ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Ш.ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК
ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСЫ

М.Ш. ТІЛЕПИЕВ, Б.Т. ҚҰЛЖАҒАРОВА

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУДАН ЕСЕПТЕР ЖИНАҒЫ

4-бөлім

Оқу құралы

Ақтау 2011

ӘОЖ 517(075.8)
ББК 22.161я73
Т93
Пікір берушілер: Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті профессоры, ф.-м.ғ.д. С.Т. Мұхамбетжанов
Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті профессоры, ф-м.ғ.д. Н.Р. Садыков
Алматы энергетика және байланыс институтының доценті, ф-м.ғ.к. М.Ж. Байсалова

Т93 Тілепиев М.Ш., Құлжағарова Б.Т.
Математикалық талдаудан есептер жинағы 4-бөлім: Оқу құралы / М.Ш. Тілепиев, Б.Т. Құлжағарова - Ақтау, Ш.Есенов атындағы КМТжИУ, 2011. - 83б.

ISBN 978-601-7349-11-0

Бұл оқу құралы Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінде оқитын математика мамандығының Математикалық анализ пәнінің бағдарламасына сәйкес жасалған.

ӘОЖ 517(075.8)
ББК 22.161я73

Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің Оқу-әдістемелік Кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылды

ISBN 978-601-7349-11-0

КІРІСПЕ

Қазіргі ғылым мен техникада математикалық зерттеулер, модельдер, жобалар өте үлкен роль атқарады. Ол қазіргі ақпараттар жүйесінің дамуына тікелей байланысты. Демек математикалық нақты сандар шешімін табуға табысты қолдану мүмкіншілігін кеңейтеді.

Математика фундаменталды пән, одан дәріс беру төменгі жағдайды қарастырады:

а) ойдың логикалық және алгоритмдік дамуын;

ә)негізгі зерттеу әдістерін меңгеру және математикалық есептердің шешімдерін таба білу;

б) математикалық негізгі сандық әдістерін меңгеру және оны компьютерде орындау;

в) математикалық білімді өз бетінше ұғып алуға еңбектену, қолданбалы инженерлік және экономикалық есептерге талдау жүргізу.

Математиканың жалпы курсы дәстүрлі мамандар үшін оқу жоспары бойынша арнайы және жалпы техникалық пәндерді табысты оқытуға маңызды мәні бар инженерлер білімдерінің математикалық фундаментін қалайды.

«Математикалық талдаудан есептер жинағы» 4-бөлім «Математикалық анализ» пәнінің бағдарламасына сәйкес кредиттік жүйеге лайықты етіліп жазылған.

Мұнда көп айнымалы функциялардың интегралдық есептеулері, екі және үш еселі интегралдың, бірінші және екінші текті қисық сызықты интегралдар, бірінші және екінші текті беттік интегралдар, олардың геометрия мен механика есептерінде қолданылуы, өріс теориясының элементтері, Фурье қатарлары, тақ және жұп функциялар үшін Фурье қатары, кез келген 2l периодты функция үшін Фурье қатары тақырыптары бойынша теориялық материалдар, сонымен қатар үлгі-мысалдардың шешу жолдары көрсетіліп, соңында өзбетімен орындау үшін жаттығулар жауаптарымен берілген.

1 Екі еселі интегралдар

1.1 Тік бұрышты координаттар жүйесіндегі екі еселі интегралдар

Oxy жазықтығының жабық D облысында анықталған $f(x,y)$ функциясы берілсін. D облысын кез келген жолмен n жай облыстарға бөлейік. Осы жай (қарапайым) облыстардың аудандарын $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ деп, ал сәйкес диаметрлерін $d_1, d_2, ..., d_n$ арқылы белгілейік, мұндағы облыс диаметрі деп осы облыста жатқан кез келген екі нүктесінің ара қашықтықтарының ең үлкенін айтады. Әрбір жай облыстан кез келген бір $M_1(x_1, y_1),\ i = 1, ..., n$ нүктеден таңдап алып, осы нүктелердегі анықталатын функциялардың мәндерін сәйкес $\Delta S_1,\ i = 1, ..., n$ аудандарына көбейтіп қолдансақ

$$f(x_1, y_1)\cdot \Delta S_1 + f(x_2, y_2)\cdot \Delta S_2 + ... + f(x_n, y_n)\cdot \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot \Delta S_i.$$

Осы қосынды $f(x,y)$ функцияның D облысындағы *интегралдық қосындысы* деп аталады.

Егер интегралдық қосындының $\max d_i \to 0$ шегі бар және ол шек D облысын n жай облыстарға қалай бөлгенімізге де, әрбір жай облыстан M_1 нүктелерін қалай алғанымызға да байланысты болмаса, одна осы шек $f(x,y)$ функциясының D облысындағы *екі еселі интегралы* деп аталады да былай белгіленеді:

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x,y)\cdot \Delta S_i.$$

Егер D облысында $f(x,y) > 0$ болса, онда $\iint_D f(x,y)dS$ екі еселі интегралы жоғарыдан $z = f(x,y)$ бетімен, бүйір жағынан D облысының шекарасы арқылы өтетін Oz осіне параллель болатын цилиндр бетімен, төменнен Oxy жазықтығымен шектелген цилиндрлік дененің көлеміне тең болады.

Екі еселі интегралдың негізгі қасиеттері:

1. $\iint_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]dS = \iint_D f_1(x,y)dS \pm \iint_D f_2(x,y)dS.$
2. $\iint_D C\cdot f(x,y)dS = C\iint_D f(x,y)dS,$ мұндағы C – тұрақты сан.

3. Егер D облысын D_1 және D_2 облыстарына бөлсек, онда

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_{D_1} f(x,y)dS + \iint_{D_2} f(x,y)dS.$$

4. Егер D облысында $f(x, y) \geq g(x, y)$ болса, онда

$$\iint_D f(x, y)dS \geq \iint_D f(x, y)dS.$$

5. Е к і е с е л і и н т е г р а л д ы б а ғ а л а у. Егер $m \leq f(x, y) \leq M$ болса, онда

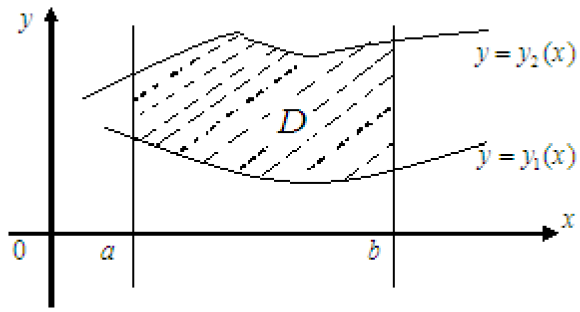
$$m \cdot S \leq \iint_D f(x, y)dS \leq M \cdot S,$$

мұндағы S – D облысының ауданы, ал m мен M сәйкесінше $f(x, y)$ функциясының осы облыстағы ең кіші және ең үлкен мәндері.

Е к і е с е л і и н т е г р а л д ы е с е п т е у.

Интегралдау облысы берілу пішіні (тұрпаты) бойынша екі түрге бөлінеді:

а) D облысы $x = a$ мен $x = b$ $(a < b)$ түзулерімен $y = y_1(x)$ және $y = y_2(x)$ $(x \in [a, b]$ жатқанда $y_1(x) \leq y_2(x))$ үзіліссіз қисық сызықтармен шектелсін, әрі Oy осіне параллель жүргізілген түзулер осы қисықтардың әрқайсысын тек бір нүктеде қисын (1.1 Сурет).



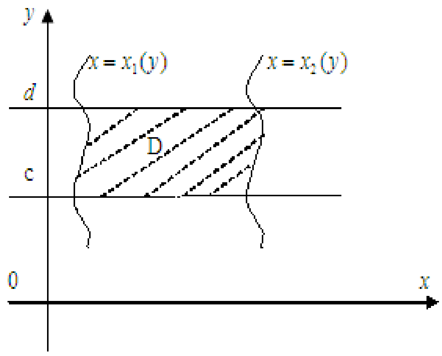
1.1 Сурет

Осындай облыс үшін екі еселі интеграл келесі формуламен есептелінеді:

$$\iint_D f(x, y)dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

мұнда алдымен ішкі $\int_{y_2(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$ интегралы есептелінеді, бұл жағдайда x айнымалысы тұрақты деп саналады.

б) D облысы $y = c$ мен $y = d$ $(c < d)$ түзулерімен $x = x_1(y)$ пен $x = x_2(y)$ $(y \in [c, d]$ жатқанда $x_1(y) \leq x_2(y))$ үзіліссіз қисық сызықтарымен шектелсін, әрі Ox осіне параллель жүргізілген түзулер осы қисықтардың әрқайсысын тек бір нүктеде қисын (1.2 Сурет).



1.2 Сурет

Осындай облыс үшін қос интеграл келесі формуламен есептелінеді:

$$\iint_D f(x,y)dS = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

мұнда алдымен ішкі $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ интегралы есептелінеді, бұл жағдайда y айнымалысы тұрақты деп саналады.

Берілген формулалардың оң жақтары *қос интегралдар* деп аталады.

1. $\iint_D \frac{y^3}{1+x^2}dxdy$ интегралын есептеу керек, мұнда D облысы тіктөртбұрыш: $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3.$

Шешуі. $\iint_D \frac{y^3}{1+x^2}dxdy = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}\int_0^3 y^3dy = arctg\, x\Big|_{-1}^{1}\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_0^3 = \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{81}{4} = \frac{81}{8}\pi.$

2. $\iint_D (x+y)^2dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы квадрат: $-2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2.$

Шешуі. $\iint_D (x+y)^2dxdy = \int_{-2}^{2}dx\int_{-2}^{2}(x+y)^2dy = \frac{1}{3}\int_{-2}^{2}(x+y)^2\Big|_{-2}^{2}dx =$

$$= \frac{1}{3}\int_{-2}^{2}[(x+2)^3-(x-2)^3]dx = \frac{1}{12}[(x+2)^4-(x-2)^4] = 42\frac{2}{3}.$$

3. $\int_1^3 dx\int_{x^3}^{x}(x-y)dy$ интегралын есептеу керек.

Шешуі.

$$\int_1^3 dx\int_{x^3}^{x}(x-y)dy=\int_1^3\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^3}^{y=x}dx=\int_1^3\left(x^2-\frac{x^2}{2}-x^4+\frac{x^6}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{14}\right)\Bigg|_1^3=112\frac{8}{105}.$$

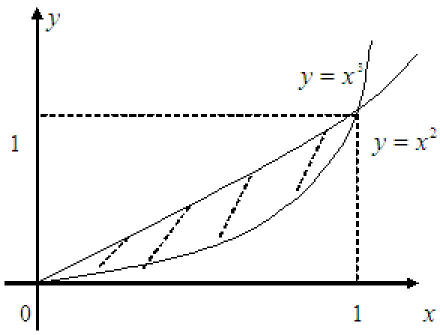
4. $\iint\limits_D (2-x-y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=x^2,\ y=x^3(x\geq 0)$ параболаларымен шектелген.

Шешуі. D облысын сызайық. $y=x^2$ және $y=x^3$ параболаларының қиылысу нүктелері $O(0,0)$ және $\grave{A}(1,1)$ болады (1.3 Сурет).

$0\leq x\leq 1, x^3\leq y\leq x^2$ болғандықтан

$$\iint\limits_D (2-x-y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2}(2-x-y)dy=\int_0^1\left(2y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x^3}^{y=x^2}dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x^2-x^3-\frac{x^4}{2}-2x^3+x^4+\frac{x^6}{2}\right)=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{14}x^7\right)\Big|_0^1=\frac{37}{420}.$$



1.3 Сурет

Енді осы интегралдың интегралдау ретін өзгертейік. Алдымен x бойынша одан кейін y бойынша интегралдайық. $x_1=\sqrt{y}\leq x\leq x_2=\sqrt[3]{y},\ 0\leq y\leq 1$ болғандықтан

$$\iint\limits_D (2-x-y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}(2-x-y)dx=\int_0^1\left(2x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Big|_{x=\sqrt{y}}^{x=\sqrt[3]{y}}dy=\int_0^1\left(2\sqrt[3]{y}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{y^4}-\right.$$

$$\left.-2\sqrt{y}+\frac{1}{2}y+\sqrt{y^3}\right)dy=\left(\frac{3}{2}y^{4/3}-\frac{3}{10}y^{5/3}-\frac{3}{7}y^{7/3}-\frac{4}{3}y^{3/2}+\frac{1}{4}y^2+\frac{2}{5}y^{5/2}\right)\Big|_0^1=\frac{37}{420}.$$

5. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=x^2$ параболасымен $y=6-x,\ y=1,\ y=0$ түзулерімен шектелген.

Шешуі. D облысын құрайық (1.4 Сурет).

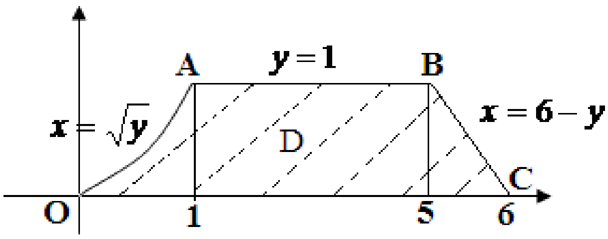
Қиылысу нүктелері $O(0,0),\ A(1,1),\ B(5,1),\ C(6,0)$ болады. Алдымен x бойынша, одан кейін y бойынша интегралдайық.

$0\leq y\leq 1,\ \sqrt{y}\leq x\leq 6-y$ болғандықтан

$$\iint (x^2+y^2)dS = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{6-y} (x^2+y^2)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + xy^2\right)\Bigg|_{x=\sqrt{y}}^{x=6-y} dy =$$

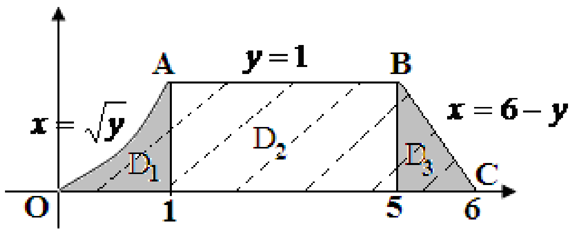
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}(6-y)^3 + (6-y)y - \frac{1}{3}\sqrt{y^3} - y^2\sqrt{y}\right]dy =$$

$$= \left(\frac{-(y-6)^4}{12} + 2y^3 - \frac{y^4}{4} - \frac{2}{15}y^{5/2} - \frac{2}{7}y^{7/2}\right)\Bigg|_0^1 = 57\frac{26}{105}$$



1.4 Сурет

Енді интегралдау ретін өзгертейік. Алдымен y бойынша, содан кейін x бойынша интегралдайық (1.5 Сурет).



1.5 Сурет

Бұл жағдайда D облысы үш D_1, D_2, D_3 облыстарына бөлінеді:

$$D_1: \ 0 \le x \le 1, \ \ 0 \le y \le x^2,$$
$$D_2: \ 1 \le x \le 5, \ \ 0 \le y \le 1,$$
$$D_3: \ 5 \le x \le 6, \ \ 0 \le y \le 6-x.$$

$$\iint_D (x^2+y^2)dS = \iint_{D_1} (x^2+y^2)dS + \iint_{D_2} (x^2+y^2)dS + \iint_{D_3} (x^2+y^2)dS,$$

$$\iint_{D_1} (x^2+y^2)dS = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2+y^2)dy = \int_0^1 \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3}\right)dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{26}{105},$$

$$\iint_{D_2} (x^2+y^2)dS = \int_1^5 dx \int_0^1 (x^2+y^2)dy = \int_1^5 \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} dx = \int_1^5 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\right)\Bigg|_1^5 = 42\frac{2}{3},$$

$$\iint_{D_3}(x^2+y^2)dS=\int_5^6 dx\int_0^{6-x}(x^2+y^2)dy=\int_5^6\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{y=0}^{y=6-x}dx=$$

$$=\int_5^6\left[x^2(6-x)+\frac{(6-x)^3}{3}\right]dx=\int_5^6\left[6x^2-x^4-\frac{(x-6)^3}{3}\right]dx=\left(2x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{(x-6)^4}{12}\right)\Big|_5^6=14\frac{1}{3}.$$

Сонымен $\iint_D(x^2+y^2)dS=\frac{26}{105}+42\frac{2}{3}+14\frac{1}{3}=57\frac{26}{105}.$

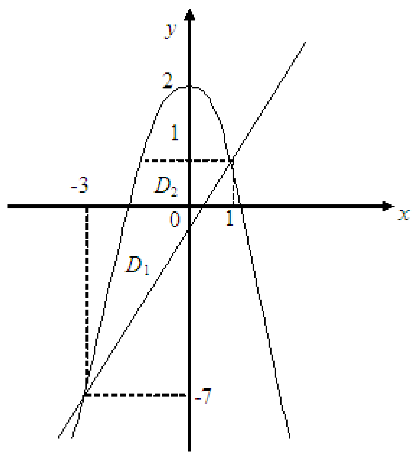
6. $f(x,y)=xy^2$ функциясының D облысындағы орта мәнін табу керек, мұндағы D облысы: $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1.$

Шешуі. $S=2,$

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{S}\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\iint_D xy^2=\frac{1}{2}\int_0^2 xdx\int_0^1 y^2dy=\frac{1}{3}.$$

7. $\int_{-3}^{1}dx\int_{2x-1}^{2-x^2}f(x,y)dy$ интегралының интегралдау ретін өзгерту керек.

Шешуі. D облысы $x=-3,\ x=1,\ y=2x-1,\ y=2-x^2$ сызықтарымен шектелген. Интегралдау ретін өзгерту үшін D облысын $y=1$ түзуімен D_1 және D_2 облыстарына бөлеміз (1.6 Сурет):



1.6 Сурет

D_1 облысы сол жағынан $x=-\sqrt{2-y}$ параболасымен, ал оң жағынан $x=\frac{1}{2}(y+1)$ түзуімен шектелген, яғни $-\sqrt{2-y}\le x\le\frac{1}{2}(y+1),\ -7\le y\le 1.$

D_2 облысы оң және сол жағынан $x=\pm\sqrt{2-y}$ параболасымен шектелген, яғни $-\sqrt{2-y}\le x\le\sqrt{2-y},\ 1\le y\le 2.$

Сонымен

$$\int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int_{-7}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx.$$

Берілген екі еселі интегралдарды есептеу керек:

8. $\iint\limits_D x\ln y dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D тіктөртбұрыш: $0 \le x \le 4,\ 1 \le y \le e.$ Жауабы: 8.

9. $\iint\limits_D x^2 \sin y dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D тіктөртбұрыш: $2 \le x \le 5,\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}.$ Жауабы: 39.

10. $\iint\limits_D (1+y)\sqrt{x}\, dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D тіктөртбұрыш: $0 \le x \le 4,\ -1 \le y \le 2.$ Жауабы:24.

11. $\iint\limits_D (x+3\sqrt{y})dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D квадрат: $-1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 4.$ Жауабы:45.

12. $\iint\limits_D (x+2y)^2 xdxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D тіктөртбұрыш: $1 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 2.$ Жауабы: 304.

