C_1 e^{t} + C_2 e^{5t}, \\ z = -C_1 e^{t} + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$

207. $\begin{cases} y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + x \cdot sh\, x, \\ z = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} + sh\, x + x \cdot ch\, x. \end{cases}$ 208. $\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{7x} - \dfrac{3}{49} x(7x+2), \\ z = -\dfrac{2}{3} C_1 + \dfrac{1}{2} C_2 e^{7x} - \dfrac{1}{49}\left(14x^2 - 3x - 1\right). \end{cases}$

209. $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \\ y = C_1 e^{t} - 3C_3 e^{-t}, \\ z = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} - 5C_2 e^{t}. \end{cases}$ 210. $\begin{cases} y = \dfrac{C_1(x + C_2)}{2C_1 + 3}, \\ z = \dfrac{x + C_2}{2C_1 + 3}. \end{cases}$

211. $\begin{cases} y = \dfrac{-1}{(1 + C_1)x + C_2}, \\ z = \dfrac{-C_1}{(1 + C_1)x + C_2}. \end{cases}$ 212. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1 y, \\ z = C_2 y. \end{cases}$

5.2 Дифференциалдық теңдеудің біртекті сызықты жүйелері

Анықталмаған функцияға және оның туындысына қарасты сызықты болатын дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \;, \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned}$$

Мұндай жүйе сызықты жүйе деп аталады. Егер барлық $f_i(t) \equiv 0$ болса, онда сызықты біртекті жүйе деп аталады.

Егер де қарастырылған облыстағы барлық коэффиценттер $a_{ij}(t)$ және $f_j(t)$ бос мүше сол облыста үзіліссіз болса, онда сызықты теңдеулер жүйесі шешімнің бар болуы және жалғыздығы туралы теореманың шарттарын қанағаттандырады. Шынымен де бұл жағдайда оң жақ бөліктегі функциялар үзіліссіз және x_j бойынша алынған туындылары шектелген, себебі бұл туындылар $a_{ij}(t)$ тең.

Сызықты теңдеулер жүйесінің келесі қасиеттерін алмастыру жасау арқылы дәлелдеуге болады.

1)егер $x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), ..., x_n^{(1)}(t)$ біртекті сызықты жүйенің шешімі болса, онда

$$cx_1^{(1)}(t), cx_2^{(1)}(t), ..., cx_n^{(1)}(t),$$

мұндағы с — кез келген тұрақты, біртекті сызықты жүйенің шешімі болады. Яғни біртекті сызықты жүйенің шешімін санға көбейтуге болады.

2)егер $x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), ..., x_n^{(1)}(t)$ және $x_1^{(2)}(t), x_2^{(2)}(t), ..., x_n^{(2)}(t)$ біртекті сызықты жүйенің екі шешімі болады, онда

$$x_1^{(1)}(t) + x_1^{(2)}(t), x_2^{(1)}(t) + x_2^{(2)}(t), ..., x_n^{(1)}(t) + x_n^{(2)}(t)$$

біртекті сызықты жүйенің шешімі болады. Яғни біртекті сызықты жүйенің шешімдерін қосуға болады.

1)және 2) қасиеттерінен біз k шешімін аламыз:

$$\begin{array}{c} x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), ..., x_n^{(1)}(t), \\ x_1^{(2)}(t), x_2^{(2)}(t), ..., x_n^{(2)}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), ..., x_n^{(k)}(t), \end{array}$$

мұндағы жоғарғы индекс шешімнің нөмірін көрсетеді, онда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_1^{(i)}(t), \sum_{i=1}^{k} c_i x_2^{(i)}(t), ..., \sum_{i=1}^{k} c_i x_n^{(i)}(t),$$

шешім болады, яғни шешімдердің сызықты комбинациясы біртекті сызықты жүйенің шешімі болады. Алмастыру жасау арқылы біртекті сызықты жүйенің коэффиценттері $a_{ij}(t)$ нақты болғанда, ал жүйенің комплекстік шешімі:

$$u_1(t) + iv_1(t), u_2(t) + iv_2(t), ..., u_n(t) + iv_n(t),$$

болса, онда $u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)$ шешімнің нақты бөлігі және одан бөлек жорамал бөлігі біртекті сызықты жүйенің шешімі болады. Бұлай мысалы, біртекті сызықты жүйесі үшін:

$$\frac{dx}{dt}=y, \frac{dy}{dt}=-x,$$

$$x=e^{it}=\cos t+i\sin t, \quad y=ie^{it}=i\sin t+i\cos t$$

шешімдері болады, яғни

x=cost, y= - sint и x=sint, y=cost,

функциялары да шешімдер болып табылады

1) және 2) қасиеттеріндегі екі параметрге байланысты $x=c_1\cos t+c_2\sin t$, $y=-c_1\sin t+c_2\cos t$ шешім болады.

5.3 Дифференциалдық теңдеудің біртекті емес сызықты жүйелері

Біртекті емес сызықты жүйе үшін $X_1(t), X_2(t),..., X_n(t)$ біртекті емес сызықты жүйенің шешімі, ал $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ - сәйкес біртекті сызықты жүйенің шешімі болса, онда

$$x_1+X_1(t), x_2(t)+X_2(t),..., x_n(t)+X_n(t),$$

біртекті емес сызықты жүйенің шешімі болады. Мысалы, сызықты жүйе

$$\frac{dx}{dt}-y=0, \frac{dy}{dt}+x=3,$$

$x = 4$, $y = - t$ шешімі болады, ал біртекті сызықты жүйенің шешімі

$$\frac{dx}{dt}-y=0, \frac{dy}{dt}+x=0,$$

жоғарыда көрсетілгендей

$$x=c_1\cos t+c_2\sin t, \quad y=-c_1\sin t+c_2\cos t$$

шешімін аламыз, бұдан екі кез келген айнымалыдан тұратын біртекті емес сызықты жүйенің шешімі

$$x=c_1\cos t+c_2\sin t+4, \quad y=-c_1\sin t+c_2\cos t-t.$$

Егер біртекті сызықты жүйенің n шешімі табылса

$x_1^{(1)}, x_2^{(1)},..., x_n^{(1)}$ - бірінші шешім,

$x_1^{(2)}, x_2^{(2)},..., x_n^{(2)}$ - екінші шешім,

. . . .