13. $\iint\limits_D (\cos^2 x + \sin^2 y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D квадрат: $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4},\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{4}.$ Жауабы: $\dfrac{\pi^2}{16}.$

14. $\iint\limits_D (x+xy^2+5)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D квадрат: $-1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3.$ Жауабы:168.

15. $\int_{-2}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)dy$ интегралын есептеу керек. Жауабы: 50,4.

16. $\int_{1}^{2} dx \int_{x}^{x^2} (x+y)dy$ интегралын есептеу керек. Жауабы: 3,35.

17. $\int_{1}^{2} dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \dfrac{x^2}{y^2} dy$ интегралын есептеу керек. Жауабы: 2,25.

18. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy$ интегралын есептеу керек. Жауабы: $\dfrac{\pi}{6}$.

19. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2 \varphi dr$ интегралын есептеу керек. Жауабы: 2,4.

20. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} y^4 dy$ интегралын есептеу керек. Жауабы: $7\dfrac{11}{35}$.

21. $\int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^{3\cos x} y \sin x dy$ интегралын есептеу керек. Жауабы: 1,5.

22. $\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы төбелері $O(0;0)$, $A(1;-1)$, $B(1;1)$ нүктелері болатын үшбұрыш. Жауабы: $\dfrac{\pi}{6}$

23. $\iint\limits_D \sqrt{xy-y^2}\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $O(0;0)$, $A(10;1)$, $B(1;1)$ нүктелері болатын үшбұрыш. Жауабы: 6.

24. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=2-x^2$, $y=2x-1$ сызықтарымен шектелген. Жауабы: $4\dfrac{4}{15}$.

25. $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=x^2$ және $y^2=x$ параболаларымен шектелген. Жауабы: $\dfrac{33}{140}$.

26. $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=0$, $y=x$, $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ түзулерімен шектелген. Жауабы: 0,5.

27. $\iint\limits_D (x-2xy+3y^2)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=0$, $y=x^2$, $x=2$ сызықтарымен шектелген. Жауабы: $11\dfrac{13}{21}$.

28. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $x=0,\ y=x^2,\ y=9$ сызықтарымен шектелген. Жауабы:214,65.

29. $\iint\limits_D (x^2+2y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=3-x^2,\ y=2x$ сызықтарымен шектелген. Жауабы:$10\frac{2}{3}$.

30. $\iint\limits_D (2x-y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y^2=x,\ \mathrm{x}+y=2$ сызықтарымен шектелген. Жауабы: -16,65.

31. $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y^2=x$ параболасы және $x=0,\ y=1$түзуімен шектелген қисықсызықты үшбұрыш. Жауабы: 0,5.

32. $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=\frac{x^2}{2}$ параболасы және $y=x$ түзуімен шектелген. Жауабы: 0,5.

Қос интегралдардың интегралдау реттерін өзгерту керек:

33. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy;$ Жауабы: $\int\limits_0^{48} dy\int\limits_{\frac{y}{12}}^{4} f(x,y)dx+\int\limits_3^5 dy\int\limits_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx.$

34. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy;$ Жауабы: $\int\limits_0^{48} dy\int\limits_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dx$

35. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy;$ Жауабы: $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx+\int\limits_2^3 dy\int\limits_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)dx.$

36. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy;$ Жауабы: $\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^4 f(x,y)dx+\int\limits_3^5 dy\int\limits_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx.$

37. $\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy;$ Жауабы:$\int\limits_0^1 dy\int\limits_1^4 f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{y^2}^4 f(x,y)dx.$

38. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2+1} f(x,y)dy;$ Жауабы: $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{\sqrt{y-1}}^1 f(x,y)dx.$

39. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy;$ Жауабы: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$

40. $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)dy;$ Жауабы: $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx.$

41. $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy;$ Жауабы: $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx.$

42. $\int_0^2 dx \int_{x^2}^{x^2+2} f(x,y)dy;$

Жауабы: $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{\sqrt{y-2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_4^6 dy \int_{\sqrt{y-2}}^2 f(x,y)dx.$

43. $\int_0^1 dx \int_1^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_x^2 f(x,y)dy;$ Жауабы: $\int_1^2 dy \int_{\sqrt{y}}^y f(x,y)dx.$

44. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy;$ Жауабы: $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$

45. $\int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_{\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy;$ Жауабы: $\int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx.$

1.2 Екі еселі интегралда айнымалыларды алмастыру

Екі еселі интегралда x, y координатасынан,

$$x = x(u,v), \ \ y = y(u,v)$$

формуласының көмегімен, u, v координатасына көшу

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{D'} F(u,v)\cdot |I|\, dudv$$

формуласымен жүзеге асады, мұндағы

$$F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v));$$

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} - \textit{якобиан},$$

ал $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ өзара бірмәнді, D облысында үзіліссіз, әрі осы облыста үзіліссіз бірінші ретті дербес туындылары бар функциялар.

Екі еселі интегралда тік бұрышты x, y координаттарынан,

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

формулаларының көмегімен, r, φ *полярлық координаталарына* көшу

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot |I|\, drd\varphi$$

формуласымен жүзеге асады. Мұндағы

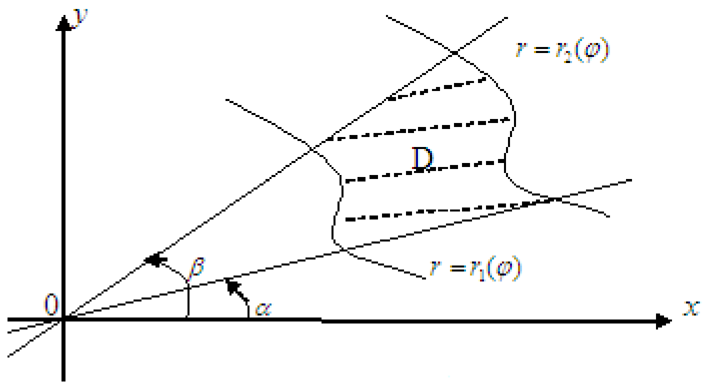
$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

болады.

Егер интегралдау D облысы $\varphi = \alpha$ және $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ сәулелерімен, $r = r_1(\varphi)$ және $r_2 = r(\varphi)$ ($\varphi \in [\alpha, \beta]$ жатқанда $r_2(\varphi) \geq r_1(\varphi)$ болса) қисық сызықтармен шектелсе, онда екі еселі интеграл

$$\iint\limits_{D} F(r,\varphi)\cdot rdrd\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi)\cdot rdr$$

формуласымен есептелінеді (1.7 Сурет).



1.7 Сурет

46. Полярлық координаталар жүйесіне көшу арқылы $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $x^2 + y^2 = ax$ шеңберімен шектелген $(a > 0)$.

Шешуі. D облысы радиусы $\frac{a}{2}$ тең, центрі $O\left(\frac{a}{2},0\right)$ болатын дөңгелек болғандықтан полярлық координаталарға көшеміз. $x^2 + y^2 = ax$ шеңбері полярлық координаттар жүйесінде $r = a\cdot\cos\varphi$ формуласы арқылы анықталады. $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le a\cos\varphi$ болғандықтан

$$\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - r^2}\cdot r\,d\varphi dr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\cdot\frac{d(a^2 - r^2)}{-2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (a^2 - r^2)^{3/2}\Big|_{r=0}^{r=a\cos\varphi} d\varphi = -\frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(a^3\sin^3\varphi - a^3\right)d\varphi = -\frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi - \varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

47. $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9}$, $x^2 + y^2 = \pi^2$ шеңберлерімен шектелген.

Шешуі. D облысы радиустары $\frac{\pi}{3}$ – ке және π-ге тең, ал центрлері координаттар жүйесінің бас нүктесі болатын екі шеңбердің арасындағы сақина болғандықтан полярлық координаттарға көшеміз. Бұл шеңберлер полярлық координаттар жүйесінде $r = \frac{\pi}{3}$ және $r = \pi$ формулалары арқылы анықталады. Сондықтан $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\frac{\pi}{3} \le r \le \pi$ болғандықтан

$$\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint_D \sin r\, drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi} \sin r\, dr = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos r) \Big|_{\pi/3}^{\pi} = 3\pi.$$

48. $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсімен шектелген.

Шешуі. $x = a\cdot\rho\cos\theta, y = b\cdot\rho\sin\theta$ деп алсақ, онда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсінің полярлық координаттар жүйесіндегі теңдеуі $\rho = 1$.

Якобиан
$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} = ab\cdot\rho,$$

ал $0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ болғандықтан

$$\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = ab\iint_D \sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\, d\rho\, d\theta = ab\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho =$$
$$= -\frac{ab}{3}\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{3/2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \frac{ab}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi ab}{3}.$$

49. $\iint_D (y+ax)(y-bx)\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы

$$y = -ax + C_1,\quad y = -ax + C_2,\quad y = bx + C_3,\quad y = bx + C_4$$
$$(C_1 < C_2 < C_3 < C_4,\ a > 0, b > 0)$$

түзулермен шектелген.

Шешуі. $y + ax = u,\ y - bx = v$ немесе $x = \frac{u-v}{a+b},\ y = \frac{av+bu}{a+b}$ деп алсақ, онда

$$C_1 \le u \le C_2,\ C_3 \le v \le C_4,$$

ал якобиан

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & -\frac{1}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b}$$

болады. Сонымен

$$\iint_D (y+ax)(y-bx)dxdy = \iint_{D'} u\cdot v\cdot\left|\frac{1}{a+b}\right| dudv = \frac{1}{|a+b|}\int_{C_1}^{C_2} udu\int_{C_3}^{C_4} vdv = \frac{(C_2^2-C_1^2)(C_4^2-C_3^2)}{4|a+b|}.$$

Полярлық координаттарға көшу арқылы қос интегралды есептеу керек:

50. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, мұндағы D облысы $x^2+y^2=a^2$ шеңберімен шектелген.

Жауабы: $\frac{3}{2}\pi a^4$.

51. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, мұндағы D облысы $x^2+y^2=2ax$ шеңберімен шектелген. Жауабы: $1{,}5\pi a^4$.

52. $\iint\limits_D ydxdy$, мұндағы D облысы $x^2+y^2\le ax$ $(y\ge 0)$ жарты дөңгелек.

Жауабы: $1{,}5\pi a^4$.

53. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, мұндағы D облысы $x^2+y^2\le a^2$ дөңгелегінің бірінші ширегі. Жауабы: $\frac{a^3}{12}$

54. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, мұндағы D облысы $x^2+y^2\le a^2$ $(y\ge 0)$ жарты дөңгелек. Жауабы: $\frac{1}{3}\pi a^2$.

55. $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)dxdy$, мұндағы D облысы $x^2+y^2=e^2$ $x^2+y^2=e^4$ шеңберлерімен шектелген. Жауабы: $\pi e^2(3e^2-1)$.

56. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, мұндағы D облысы $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\ge 0)$ лемниската жапырағымен шектелген. Жауабы: $(\frac{\pi}{3}-\frac{16\sqrt{2}-20}{6})\frac{a^2}{2}$.

57. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, мұндағы D облысы $x^2+y^2=1$ және $x^2+y^2=e^2$ шеңберлерімен шектелген. Жауабы: 4π.

58. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+a^2}$, мұндағы D облысы $y=\sqrt{a^2-x^2}$ жарты шеңберімен, OX осімен шектелген $(y\ge 0)$. Жауабы: $0{,}5\pi\ln 2$.

59. $\iint\limits_D x^2y\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=ax$ пен $y=bx\,(0<a<b)$ және $xy=p$ мен $xy=q\,(0<p<q)$ гиперболасымен шектелген.

Ескерту. $\frac{y}{x}=u,\ xy=v.$ Жауабы: $\frac{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{5\sqrt{ab}}\left(\sqrt{q^5}-\sqrt{p^5}\right)$.

60. $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $x+y=1,\quad x-y=1,\quad x+y=3,\quad x-y=-1$ түзулермен шектелген.

Ескерту. $x+y=u,\ x-y=v.$ Жауабы: $\frac{20}{3}$.

1.3 Жазық фигуралардың аудандарын есептеу.

D облысымен шектелген жазық фигураның ауданы

$$S=\iint\limits_D dxdy$$

формуласымен анықталады.

Егер D облысы $a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)$ теңсіздіктерімен шектелсе, онда

$$S=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy.$$

Егер D облысы полярлық координаттар жүйесінде $\alpha\le\varphi\le\beta,\ r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi)$ теңсіздіктермен шектелсе, онда

$$S=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}rdr.$$

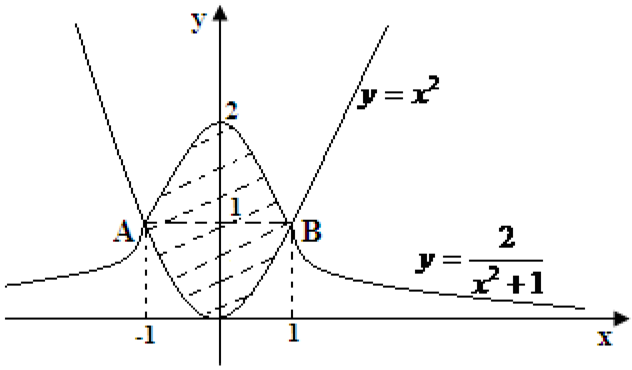
61. $y=\frac{2}{x^2+1}$ және $y=x^2$ сызықтармен шектелген жазық фигураның ауданын табу керек.

Шешуі. Берілген сызықтардың қиылысу нүктелерін табамыз

$$\frac{2}{x^2+1}=x^2,\ x=\pm1$$

Олар $A(-1;1)$ және $B(1;1)$ нүктелері (3.8 Сурет). Сонымен $-1\le x\le 1,\ x^2\le y\le\frac{2}{x^2+1}$ болғандықтан

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{\frac{2}{x^2+1}}dy=\int\limits_{-1}^{1}y\Big|_{x^2}^{\frac{2}{x^2+1}}dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{2}{x^2+1}-x^2\right)dx=2arctgx\Big|_{-1}^{1}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\pi-\frac{2}{3}.\ \blacktriangle$$



1.8 Сурет

62. Полярлық координаттар жүйесіне көшу арқылы $(x^2+y^2)^3=2a^2xy^3$ қисық сызығымен шектелген жазық фигураның ауданын табу керек $(a>0)$.

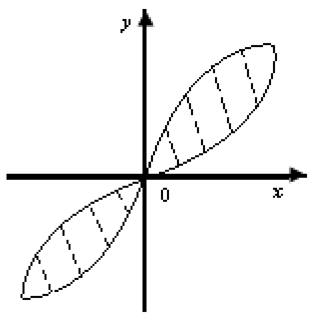
Шешуі. $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$ формулалары арқылы полярлық координаттар жүйесіне көшсек

$$r^6=2a^2r^4\sin^3\varphi\cos\varphi$$

немесе

$$r=a\sqrt{2\sin^3\varphi\cos\varphi}=a\,|\sin\varphi|\cdot\sqrt{\sin 2\varphi},$$

мұндағы $\sin 2\varphi\geq 0$ болғандықтан $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$. Яғни φ 0-ден $\frac{\pi}{2}$ –ке дейін өзгеретіндегі фигураның ауданы берілген фигураның ауданының жартысына тең болады (3.9 Сурет).



1.9 Сурет

Сонымен

$$S = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2\sin^3\varphi\cos\varphi}} r\cdot dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \Bigg|_0^{a\sqrt{2\sin^3\varphi\cos\varphi}} d\varphi = 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cdot\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2}a^2\sin^4\varphi \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}.$$

▲

Берілген сызықтармен шектелген жазық фигуралардың аудандарын табу керек.

63. $x = 4y - y^2,\ x + y = 6.$ Жауабы: $\frac{1}{6}.$

64. $y = 4x - x^2,\quad y = 2x^2 - 5x.$ Жауабы: $\frac{27}{2}.$

65. $x = y,\ x = 2y,\ x + y = a,\quad x + 3y = a\ \ (a > 0).$ Жауабы: $\frac{7a^2}{120}.$

66. $x = y^2,\ y = x^2.$ Жауабы: $\frac{1}{3}.$

67. $y^2 = 10x + 25,\ y^2 = 9 - 6x.$ Жауабы: $\frac{16\sqrt{15}}{3}.$

68. $y^2 = 4ax,\ \ x + y = 3a,\ \ y \ge 0\ \ (a > 0).$ Жауабы: $\frac{10a^2}{3}.$

69. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс). Жауабы: $\pi a b.$

70. $r = a(1 + \cos\varphi),\ r = a\cos\varphi\ \ (a > 0).$ Жауабы: $1{,}25\pi a^2.$

71. $x^2 + y^2 = 2x,\ \ x^2 + y^2 = 4x,\quad y = x,\ \ y = 0.$ Жауабы: $3(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}).$

72. $(x^2 + y^2) = 2a^2xy.$ Жауабы: $a^2.$

73. $(x^2 + y^2) = a^2(x^2 + 4y^2).$ Жауабы: $2{,}5\pi a^2.$

74. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2).$ Жауабы: $a^2.$

75. $(x^2 + y^2)^2 = a(3x^2 - y^2).$ Жауабы: $\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right)a^2.$

1.4 Денелердің көлемдерін есептеу.

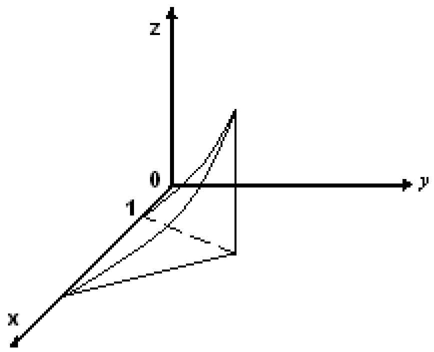
Жоғарыдан $z = f(x,y)$ бетімен, төменнен $z=0$ жазықтығымен, бүйір жағынан D облысының шекарасы арқылы өтетін OZ осіне параллель болатын цилиндр бетімен шектелген дененің көлемі

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

формуласымен есептеледі.

76. $z = \frac{1}{3}y^2$ бетімен, $z=0$, $5x-2y-5=0,\quad 5x+3y-30=0$ жазықтықтарымен шектелген дененің көлемін табу керек.

Шешуі. Берілген дене жоғарыдан $z=\frac{1}{3}y^2$ бетімен, төменнен $z=0$ жазықтығымен, ал бүйір жағынан $5x-2y-5=0$ және $5x+3y-30=0$ жазықтықтарымен шектелген (1.10 Сурет).

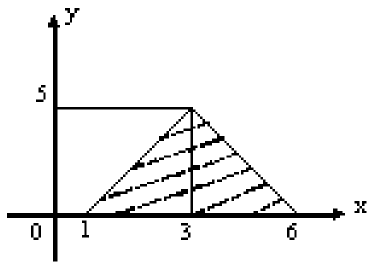


1.10 Сурет

Сондықтан $V=\iint_D \frac{1}{3}y^2\,dxdy$, ал интегралдау D облысы $0{,}4y+1 \le x \le 6-0{,}6y,\quad 0\le y\le 5$ теңсіздіктерімен шектелген (1.11 Сурет). Сонымен

$$V=\frac{1}{3}\iint_d y^2dxdy=\frac{1}{3}\int_0^5 dy\int_{0,4y+1}^{6-0,6y} y^2dx=\frac{1}{3}\int_0^5 y^2\cdot x\Big|_{x=0,4y+1}^{x=6-0,6y}dy=\frac{1}{3}\int_0^5 y^2(5-y)dy=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4\right)\Bigg|_0^5=17\frac{13}{36}.\quad\blacktriangle$$



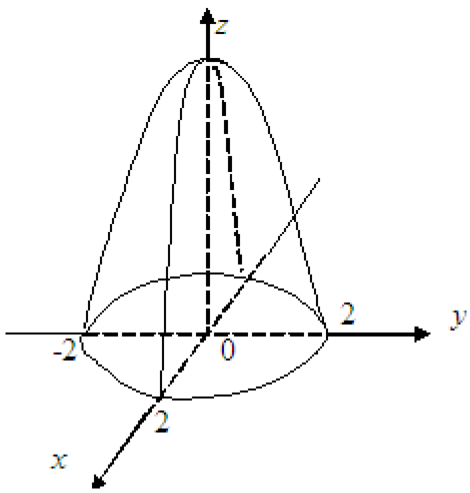
1.11 Сурет

77. $z = 4 - x^2 - y^2$ параболоиды және $z = 0$ жазықтығымен шектелген дененің көлемін табу керек (1.12 Сурет).

Шешуі. Жоғарыдан $z = 4 - x^2 - y^2$ параболоидымен, төменнен $z = 0$ жазықтығымен шектелген дененің көлемі

$$V = \iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dxdy.$$

Интегралымен анықталады, мұндағы D облысы $x^2 + y^2 = 4$ шеңберімен шектелген. Бұл жағдайда $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ формулаларының көмегімен полярлық координаттар жүйесіне көшеміз.



1.12 Сурет

$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2$ болғандықтан

$$V = \iint_D (4 - r^2) \cdot r\, drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4 - r^2) \cdot r\, dr = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^2 = 2\pi \cdot (8 - 4) = 8\pi. \quad \blacktriangle$$

Берілген беттермен шектелген денелердің көлемдерін табу керек:

78. $z=3x,\quad z=0,\quad y=1+x^2,\quad y=5$ (бірінші октантта орналасқан). Жауабы: 12.

79. $z=0,\quad z=x^2,\quad x+y=2,\quad y=0.$ Жауабы: $1\frac{1}{3}$.

80. $z=0,\quad z=2y,\quad y=3x,\quad x=2.$ Жауабы: 24.

81. $z=0,\quad z=1-x^2-y^2,\quad y=x,\quad y=x\sqrt{3}$ (бірінші октантта орналасқан). Жауабы: $\frac{\pi}{48}$.

82. $z=0, z=x, y=\sqrt{4-y^2}.$ Жауабы: $5\frac{1}{3}$.

83. $z=0,\ z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1.$ Жауабы: $\frac{88}{105}$.

84. $z=0, z=4-x, 2x+y=4, x=0, y=0.$ Жауабы: $\frac{40}{3}$.

85. $z=0,\quad z=5x,\quad x^2+y^2=9.$ Жауабы: $\frac{32}{9}$.

86. $z=0, z=6-x-y, 3x+2y=12, 3x+y=6, y=0$ Жауабы: 12.

87. $z=0, z=x+y+1, y^2=x, x=1, y=0.$ Жауабы: $\frac{79}{60}$.

88. $z=0, z=4-x-y, x^2+y^2=8, x=0, y=0.$ Жауабы: $8\pi-\frac{32\sqrt{2}}{3}$.

89. $z=0, z=4-x-2y, x=2y^2, y=0.$ Жауабы: $3\frac{2}{5}$.

90. $z=0, z=xy, x^2+y^2=4.$ Жауабы: 4

1.5 Беттің ауданын есептеу.

Егер бет $z=f(x,y)$ теңдеуімен берілсе, онда оның ауданы

$$\sigma=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

формуласымен анықталады, мұндағы D облысы берілген беттің Oxy жазықтығындағы проекциясы.

Егер бет $x = x(y,z)$ теңдеуімен берілсе, онда оның ауданы

$$\sigma = \iint\limits_{D_1} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz$$

формуласымен анықталады, мұндағы D_1 облысы берілген беттің Oyz жазықтығындағы проекциясы.

Егер бет $y = y(x,z)$ теңдеуімен берілсе, онда оның ауданы

$$\sigma = \iint\limits_{D_2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz$$

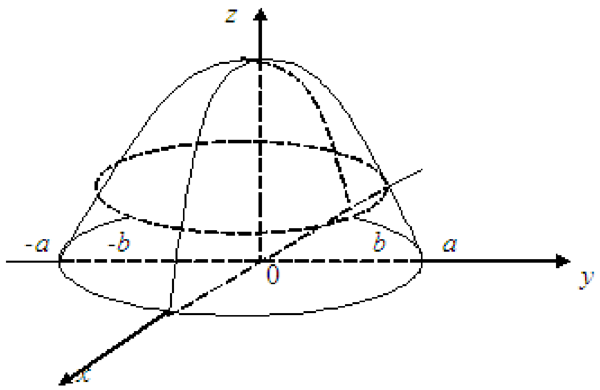
формуласымен анықталады, мұндағы D_2 облысы берілген беттің Oxz жазықтығындағы проекциясы.

91. $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ сферасының $x^2 + y^2 = b^2$ цилиндрінің ішіндегі бөлігінің бетінің ауданын табу керек $(a > b)$ (3.13 Сурет).

Шешуі. Сфера теңдеуінен

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}};$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$



1.13 Сурет

Интегралдау облысы $x^2 + y^2 \le b^2$ дөңгелегі болады. Осыдан

$$\sigma = \iint\limits_{D} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Полярлық координаттар жүйесіне көшсек, онда дөңгелектің теңдеуі $r \le b$ болғандықтан

$$\sigma = a\iint_D \frac{r\,drd\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -a \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \sqrt{a^2 - r^2}\Big|_0^b =$$

$$= -2\pi\, a\left(\sqrt{a^2 - b^2} - a\right) = 2\pi\, a\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right). \quad \blacktriangle$$

92. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конусының $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрінің ішіндегі бөлігінің бетінің ауданын табу керек. Жауабы: $\pi\, a^2\sqrt{2}$.

93. $z = 1 - x^2 - y^2$ бетін $x^2 + y^2 = 1$ цилиндрімен қиғандағы бөлігінің ауданын табу керек. Жауабы: $\frac{5\sqrt{5} - 1}{6}\pi$.

94. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ жазықтығының координат жазықтықтарымен шектелген бөлігінің ауданын табу керек. Жауабы: $\frac{\sqrt{769}}{2}$.

95. $2x - 3y + 4z = 12$ жазықтығының координат жазықтықтарымен шектелген бөлігінің ауданын табу керек. Жауабы: $\sqrt{262}$.

96. $2x + 2y - z = 4$ жазықтығының координат жазықтықтарымен шектелген бөлігінің ауданын табу керек. Жауабы: 6.

97. $x^2 + y^2 = 4$ цилиндрін $z = 0,\ z = y$ жазықтықтарымен қиғандағы бөлігінің ауданын табу керек $(z > 0)$. Жауабы: $2\pi\sqrt{2}$.

98. $x^2 = 2z$ бетін $x = 2y,\ y = 2x,\ x = 2\sqrt{2}$ жазықтықтарымен қиғандағы бөлігінің ауданын табу керек. Жауабы: 13

99. $z^2 = 2xy$ бетін $y = 1, x = 4, z = 0$ жазықтықтарымен қиғандағы бөлігінің ауданын табу керек. Жауабы: $\frac{20\sqrt{3}}{2}$.

100. $z = y^2$ бетін $x + y = \sqrt{2},\ x = 0,\ y = 0$ цилиндрімен қиғандағы бөлігінің ауданын табу керек. Жауабы: $\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(3 + 2\sqrt{2})$.

1.6 Екі еселі интегралдың механикада қолдануы.

Oxy жазықтығында аумағы Dоблысы, ал тығыздығы $\gamma=\gamma(x,y)$ болатын пластинаның *массасы:*

$$m=\iint_D \gamma(x,y)dxdy.$$

Ox және Oy осьтеріне қарағандағы *статикалық моменттері:*

$$M_x=\iint_D y\gamma(x,y)dxdy, \qquad M_y=\iint_D x\gamma(x,y)dxdy$$

формулаларымен анықталады.

Пластинаның *ауырлық центрінің координаттары* $x_c=\frac{M_y}{m}, y_c=\frac{M_x}{m}$ формулаларымен анықталады.

Ox, Oy осьтеріне және координата бас нүктесіне қарағандағы *инерция моменттері*

$$I_x=\iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy,\ I_y=\iint_D x^2\gamma(x,y)dxdy, \qquad I_0=\iint_D \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)dxdy=I_x+I_y$$

формулаларымен анықталады.

Ескерту: Біртекті пластина үшін $\gamma=const$, сондықтан $\gamma=1$ деп алуға болады.

101. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсін $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ түзуімен қиғанда пайда болатын сегменттің ауырлық центрін табу керек $(\gamma=1)$ (1.14 Сурет).

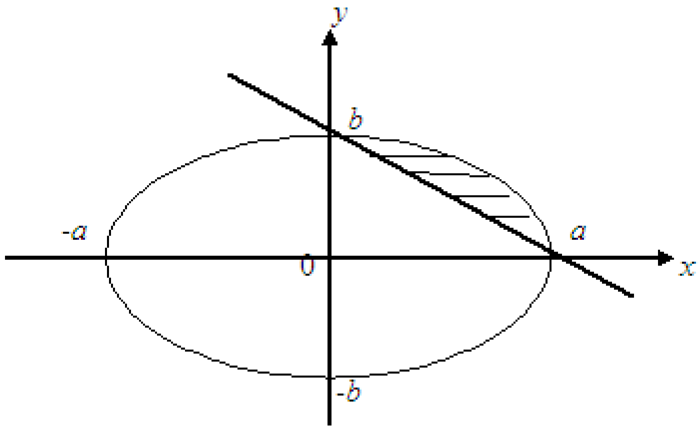
Шешуі. $$M=\iint_D dxdy=\int_0^a dx\int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy=\frac{b}{a}\int_0^a\left[\sqrt{a^2-x^2}-a+x\right]dx=$$

$$=\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a}-ax+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^a=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

$$M_x=\iint_D ydxdy=\int_0^a dx\int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy=\int_0^a\frac{y^2}{2}\Bigg|_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^a\left[\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)-\frac{b^2}{a^2}\cdot(a-x)^2\right]dx=$$

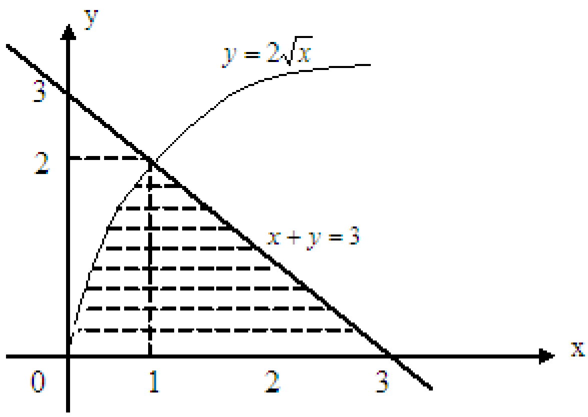
$$=\frac{b^2}{2a^2}\int_0^a\left(2ax-2x^2\right)dx=\frac{b^2}{2a^2}\left(ax^2-\frac{3}{2}x^3\right)\Bigg|_0^a=\frac{ab^2}{6}.$$

$$M_y = \iint_D xdxdy = \int_0^b dy \int_{\frac{a}{b}(b-x)}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}} xdx = \frac{a^2 b}{6}.$$



1.14 Сурет

102. $y = 2\sqrt{x},\ x + y = 3,\ y = 0$ сызықтарымен шектелген пластинаның *Ox, Oy* остеріне, координаттар жүйесінің бас нүктесіне қарағанда инерция моменттерін табу керек $(\gamma = 1)$ (1.15 Сурет).



1.15 Сурет

Шешуі.

$$I_x = \iint_D y^2 dxdy = \int_0^2 y^2 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{3-y} dx = \int_0^2 y^2 \cdot x \Big|_{x=\frac{1}{2}y^2}^{x=3-y} dy = \int_0^2 \left[y^2(3-y) - \frac{1}{2}y^4 \right] dy = \left(y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{20}y^5 \right)\Big|_0^2 = 2,4.$$

$$I_y = \iint_D x^2 dxdy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy + \int_1^3 x^2 dx \int_0^{3-x} dy = \int_0^1 x^2 y \Big|_{y=0}^{y=2\sqrt{x}} dx + \int_1^3 x^2 y \Big|_{y=0}^{y=3-x} dx =$$

$$= 2\int_0^1 x^2 \sqrt{x} dx + \int_1^3 x^2 (3-x) dx = \frac{4x^{3,5}}{7}\Big|_0^1 + \left(x^3 - \frac{x^4}{4} \right)\Big|_1^3 = 6\frac{4}{7}.$$

$$I_o = I_x + I_y = 2{,}4 + 6\frac{4}{7} = 8\frac{34}{35}.$$

103. Тығыздығы $\gamma(x,y,z) = x$ тең $x + y = 3,$ $\text{x} = 0,$ $y = 0$ түзулерімен шектелген үшбұрышты түрде берілген пластинаның массасын, статикалық моменттерін, ауырлық центрін табу керек.

Жауабы: $M = 4{,}5;\ M_x = 3\frac{3}{8};\ M_y = 6\frac{3}{4};\ x_c = 1{,}5;\ y_c = 0{,}75.$

104. $y^2 = 4x + 4,$ $y^2 = -2x + 4$ параболаларымен шектелген біртекті пішіннің ауырлық центрін табу керек.

Жауабы: $x_c = 0{,}4;\ y_c = 0.$

105. $y^2 = x,$ $y^2 = 0{,}5x,$ $\text{y} = 1,$ $y = 2$ сызықтарымен шектелген біртекті пішіннің ауырлық центрін табу керек.

Жауабы: $x_c = 3\frac{69}{70};\ y_c = 1\frac{17}{28}.$

106. $y^2 = 2px$ параболасымен және $x = 2p$ түзуінің қиылысынан пайда болған біртекті пішіннің ауырлық центрін табу керек.

Жауабы: $x_c = 1{,}2p;\ y_c = 0.$

107. $y^2 = ax$ параболасымен және $x = a,$ $y = 0$ $(y > 0)$ түзуінің қиылысынан пайда болған біртекті пішіннің ауырлық центрін табу керек.

Жауабы: $x_c = \frac{3}{5}a;\ y_c = \frac{3}{8}a.$

108. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ шеңберімен және $y = 0$ түзуімен шектелген біртекті пішіннің ауырлық центрін табу керек.

Жауабы: $x_c = 0;\ y_c = \frac{4}{3\pi}.$

109. $y^2 = x,$ $\text{x}^2 = y$ параболаларымен шектелген біртекті пішіннің ауырлық центрін табу керек.

Жауабы: $x_c = y_c = \frac{9}{20}.$

110. $r = a(1 + \cos\varphi)$ кардиоидасымен шектелген біртекті пішіннің ауырлық центрін табу керек.

Жауабы: $x_c = \frac{5a}{6};\ y_c = 0.$

111. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ x=0,\ y=0$ түзулерімен шектелген біртекті пішіннің Ox, Oy осьтеріне және координаттар жүйесінің бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін есептеу керек.

Жауабы: $I_x=\frac{ab^3}{12};I_y=\frac{a^3b}{12};I_0=\frac{ab(a^2+b^{2)}}{12}.$

112. $x^2+y^2=R^2,\ x^2+y^2=r^2\ (R>r)$ шеңберімен шектелген біртекті сақинаның Ox, Oy осьтеріне және координаттар жүйесінің бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін есептеу керек.

Жауабы: $I_x=I_y=\frac{\pi}{64}\left(R^4-r^4\right); I_0=\frac{\pi}{32}\left(R^4-r^4\right).$

113. $y=4-x^2$ параболасымен, $y=0$ түзуімен шектелген біртекті пішіннің Ox, Oy остеріне және координаттар жүйесінің бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін есептеу керек.

Жауабы: $I_x=\frac{4096}{105};I_y=\frac{128}{15};I_0=\frac{1664}{35}.$

114. $r=a(1+\cos\varphi)$ кардиоидасының Ox, Oy осьтеріне және координаттар жүйесінің бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін есептеу керек.

Жауабы: $I_x=\frac{21\pi\, a^4}{32};I_y=\frac{49\pi\, a^4}{32};I_0=\frac{35\pi\, a^4}{32}.$

2 Үш еселі интегралдар

2.1 Тік бұрышты координаттар жүйесіндегі үш еселі интегралдар.

$Oxyz$ кеңістігіндегі тұйық V облыста анықталған $f(x,y,z)$ функциясы берілсін. Үш өлшемді V облысын кез келген жолмен n қарапайым облыстарға бөлейік. Осы қарапайым облыстардың көлемдерін $\Delta V_1,\Delta V_2,...,\Delta V_n$, ал оларға сәйкес диаметрлерін $d_1,d_2,...,d_n$ арқылы белгілейік, мұндағы облыстардың *диаметрі* деп осы облыстың шекарасындағы (бетіндегі) екі нүктенің ара қашықтықтарының ең үлкенін айтады.

Әрбір қарапайым облыстардан кез келген бір $M_1(x_1,y_1,z_1)$ нүктеден таңдап алып, осы нүктелердегі берілген функциялардың мәндерін сәйкес ΔV_1 көлемдеріне көбейтіп қоссақ $\sum_{i=1}^{n} f(x_1,y_1,z_1)\Delta V_1$ өрнегі шығады. Осы қосынды $f(x,y,z)$ функциясының V облысындағы *интегралдық қосындысы* деп аталады.

Егер осы интегралдық қосындысының $\max d_1 \to 0$ шегі бар және ол шек үш өлшемді облыстың n қарапайым облыстарға қалай бөлгенінен де, әрбір қарапайым облыстардан M_1 нүктесінің қалай алғанынанда тәуелсіз болса, онда осы шек $f(x,y,z)$ функциясының V облысындағы *үш еселі интегралы* деп аталады да былай белгіленеді:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

Егер үш өлшемді V облысында $f(x,y,z) > 0$ болса, онда $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV$ үш еселі интегралы тығыздығы $\gamma = f(x,y,z)$ болатын V денесінің *массасына* тең болады (үш еселі интегралдың физикалық мағынасы).

Үш еселі интегралдың негізгі қасиеттері екі еселі интегралдың негізгі қасиеттері сияқты болады.

Интегралдау V облысы

$$a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x),\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$$

теңсіздіктерімен анықталсын, мұндағы $y_1(x),\ y_2(x),\ z_1(x,y),\ z_2(x,y) -$ үзіліссіз функциялар. Осы V облысында $f(x,y,z)$ функциясының үш еселі интегралы

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

формуласымен анықталады.