$x_1^{(n)}, x_2^{(n)},..., x_n^{(n)}$ - n – ші шешім,

ал анықтауыш

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

онда келесі сызықты комбинация бұл жүйенің жалпы шешімі болады:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_1^{(i)},\ x_2 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_2^{(i)},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .,\ x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_n^{(i)}.$$

c_i таңдау арқылы алғашқыда берілген шарттарды қанағаттандыруға болады:

$$x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0},$$

$c_i (i = 1,2,\dots,n)$ болғандықтан теңдеу мына түрде болады:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_1^{(i)}(t_0) = x_{10},\ x_2 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_2^{(i)}(t_0) = x_{20},\ \dots\dots,\ x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_n^{(i)}(t_0) = x_{n0}.$$

Оң жақтары нөлге тең емес жағдайда да шешімі табылады:

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_1^{(i)}(t),\ x_2(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_2^{(i)}(t),\ \dots\dots\dots,\ x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_n^{(i)}(t)$$

Біртекті емес сызықты жүйе үшін сәйкес біртекті жүйенің жалпы шешімінің және біртекті емес жүйенің дербес шешімінің $X_1, X_2, \dots, X_n$ қосындылары:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_1^{(i)} + X_1, \sum_{i=1}^{n} c_i x_2^{(i)} + X_2, \dots, \sum_{i=1}^{n} c_i x_n^{(i)} + X_n,$$

біртекті емес сызықты жүйенің жалпы шешімін құрайды. Егер біртекті сызықты жүйенің шешімі белгілі болса, онда тұрақтыларды вариациялау арқылы біртекті емес сызықты жүйенің жалпы шешімін табуға болады.

$\dfrac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{kj} x_j + f_k(t)$, $(k=1, 2,\dots, n)$ жүйесіне сәйкес біртекті жүйенің шешімі

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_1^{(i)}, x_2 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_2^{(i)}, \dots, x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_n^{(i)}$$

болсын. Барлық c_j жаңа белгісіз функциялар деп есептейік, онда

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) x_j^{(i)} \quad \text{және} \quad \frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \frac{dx_j^{(i)}}{dt} + \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) x_j^{(i)} \qquad (j=1, 2,..., n).$$

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) x_j^{(i)} \quad (j=1, 2,..., n)$$

болатынын ескеріп: $$\sum_{i=1}^{n} c_i(t) \frac{dx_k^{(i)}}{dt} \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{kj} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_j^{(i)} \right),$$

аламыз, бұдан $\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) x_k^{(i)} = f_k(t)$ $(j=1, 2,..., n)$ аламыз.

Бұл сызықты жүйеден $c_i'(t)$ табуға болады, $c_i'(t) = \varphi_1(t)$, интегралдап $c_i(t)$ табамыз.

5.4 Коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеулер жүйесі

Коэффициенттері тұрақты сызықты дифференциалданған теңдеулер жүйелері мына түрде болады

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1.1}$$

мұндағы $x = (x_1,...,x_n)$– n-ші ретті вектор, A-$n \times n$ өлшемді тұрақты квадрат матрица, белгісіздерді жою әдісі жоғары ретті теңдеулерге әкелуі мүмкін. Бірақ берілген теңдеулер жүйесін басқа әдістермен шешуге болады.

Эйлер әдісі. (1.1) жүйесінің шешімін мына түрде табуға болады

$$x = e^{\lambda t} a, \qquad a = (a_1,...,a_n) \tag{1.2}$$

(1.2) функциясы (1.1) жүйесінің шешімі болады, егер λ- A матрицасының меншікті мәні болса, ал a – і λ санына сәйкес осы матрицаның меншікті векторы. Егер A матрицаның $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n$ меншікті мәндері қос – қостан әр түрлі және сәйкес a_1, a_2,…, a_n осы матрицаның меншікті векторлары болса, сонда (1.2) жүйенің жалпы шешімі мына формула арқылы анықталады

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} a_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} a_2 + ... + C_n e^{\lambda_n t} a_n,$$

мұндағы C_1, C_2,…, C_n- кез келген сандар. Егер A матрицасында λ еселі меншікті мәнінің еселігіне тең a_1, a_2,…, a_k, матрицаның сызықты тәуелсіз меншікті векторлары бар болса, онда оған берілген жүйенің k сызықты тәуелсіз шешімдер $e^{\lambda t} a_1$, $e^{\lambda t} a_2,...,e^{\lambda t} a_k$ сәйкес келеді.

Егер λ - *k еселі* меншікті мәнініне *m(m<k)* сызықты тәуелсіз меншікті векторлар сәйкес болса, онда шешімді мына түрде табуға болады:

$$x = (a_0 + a_1 t + ... + a_{k-m} t^{k-m}) e^{\lambda t}.$$

a_0, $a_1,\ldots,a_{k-m}$ векторларын табу үшін, (1.2) өрнегін (1.2) жүйеге қою керек. Ұқсас мүшелердің коэффициенттерін теңестіріп, a_0, $a_1,\ldots,a_{k-m}$ векторларды табуға арналған теңдеулерді аламыз.

Егер A матрицасының меншікті сандардың арасында комплекс сандар бар болса, онда жоғарыда көрсетілген әдіс бойынша (1.2) жүйенің меншікті шешімі комплекс функциясы арқылы құрылады. Шешімді нақты функция арқылы өрнектеу үшін (A нақты матрица болған жағдайда), $\lambda = \alpha \pm \beta i (\beta \neq 0)$ меншікті санына сәйкес комплекс шешімінің нақты және жорамал бөліктері сызықты тәуелсіз шешімдер болатынын пайдалану керек.

53-мысал.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + 8z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 4y + 6z \end{cases}$$

жүйесінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Жүйенің сипаттама теңдеуін құрайық.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{немесе} \quad \lambda^2 - 8\lambda - 20 = 0$$

шешімі $\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 10.$

Енді берілген жүйеге сәйкес сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін жазайық

$$\begin{cases} (2-\lambda)\alpha_1 + 8\alpha_2 = 0, \\ 4\alpha_1 + (6-\lambda)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

$\lambda_1 = -2$ болғанда

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 8\alpha_2 = 0, \\ 4\alpha_1 + 8\alpha_2 = 0. \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \alpha_1 = -2\alpha_2.$$

Осыдан $\alpha_1 = \alpha_{11} = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_{21} = -\dfrac{1}{2},$ онда $y_1 = e^{-2x}, \quad z_1 = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}.$

$\lambda_1 = 10$ болғанда

$$\begin{cases} -8\alpha_1 + 8\alpha_2 = 0, \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0. \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \alpha_1 = \alpha_2.$$

Осыдан $\alpha_1 = \alpha_{11} = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_{21} = 1,$ онда $y_1 = e^{10x}, \quad z_1 = e^{10x}.$

Сонымен берілген жүйенің жалпы шешімі

$$\begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{10x}, \\ z = C_1 z_1 + C_2 z_2 = -\dfrac{1}{2} C_1 e^{-2x} + C_2 e^{10x} \end{cases}$$ болады.