115. $\iiint\limits_V \frac{y^2 \cos z}{1+x^2} dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le \pi/2$ теңсіздіктерімен анықталады.

Шешуі. $\iiint\limits_V \frac{y^2 \cos z}{1+x^2} dxdydz = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} \int_0^3 y^2 dy \int_0^{\pi/2} \cos z dz = arctgx \Big|_{-1}^{1} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^3 \cdot \sin z \Big|_0^{\pi/2} = \frac{81\pi}{8}.$

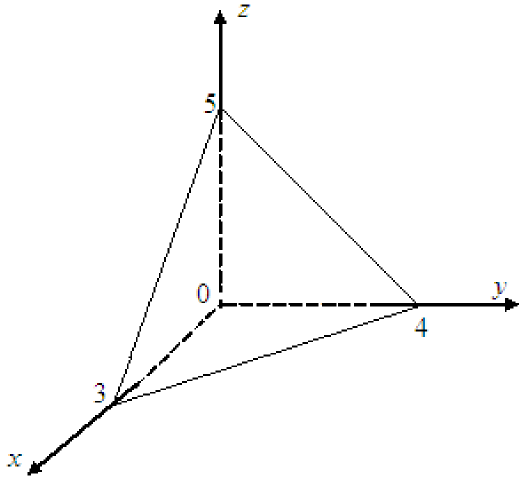
116. $\iiint\limits_V (x+y+z)^2 dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 3$ теңсіздіктерімен анықталады.

Шешуі. $\iiint\limits_V (x+y+z))^2 dxdydz = \int_0^3 dx \int_0^3 dy \int_0^3 (x+y+z)^3 dz = \frac{1}{4}\int_0^3 dx \int_0^3 (x+y+z)^4 \Big|_{z=0}^{z=3} dy =$

$$=\frac{1}{4}\int_0^3 dx\int_0^3\left[(x+y+3)^4-(x+y)^4\right]dy=\frac{1}{20}\int_0^3\left[(x+y+3)^5-(x+y)^5\right]\Big|_{y=0}^{y=3}dx=$$

$$=\frac{1}{20}\int_0^3\left[(x+6)^5-(x+3)^5+x^5\right]dx=\frac{1}{120}\left[(x+6)^6-(x+3)^6+x^6\right]\Big|_0^3=\frac{3^8}{2}.$$

117. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\right)^4}$ интегралын есептеу керек, мұндағы үш өлшемді V денесі координаттар жазықтықтары және $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ жазықтығымен шектелген (2.1 Сурет).



2.1 Сурет

Шешуі. V денесі жоғарыдан $z=5\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)$, ал төменнен $z=0$ жазықтығымен шектелген. V денесінің Oxy жазықтығындағы проекциясы $x=0,\ y=0,\ y=4\left(1-\frac{x}{3}\right)$ түзулерімен шектелген үшбұрыш. Сонымен

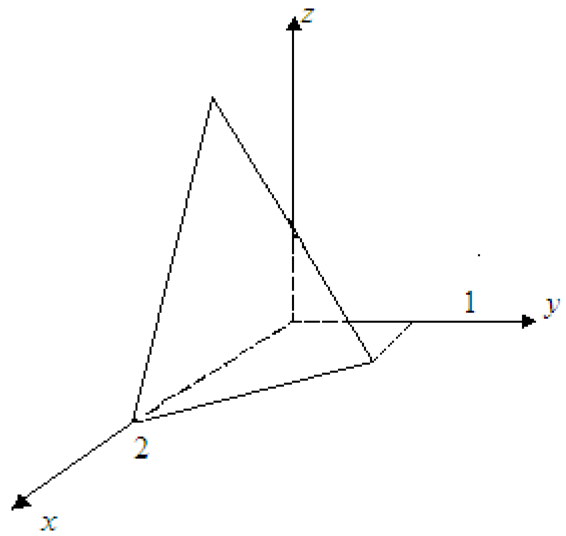
$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\right)^4}=\int_0^3 dx\int_0^{4(1-\frac{x}{3})}dy\int_0^{5(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\right)^{-4}dz=$$

$$=-\frac{5}{3}\int_0^3 dx\int_0^{4(1-\frac{x}{3})}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\right)^{-3}\Big|_0^{z=5(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})}dy=-\frac{5}{3}\int_0^3 dx\int_0^{4(1-\frac{x}{3})}\left[\frac{1}{8}-\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^{-3}\right]dy=$$

$$=-\frac{5}{3}\int_0^3\left[\frac{y}{8}+2\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^{-2}\right]\Big|_{y=0}^{y=4(1-\frac{x}{3})}dx=-\frac{5}{3}\int_0^3\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{2}-2\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-2}\right]dx=$$

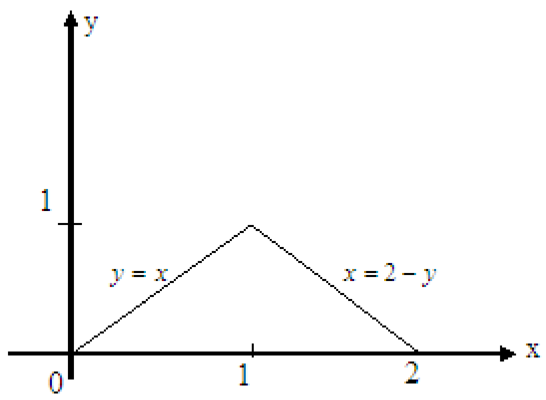
$$=-\frac{5}{3}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{6}\right)+\frac{1}{2}x+6\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}\right]\Bigg|_0^3=\frac{5}{4}.$$

118. $\iiint\limits_V\left(x^2+3y^2\right)dV$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $y=x,\ y=2-x,\ y=0,\ z=0,\ z=2x$ жазықтықтарымен шектелген (2.2 Сурет).



2.2 Сурет

Шешуі. V денесі жоғарыдан $z=2x$, төменнен $z=0$ жазықтығымен шектелген. V денесінің Oxy жазықтығындағы проекциясы $y=0,\ y=x,\ x=2-y$ түзулерімен шектелген, яғни $0\le y\le 1, y\le x\le 2-y, 0\le z\le 2x$ (2.3 Сурет).



2.3 Сурет

Сонымен

$$\iiint\limits_V\left(x^2+3y^2\right)dV=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}dx\int_0^{2x}\left(x^2+3y^2\right)dz=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}\left(x^2+3x^2\right)\cdot z\Big|_{z=0}^{z=2x}dx=$$

$$=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}\left(x^2+3x^2\right)\cdot 2xdx == 2\int_0^1\left[\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2y^2}{2}\right]\Bigg|_{x=y}^{x=2-y}dy = 2\int_0^1\left[\frac{(2-y)^4}{4}+\frac{3}{2}y^2(2-y)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{y^4}{4}-\frac{3}{2}y^4\right]dy = 2\left[-\frac{(2-y)^5}{5}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{4y^3}{3}-y^4+\frac{y^5}{5}\right)-\frac{7}{20}y^5\right]\Bigg|_0^1 = 4\cdot$$

Берілген V облысы бойынша $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ үш еселі интегралының шектерін қою керек:

119. V облысы $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ жазықтықтарымен шектелген тетраэдр.

Жауабы: $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz.$

120. V облысы $z=1-x^2-y^2,\quad z=0$ беттерімен шектелген дене.

Жауабы: $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz.$

121. V облысы $x^2+y^2=R^2,\quad z=0,\ z=H$ беттерімен шектелген цилиндр.

Жауабы: $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \int\limits_{-R}^R dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int\limits_0^H f(x,y,z)\,dz.$

122. V облысы $x^2+y^2=z^2,\quad z=c$ беттерімен шектелген конус.

Жауабы: $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{c} f(x,y,z)\,dz.$

123. $\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $0\le x\le a, 0\le y\le b, 0\le z\le c$ теңсіздіктерімен анықталған.

Жауабы: $\dfrac{abc(a^2+b^2+c^2)}{3}.$

124. $\iiint\limits_V\left(x-2y+z^3\right)dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $0\le x\le 2, 1\le y\le 2, 0\le z\le 1$ теңсіздіктерімен анықталған.

Жауабы: -2,25.

125. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $0\le x\le 0{,}5,\ \mathrm{x}\le y\le 2x, 0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$ теңсіздіктерімен анықталған.

Жауабы: $\frac{7}{192}$.

126. $\iiint\limits_V x^2 yz\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $x=0,\ \ y=0,\ z=0,\ x+y+z-2=0$ жазықтықтарымен шектелген.

Жауабы: $\frac{16}{315}$.

127. $\iiint\limits_V x^2\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоидамен шектелген.

Жауабы: $\frac{4}{15}\pi a^3bc.$

128. $\iiint\limits_V \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі координаттар жазықтықтары және $x+y+z=1$ жазықтығымен шектелген

Жауабы: $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$

129. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $z^2=x^2+y^2$ конустық бетімен және $z=2$ жазықтықтарымен шектелген.

Жауабы: $4\pi.$

2.2 Үш еселі интегралда айнымалыларды алмастыру

Үш еселі интегралда x,y,z координаталарынан

$$x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ \ z=z(u,v,w)$$

формулаларының көмегімен u,v,w координатасына көшу

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_V F(u,v,w)\cdot|J|\,dudvdw$$

формуласымен жүзеге асады, мұндағы

$$F(u,v,w)=f(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)),$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix} - \textit{якобиан},$$

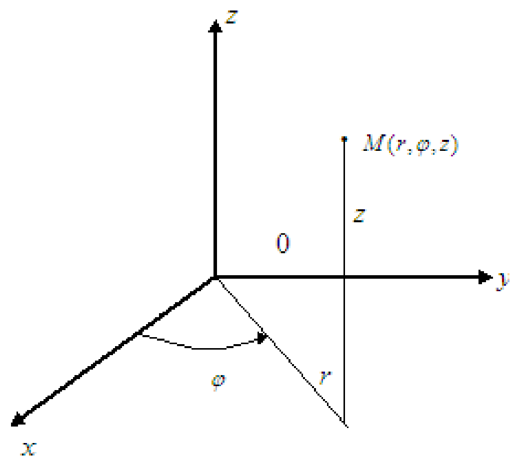
ал $x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w)$- үш өлшемді V аймағында үзіліссіз, әрі үзіліссіз бірінші ретті дербес туындылары бар функциялар.

Дербес жағдайда x,y,z тікбұрышты координаттардан

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$$
$$(0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le\infty,\ -\infty<z<\infty)$$

формулаларының көмегімен r,φ,z цилиндрлік координаттарға көшкенде якобиан $J=r$ болады (2.4 Сурет). Сондықтан

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz.$$



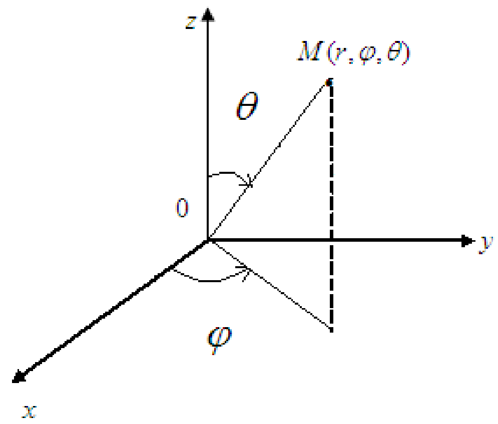
2.4 Сурет

Ал x,y,z тікбұрышты координаттардан

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\theta\end{cases}$$
$$(0\le r\le\infty,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0<\theta<\pi)$$

формулаларының көмегімен r, φ, θ сфералық координаттарға көшкенде якобиан $J = r^2 \sin\theta$ болады (2.5 Сурет). Сондықтан

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_V f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$



2.5 Сурет

130. $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V облысы $x^2+y^2=2x$ цилиндрімен және $y=0,\ z=0,\ z=a$ жазықтықтарымен шектелген.

Шешуі. Цилиндрлік координаталарға көшейік. Бұл жағдайда $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\cos\varphi$ немесе $r = 2\cos\varphi;\ 0 \le r \le 2\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le z \le a.$

Сондықтан

$$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint_V z\cdot r\cdot r\ dr\,d\varphi\,dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int_0^a z\,dz =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} r^3 \Big|_{r=0}^{r=a\cos\varphi} d\varphi = \frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi) = \frac{4}{3}a^2\left(\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{8}{9}a^2.$$

131. $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы үш өлшемді V облысы $x^2+y^2+z^2=R^2$ сферасымен шектелген.

Шешуі. Сфералық координаттар жүйесіне көшейік. Бұл жағдайда

$$r = R,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi;\ 0 \le r \le R,\ J = r^2\sin\theta.$$

Сондықтан

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iiint\limits_V r\cdot r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R r^3 \sin\theta d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R r^3 d\theta = = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \pi R^4.$$

132. $\iiint\limits_V \dfrac{z\,dx\,dy\,dz}{1+x^2+y^2}$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $x^2+y^2=a^2$ цилиндрімен және $z=0,\ z=h$ жазықтықтарымен шектелген.

Жауабы: $0{,}5\pi h^2 \ln(1+a^2)$.

133. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $x^2+y^2=R^2$ цилиндрімен, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ конусымен және $z=0$ жазықтығымен шектелген. Жауабы: $0{,}5\pi R^4$.

134. $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $x^2+y^2=1$ цилиндрімен және $z=0,\ z=1$ жазықтықтарымен шектелген.

Жауабы: $1{,}5\pi$.

135. $\iiint\limits_V \sqrt{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы $V-$ шар: $x^2+y^2+z^2\le 1$. Жауабы: $\dfrac{8}{9}\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

136. $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V – шар: $x^2+y^2+z^2\le a^2$. Жауабы: $\dfrac{4}{15}\pi a^3$.

137. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $x^2+y^2+z^2=1$ сферасыен және $x=0,\ y=0,\ z=0$ жазықтықтарымен шектелген.

Жауабы: $\dfrac{1}{48}$.

138. $\iiint\limits_V z^2\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $x^2+y^2+z^2\le 1$ және $x^2+y^2+z^2\le 2z$ шарларының ортақ бөлігі.

Жауабы: $\dfrac{59}{480}\pi$.

139. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ конусымен және $z = h$ жазықтығымен шектелген.

Жауабы: $\frac{\pi h^2 R^2}{4}$.

140. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $x^2 + y^2 + z^2 = x$ сферасымен шектелген.

Жауабы: $\frac{\pi}{10}$.

2.3 Үш еселі интегралдың механикада қолданылуы.

V денесінің көлемі

$$V = \iiint\limits_V dxdydz$$

формуласымен есептеледі.

Тығыздығы $\gamma = \gamma(x, y, z)$ болатын V денесінің массасы

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)dxdydz\,,$$

ал $Oyz,\ Oxz,\ Oxy$ жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттері сәйкесінше

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x \cdot \gamma(x, y, z)dxdydz,\ M_{xz} = \iiint\limits_V y \cdot \gamma(x, y, z)dxdydz,\ M_{xy} = \iiint\limits_V z \cdot \gamma(x, y, z)dxdydz,$$

формуласымен есептелінеді. Біртекті дене үшін $\gamma = const.$

Дененің ауырлық центрінің координаттары

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m},\quad y_0 = \frac{M_{xz}}{m},\quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$$

формулаларымен анықталады.

$Ox,\ Oy, Oz$ осьтеріне және O нүктесіне қарағандағы инерция моменттері (екпіндік қарымдары) сәйкес

$$
\begin{cases}
I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\, \gamma(x,y,z)\, dxdydz, \\
I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\, \gamma(x,y,z)\, dxdydz, \\
I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\, \gamma(x,y,z)\, dxdydz, \\
I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, \gamma(x,y,z)\, dxdydz = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right),
\end{cases}
$$

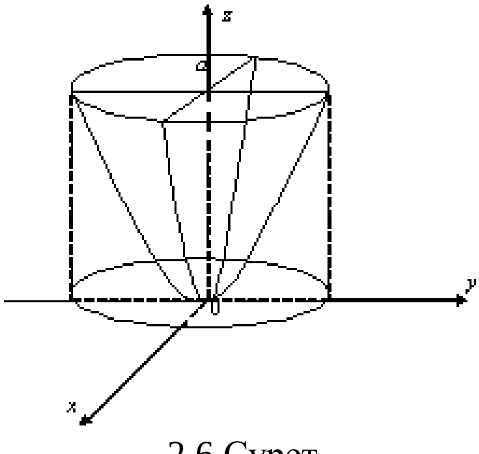
формулаларымен есептеледі.

141. $az = x^2 + y^2$ параболоидымен және $z = a$ жазықтығымен шектелген дененің көлемін табу керек.

Шешуі. Берілген дене жоғарыдан $z = a$ жазықтығымен, ал төменнен $z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2)$ параболоидымен шектелген. Оның Oxy жазықтығындағы проекциясы $x^2 + y^2 \le a^2$ теңсіздігімен анықталатын дөңгелек. Бұл жағдайда цилиндрлік координаттарға көшсек параболоидтың $z = \frac{1}{a} r^2$ болады. Осыдан

$$
V = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V^1} rdrd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a rdr \int_{\frac{1}{a}r^2}^a dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\left(a - \frac{1}{a} r^2\right) dr =
$$

$$
= \int_0^{2\pi} \left(\frac{ar^2}{2} - \frac{r^4}{4a}\right)\Bigg|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{4}\varphi \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{2}.
$$



2.6 Сурет

142. Тығыздығы тұрақты $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ жарты шарының ауырлық центрінің координаттарын табу керек.

Шешуі. Жарты шар симметриялы дене болғандықтан $x_0 = 0,\ y_0 = 0.$ Дене жоғарыдан $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ бетімен, төменнен $z = 0$ жазықтығымен шектелген, ал оның Oxy жазықтығындағы проекциясы $x^2+y^2\le a^2$ дөңгелегі болады.

Сфералық координаттарға көшсек, онда $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le a$ болады. Осыдан

$$m=\gamma\iiint\limits_V dxdydz=\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int\limits_0^a r^2dr=\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta\frac{a^3}{3}d\theta=$$

$$=\frac{a^3\gamma}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{2\pi a^3\gamma}{3}.$$

$$M_{xy}=\gamma\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz=\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^a r^3dr=\frac{\gamma a^4}{8}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{a^4\gamma}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^4\gamma}{4}.$$

$$z_0=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{3}{8}a.$$

143. $z^2=x^2+y^2$ конустық бетімен $z=a$ жазықтығымен шектелген, дененің координаттық осьтеріне және бас нүктеге қарағандағы инерция моменттерін табу керек $(\gamma=1)$.

Шешуі. Дене жоғарыдан $z=a$ жазықтығымен, төменнен $z^2=x^2+y^2$ конустық бетімен шектелген. Оның Oxy жазықтығындағы проекциясы $x^2+y^2\le a^2$ дөңгелегі болады.