54-мысал.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y - 4z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y + 7z \end{cases}$$

жүйесінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Жүйенің сипаттама теңдеуін құрайық.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ немесе $$\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$$

шешімі $\lambda_{1,2} = 5 \pm 2i.$

Енді берілген жүйеге сәйкес сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін жазайық

$$\begin{cases} (3-\lambda)\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + (7-\lambda)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Бұл жағдайда (түбірлері комплекс сандар болғанда) тек бір $\lambda = 5 + 2i$ (немесе $\lambda = 5 - 2i$) мәнін қарастырамыз, сонда

$$\begin{cases} (-2-2i)\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + (2-2i)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$ немесе $$\alpha_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\alpha_1.$$

Осыдан $\alpha_1 = \alpha_{11} = 1,\quad \alpha_2 = \alpha_{21} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i,$ онда $y = e^{(5+2i)x},\quad z = \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)e^{(5+2i)x}.$

Осы функциялардың нақты және жорамал бөліктерін бөліп алайық

$$y = e^{(5+2i)x} = e^{5x}\cos 2x + i\,e^{5x}\sin 2x,$$

$$z = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)e^{(5+2i)x} = e^{5x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + i\,e^{5x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right).$$

онда

$y_1 = e^{5x}\cos 2x,\;\; y_2 = e^{5x}\sin\;2x.$

$z_1 = e^{5x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right),\;\; z_2 = e^{5x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right).$

Осыдан

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{5x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right),$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 = e^{5x}C_1\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + e^{5x}C_2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

немесе

$$\begin{cases} y = e^{5x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right), \\ z = e^{5x}C_1\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + e^{5x}C_2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right). \end{cases}$$

55-мысал.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y - z, \\ \frac{dz}{dx} = y + 3z \end{cases}$$

жүйесінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Жүйенің сипаттама теңдеуін құрайық.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; (5-\lambda)(3-\lambda)+1=0 \quad \text{немесе} \quad \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

шешімі $\lambda_{1,2} = 4$ екі еселі түбір.

Бұл жағдайда ізделінді функцияларды жою әдісін қолдану тиімді. $y = e^{4x}\left(C_1 x + C_2\right)$ деп алып жүйенің бірінші теңдеуінен z -ті табамыз.

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^{4x} + 4e^{4x}\left(C_1 x + C_2\right)$$

болса, онда

$$z = 5y - \frac{dy}{dx} = 5e^{4x}\left(C_1 x + C_2\right) - C_1 e^{4x} - 4e^{4x}\left(C_1 x + C_2\right) = e^{4x}\left(C_1 x + C_2 - C_1\right).$$

Яғни

$$\begin{cases} y = e^{4x}\left(C_1 x + C_2\right), \\ z = e^{4x}\left(C_1 x + C_2 - C_1\right) \end{cases}$$

берілген жүйенің жалпы шешімі.

Берілген коэффициенттері тұрақты сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің жалпы шешімін табу керек.

213. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 7y + 3z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 6y + 4z. \end{cases}$

214. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 8y + 8z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z. \end{cases}$

215. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -7y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -2y - 5z. \end{cases}$

216. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -9y + 4z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 9y - 4z. \end{cases}$

217. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 6y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 4z. \end{cases}$

218. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = az, \\ \dfrac{dz}{dx} = -ay. \end{cases}$

219. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3x + y, \\ \dfrac{dz}{dx} = -4x - y. \end{cases}$

220. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4y - 3z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z. \end{cases}$

221. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = 2y_1 - y_2. \end{cases}$

222. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 + y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$

Жауаптары: 213. $\begin{cases} y = C_1 e^{x} + C_2 e^{10x}, \\ z = -2C_1 e^{x} + C_2 e^{10x}. \end{cases}$ 214. $\begin{cases} y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}, \\ z = \dfrac{1}{2} C_1 e^{3x} - \dfrac{1}{4} C_2 e^{-3x}. \end{cases}$

215. $\begin{cases} y = e^{-6x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \\ z = e^{-6x}\left(\left(C_1 + C_2\right)\cos x + \left(C_2 - C_1\right)\sin x\right). \end{cases}$ 216. $\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{-13x}, \\ z = \dfrac{9}{4} C_1 - C_2 e^{-13x}. \end{cases}$

217. $\begin{cases} y = e^{5x} (C_1 x + C_2), \\ z = e^{5x}\left(C_1 x + C_2 - C_1\right). \end{cases}$ 218. $\begin{cases} y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}, \\ z = -C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}. \end{cases}$

219. $\begin{cases} y = e^{x}\,(C_1\,x + C_2\,), \\ z = e^{x}\left(C_1 - 2C_2 - 2\,C_1 x\right). \end{cases}$

220. $\begin{cases} y = e^{4t}\,(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \\ z = e^{4t}\left(C_2 \cos 3t - C_1 \sin 3t\right). \end{cases}$

221. $\begin{cases} y_1 = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{-x}, \\ y_2 = C_1\, e^{x} - 3C_3\, e^{-x}, \\ y_3 = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{2x} - 5C_3\, e^{-x}. \end{cases}$

222. $\begin{cases} y_1 = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{-2x}, \\ y_2 = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{2x} - C_3\, e^{-2x}, \\ y_3 = -C_1\, e^{-x} + 2\,C_2\, e^{2x}. \end{cases}$

6 Сызықты автономды жүйенің ерекше нүктелері

6.1 Шешімнің орнықтылығы туралы түсінік

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ бар болып, $x = x(t)$ әрбір шешім үшін $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$ болғанда, барлық $t \geq t_0$ үшін $\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда дифференциалдық теңдеулер жүйесінің

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{6.1}$$

$x = \varphi(t)$ шешімі $t \geq t_0$ болғанда *орнықты* (Ляпунов мағынасында)деп аталады.

$x = \varphi(t)$ дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі (6.1) орнықты болса және $\delta_0 > 0$ саны бар болып, $x = x(t)$ әрбір шешім үшін, $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta_0$ болғанда, $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0$ ақиқат теңдік орындалса, онда *асимптоталық орнықты* деп аталады.