Инерция моменттерін цилиндрлік координаттарға көшу арқылы есептейміз.

$$0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le a,\ r\le z\le a$$

$$I_x=\iiint\limits_V(y^2+z^2)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a rdr\int\limits_r^a(r^2\sin^2\varphi+z^2)dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a r\left(r^2z\sin^2\varphi+\frac{1}{3}z^3\right)\Big|_{z=r}^{z=a}dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\left(ar^3\sin^2\varphi+\frac{1}{3}a^3r-r^4\sin^2\varphi-\frac{1}{3}r^4\right)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}ar^4\sin^2\varphi+\frac{1}{6}a^3r^2-\frac{1}{5}r^5\sin^2\varphi-\frac{1}{15}r^5\right)\Big|_{r=0}^{r=a}d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}a^5\sin^2\varphi+\frac{1}{6}a^5-\frac{1}{5}a^5\sin^2\varphi-\frac{1}{15}a^5\right)d\varphi=a^5\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{20}\sin^2\varphi+\frac{1}{10}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^5}{40}\int\limits_0^{2\pi}(5-\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{\pi a^5}{4}.$$

$$I_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \int\limits_r^a (r^2\cos^2\varphi + z^2)dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r\left(r^2 z\cos^2\varphi + \frac{1}{3}z^3\right)\Bigg|_{z=r}^{z=a} dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(ar^3\cos^2\varphi + \frac{1}{3}a^3 r - r^4\cos^2\varphi - \frac{1}{3}r^4\right)dr = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}ar^4\cos^2\varphi + \frac{1}{6}a^3r^2 - \frac{1}{5}r^5\cos^2\varphi - \frac{1}{15}r^5\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}a^5\cos^2\varphi + \frac{1}{6}a^5 - \frac{1}{5}a^5\cos^2\varphi - \frac{1}{15}a^5\right)d\varphi = a^5\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{20}\cos^2\varphi + t_0\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^5}{40}\int\limits_0^{2\pi}(5+\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{\pi a^5}{4}.$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^3 dr \int\limits_r^a dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^3\cdot z\Bigg|_{z=r}^{z=a} dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a (ar^3 - r^4)dr =$$

$$= \varphi\Bigg|_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}a\,r^4 - \frac{1}{5}r^5\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a} = \frac{\pi a^5}{10}.$$

$$I_o = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right) = \frac{3}{10}\pi a^5.$$

144. $x^2+y^2=2y,\ z=\frac{9}{4}+x^2,\ z=0$ беттерімен шектелген дененің көлемін табу керек. Жауабы: $2{,}5\pi$.

145. $z=\frac{1}{3}y^2,\ z=0,\ 5x-2y-5=0,\ 5x+3y-30=0$ беттерімен шектелген дененің көлемін табу керек. Жауабы: $17\frac{13}{36}$.

146. $x=0,\ z=0,\ y=1,\ y=3,\ x+2z=3$ жазықтықтарымен шектелген дененің көлемін табу керек. Жауабы: 4,5.

147. $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ x+z=6,\ z=0$ беттерімен шектелген дененің көлемін табу керек. Жауабы: $\frac{48\sqrt{6}}{5}$.

148. $x^2+y^2=2ax,\ z=k_1x,\ z=k_2x\ (k_1<k_2)$ беттерімен шектелген дененің көлемін табу керек. Жауабы: $\pi a^2(k_2-k_1)$.

149. Тығыздығы $\gamma(x,y,z)=x+y+z$ функциясымен анықталған $0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c$ параллелипипедінің массасын табу керек.

Жауабы: $0{,}5\,abc\,(a+b+c)$.

150. $x+y+z=a,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ жазықтықтарымен шектелген, тығыздығы $\gamma(x,y,z)=x$ болатын пирамиданың массасын табу керек.

Жауабы: $\frac{a^4}{24}$.

151. $x^2 + y^2 = az$ параболоидымен және $z = a$ жазықтығымен шектелген біртекті дененің ауырлық центрін табу керек. Жауабы: $C\,(0; 0; \frac{2}{3}a)$.

152. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ жазықтығымен шектелген біртекті дененің ауырлық центрін табу керек. Жауабы: $C\left(\frac{a}{4}; \frac{b}{4}; \frac{c}{4}\right)$.

153. $z = \frac{1}{2}(3 - x),\ z = 0,\ x = 0,\ y = 1,\ y = 3$ жазықтықтарымен шектелген дененің ауырлық центрін табу керек $(\gamma = 1)$. Жауабы: $C\,(1; 2; 0,5)$.

154. Біртекті $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ шарының координаттық остеріне және оның бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін (екпіндік қарымдарын) есептеу керек $(\gamma = 1)$.

Жауабы: $I_x = I_y = I_z = \frac{8}{15}\pi R^5;\ I_o = 0{,}8\pi R^5$.

155. $x + y + z = a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ жазықтықтарымен шектелген дененің координаттық осьтеріне және оның бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін есептеу керек $(\gamma = 1)$.

Жауабы: $I_x = I_y = I_z = \frac{a^5}{30};\ I_o = \frac{a^5}{20}$.

156. $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрімен $z = 0$ және $z = h$ жазықтықтарымен шектелген дененің координаттық осьтеріне және оның бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін (екпіндік қарымдарын) есептеу керек $(\gamma = 1)$.

Жауабы: $I_x = I_y = \frac{\pi a^2 h\,(3a^2 + 4h)}{12};\ I_z = \frac{\pi a^4 h}{2};\ I_o = \frac{\pi a^2 h\,(3a^2 + 2h^2)}{6}$.

3 Параметрге тәуелді меншіксіз интегралдар

$$\mathrm{I}(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \lambda)\,\mathrm{dx}$$

интегралын қарастырайық, мұндағы λ – параметр, ал $f(x, \lambda)$ функциясы екі айнымалды функция. $\mathrm{I}(\lambda)$ – интегралы λ параметріне тәуелді интеграл.

$f(x, \lambda)$ функциясы және оның $\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}$ дербес туындысы

$a \leq x \leq b;\ \alpha \leq \lambda \leq \beta$ тіктөртбұрышында үзіліссіз болса, онда $\mathrm{I}(\lambda)$ функциясының λ бойынша туындысы

$$\frac{d\mathrm{I}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\lambda}{d\lambda}\int_a^b f(x,\lambda)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial x}\,\mathrm{dx}$$

тең болады.

Егер интегралдау шектегі a мен b λ параметріне тәуелді болса, онда

$$\frac{d\mathrm{I}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}\,\mathrm{dx} + b''(\lambda) f(b(\lambda),\lambda) - a''(\lambda) f(a(\lambda),\lambda)$$

$f(x,\lambda)$ функциясы $x \geq a$ мәндері қандай да бір D облысының әрбір λ мәндері үшін берілсін, осы облыстың кез келген λ мәні үшін

$$\mathrm{I}(\lambda) = \int_\alpha^\infty f(x,\lambda)\,\mathrm{dx} = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x,\lambda)\,\mathrm{dx}$$

$\int_\alpha^\infty f(x,\lambda)\,\mathrm{dx}$ меншіксіз интегралын параметр бойынша дифференциалдау үшін $\int_\alpha^\infty f(x,\lambda)\,\mathrm{dx}$ және $\int_a^\infty \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}\,\mathrm{dx}$ интегралдары $(0 < \lambda \leq \infty)$ бар болуы қажетті.

$\mathrm{I}(\lambda)$ интегралы λ параметрі бойынша $[\alpha,\beta]$ аралығында интегралдау функциясы

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{I}(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\lambda \int_a^b f(x,\lambda)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \mathrm{dx}\int_a^b f(x,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

Интеграл астындағы $f(x,\lambda)$ екі айнымалды функциясы интегралдау облысында үзіліссіз болу керек.

157. $\int_0^1 x^\lambda (\ln x)^n\,\mathrm{dx}$, интегралын есептеу керек, мұндағы λ, m – оң сандар.

Шешуі:

$$\int_0^1 x^\lambda\,\mathrm{dx} = \frac{1}{\lambda+1}$$

интегралын қарастырайық, мұндағы $f(x,m) = x^\lambda$ функциясы $0 < x < 1$

және $m > 0$ аралығында үзіліссіз. Осы интегралдың λ бойынша туындысын табайық.

$$\frac{d}{d\lambda}\int_0^1 x^{\lambda}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 x^{\lambda}\ln x\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{(\ \lambda+1)^2}$$

Тағы да дифференциалдайық.

$$\int_0^1 x^{\lambda}\,(\ln x)^2\mathrm{dx} = \frac{2!}{(\lambda+1)^3}$$

Сонымен $n-$ рет дифференциалдасақ, онда

$$\int_0^1 x^{\lambda}\,(\ln x)^n\mathrm{dx} = \frac{n\,!}{(\lambda+1)^{n+1}}$$

158. $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{dx}}{(x^2+1)^{n+1}}$ интегралын есептеу керек, мұндағы $\lambda > 0,\ \ n$ оң бүтін сан.

Шешуі:

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{dx}}{x^2+\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}arctg\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\,|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Интегралын қарастырайық.
λ параметрі бойынша интегралдасақ, онда

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{dx}}{(x^2+\lambda)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2\lambda\sqrt{\lambda}}$$

n – рет дифференциалдасақ, онда

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{dx}}{(x^2+\lambda)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{\pi}{2\lambda^n\cdot\sqrt{\lambda}}$$

болады.

159. $\mathrm{I}(\lambda) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}\,\mathrm{dx}$ интегралын есептеу керек.

Шешуі : λ бойынша дифференциалдасақ, онда

$$\frac{d\mathrm{I}}{d\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{\lambda}$$

Осыдан $\mathrm{I}(\lambda) = \ln\,\lambda$

160. $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ Эйлер – Пуассон интегралын есептеу керек.

Шешуі : $x = \lambda t$ деп алайық, мұндағы $\lambda > 0$ және $I = \lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t^2}\,dt$.
Соңғы теңсіздіктің екі жағын $e^{-\lambda^2}d\lambda$ көбейтіп λ бойынша 0 – ден ∞– ке дейін интегралдасақ, онда

$$I\cdot\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2}d\lambda = I^2 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2}\,\lambda d\lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t^2}\,dt$$

Интегралдау ретін өзгертсек, онда

$$I^2 = \int_0^{\infty} dt\int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)\lambda^2}\lambda d\lambda = \int_0^{\infty}\left[-\frac{1}{2(1+t^2)}e^{-(1+t^2)\lambda^2}\right]\Big|_0^{\infty} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctg t\,\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Осыдан, $$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Төмендегі интегралдарды есептеу керек.

161. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arctg(\lambda\sin x)}{\sin x}\,dx$ Жауабы: $\frac{\pi}{2}\ln\left(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)$

162. $\int_0^{1}\frac{arctg\lambda x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$ Жауабы: $\frac{\pi}{2}\ln\left(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)$

163. $\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx$ Жауабы: $\ln\frac{\beta}{\alpha}$

164. $\int_0^{\infty} e^{-kx}\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx$ Жауабы: $arctg\frac{\lambda}{k}$

4 Қисық сызықты интегралдар

4.1 Бірінші текті қисық сызықты интегралдар

$f(x,y)$ функциясы AB доғасының нүктелерінде анықталған және үзіліссіз болсын.

AB доғасын кез келген жолмен $A = A_0, A_1, A_2, ..., A_n = B$ нүктелерімен n элементар доғаларға бөлейік. $\Delta S_i - A_{i-1}A_i$ доғасының ұзындығы болсын. Әр элементар доғадан кез келген бір $M_i(x_i, y_i)$ нүктеден таңдап алып, $f(x_i, y_i)$ функциясының мәндерін сәйкес ΔS_i аудандарына көбейтейік $(i = 1,2,...,n)$. $f(x, y)$ функциясы үшін АВ *доға ұзындығы бойынша интегралдық қосынды* деп

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$$

қосындысын айтады.

Доға ұзындығы бойынша (не бірінші текті) қисық сызықты интеграл деп интегралдық қосындының $\max \Delta S_i \to 0$ -дағы шегін айтады.

$$\int_{AB} f(x, y)dS = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$$

мұндағы dS – доға дифференциалы.

а) Егер АВ қисығы $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$ формуласымен берілсе, онда бірінші текті қисық сызықты интеграл

$$\int_{AB} f(x, y)dS = \int_{a}^{b} f(x, \varphi(x)) \cdot \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx$$

формуласымен есептеледі.

ә) Егер АВ қисығы $x = x(t),\ y = y(t)$ параметрлік теңдеумен берілсе $(\alpha \le t \le \beta)$, онда

$$\int_{AB} f(x, y)dS = \int_{a}^{b} f(x(t), y(x)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Кеңістікте үш айнымалылы $f(x, y, z)$ функциясының бірінші текті қисық сызықты интегралы берілсін. Егер кеңістіктегі қисық $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, $(\alpha \le t \le \beta)$ теңдеуімен берілсе, онда

$$\int_{AB} f(x, y, z)dS = \int_{a}^{b} f(x(t), y(x), z(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Егер $f(x, y) > 0$ болса, онда $\int\limits_{AB} f(x, y)dS$ - бірінші текті қисық сызықты интегралы тығыздығы $f(x, y)$ болатын АВ қисығының массасына тең болады (физикалық мағынасы).

Егер $f(x, y) \ge 0$ болса, онда $\int\limits_{AB} f(x, y)dS$ - бірінші текті қисық сызықты интегралы жасаушылары Oz осіне параллель болатын, жоғарыдан $z = f(x, y)$ қисығымен, төменнен Oxy жазықтығымен шектелген цилиндрлік беттің ауданына тең болады (геометриялық мағынасы).

Бірінші текті қисық сызықты интегралдың негізгі қасиеттері:

1^0. I текті қисық сызықты интеграл интегралдау жолының бағытына тәуелсіз болады, яғни

$$\int_{AB} f(x,y)dS = \int_{BA} f(x,y)dS.$$

2^0. $\int_{AB} [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]dS = \int_{AB} f_1(x,y)dS \pm \int_{AB} f_2(x,y)dS.$

3^0. $\int_{AB} k\cdot f(x,y)dS = k\cdot \int_{BA} f(x,y)dS.$

4^0. Егер С нүктесі АВ қисығында жатса, онда

$$\int_{AB} f(x,y)dS = \int_{AC} f(x,y)dS + \int_{CB} f(x,y)dS.$$

165. $\int_{AB}(x-y)dS$ интегралын есептеу керек, мұндағы АВ – түзуінің $A(0,0)$ нүктесінен $B(4,3)$ нүктесіне дейінгі бөлігі.

Шешуі. АВ түзуінің теңдеуі $y=\frac{3}{4}x$ болады. $y'=\frac{3}{4}$.

Осыдан $\int_{AB}(x-y)dS = \int_0^4\left(x-\frac{3}{4}x\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \frac{5}{16}\int_0^4 xdx = \frac{5}{32}x^2\Big|_0^4 = \frac{5}{2}.$

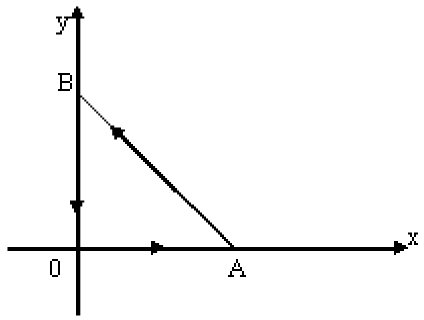
166. $\int_{AB}\frac{ydS}{\sqrt{x}}$ интегралын есепте, егер $AB - y^2 = \frac{4}{9}x^3$ доғасы, $A(3;2\sqrt{3}),\ B(8;32\sqrt{2}/3).$

Шешуі. $y=\frac{2}{3}x^{3/2},\quad y'=x^{1/2}$ $\qquad \int_{AB}\frac{ydS}{\sqrt{x}} = \int_3^8\frac{\frac{2}{3}x^{3/2}}{x^{1/2}}\cdot\sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}\int_3^8 x\sqrt{1+x}dx =$

$$= \left|\begin{array}{lll} \sqrt{1+x=t} & x=t^2-1 & \\ dx=2+dt & x=3 & t=2 \\ & x=8 & t=3 \end{array}\right| = \frac{2}{3}\int_2^3(t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt = \frac{4}{3}\int_2^3(t^4-t^2)dt = \frac{4}{3}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_2^3 = \frac{2152}{45}.$$

167. $\oint_L(2x+y)dS$ интегралын есепте, мұндағы $L-ABC$ үшбұрышының контуры $A(1;0),\ B(0;1),\ O(0;0).$

Шешуі.



АВ теңдеуі: $y=1-x,\ y'=1,\ dS=\sqrt{2}dx,\ 0\le x\le 1.$

ОВ теңдеуі: $x=0,\ dS=dy,\ 0\le y\le 1.$

ОА теңдеуі: $y=0,\ dS=dx,\ 0\le x\le 1.$

$$\oint_L(2x+y)dS = \int_{AB}(2x+y)dS + \int_{BO}(2x+y)dS + \int_{OA}(2x+y)dS =$$

$$= \int_0^1(x+1)\cdot\sqrt{2}dx + \int_0^1 ydy + 2\int_0^1 xdx = \sqrt{2}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 +$$

$$+x^2\Big|_0^1=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

168. $\int\limits_{OA}\frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ интегралын есептеу керек, мұндағы OA – түзуінің $O(0;0)$ нүктесі мен $A(1;2)$ нүктесінің арасындағы бөлігі.

Жауабы: $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$.

169. $\int\limits_{AB}\frac{ydS}{\sqrt{x}}$ интегралын есептеу керек, мұндағы AB: $y^2=\frac{4}{9}x^3$ теңдеуімен берілген жарты кубтық параболаның доғасы, $A(3;2\sqrt{3})$ нүктесінен $B\left(8;\ \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$ нүктесіне дейін. Жауабы: $\frac{2152}{45}$.

170. $\int\limits_{AB}y^2dS$ интегралын есептеу керек, мұндағы AB - $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$ шеңбердің бөлігі. Жауабы: $\frac{\pi a^3}{4}$.

171. $\int\limits_{AB}y^2dS$ интегралын есептеу керек, мұндағы AB - $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi$ циклоиданың бөлігі.

Жауабы: $\frac{256a^3}{15}$.

172. $\int\limits_{L}\sqrt{x^2+y^2}dS$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x^2+y^2=ay$, $(a>0)$ шеңбердің контуры. Жауабы: $2a^2$.

173. $\int\limits_{L}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ винттік сызығының бірінші айналымы.

Жауабы: $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}arctg\,\frac{2\pi\cdot b}{a}$.

174. $\int\limits_{L}xydS$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$ шеңберінің бөлігі. Жауабы: $\frac{a^3}{2}$.

175. $\oint\limits_{L}xydS$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $|x|+|y|=a\quad a>0$ квадрат контуры. Жауабы: 0.

176. $\int\limits_{AB} \frac{dS}{x-y}$ интегралын есептеу керек, мұндағы AB: $y = \frac{x-4}{2}$ түзуінің $A(0;-2)$ нүктесінен $B(4;0)$ нүктесіне дейінгі бөлігі. Жауабы: $\sqrt{5}\ln 2$.

177. $\int\limits_{L} \sqrt{x^2+y^2}\,dS$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x = a(\cos t + t\sin t),\ \ y = a(\sin t - t\cos t) \quad 0 \le t \le 2\pi$ доғасы.