Егер $x = \varphi(t)$ шешім орнықты болмаса, онда оны *орнықсыз* деп атайды. $x = y + \varphi(t)$ алмастыру көмегімен (6.1) теңдеулер жүйесінің $x = \varphi(t)$ қандайда бір шешімдердің орнықтылығын зерттеуді басқа жүйенің $y(t) = 0$ нөлдік шешімінің орнықтылығын зерттеумен алмастыруға болады.

6.2 Екі теңдеудің сызықты автономды жүйесінің тыныштық нүктелері

Мысал ретінде x=0, y=0 коэффициенттері тұрақты біртекті сызықты екі дифференциалдық теңдеулер жүйесінің тыныштық нүктелерінің маңайындағы траекториясының орналасуын зерттейміз:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad \text{мұндағы} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$x = a_1 e^{kt}$ және $y = a_2 e^{kt}$ түріндегі шешімді іздейміз, k-ны анықтау үшін мына теңдеуді аламыз

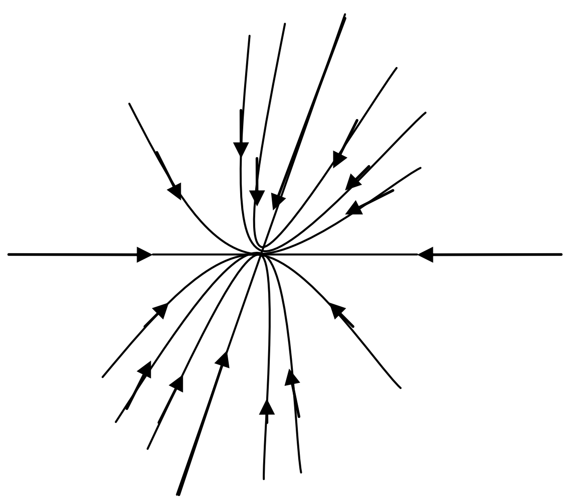
$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0$, немесе $k^2 - (a_{11}+a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$.

Келесі жағдарларды қарастырайық:

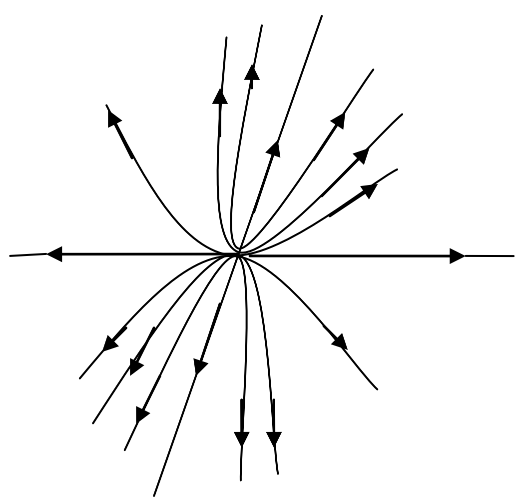
а)Характеристикалық теңдеудің k_1 және k_2 түбірлері нақты және әр түрлі. Жалпы шешімі мына түрде болады $x = c_1 a_1 e^{k_1 t} + c_2 \beta_1 e^{k_2 t}$, $y = c_1 a_2 e^{k_1 t} + c_2 \beta_2 e^{k_2 t}$, мұндағы α_i, β_i - тұрақтылар.

1) $k_1 < 0$ және $k_2 < 0$, x=0, y=0 тыныштық нүктесі асимптоталық орнықты және $t \to \infty$ нүктелер траектория бойынша тыныштық нүктесіне жақындайды. Осындай треакторияның орналасуында тыныштық нүктесі *орнықты түйін* деп аталады (1-сурет).

2) $k_1 < 0$ және $k_2 < 0$, x=0, y=0 тыныштық нүктесі орнықсыз. Траекториялар алдындағы жағдайдағыдай орналасқан, бірақ траектория бойынша нүктелер t өсуімен тыныштық нүктелерінен алыстайды (2-сурет). Мұндай тыныштық нүктесі *орнықсыз түйін* деп аталады.

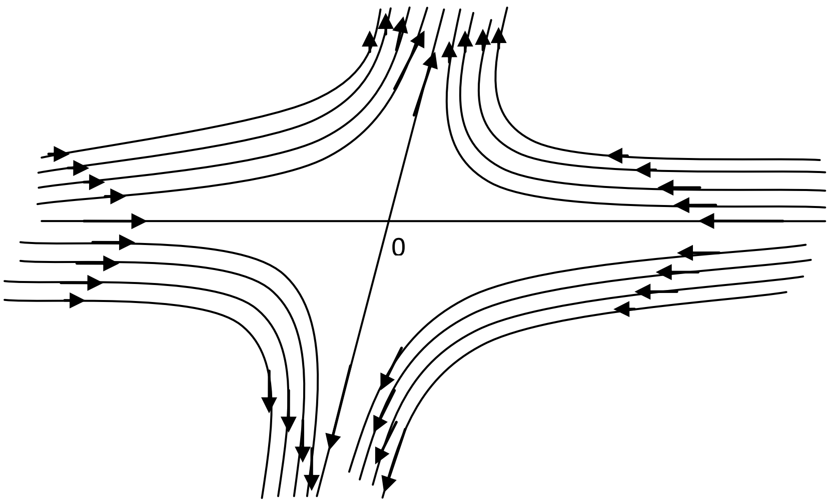


1-сурет



2-сурет

3) $k_1 < 0$ және $k_2 < 0$ тыныштық нүктесі орнықсыз. Траекториядағы нүктелер $t \to \infty$ сияқты, сондай-ақ $t \to -\infty$ болғанда тыныштық нүктесінен алыстайды, Мұндай тыныштық нүктесі *ершік* деп аталады(3-сурет).



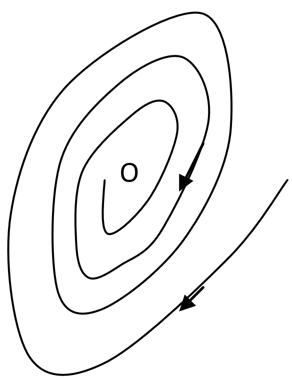
3- сурет

б)Характеристикалық теңдеу $k_1 = p + qi$, $k_2 = p - qi$, $(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) < 0$ түйіндес комплекс түбірлер бар болсын.