Жауабы: $\frac{1}{3}a^2\left[\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$.

178. $\int\limits_{L} (x+z)dS$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x = t,\ y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}},\ z = t^2 \qquad 0 \le t \le 1$ доғасы.

Жауабы: $\frac{1}{54}(56\sqrt{7} - 1)$.

4.2 Екінші текті қисық сызықты интегралдар.

$P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары АВ доғасының нүктелерінде үзіліссіз болсын.

$P(x,y),\ Q(x,y)$ функциялары үшін *координаттар бойынша интегралдық қосынды* деп

$$\sum_{i=1}^{n}\left[P(x_i,y_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\Delta y_i\right]$$

қосындысын айтады.

Координаттар бойынша (не екінші текті*) қисық сызықты интеграл* деп интегралдық қосындының $\max \Delta x_i \to 0$ және $\max \Delta y_i \to 0$ -дағы шегін айтады:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} P(x_i,y_i)\Delta x_i + \lim_{\max \Delta y_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(x_i,y_i)\Delta y_i .$$

Екінші текті қисық сызықты интеграл $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\cdot\vec{i} + Q(x,y)\cdot\vec{j}$ - айнымалы күштің АВ қисық сызықты жолмен жүрген жұмысы болады (механикалық мағынасы).

Екінші текті қисық сызықты интегралдың негізгі қасиеттері:

1. ІІ текті қисық сызықты интеграл интегралдау жолының бағытын ауыстырғанда таңбасын қарама-қарсыға өзгертеді, яғни

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

2. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$.

(Қалған қасиеттері бірінші текті қисық сызықты интегралдың қасиеттеріне ұқсас болады).

а) Егер АВ қисығы $y = \varphi(x)$, $(a \le x \le b)$ формуласымен берілсе, онда екінші текті қисық сызықты интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{в} \left[P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\right] \cdot dx .$$

ә) Егер АВ қисығы $x = x(t),\ y = y(t)$ параметрлік теңдеумен берілсе, онда $(\alpha \le t \le \beta)$.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t), \mathrm{y}(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), \mathrm{y}(t)) \cdot y'(t)\right] dt.$$

Кеңістікте үш айнымалылы $P(x, y, z);\ Q(x, y, z);\ R(x, y, z)$ функцияларының екінші текті қисық сызықты интегралы берілсін. Егер кеңістіктегі қисық $x = x(t);\ y = y(t),\ z = z(t),\ (\alpha \le t \le \beta)$ теңдеуімен берілсе, онда

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P\{x(t), y(t), z(t)\} \cdot x'(t) + Q\{x(t), y(t), z(t)\} \cdot y'(t) + R\{x(t), y(t), z(t)\} \cdot z'(t)\right] \cdot dt.$$

Тұйық сызық бойынша екінші текті қисық сызықты интегралы $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy$ берілсе, онда интегралдау жолы сағат тіліне қарама-қарсы бағытта алынады (оң бағыт деп саналады).

179. $\int\limits_{AB} (x^2 - y^2)dx + xydy$ интегралын есептеу керек, мұндағы $A(1;1)$ нүктесінен $B(3;4)$ нүктесіне дейінгі түзудің бөлігі.

Шешуі. АВ түзуінің теңдеуі

$\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-1}{4-1}$ немесе $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$ болады. $y' = \dfrac{3}{2}$; $dy = \dfrac{3}{2}dx$, осыдан

$$\int\limits_{AB} (x^2 - y^2)dx + xydy = \int\limits_{1}^{3} \left[x^2 - \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 + x\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2}\right] dx =$$

$$= \int\limits_{1}^{3} \left(x^2 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{4}x\right) dx = \int\limits_{1}^{3} \left(x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4}x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{26}{3} + 3 - \frac{1}{2} = \frac{67}{6}.$$

180. $\int\limits_{AB}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы AB: $y=x^2$ параболасының доғасы, $A(-1;1)$ нүктесінен $B(1;1)$ нүктесіне дейін.

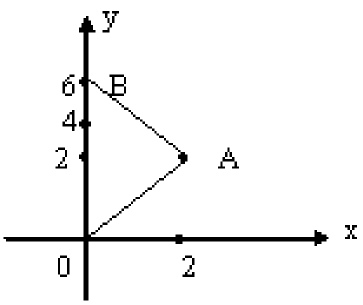
Шешуі. $y=x^2$, $dy=2xdx$

$$\int\limits_{AB}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int\limits_{-1}^{1}\left[(x^2-2x\cdot x^2)+(x^4-2x\cdot x^2)\cdot 2x\right]dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}(x^2-2x^3+2x^5-4x^4)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{4}{5}x^5\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{14}{15}.$$

181. $\oint\limits_{L}2xdy-3ydx$ интегралын есептеу керек, мұндағы L контуры сағат тіліне қарсы бағыттағы ΔOAB: $O(0;0),\ A(2;2),\ B(6;0).$

Шешуі. Интегралдау контурын үшке бөлеміз.



$$\oint\limits_{L}=\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}+\int\limits_{BO}$$

OA аралығында x 0-ден 2-ге дейін өзгереді. $y=x,\ dy=dx.$

$$\int\limits_{OA}2xdy-3ydx=\int\limits_{0}^{2}(2x-3x)dx=-\int\limits_{0}^{2}xdx=-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{2}=-2.$$

AB аралығында x 2-ден 0-ге дейін өзгереді, $y=6-2x,\ dy=-2dx.$

$$\int\limits_{AB}2xdy-3ydx=\int\limits_{2}^{0}\left[2x\cdot(-2)-3\cdot(6-2x)\right]dx=\int\limits_{2}^{0}(-4x-18+6x)dx=$$

$$=\int\limits_{2}^{0}(2x-18)dx=\left(x^2-18x\right)\Big|_{2}^{0}=32.$$

BO аралығында y 6-дан 0-ге дейін өзгереді. $x=0$, $dx=0$

$$\int\limits_{BO}2xdy-3ydx=0.$$

Сонымен,

$$\oint\limits_{L}2xdx-3ydx=-2+32=30\cdot$$

182. $\int\limits_{L}xdx+ydy+(x+y-1)dz$ интегралын есептеу керек , мұндағы

$$x=t+1, y=2t+1, z=3t+1,\quad 0\le t\le 1.$$

Шешуі. $dx=dt,\quad dy=2dt,\quad dz=3dt$

$$\int\limits_{L}xdx+ydy+(x+y-1)dz=\int_0^1\left[(t+1)+(2t+1)\cdot 2+(t+1+2t+1-1)\cdot 3\right]dt=\int_0^1(14t+6)dt=13.$$

183. $\int\limits_{OA} 2xydx - x^2dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы OA түзуінің O(0;0) нүктесінен A(2;1) нүктесіне дейінгі бөлігі.

Жауабы:4/3.

184. $\int\limits_{OA} 2xydx - x^2dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы $x = 2y^2$ параболасының O(0;0) нүктесінен A(2;1) нүктесіне дейінгі бөлігі.

Жауабы:2,4.

185. $\int\limits_{OA} 2xydx - x^2dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы $x^2 = 4y$ параболасының O(0;0) нүктесінен A(2;1) нүктесіне дейінгі бөлігі.

Жауабы:0.

186. $\int\limits_{OA} 2xydx - x^2dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы OBA сынық сызығы, O(0;0) , B(2;0), A(2;1).

Жауабы: -4.

187. $\int\limits_{OA} 2xydx - x^2dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы OCA сынық сызығы, O(0;0) , C(0;1), A(2;1).

Жауабы:4.

189. $\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 + 2xy)dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы AB: $y = x^2$ параболасының доғасы, $A(1;1)$ нүктесінен $B(2;4)$ нүктесіне дейін.

Жауабы: $40\frac{19}{30}$..

190. $\int\limits_{AB} \cos ydx - \sin xdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы AB түзуінің A(2;-2) нүктесінен B(-2; 2) нүктесіне дейінгі бөлігі.

Жауабы: $-2\sin 2$.

191. $\int\limits_{L} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: OAB-сынық сызығы, $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;\ 2)$.

Жауабы: $\frac{136}{3}$.

192. $\int\limits_{L} ydx - (y+x)^2\,dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L – сағат тіліне қарсы бағыттағы Ox осінен жоғары орналасқан $y = 2x - x^2$ параболасының бөлігі.

Жауабы: 4.

193. $\oint\limits_{L} (x+y)dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x=0,\ y=0,$ $x=1,\ y=1$ түзулерінен құралған тіктөртбұрыш контуры.

Жауабы: 1.

194. $\int\limits_L \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t$ шеңберінің бірінші ширегі (сағат тіліне қарсы бағыт бойынша).

Жауабы: π.

195. $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ эллипстің жоғары бөлігі (сағат тіліне қарсы бағыт бойынша).

Жауабы: $\frac{4}{3}ab^2$

196. $\oint\limits_L x^2ydx + x^2dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $y^2 = x,\ y = x^2$ параболаларымен шектелген контур (сағат тіліне қарсы бағыт бойынша).

Жауабы: $\frac{6}{35}$.

197. $\int\limits_{OA} xydx + yzdy + zxdx$ интегралын есептеу керек, мұндағы OA: $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1$ шеңберінің бірінші ширегі (сағат тіліне қарсы бағыт бойынша).

Жауабы: $\frac{1}{6}$.

198. $\oint\limits_L x^2ydy - xy^2dx$ интегралын есептеу керек, егер $x = \sqrt{\cos t},\ y = \sqrt{\sin t},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Жауабы: $\frac{\pi}{4}$.

4.3 Екінші текті қисық сызықты интегралдың интегралдау жолына тәуелсіздігі. Функцияны оның толық дифференциалы арқылы табу.

$P(x;y),\ Q(x;y)$ функциялары және олардың бірінші ретті дербес туындылары D облысында және осы облыста толығымен жататын C қисық сызығында үзіліссіз болсын.

$\int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ интегралы интегралдау жолына тәуелсіз болуы үшін

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

шартының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Осы шарт орындалғанда D облысында жатқан кез келген L тұйық контуры бойынша алынған қисық сызықты интеграл нөлге тең болады, яғни

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 .$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ шарты орындалғанда $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ интеграл астындағы өрнек қандай да бір $U = U(x; y)$ функциясының толық дифференциалына тең болады, яғни

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$U(x; y)$ функциясы (алғашқы функциясы)

$$U(x; y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C \text{ немесе } U(x; y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C$$

формуласымен табылады, мұндағы x_0, y_0 – кез келген тұрақты сан, ал $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ интегралы, мұндағы $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1)dx + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2, y)dy$$

формуласымен есептеледі.

199. $\int_{(1;2)}^{(4;3)} (x^2 + 5y)dx + (5x + y^3)dy$ интегралын есептеу керек.

Шешуі.

$$P(x, y) = x^2 + 5y \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 5$$

$$Q(x, y) = 5x + y^3 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 5$$

осыдан $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

Онда
$$\int_{(1;2)}^{(4;3)} (x^2 + 5y)dx + (5x + y^3)dy = \int_1^4 (x^2 + 5 \cdot 2)dx + \int_2^3 (5 \cdot 4 + y^3)dy =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + 10x\right)\Bigg|_1^4 + \left(20y + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_2^3 = 87\frac{1}{4}. \quad \blacktriangle$$

200. $dU = [y + \sin x]dx + (x + 1 - \cos y)dy$ болса, $U(x; y)$ алғашқы функциясын табу керек.

Шешуі. $P = y + \sin x \quad Q = x + 1 - \cos y \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 \quad x_0 = 0,\ y_0 = 0$ деп аламыз. Сонда

$$U(x, y) = \int_0^x (y + \sin x)dx + \int_0^y (1 - \cos y)dy = (xy - \cos x)\Big|_0^x + (y - \sin y)\Big|_0^y + C =$$
$$= xy - \cos x + 1 + y + \sin y + C.$$

201. $\int\limits_{(1;1)}^{(2;3)}(x+3y)dx+(3x+y)dy$ интегралын есептеу керек.

Жауабы: 20,5.

202. $\int\limits_{(0;0)}^{(\pi;\pi)}(x+y)dx-(x-y)dy$ интегралын есептеу керек.

Жауабы: π^2.

203. $\int(2x+3xy^2+2y)dx+(2x+3x^2y)+2y)dy$ интегралын есептеу керек.

Жауабы: 198.

$U(x,y)-$ алғашқы функциясын оның толық дифференциалы арқылы табу керек.

204. $dU=\left(1-e^{x-y}+\cos x\right)dx+\left(e^{x-y}+\cos y\right)dy.$

Жауабы: $U=x-e^{x-y}+\sin x+\sin y+C.$

205. $dU=\left(x^2-2xy^2+3\right)dx+\left(y^2-2x^2y+3\right)dy.$

Жауабы: $U=\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)-x^2y^2+3x+3y+C.$

206. $dU=\left(shx+chy\right)dx+\left(xshy+1\right)dy.$

Жауабы: $U=chx+xchy+y+C.$

207. $dU=\left(4x^3y^3-3y^2+8\right)dx+\left(3x^4y^2-6xy-1\right)dy.$

Жауабы: $U=8x+x^4y^3-3xy^2-y+C.$

4.4 Грин формуласы.

Егер $P(x;y)$, $Q(x;y)$ функциялары және $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ дербес туындылары D облысында және оның L шекарасында үзіліссіз болса, онда

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

болады және оны *Грин формуласы* дейді, әрі мұнда L контуры бойынша бағыт D облысы сол жақта болатындай етіп таңдап алынады.

209. Грин формуласының көмегімен $I=\oint\limits_L\left(2x^2+2y^2\right)dx+\left(x^2+2xy+y^2\right)dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L – төбелері $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$ болатын тұйық үшбұрыш контуры.

Шешуі. $P(x,y)=2x^2+2y^2$, $Q(x,y)=x^2+2xy+y^2$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x+2y-4y=2x-2y.$$

Сонда $I=\iint\limits_D(2x-2y)dxdy$, мұндағы D облысы - ΔABC.

АВ түзуінің теңдеуі $y = x.$

ВС түзуінің теңдеуі $y = 4 - x.$

$$I = \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (2x - 2y)dy = \int_1^2 \left(2xy - y^2\right)\Big|_x^{4-x} dx = \int_1^2 \left[2x(4-x) - (4-x)^2 - 2x^2 + x^2\right]dx =$$

$$= \int_1^2 \left(16x - 4x^2 - 16\right)dx = \left(8x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 16x\right)\Big|_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

210. Грин формуласының көмегімен $I = \oint\limits_L - x^2 ydx + xy^2 dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x^2 + y^2 = a^2$ шеңбері.

Шешуі. $P(x, y) = -x^2 y,\ \ Q(x, y) = xy^2$. Сонда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2.$

Осыдан

$$I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy.$$

Полярлық координаттар жүйесіне көшеміз: $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{1}{4}a^4 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}\pi a^4.$$

211. Грин формуласының көмегімен $I = \oint\limits_L \left[x + \ln(x^2 + y^2)\right]dx + y\ln\left(x^2 + y^2\right)dy$

D облысының L шекарасы бойынша қисық сызықты интегралын қос интегралға түрлендіру керек.

Жауабы: $\iint\limits_D \frac{2y(x-1)}{x^2 + y^2}dxdy.$

212. Грин формуласының көмегімен $\oint\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}dx + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x = 1,\ x = 4,\ \ y = 0,\ y = 2$ -тіктөртбұрыш контуры.

Жауабы: 8.

4.5 Жазық фигураның ауданын есептеу

Тұйық L сызығымен шектелген фигураның ауданы

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$$

формуласымен есептеледі. Мұнда интегралдау L контуры бойынша бағыт D облысы сол жақта болатындай етіп таңдап алынады.

213. $x = a\cos^3 t,\cdot \quad y = a\sin^3 t$ астроидымен шектелген фигураның ауданын табу керек.

Шешуі.

$$dx = -3a\sin t\cos^2 t$$

$$dy = 3a\sin^2 t\cos t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Осыдан, $S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\oint_0^{2\pi}\left(a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos^2 t\right)dt =$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt = \frac{3a^2}{16}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8}. \quad \blacktriangle$$

214. $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ эллипсімен шектелген фигураның ауданын табу керек.

Жауабы: πab.

215. $y^2 = x,\ y = x^2$ параболаларымен шектелген фигураның ауданын табу керек.

Жауабы: $\frac{1}{3}$.

216. $\begin{array}{l} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{array}$ кардиоидамен шектелген фигураның ауданын табу керек.

Жауабы: $6\pi a^2$.

5. Беттік интегралдар

5.1 Бірінші текті беттік интегралдар

$U = f(x,y,z)$ үзіліссіз функциясы болсын және $z = \varphi(x,y)$ формуласымен σ беті берілсін. *Бет ауданы бойынша беттік интеграл (не бірінші текті беттік интеграл)* деп

$$\lim_{\max diam\Delta\sigma_k \to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta\sigma_k = \iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma$$

мұндағы $\Delta\sigma_k$ - σ бетінің k-ші элементінің ауданы, (x_k, y_k, z_k) нүктесі осы элементке тиісті, $f(x,y,z)$ функциясы σ бетінің әрбір нүктесінде анықталады.

Егер бет $z = \varphi(x,y)$ теңдеуімен берілсе, онда бірінші текті беттік интеграл

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

формуласымен есептеледі.

217. $\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{(1+x+z)^2}$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ: $x+y+z=1$ жазықтығының I октанттағы бөлігі.

Шешуі. Жазықтық теңдеуін түрлендірейік: $z=1-x-y$. Бұдан $z_x^{'}=-1,$ $z_y^{'}=-1,$.

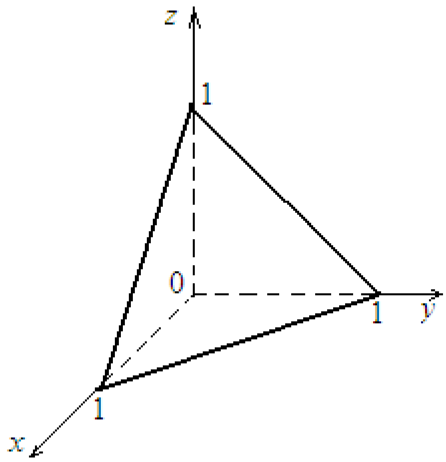
$d\sigma=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy=\sqrt{3}dxdy$.

σ бетінің Oxy жазықтығына проекциясы x+y=1, x=0, y=0 түзулерімен шектелген D үшбұрышы болады (5.1 Сурет). Осы үшбұрышта x 0-ден 1-ге дейін өзгереді.

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{(1+x+z)^2}=\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{3}dxdy}{(1+x+1-x-y)^2}=$$

$$=\sqrt{3}\int\limits_0^1 dx\cdot\int\limits_0^{1-x}\frac{dy}{(2-y)^2}=\sqrt{3}\int\limits_0^1\frac{1}{2-y}\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=\sqrt{3}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)dx=\sqrt{3}\left[\ln|1+x|-\frac{1}{2}x\right]\Bigg|_0^1=\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$



5.1 Сурет

218. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті $z^2=x^2+y^2$ конусының $z=0$ және $z=1$ жазықтықтарының арасындағы бөлігі.

Шешуі. $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$d\sigma=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy.$$

Сонда берілген интеграл $I=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy.$

Интегралдау облысы D: $x^2+y^2\le 1$ дөңгелегі болғандықтан

$$I=\sqrt{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy=4\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1 r^3dr=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

219. $2x+2y+z=8a$ бетінің $x^2+y^2=a^2$ цилиндрімен шектелген бөлігінің ауданын есептеу керек.

Шешуі. $z=8a-2x-2y$, бұдан $z'_x=-2, z'_y=-2$, ал $d\sigma=3dxdy$

$$\sigma=\iint\limits_{\sigma}d\sigma=3\iint\limits_{\sigma_{xy}}dxdy.$$

σ_{xy}: $x^2+y^2\le a^2$ дөңгелегі болады. Полярлық координаттар жүйесіне көшсек:

$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le r\le a,$$

онда

$$\sigma = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr = 1{,}5\int_0^{2\pi} r^2\Big|_0^a d\varphi = 1{,}5a^2\int_0^{2\pi} d\varphi = 3\pi a^2 .$$

220. $\iint_\sigma \left(2x + \frac{4}{3}y + z\right) d\sigma$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті: $6x + 4y + 3z = 12$ жазықтығының бірінші октанттағы бөлігі.

Жауабы: $4\sqrt{61}$.

221. $\iint_\sigma \left(x^2 + y^2\right) d\sigma$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті: $x^2 + y^2 = 2z$ параболоидының $z = 1$ жазықтығымен қиғандағы бөлігі.

Жауабы: $\frac{\pi}{15}\left(24\sqrt{3} + 4\right)$.

222. $\iint_\sigma \left(x^2 + y^2\right) d\sigma$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сфера.

Жауабы: $\frac{8\pi a^4}{3}$.

223. $\iint_\sigma xyz d\sigma$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті: $z = x^2 + y^2$ параболоидының $z = 0$ және $z = 1$ жазықтықтарымен қиғандағы бөлігі.

Жауабы: $\frac{1}{420}\left(125\sqrt{5} - 1\right)$.

5.2 Екінші текті беттік интегралдар

$P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)$ -үзіліссіз функциялары, L сызығымен шектелген σ беті және σ бетінің әрбір $M(x, y, z)$ нүктесінде оң бағытта бағытталған $\vec{n}(M) = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ нормалі (бірлік векторы) берілсе, онда *екінші текті беттік интеграл*

$$\iint_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_\sigma \left[P\cos\alpha + Q\cos\beta + r\cos\gamma\right] d\sigma$$

өрнектеледі.

Егер σ беті $\Phi(x, y, z) = 0$ теңдеуімен айқын емес түрде берілсе, онда нормальдің бағыттаушы косинустары

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}; \qquad \cos\beta = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}};$$

формулаларымен анықталады, мұндағы таңба σ бетінің $\vec{n}$ нормалінің бағытына байланысты анықталады.

Егер σ беті $x = x(y,z)$ немесе $y = y(x,z)$ немесе $z = z(x,y)$ формуласымен берілсе және σ бетінің Oyz, Oxz, Oxy жазықтықтарындағы проекцияларын сәйкес σ_{yz}, σ_{xz}, σ_{xy} деп белгілесек, онда екінші текті беттік интеграл

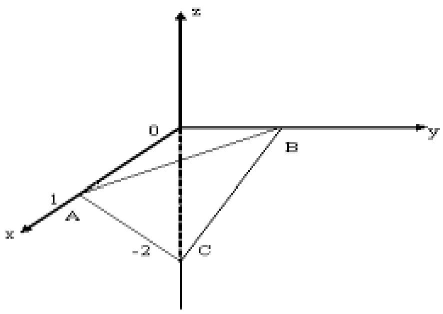
$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)\cos\alpha d\sigma = \pm \iint_{\sigma_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz;$$

$$\iint_{\sigma} Q(x,y,z)\cos\beta d\sigma = \pm \iint_{\sigma_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz;$$

$$\iint_{\sigma} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma = \pm \iint_{\sigma_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy;$$

формулаларымен есептеледі.

224. $I = \iint_{\sigma} (x-z)dydz + (z+y)dxdz + (2x+y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті $2x + y - z - 2 = 0$ жазықтығының координат жазықтықтарымен қиғандағы бөлігі, нормаль бағыты Ох осімен сүйір бұрыш жасайды (4.2 Сурет).



4.2 Сурет

Шешуі.

$$J = \iint_{\sigma} (x-z)dydz + \iint_{\sigma} (z+y)dxdz + \iint_{\sigma} (2x+y)dxdy =$$

$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

$$\cos\alpha > 0,\ \cos\beta > 0,\ \cos\gamma < 0.$$

$J_1 = \iint_{\sigma} (x-z)dydz$ интегралын есептейік.

$$\sigma_{yz} - \Delta OCB: \ x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z,\ 0 \le y \le 2,\ \ y - 2 \le z \le 0$$

$$J_1 = \iint_{\sigma} (x-z)dydz = +\iint_{\sigma_{yz}} \left(1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - z\right)dydz = \frac{1}{2}\int_0^2 dy \int_{y-2}^{0} (2 - y - z)dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left((2-y)z - \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{y-2}^{0} dy = -\frac{1}{2}\int_0^2 \left[(2-y)(y-2) - \frac{(y-2)^2}{2}\right]dy = -\frac{1}{2}\int_0^2 \left(-\frac{3(y-2)^2}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 (y-2)^2 dy = \frac{1}{4}(y-2)^3\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(0+8) = 2.$$

$J_2 = \iint_{\sigma} (z+y)dxdz$ интегралын есептейік.

$$\sigma_{xz} - \Delta AOC,\ \ \mathrm{y} = 2 - 2x + z,\ 0 \le x \le 1,\ \ 2\mathrm{x} - 2 \le z \le 0$$

$$J_2 = \iint_{\sigma} (z+y)dxdz = +\iint_{\sigma_{xz}} \left(z+2-2x+z\right)dxdz = \int_0^1 dx \int_{2x-2}^{0} (2-2x+2z)dz =$$

$$= \int_0^1 \left((2-2x)z + z^2\right)\Big|_{2x-2}^{0} dx = -\int_0^1 \left[(2-2x)(2x-2) + (2x-2)^2\right]dx = 0.$$

$J_3 = \iint\limits_{\sigma} (2x+y)dxdy$ интегралын есептейік.

$$\sigma_{xy} - \Delta AOB, \quad \mathrm{z} = 2x + y - 2, \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le \mathrm{y} \le 2 - 2x$$

$$J_3 = \iint_{\sigma} (2x+y)dxdy = -\iint_{\sigma_{xy}} (2x+y)dxdy = -\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (2x+y)dy =$$

$$= -\int_0^1 \left(2xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-2x} dx = -\int_0^1 \left[2x(2-2x) + \frac{(2-2x)^2}{2}\right]dx = -\int_0^1 \left(4x - 4x^2 + 2 - 4x + 2x^2\right)dx =$$

$$= -\int_0^1 \left(2 - 2x^2\right)dx = -\left(2x - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{4}{3}.$$

Сонымен

$$J = 2 + 0 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

225. $\iint\limits_{\sigma} yzdydz + xzdxdy + xydxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті $x + 2y + 3z = 6$ жазықтығының координаттар жазықтығымен қиғандағы бөлігі.

Жауабы: 21.

226. $\iint\limits_{\sigma} zdxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиды.

Жауабы: $\frac{4\pi abc}{3}$.

227. $\iint\limits_{\sigma} 2dxdy + ydxdz - x^2zdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ эллипсоидының бірінші октанттағы бөлігі.

Жауабы: $\frac{4\pi}{3} - \frac{4}{15}$.

228. $\iint\limits_{\sigma} (x+z)dzdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті $2x + 2y + z = 2$ жазықтығының бірінші октанттағы бөлігі.

Жауабы: $\frac{1}{12}$.

229. $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz + y^2dxdy + z^2dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z > 0)$ жартысферасы.

Жауабы: $\dfrac{\pi a^4}{2}$.

6 Өріс теориясының элементтері

Егер кеңістіктің әрбір нүктесіне $U = U(x, y, z)$ скалярлық функцияның мәні сәйкес келсе, онда оны *скалярлық өріс* дейді.

Мысалы, егер $U(x, y, z)$ функциясы кеңістіктегі V облысының әрбір нүктесінде температураны анықтаса, онда оны температураның *скалярлық өрісі* дейді.

$U(x, y, z)$ скалярлық өріс бір тек қана бір берілген C мәнін қабылдайтын нүктелер жиынын деңгейлік бет дейді, оның теңдеуі $U(x, y, z) = C$.

Мысалы, $U = x^2 + y^2$ функциясының берілген скалярлық өрісінің деңгейлік сызығы $x^2 + y^2 = C$ шеңберлер тобы болады.

Егер кеңістіктің әрбір $M(x, y, z)$ нүктесінде

$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + +R(x, y, z)\,\vec{k}$

векторының анықталған мәні сәйкес келсе, онда *векторлық өріс* берілді дейді.

Скаляр немесе векторлық өріс t - уақытына байланыссыз болса, онда оны *стационарлық*, ал байланысты болса, *стационарсыз* деп атайды.

Векторлық сызық деп әрбір $M(x, y, z)$ нүктесінде бағыты сәйкес $\vec{F}(M)$ векторымен бағыттас болатын қисық сызығын айтады. Векторлық сызық

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

дифференциалдық теңдеулер жүйесімен анықталады.

$U = U(x, y, z)$ скалярлық өрістің *градиенті* деп

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

векторын айтады да, қысқаша ∇U символымен белгілейді, мұндағы

$\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ - *Гамильтон операторы* немесе *набла* дейді.

Өріс градиенті бет деңгейіне жүргізілген нормаль бағытымен функцияның өсу жағына қарай бағытталады және оның өсу жылдамдығының ең үлкен шамасы өріс градиентінің ұзындығының тең, яғни

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = |gradU| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$ векторлық өрістің *дивергенциясы* деп

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla\,\vec{F}$$

скаляр шамасын айтады.

$\vec{F}(M) = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ векторлық өрістің *құйыны (роторы)* деп

$$rot\,\vec{F} = \nabla \times F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

векторын айтады.

Бірлік $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ нормаль бағытындағы σ беті бойынша өтетін $\vec{F}(M) = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ векторының *ағыны* деп

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma = \iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

интегралын айтады.

$\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ векторының L сызығы бойынша алынған сызықты интеграл

$$\int_L \vec{F}d\,\vec{r} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

формуласымен анықталады, мұндағы $d\,\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ векторы L қисығына жүргізілген жанама вектор.

Егер L қисығы тұйық болса, онда сызықты интегралды $\vec{F}$ векторлық өрісінің *иірімі (циркуляциясы)* деп атайды:

$$Ц = \oint_L \vec{F}d\,\vec{r} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Егер L қисығы σ бетін қоршаған тұйық қисық болса, онда *Стокс формуласы* орындалады және оның формуласы

$$Ц = \oint_L \vec{F}d\,\vec{r} = \iint_{\sigma} \vec{n}\,rot\,\vec{F}\,d\sigma$$

немесе

$$Ц = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma,$$

мұндағы $\vec{n}$ векторы σ бетіне жүргізілген сыртқы нормалы, оның бағытымен қарағанда L контурымен айналу бағыты сағат тіліне қарсы алынады.

Егер V көлемін қоршаған σ бетін тұйық, ал оған жүргізілген сыртқы нормаль бірлік $\vec{n}$ векторы болса, онда *Гаусс-Остраградский формуласы* орындалады және оның формуласы

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint_{V} div\,\vec{F}dxdydz$$

немесе

$$\Pi = \oiint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdz = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial t} \right) dxdydz.$$

Егер өрістің әрбір нүктесінде $diV\,\vec{F} = 0$ болса, онда $\vec{F}$ векторлық өрісін *құбырлық (соленоидалды) өріс* дейді. Бұл жағдайда кез келген тұйық бет арқылы өтетін вектор ағыны нөлге тең.

Егер $\vec{F} = gradU$, яғни $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$, болса, онда $\vec{F}$ векторлық өрісін дәрменді (потенциалды) өріс дейді, мұндағы U – скалярлық функция. Берілген бір байланысты облыста $\vec{F}(M)$ - өрісі дәрменді болу үшін $rot\,\vec{F} = 0$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті. Бұл жағдайда U – дәрмені бар және оны

$$U(M) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C$$

теңдеуімен анықтайды. Егер U – дәрмені бір мәнді функция болса, онда

$$\int_{AB} \vec{F}\,d\,\vec{r} = U(B) - U(A),$$

мұндағы AB доғасы L қисығының бойынан алынады, x_0, y_0, z_0, C - кез келген сандар.

Егер $\vec{F}(M)$ векторлық өріс бір мезгілде дәрменді және құбырлы өріс болса, онда

$$diV(gradU) = 0$$

және дәрменді U функциясы гармониялық функция болады, яғни Лаплас теңдеуін қанағаттандырады.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \text{ немесе } \Delta U = 0,$$

мұндағы $\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - Лаплас операторы.

230. $\vec{F}=x^2\vec{i}+2y^2\vec{j}+3z^2\vec{k}$ векторлық өрісінің дивергенциясын табу керек.

Жауабы: $div\vec{F}=2x+4y+6z.$

231. $\vec{F}=x^2\cdot\vec{i}+xy^2\cdot\vec{j}+yz^2\cdot\vec{k}$ векторлық өрісінің құйынын (роторын) табу керек.

Шешуі.

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{l} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2 & xy^2 & yz^2\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial(yz^2)}{\partial y}-\frac{\partial(xy^2)}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial(x^2)}{\partial z}-\frac{\partial(yz^2)}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial(xy^2)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2)}{\partial y}\right)=$$

$$=z^2\cdot\vec{i}+y^2\cdot\vec{k}.$$

232. Стокс формуласының көмегімен $\vec{F}=(x+3y+2z)\vec{i}+(3x+z)\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$ векторлық өрісінің MNP үшбұрыш контуры бойынша иірімін (циркуляциясын) табу керек, мұндағы $M(2;0;0;)$, $N(0;3;0)$, $P(0;0;1)$.

Шешуі.

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+3y+2z & 3x+z & 2x-y\end{vmatrix}=\vec{i}(-1-1)+\vec{j}(2-2)+\vec{k}(3-3)=-2\vec{i}.$$

Стокс формуласы бойынша $Ц=\oint\limits_L\vec{F}d\vec{r}=\iint\limits_\sigma\vec{n}\,rot\vec{F}\,d\sigma=-2\iint\limits_{\sigma_{yz}}dydz.$

MNP үшбұрышынан тұратын L контуры $3x+2y+6z-6=0$ жазықтығында жатады, осыдан $y=-2\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{1-\frac{y}{3}}dz=-2\int\limits_0^3\left(1-\frac{y}{3}\right)dy=3.$

233. Стокс формуласының көмегімен $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$ векторлық өрісінің ABC үшбұрыш контуры бойынша иірімін (циркуляциясын) табу керек, мұндағы $A(0;0;0;)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

Жауабы: 1.

234. Стокс формуласының көмегімен $\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j}$ векторлық өрісінің $x^2+(y-1)^2=1$ шеңбері бойынша иірімін (циркуляциясын) табу керек.

Жауабы: $2\pi.$

235. $\vec{F}=(2x-4yz)\vec{i}+(2y-4xz)\vec{j}+(2z-4xy)\vec{k}$ векторлық өрісі дәрменді (потенциалды) немесе құбырлы (соленоидалды) бола ма тексеру керек. Дәрменді өріс болған жағдайда оны дәрменін (потенциалын) табу керек.

Шешуі. Векторлық өрістің дәрменділігін тексерейік:

$$rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x-4yz & 2y-4xz & 2z-4xy\end{vmatrix}=\vec{i}\left(-4x+4x\right)+\vec{j}\left(-4y+4y\right)+\vec{k}\left(-4z-4z\right)=0.$$

$\vec{F}$ векторлық өрісі дәрменді. Енді өрістің дәрменін табайық.

$$U(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}(2x-y_0z)dx+\int_{y_0}^{y}(2y-xz_0)dy+\int_{z_0}^{z}(2z-xy)dz+C=$$

$$=\left(x^2-xy_0z_0\right)\Big|_{x_0}^{x}+\left(y^2-xyz_0\right)\Big|_{y_0}^{y}+\left(z^2-xyz\right)\Big|_{z_0}^{z}+C=x^2-xy_0z_0-x_0^2+xy_0z_0+y^2-xyz_0-$$

$$-y_0^2+xy_0z_0+z^2-xyz-z^2-xyz_0+C=x^2+y^2+z^2-4xyz-x_0^2-y_0^2-z_0^2+4x_0y_0z_0+C.$$

$C_1=-x_0^2-y_0^2-z_0^2+4x_0y_0z_0+C$ деп алсақ, онда

$$U=x^2+y^2+z^2-4xyz+C_1.$$

Енді өріс құбырлы бола ма, тексерейік: $diV\,\vec{F}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=6\neq 0.$

Берілген өріс құбырлы емес.

$\vec{F}=Pdx+Qdy+Rdz$ өрісі дәрменді немесе құбырлы өріс бола ма, тексеру керек. Дәрменді өріс болған жағдайда дәрменін табу керек.

236. $\vec{F}=(3x^2+yz)\vec{i}+(3y^2+xz)\vec{j}+(3z^2+xy)\vec{k}.$

Жауабы: Өріс дәрменді, бірақ құбырлы емес $U(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+xyz+C.$

237. $\vec{F}=(2x+yz)\vec{i}+(y+xz)\vec{j}+(-3z+xy)\vec{k}.$

Жауабы: Өріс әрі дәрменді, әрі құбырлы (гармоникалық өріс) $U(x,y,z)=x^2+\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{3}{2}z^2+xyz+C.$

238. $\vec{F}=xz\,\vec{i}+yz\,\vec{j}-z^2\,\vec{k}.$

Жауабы: Өріс дәрменді емес, бірақ құбырлы.

$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ өрісі және $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығы мен координат жазықтықтарымен шектелген пирамида σ беті берілсін. Гаусс-Остроградский формуласының көмегімен $\vec{F}$ өрісінің ағынын есептеу керек.