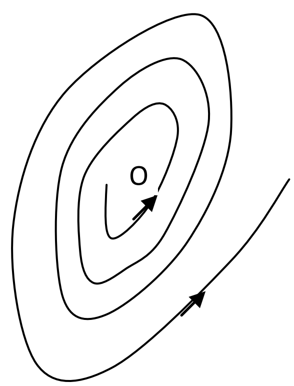
Жалпы шешім мына түрде болады

$$x = e^{pt}(c_1\alpha_1 \cos qt + c_2\beta_1 \sin qt), \quad y = e^{pt}(c_1\alpha_2 \cos qt + c_2\beta_2 \sin qt).$$

1) Егер $p < 0$, тыныштық нүктесі орнықты. $t \to \infty$ болғанда траекторияларында нүктелер тыныштық нүктесіне жақындайды. Траекториялар спираль түрінде болады, тыныштық нүктесіне асимптоталық жақындайды, осы жағдайда тыныштық нүктесі *орнықты фокус* деп аталады (4- сурет).



4-сурет



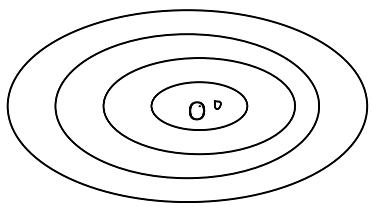
5-сурет

2) Егер $p > 0$, онда тыныштық нүктесі орнықсыз. Траектория спирал түрінде болады, тыныштық нүктесі *орнықсыз фокус* деп аталады (5-сурет).

2) Егер p=0, яғни $k_1 = qi$, а л $k_2 = -qi$,онда жалпы шешім мына түрде болады:

$$x(t) = c_1\alpha_1 \cos qt + c_2\beta_1 \sin qt\,,\ y(t) = c_1\alpha_2 \cos qt + c_2\beta_2 \sin qt\,.$$

Периодты шешім. x=0, y=0 тыныштық нүктесі – орнықты, себебі траектория нүктелері кез келген t –ның мәнінде тыныштық нүктесінен аз маңайында қалады, егер $x(t_0) = x_0$ и $y(t_0) = y_0$ бастапқы мәндері x=0 және y=0 (егер x_0 және y_0 x=0 и y=0 жақын болса, онда c_1 де c_2 де нөлге жақын) жеткілікті жақын таңдалады. Бірақ t-ның өсуінен траекториядағы нүктелер координатаның басына ұмтылмайды. Асимптоталық орнықтылық жоқ. Осы түрдегі тыныштық нүктесі *центр* деп аталады (6-сурет).



6-сурет

в) Егер характеристикалық теңдеудің түбірлері $k_1 = k_2$ еселі болса, онда шешімді мына түрде табамыз

$x(t) = (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{k_1 t}$, $\quad y(t) = (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{k_1 t}$,

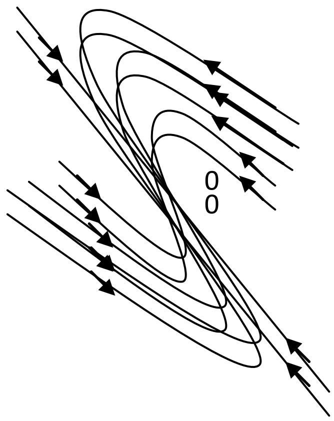
Сонда $\beta_1 = \beta_2 = 0$ болатыны

1) Егер $k_1 = k_1 < 0$ болса, онда $e^{k_1 t}$ көбеткіштің бар болу себебінен, x(t) және y(t) $t \to \infty$ болғанда нөлге ұмтылады, себебі

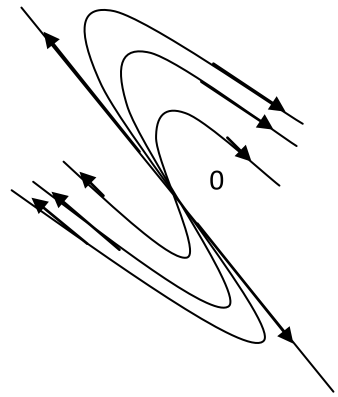
$\lim\limits_{t\to\infty} te^{k_1 t} = 0 \quad k_1 < 0$ болғанда.

x=0, y=0 шешімдері асимптоталық орнықсыз. Біз тағы да орнықты түйінге ие боламыз (7-сурет).

2) $k_1 = k_1 > 0$. x=0, y=0 тыныштық нүктесі орнықсыз. Біз тағы да түйінге ие боламыз, бірақ t өсуімен нүктелердің траектория бойымен қозғалуы алдындағы оқиғаға қарағанда қарама-қарсы бағытта өтеді (8-сурет).



7-сурет



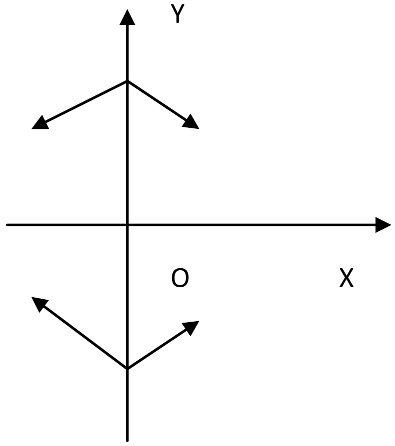
8-сурет

Егер мына теңдеулерде

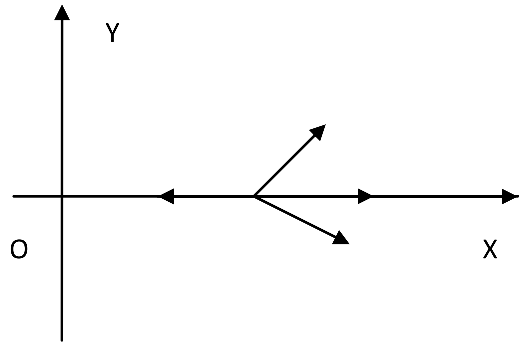
$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ коэффициенттердің өзгеруі аз болса, онда k_1 және k_2 характеристикалық түбірлер де аз өзгереді.

Егер осы өзгеріс жеткілікті аз болса, онда таңбалары бірдей нақты түдірлері [а) 1) және а) 2) жағдайларды] сәл ғана өзгертіліп, таңбалары бірдей нақты түбірлер деп қала береді. Таңбалары әр түрлі нақты түбірлер таңбалары бірдей нақты түбірлерге ауысады [а) 3) жағдай]. Комплекстік түйіндес жұп түбірлер нөлден өзгеше нақты бөлігімен қайтадан нөлден өзгеше нақты бөлігінен түйіндес түбірлер жұбына ауысады [б) 1) және б) 2) жағдай], бірақ жорамал түбірлердің жұптары коэффициеттерінің шамалы өзгерісінде ауысып кетуі мүмкін, нақты айтқанда, ол нөлден өзгеше оң және теріс нақты бөліктің комплекстік түйіндес түбіріне көшеді, яғни коэффициеттерінің шамалы өзгерісінде a_{ij} центрі, былайша айтқанда, тұрақты немесе тұрақсыз фокусқа ауысады. Нөлден өзгеше жағдайда еселі түбірлер $k_1 = k_2$ коэффициеттерінің шамалы өзгерісінде a_{ij} оларды әкелуі немесе содай таңбалы әр түрлі нақты түбірлер жұбына әкеледі, ондай еселі түбірді немесе еселі түбірді сондай таңбалы комплекстік түйіндес түбірлер жұбына,ондай түбір еселі түбірде болды (9-сурет).



9-сурет



10-сурет

Осындай жағдайда, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ коэффициенттердің аз ғана өзгеруінен түйін, әр түрлі түбірлерге сәйкес, фокус пен ершік басқа типті тыныштық нүктесіне ауысады.Сонымен қатар тұрақты түйін , еселі түбірге сәйкес, тек қана тұрақты фокусқа ауысады. Центрі тұрақты және тұрақсыз фокусқа айналуы мүмкін немесе ерекше жағдайда, центр болып қалады. Егер теңдеулер жүйесінде алдындағы қатардан жоғары болатын мүшелер бар болса:

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + R, \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + R$$

Онда олар тыныштық нүктесіне әсерін тигізеді, сызықты мүшелердегі коэффициенттердің аз өзгерісіне ұқсас, нақты айтқанда: осы сызықты жүйеге сәйкес тыныштық нүктесінің бейнесі барлық жағдайларда, ерекше жағдайда характеристикалық теңдеудің еселі және жорамал түбірлері, тек қана соңғы жағдайда, түбірлер жорамал болған жағдайда, x=0, y=0 тыныштық күйінің тұрақтылығы туралы сұрақ сәйкес сызықты жүйенің зерттуімен шешілмейді.

6.3 Ляпунов бойынша тұрақтылық

1) Ляпунов функция әдісімен орнықтылыққа зерттеу

$J_h = \{x \in R^n : \|x\| < h, h > 0\}$ шардағы анықталған және үзіліссіз дифференциалданған $v(x) = v(x_1, x_2, ..., x_n)$ - $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ айнымалыға тәуелді скалярлық функция болсын, және v(0)=0.

$v(x)$ функциясын J_h шарында *оң анықталған* деп атаймыз, егер барлық $x \in J_n$, x=0 нүктесін ескермегенде, $v(x) > 0$ теңсіздік орындалса. Егер $v(x) < 0$ теңсіздік орындалса, онда $v(x)$ функциясы *теріс анықталған* деп аталады. Екі жағдайда да $v(x)$ функциясын *анықталған таңбалы* деп атаймыз.

$v(x)$ функциясын J_h шарында *тұрақты таңбалы* деп аталады, егер барлық $x \in J_n$ үшін $v(x) \geq 0$ немесе $v(x) \leq 0$ теңсіздіктері орындалғанда. Бірінші жағдайда v(x) оң – тұрақты, ал екінші жағдайда теріс – тұрақты болады.

Егер $v(x)$ функциясы J_h шарында оң және теріс мәндерді қабылдаса, онда оны J_h-ғы ауыспа таңбалы деп аталады.

Енді дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{6.2}$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ f = (f_1, f_2, ..., f_n)$$

$f(x)$ функция J_h шарында анықталған, үзіліссіз және кейбір h>0 үшін J_h шарында Липшиц шарттарын қанағаттандырсын және $f(0)=0$ болсын. Соңғысы (1) жүйенің шешімі x=0 болатының білдіреді.

$x=x(t)$ (6.2) теңдеулер жүйесінің кейбір шешімі болсын. $v\ =v(x(t\ \ v))$ функциясы шешім бойында t айнымалы функциясы сияқты үзіліссіз диффиринциалды және оның туындысы

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x) = < gradv, f > .$$

мұндағы

$$\frac{dv}{dt} = < gradv(x), f(x) > .$$

Теорема (Ляпунов бойынша орнықтылық теоремасы). *Егер* (6.2) *теңдеулер жүйесі үшін анықталған таңбалы v(x) функциясы* J_h *облысындағы бар болса,* $\frac{dv}{dt}$ *уақыты бойынша туынды, (1) теңдеу көмегімен құралған, тұрақты таңбалы функция болса және v(x) функциясының таңбасына қарама-қарсы таңбасына ие болса немесе тепе-тең нөлге айналса, онда x=0 (1) теңдеу жүйесіің нөлдік шешімі Ляпунов бойынша орнықты деп аталады.*

Теорема (Ляпуновтың асимптоталық орнықсыздық туралы теоремасы). *Егер* (6.2) *теңдеулер жүйесі үшін* J_h *облысында анықталған таңбалы v(x) функциясы бар болса,* $\frac{dv}{dt}$ *уақыты бойынша туынды,* (6.2) *теңдеу көмегімен құралған, анықталған таңбалы функция болса және v(x) функциясының таңбасына қарама-қарсы таңбасына ие болса, онда* (6.2) *теңдеу жүйесінің нөлдік шешімі асимптоталық орнықты болады.*

Теорема (Ляпуновтың орнықсыздық туралы теоремасы). *Егер* (6.2) *теңдеулер жүйесі үшін v(x) функциясы бар болып, оның уақыт бойынша туындысы,* (6.2) *теңдеу көмегімен құралған, анықталған таңбалы, ал өзі v(x) функциясы әрбір x=*0 *нүкте маңайында анықталған таңбалы болмаса және* $\frac{dv}{dt}$ *таңбасына қарама-қарсы таңбасына ие болса, онда* (6.2) *теңдеу жүйесінің нөлдік шешімі орнықсыз.*

(6.2) жүйедегі f(x) функциясы R^n барлық кеңістігінде анықталған деп ұйғарамыз.

Егер (6.2) теңдеу жүйесінің нөлдік шешімі Ляпунов мағынасында орнықты болса және жүйенің басқа әрбір x(t) шешімі үшін $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$ болса, онда (6.2) ол шешімі *орнықты* деп аталады.

Барлық $x \in R^n$ үшін анықталған v(x) функциясын *шексіз үлкен* деп атаймыз, егер әрбір оң санға сондай r оң сан бар болып, барлық $< x, x >= r^2$ сферасына жатпайты *x* үшін *v(x)>a* орындалса..

Теорема (Барбашина-Красовский теоремасы).

Егер оң анықталған шексіз үлкен v(x) функциясы бар болып, оның (6.2) *теңдеу көмегімен құралған уақыт бойынша алынған туындысы теріс анықталған болса,(* $\frac{dv}{dt}=0$ *теңдік, бүтін траекториясы болмайтын жиында ғана мүмкін, x=0 нүктесінен басқа), онда* (6.2) *теңдеу жүйесінің нөлдік шешімі орнықты болады*.

2) Бірінші жуықтау бойынша орнықтылыққа зерттеу

Дифференциалдық теңдеулер жүйксін қарастырайық

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), \tag{6.3}$$

Мұндағы *A* – тұрақты матрица, *f(t,x)*- *t* және *x* $(t \ge t_0, \|x\| \le h)$ бойынша үзіліссіз функция, келесі шартты қанағаттандыратын

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\| f(t, x)\|}{\|x\|} = 0 \tag{6.4}$$

$t \ge t_0$ бойынша бірқалыпты. Коэффициенттері тұрақты теңдеулер жүйесі

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

(6.2) жүйесі үшін *бірінші жақындау жүйесі* деп аталады.

Теорема 5. *Егер A матрицасының барлық меншікті сандарының нақты бөліктері теріс,ал f(t,x) функцисы* (6.3) *теңдігін қанағаттандырса, онда* (6.2) *теңдеулер жүйесінің нөлдік шешімі асимптоталық орнықты болады. Егер де матрицаның меншікті сандар арасында ең болмағанда біреуінің нақты бөлігі оң сан болса, ал f(t,x) функцисыя* (6.3) *теңдігін қанағаттандырса, онда* (6.2) *теңдеулер жүйесінің нөлдік шешімі орнықсыз болады.*

Егерде *A* матрицасының меншікті сандар арасында біреуінің ғана нөлдік нақты бөлігі бар болып, ал қалғаны – теріс болса, онда (6.2) теңдеулер жүйесінің нөлдік шешімі орнықты (асимптоталық орнықты) және орнықсыз болуы мүмкін.

56-мысал. Теңдеулер жүйесінің нөлдік шешімін орнықтылыққа зерттеу

$$\frac{dx}{dt} = 2x - \ln(1 + y) + \sin x, \frac{dy}{dt} = e^x + \sin(x + y) - \cos^2 y$$

Шешуі. Бірінші жуықтаудың теңдеуін құрамыз

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y, \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

және оларға сәйкес характеристикалық теңдеу

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ характеристикалық теңдеудің түбірлер комплексті және олардың нақты бөліктері оң; $x=y=0$ алғашқы жүйенің шешімі орнықсыз болады.

Дифференциалдық теңдеулер пәні бойынша тест сұрақтары

$$$1 Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу?
A) $y = f(x,y)$;   B) $F(y, y^{//}) = 0$; C) $y' = f(x,y)$; D) $F(x,y) = 0$; E) $y = f(x)$.

$$$2 $y' = \cos^2 x$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.
A) $y = tgx + C$; B) $y = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$; C) $y = \frac{1}{2}\sin x + C$; D) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$;
E) $y = 2Cosx + c$.

$$$ 3 $y' = \sin^3 x$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.
A) $y = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$; B) $y = \frac{1}{2}\sin^3 x + C$; C) $y = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$;
D) $y = \sin^3 \frac{x}{3} - \sin x + C$; E) $y = \frac{1}{3}\sin 3x + C$.

$$$ 4 Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі?
A) $y = \varphi(x)$; B) $y = f(x,y)$; C) $y = \varphi(x_0)$; D) $y = \varphi(x,C)$; E) $y = \varphi(x,y)$.

$$$ 5 Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі?
A) $y = \varphi(x)$; B) $y = f(x,y)$; C) $y = \varphi(x_0, C_0)$; D) $y = \varphi(x, C_0)$; E) $y = \varphi(x_0, y_0)$.

$$$ 6 $y^{|} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $cx = e^{\frac{y}{x}}$; B) $\ln cx = \frac{y}{x}$; C) $\ln cx = -e^{\frac{y}{x}}$; D) $\ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$; E) $y = e^{\frac{y}{x}} + c$.

$$$ 7 $xy^{|} = y\ln\frac{x}{y}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $y = e^{Cx+1}$; B) $y = e^{Cx}$; C) $y = e^{Cx} + 1$; D) $y = xe^{Cx}$; E) $y = xe^{\frac{C}{x}-1}$.

$$$ 8 Белгісізі ажыратылған дифференциалдық теңдеу?
A) $M(y)dx + N(x)dy = 0$; B) $M(x)dx + N(y)dy = 0$; C) $M(x_1 y)dx + N(x_1 y)dy = 0$;
D) $M(x_1 y)dy + N(x_1 y)dx = 0$; E) $M(x,y) * N(x,y) = 0$.

$$$ 9Белгісізі ажыратылатын дифференциалдық теңдеу?
A) $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$; B) $M(x-y)dx + N(x+y)dy = 0$;
C) $M_1(x)N_2(x)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$; D) $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_1(x)}{N_2(x)}dx = 0$;
E) $M(x)dx + N(y)dy = 0$.

$$$ 10 $xdx + (y+1)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.
A) $x^2 + \frac{y^2}{2} = C$; B) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2 + 2y}{2} = C$; C) $\frac{x^2}{2C} + \frac{2y^2}{C} = 1$; D) $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$;
E) $\frac{x^2 + y^2}{2} = C$.

$$$ 11 $(1+x)dy - ydx = 0$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.
A) $y = (1+x)C$; B) $y = (x^2 - 1)C$; C) $y = Cx + x^2$; D) $y = \frac{x}{x+1}$; E) $y = C(x^2 + 1)$.

$$$ 12Біртекті дифференциалдық теңдеу?
A) $y' = f(x,y)$; B) $y' = f(x)$; C) $y' = f(\frac{y}{x})$; D) $y' = xf(x,y)$; E) $y' = f(x'', y)$.

$$$ 13Біртектіге келтірілетін дифференциалдық теңдеу?
A) $y'' = \frac{ax + c}{a_1 x + c_1}$; B) $y' = \frac{ax + вy + c}{a_1 x + в_1 y + c_1}$; C) $y' = \frac{ax + вy + c}{c_1}$; D) $y = \frac{ax + вy + c}{a_1 x + в_1 y + c_1}$;
E) $y' = x\frac{ax + вy + c}{a_1 x + в_1 y + c_1}$.

$$$ 14 $yy' = 2y - x$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.
A) $y = x + ce^{\frac{x}{y}}$; B) $y - x = ce^{\frac{x}{y-x}}$; C) $y + x = ce^{\frac{1}{y}+x}$; D) $y = ce^{\frac{x}{y}}$; E) $y = ce^x$.

$$$ 15 $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.
A) $y^2 = x^2(\ln x - C)$; B) $y^2 = x^2 + C$; C) $y^2 = \ln x^2 + C$; D) $y^2 = x^2 \ln xC$;
E) $y^2 = x^2 + C$.

$$$ 16 Бернулли теңдеуі?

A) $y' + P(x)y = Q(x)^n$; B) $y' + P(x)x = Q(x)x^n$; C) $y' + P(x)y = Q(x)y^n$;
D) $y' + P(x) = Q(x)y^n$; E) $y' + P(x)y = 0$.

$$$ 17 $y'x + y = -xy^2$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.
A) $y = \frac{1}{x\ln cx}$; B) $y = \frac{1}{\ln cx}$; C) $y = \frac{x}{\ln cx}$; D) $y = \frac{\ln cx}{x} + 1$; E) $y = \ln cx$.

$$$ 18Дифференциалдық теңдеудің толық дифференциалдық болуының шарты?
A) $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$; B) $\frac{\partial M}{\partial N} = \frac{\partial y}{\partial x}$; C) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$; D) $\frac{\partial M}{\partial N} = \frac{\partial N}{\partial M}$; E) $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x}$.

$$$ 19 $(7x + 3y)dx + (3x - 5y)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.
A) $\frac{7x^2}{2} + 3xy^2 - \frac{5}{2}y^2 = c$; B) $7x^2 + 3xy - 5y^2 = 2c$; C) $\frac{7x^2}{2} + 3xy - \frac{5}{2}y^2 = C$;
D) $7x^2 + 3xy = 2c$; E) $7x + 3xy = c$.

$$$ 20 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ теңдеуін $\mu(x, y)$ функциясына көбейту арқылы толық дифференциалдыққа келтіруге болса, $\mu(x, y)$ қалай аталады?
A) көбейткіш; B) дифференциалдық көбейткіш;
C) интегралдаушы көбейткіш; D) дифференциал; E) туынды.

Жауаптары

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	D	D	D	D	E	B	A	B

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	C	B	B	A	C	A	C	C	C

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

Негізгі:

1. Матвеев Н.М. Методы интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск : Вышэйшая школа, 1974-766 с.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1970-331 с.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1970-279с.
4. Филиппов А. Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1979-126 с.
5. Эльсгольц Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Санкт-Петербург : Лань, 2002-224с.
6. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер. Алматы, Б.1, «Рауан» 1991г.
7. Сулейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер. Алматы, Б.2, «Рауан» 1996г.
8. Тихонов А.Н., Васильева А.В., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1980г.
9. Цыпкин А.Г. Справочник по математике. М.: Наука, 1999
10. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958г.
11. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1992г.
12. Кабулов А.Р. и др. Сборник индивидуальных заданий по курсу «Методические основы решения задач». Алматы,1997г.
13. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть1, М., Высшая школа, 1998
14. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть2, М., Высшая школа, 1998
15. Шипачев В.С. Основы высшей математики, Высшая математика, 1989

Қосымша :

16. Карташев Э.А., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. - М.: Наука, 1980-287 с.
17. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1959-448с.
18. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – М. Просвещение, 980 -254 с.
19. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи. – Киев : Вища школа, 1984-408 с.
20. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1980-352 с.
21. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.: Наука, 1969-424 с.

Мазмұны

Кіріспе..3
1.Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер..4
1.1Негізгі түсініктер...4
1.2Айнымалыларын бөліп алуға болатын дифференциалдық теңдеулер..................7
1.3 Айнымалылары бөлінетін теңдеуге келтіруге болатын дифференциалдық теңдеу..12
1.4 Қос аргумент бойынша біртекті дифференциалдық теңдеу..............................13
1.5 Қос аргумент бойынша біртекті теңдеуге келтірілетін дифференциалдық теңдеулер...15
1.6 Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер.....................................17
1.7 Бернулли теңдеуі...21
1.8 Толық дифференциалды теңдеулер...23
1.9 Интегралдаушы көбейткіш...25
1.10 Туындылары арқылы шешілмеген бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер..26
1.11 Лагранж және Клеро теңдеулері...29

2. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер...32
2.1 Негізгі түсініктер мен анықтамалар..32
2.2 Квадратураларда шешілетін жоғарғы ретті теңдеулердің түрлері 34
2.3 Реті төмендетілетін жоғарғы ретті теңдеулердің кейбір түрлері.......................38

3 Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер.......................................42
3.1 Сызықты теңдеулердің жалпы қасиеттері...42
3.2 Сызықты біртекті теңдеулер...42
3.3 Сызықты тәуелді және тәуелсіз функциялардың шарттары 44
3.4 Сызықты біртекті емес теңдеулер...46

4 Коэффиценттері тұрақты n- ші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер......49
4. 1 Коэффиценттер тұрақты біртекті сызықты теңдеулер....................................49
4.2 Екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеу...51
4.3 Коэффиценттері тұрақты біртекті емес сызықты теңдеулер..........................54
4.4 Екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық теңдеулер................56
4.5 Жоғарғы ретті тұрақты коэффициентті біртекті емес теңдеулерді шешудің Лагранж әдісі...59
4.6 Дәрежелік қатарлардың көмегімен теңдеулерді интегралдау..........................62

5   Дифференциалдық теңдеулер жүйесі...64
5.1 Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі...64
5.2 Дифференциалдық теңдеудің біртекті сызықты жүйелері................................68
5.3 Дифференциалдық теңдеудің біртекті емес сызықты жүйелері..........................70
5.4 Коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеулер жүйесі.......................72

6 Сызықты автономды жүйенің ерекше нүктелері...77
6.1 Шешімнің орнықтылығы туралы түсінік...77
6.2 Екі теңдеудің сызықты автономды жүйесінің тыныштық нүктелері................77
6.3 Ляпунов бойынша тұрақтылық..82

Дифференциалдық теңдеулер пәні бойынша тест сұрақтары..................................85
Әдебиеттер тізімі...88

Пішімі 60х84 1/12
Көлемі 91 бет 7,6 шартты баспа табағы
Таралымы 20 дана.
Ш.Есенов атындағы КМТжИУ
Редакциялық - баспа бөлімінде басылды.
Ақтау қаласы, 32 ш/а.