239. $\vec{F} = x^2 \cdot \vec{i} - z^2 \cdot \vec{j} + y^2 \cdot \vec{k}, \quad 2x + y + z = 2.$

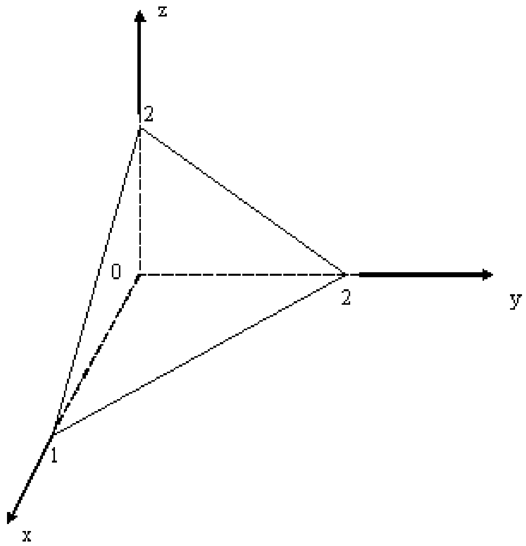
Шешуі.

$$\Pi = \oiint\limits_{\sigma} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint\limits_{V} diV\,\vec{F}dxdydz,\; diV\,\vec{F} = 2x.$$

Сонымен, 6.1 Сурет бойынша интегралдар шектерін қояйық:

$$\Pi = 2\iiint\limits_{V} dxdydz = 2\int\limits_0^1 dx \cdot 2\int\limits_0^{2-2x} dy \cdot \int\limits_0^{2-2x-y} xdz = 2\int\limits_0^1 dx \cdot$$

$$\int\limits_0^{2-2x} x(2-2x-y)dy = 2\int\limits_0^1 x\left(2y - 2xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-x} dx = \int\limits_0^1 x(2-2x)^2\,dx = \frac{1}{3}.$$



6.1 Сурет

240. $\vec{F} = 4z \cdot \vec{i} + (x - y - z) \cdot \vec{j} + (3y + 2z) \cdot \vec{k}, \quad -2x + y + z - 4 = 0.$

Жауабы: $\frac{16}{3}$.

241. $\vec{F} = (x + y) \cdot \vec{i} + (y + z) \cdot \vec{j} + (2x + 2z) \cdot \vec{k}, \quad 3x - 2y + 2z - 6 = 0.$

Жауабы: 12.

242. $\vec{F} = y^2 z \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j} + (xy + 3z) \cdot \vec{k}, \quad 2x + 2y + z = 2.$

Жауабы: 1

243. $\vec{F} = y^2 \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k}, \quad x + y + z = 6.$ Жауабы: $\frac{1}{12}.$

7 Фурье қатары

2π **периодты функцияның Фурье қатары.** $[-\pi;\pi]$ сегметінде анықталған, периоды 2π болатын $f(x)$ функциясының *Фурье қатары* деп

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin x)$$

қатарын айтады, мұндағы

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx; \quad n = 1,2,3,...$$

- Фурье қатарының *коэффициенттері* деп аталады.

Егер Фурье қатары жинақты болса, онда оның қосындысы $S(x)$ периоды 2π болатын функция болады.

Дирихле теоремасы: $f(x)$ функциясы $[-\pi;\pi]$-де экстремум мәндерінің саны ақырлы және бірінші текті үзілісті нүктелерінен басқа нүктелерінде үзіліссіз болсын. Пайда болған қатардың $S(x)$ қосындысы үзіліссіз болатын нүктелерінде $f(x)$ функциясының мәніне, яғни $S(x) = f(x),$ ал үзілісті нүктелерінде берілген функцияның оң жақ және сол жақ шектерінің арифметикалық ортасына, яғни

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)], \; S(x) = \frac{1}{2}[f(-\pi-0) + f(x+0) + f(\pi-0)], \; x = \pm\pi$$

нүктесінде тең болады.

Е с к е р т у. Интеграл есептеу кезінде, оның мынадай қасиеттерін пайдалану керек:

Егер $f(x)$ функциясы жұп болса, онда $\int_{-à}^{à} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$

Егер $f(x)$ функциясы тақ болса, онда $\int_{-à}^{à} f(x)dx = 0.$

Сонымен қатар $\int_{-à}^{à} \sin\frac{\pi nx}{a}dx = 0, \quad \int_{-à}^{à} \cos\frac{\pi nx}{a}dx = 0$.

244. $(-\pi;\pi)$ аралығында $f(x) = x+1$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі. Фурье қатарының коэффициенттерін табайық.

$$\grave{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=2;$$

$$\grave{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(x+1)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right]=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin xdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[-(x+1)\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-(\pi+1)\frac{\cos \pi x}{n}+(-\pi+1)\frac{\cos(\pi n)}{n}\right]=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Олай болса,

$$f(x)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}. \qquad \blacktriangle$$

245. $(-\pi;\pi)$ аралығында $f(x)=\begin{cases}2, \text{ егер } -\pi\le x<0\\ 3, \text{ егер } 0\le x\le\pi\end{cases}$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі.

$$\grave{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}3dx=5;$$

$$\grave{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[3\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}=0;\right.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2\sin xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}3\sin nxdx=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}=$$

$$=-\frac{5}{\pi n}(1-\cos\pi n)=-\frac{5}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & \text{егер } n-\text{жуп}\\ -\dfrac{5}{\pi n}, & \text{егер } n-\text{так}\end{cases}.$$

Егер $n=2m-1$ деп алсақ, онда $f(x)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}.$

Егер $f(x)$ функциясы тақ болса, яғни $f(-x)=-f(x)$, онда Фурье коэффициенттері

$$a_0=0,\ a_n=0,\ \ b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

Ал егер $f(x)$ функциясы жұп болса, яғни $f(-x)=-f(x)$, онда Фурье коэффициенттерін

$$b_n=0,\quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\qquad n=1,2,3,...$$

формулаларымен есептеуге болады. $\blacktriangle$

246. $(-\pi;\pi)$ аралығында $f(x)=x^2+1$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі. Жұп функция болғандықтан, $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x^2+1)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}+1.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(x^2+1\right)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left[\left(x^2+1\right)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx\right]=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right]=-\frac{4}{\pi n}\left[-\pi\frac{\cos\pi n}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}\right]=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Осыдан $f(x)=\dfrac{\pi^2}{3}+\dfrac{1}{2}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{n^2}-\cos nx.$

Периоды 2π болатын $f(x)$ функциясы $[a,a+2\pi]$ аралығында Фурье қатарына жіктелсе, мұндағы a кез келген сан, онда оның коэффициенттері

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nxdx,\qquad n=1,2,3....$$

формулаларымен табылады.

247. $[0;2\pi]$ аралығында $f(x)=x^2$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

Шешуі. Бұл жағдайда $a=0$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx=\frac{x^3}{3\pi}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{8\pi^2}{3}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin x}{n}\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nxdx\right]=-\frac{2}{\pi n}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{2\pi}{n}\cos 2\pi n+\frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{2\pi}\right]=\frac{4}{n^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[-x^2\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\cos xdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-4\pi^2\frac{\cos 2\pi n}{n}+\frac{2}{n}\left(x\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nxdx\right)\right]=\frac{1}{n}\left[-\frac{4\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3}\cos nx\Bigg|_0^{2\pi}\right]=-\frac{4\pi}{n}.$$

Осыдан $f(x)=\dfrac{4}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{n^2}\cos nx-\dfrac{4\pi}{n}\sin nx\right).$ ▲

***2l* -периодты функцияның Фурье қатары.** Егер периоды 2ℓ болатын $f(x)$ функциясы $[-\ell;\ell]$ сегментінде берілсе, мұндағы ℓ кез келген сан, онда Дирихле теоремасының шарттары осы сегментте орындалғанда, $f(x)$ функциясын Фурье қатарына жіктеуге болады.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{\ell}+b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell}\right),$$

мұндағы $a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx,\ \ a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx,\ \ b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx.$

Егер $f(x)$ функциясы жұп болса, онда

$$a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx,\ \ a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx,\quad b_n=0,\quad n=1,2,3\ldots.$$

Егер $f(x)$ функциясы тақ болса, онда

$$a_0=0,\quad a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx.$$

Егер $f(x)$ функциясы $[0;\ell]$ аралығында берілсе, онда осы функцияны $[-\ell;\ell]$ аралығында Фурье қатарына жіктеу үшін, оны $[-\ell;0]$ аралығында Дирихле теоремасының шарттарын қанағаттандыратын кез келген функциямен жалғастыруға болады.

Егер $[-\pi;0]$ аралығында $-f(x)$ функциясын қарастырсақ, онда бұл жағдайда тақ функция болады, олай болса Фурье қатарына «синус» бойынша жіктеледі деп аталады.

Егер $[-\pi;0]$ аралығында $f(x)$ функциясын алсақ, онда бұл жағдайда жұп функция болады және Фурье қатарына «косинус» бойынша жіктеледі деп аталаймыз.

248. $[-5;5]$ аралығында $f(x)=x-4$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

Шешуі. $a_0=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(x-4)dx=\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\Bigg|_{-5}^{5}=-4.$

$$a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(x-4)\cos\frac{\pi nx}{5}dx=\frac{1}{5}\left[(x-4)\frac{5}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{5}\Bigg|_{-5}^{5}-\frac{5}{\pi n}\int_{-5}^{5}\sin\frac{\pi nx}{5}dx\right]=0.$$

$$b_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(x-4)\sin\frac{\pi nx}{5}dx=\frac{1}{5}\left[-(x-4)\cdot\frac{5}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{5}\Bigg|_{-5}^{5}+\frac{5}{\pi n}\int_{-5}^{5}\cos\frac{\pi nx}{5}dx\right]=(-1)^{n+1}\frac{10}{\pi n}.$$

Осыдан $f(x)=-2+\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{\pi nx}{5}.$ ▲

249. $[0;\pi]$ аралығында $f(x)=\pi x$ функциясы берілсін, ал $[-\pi;0]$ аралығында осы функциясының әр түрлі жағдайларын қарастырып, оны Фурье қатарларына жіктеу керек:

а) $f(x)=0$;

ә) $f(x)=-\pi x$ синус бойынша;

б) $f(x)=\pi x$ косинус бойынша;

Шешуі. а) $[-\pi;0]$ аралығында $f(x)=0$ болсын.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\pi x dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\left.x\frac{\sin x}{n}\right|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\left.\frac{1}{n^2}\cos nx\right|_0^{\pi}=\frac{1}{n^2}\left((-1)^k-1\right).$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\int_0^{\pi}x\sin nxdx=-\left.x\frac{\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx=-\pi\frac{\cos\pi n}{n}+\left.\frac{1}{n^2}\sin nx\right|_0^{\pi}=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}.$$

Осыдан $f(x)=\dfrac{\pi^2}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n-1}{n}\cos nx+(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{n}\sin nx\right]$;

ә) $[-\pi;0]$ аралығында $f(x)=-\pi x$ болсын, яғни функция тақ, олай болса, Фурье қатарына «синус» бойынша жіктейміз. Бұл жағдайда $a_0=0$;

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi x\sin nxdx=2\left(-\left.x\frac{\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=2\left(-\pi\frac{\cos\pi n}{n}+\left.\frac{1}{n^2}\sin nx\right|_0^{\pi}\right)=(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}.$$

Осыдан $f(x)=2\pi\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$;

б) $[-\pi;0]$ аралығында $f(x)=\pi x$ болсын, яғни функция жұп, олай болса, Фурье қатарына «косинус» бойынша жіктейміз. Бұл жағдайда $b_0=0$;

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi x dx=\left.x^2\right|_0^{\pi}=\pi^2;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi x\cos nxdx=2\left(\left.x\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\left.\frac{2}{n^2}\cos nx\right|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^2}=\begin{cases}0, & егер\ n-жуп\\ \dfrac{4}{n^2}, & егер\ n-так\end{cases}.$$

Егер $n=2m-1$ деп белгілесек, онда $f(x)=\dfrac{\pi^2}{2}+4\cdot\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}$.

Берілген интегралда функцияларды Фурье қатарына жіктеу керек.

250. $f(x)=x-1,\quad [-\pi;\pi]$. Жауабы: $-1+2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}$.

251. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}, \quad [-\pi;\pi].$ Жауабы: $\dfrac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}.$

252. $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}, \quad [-\pi;\pi].$ Жауабы: $\dfrac{\sqrt{3}}{9\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n\sin nx}{1-9n^2}.$

253. $f(x)=\cos\dfrac{x}{3}, \quad [-\pi;\pi].$ Жауабы: $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}+\dfrac{4\sqrt{2}}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n\cos nx}{1-16n^2}.$

254. $f(x)=\begin{cases} a, \text{ егер } -\pi<x\le 0 \\ b, \text{ егер } \ 0<x<\pi \end{cases}$ дербес жағдайын қарастыру керек:

а) $a=b=1;$ ә) $\grave{a}=-1,\ b=1;$ б) $\grave{a}=0,\ b=1;$ в) $\grave{a}=1,\ b=0.$

Жауабы: $\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2(a-b)}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$

255. $f(x)=\begin{cases} ax, \text{ егер } -\pi<x\le 0 \\ bx, \text{ егер } \ 0<x<\pi \end{cases}$ дербес жағдайын қарастыру керек:

а) $\grave{a}=b=1;$ ә) $\grave{a}=-1,\ b=1;$ б) $\grave{a}=0,\ b=1;$ в) $\grave{a}=1,\ b=0.$

Жауабы: $\dfrac{b-a}{2}\pi-\dfrac{2(b-a)}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+(a+b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}.$

256. $f(x)=x, \quad [-\pi;\pi].$ Жауабы: $2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}.$

257. $f(x)=x^2, \quad [-\pi;\pi].$ Жауабы: $\dfrac{\pi^2}{9\pi}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\tilde{n}osnx}{n^2}.$

258. $f(x)=|x|, \quad [-\pi;\pi].$ Жауабы: $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2p-1)x}{(2p-1)^2}.$

259. $f(x)=x\sin x, \quad [-\pi;\pi].$ Жауабы: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}.$

260. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}, \quad [0;2\pi].$ Жауабы: $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2p-1)x}{(2p-1)^2}.$

261. $f(x)=x, \quad [0;2\pi].$ Жауабы: $\pi+2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}.$

262. $f(x)=|x|, \quad [-1;1].$ Жауабы: $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2p+1)^2}.$

263. $f(x)=x^2, \quad [-1;1].$ Жауабы: $\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\pi nx}{n^2}.$

264. $f(x)=x-1, \quad [-1;1].$ Жауабы: $-1-\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n}\sin\pi x.$

265. $f(x)=2+|x|, \quad [-1;1].$ Жауабы: $2{,}5-\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2p-1)\pi x}{(2n+1)^2}.$

266. $f(x)=10-x, \quad [5;15].$ Жауабы:а) $\frac{10}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{\pi nx}{5}}{n}.$

267. $[0;\pi]$ жарты периодында $f(x)=\pi-2x$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек:

а) синус бойынша; ә) косинус бойынша.

Жауабы: а) $2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$, ә) $\frac{8}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$

268. $[0;2]$ жарты периодында $f(x)=x-\frac{x^2}{2}$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек:

а) синус бойынша; ә) косинус бойынша.

Жауабы: а) $\frac{16}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi x(n-0{,}5)}{(2n-1)^2}$, ә) $\frac{1}{3}-\frac{2}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi nx}{n^2}.$

269. $[0;\pi]$ жарты периодында $f(x)=\cos 2x$ функциясын синус бойынша Фурье қатарына жіктеу керек. Жауабы: $\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2-2^2}.$

270. $[0;\pi]$ жарты периодында $f(x)=x\sin x$ функциясын косинус бойынша Фурье қатарына жіктеу керек. Жауабы: $1-\frac{\cos x}{2}+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-1}.$

Тест сұрақтары

1. Еселі интегралды есептеу керек $\int_1^2 x^2dx\int_0^x dy$

A) 0,5; B) 4/5; C) 5; D) 15/4; E) 8.

2. $\iint_D dxdy$ мұндағы D облысы $x^2+y^2\le 1$

A) 4; B) 1; C) 2π; D) π; E) 4π.

3. $\int_0^2 x^2dx\int_0^1 y^3dy$ интегралының мәнін есептеу керек

A) 4; B) 1; C) -1; D) 1,5; E) 2/3.

4. $x=0, x=a, y=0, y=b$ түзулерімен шектелген D облысында $\iint_D xydxdy$ интегралын есептеу керек

A) $2ab$; B) $\frac{a^2в^2}{4}$; C) $4ab$; D) $\frac{a^2в^2}{2}$; E) $ав$.

5. $x=0, x=1, y=0, y=2$ түзулерімен шектелген D облысында $\iint_D (x^2+2y)dxdy$ интегралын есептеу керек

A) $6\frac{2}{3}$; B) $1\frac{1}{3}$; C) $4\frac{2}{3}$; D) 4; E) 0.

6. $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2dy}{1+y^2}$ интегралын есептеу керек

A) $\frac{\pi}{12}$; B) $\frac{\pi}{6}$; C) 12π; D) 6π; E) π.

7. $\int_{-2}^{2} dx\int_{X^2}^{4} f(x,y)dy$ интегралының интегралдау ретін өзгерту керек.

A) $\int_{-4}^{4} dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$; B) $\int_0^4 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$; C) $\int_{X^2}^{4} dy\int_{-2}^{2} f(x,y)dy$;

D) $\int_0^4 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$; E) $\int_0^4 dx\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dy$.

8. $\int_2^4 dy\int_y^4 f(x,y)dx$ интегралының интегралдау ретін өзгерту керек.

A) $\int_y^4 dx\int_2^y f(x,y)dy$; B) $\int_2^4 dx\int_2^x f(x,y)dy$; C) $\int_2^y dx\int_y^4 f(x,y)dy$;

D) $\int\limits_{y}^{4} dx \int\limits_{2}^{y} f(x,y)dy$; E) $\int\limits_{2}^{x} dx \int\limits_{2}^{4} f(x,y)dy$.

9. Полярлық координаталардағы қос интеграл

A) $\iint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi dr$ B) $\iint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dxdy$ C) $\iint\limits_{D} f(x,y)rd\varphi dr$

D) $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ E) $\iint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi dr$.

10. $z = f(x;y)$ бетімен шектелген дене көлемі

A) $\iint\limits_{D} dxdy$; B) $\iint\limits_{D} xdxdy$; C) $\iint\limits_{D} yxdxdy$ D) $\iint\limits_{D} f(x;y)dxdy$; E) $\iint\limits_{D} y^2dxdy$

11. $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{a} r^2 dr$ екі еселі интегралды есептеу керек

A) $(2/3)\pi a^3$; B) $2\pi a^2$; C) $2\pi a$; D) $\frac{a^2}{2}$; E) a^2;

12. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ эллипсінің ауданын табыңыз:

A) πab; B) π; C) ab; D) a^2b^2; E) $\pi\ a^2b^2$.

13. Жазық пластинканың Ох осіне қарағандағы инерция моментін есептеу формуласы

A) $A = 2\pi\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$; B) $I = \iint\limits_{D} f(x;y)dxdy$; C) $I_x = \iint\limits_{D} y^2\gamma(x;y)dxdy$;

D) $A = \pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx$; E) $I_y = \iint\limits_{D} x^2\gamma(x;y)dxdy$.

14. $y = x^3; y = 27, x = 0$, сызықтарымен шектелген фигура ауданын табу керек.

A) 2; B) 16; C) 243/4; D) 5/43; E) 4.

15. Үш еселі интеграл үшін қате тұжырымды көрсет:

A) тұрақты көбейткішті интеграл таңбасының алдына шығаруға болады;
B) интегралдау облысын бөліктеуге болады;
C) функциялардың алгебралық қосындысының үш еселі интегралы олардың интегралдарының алгебралық қосындысына тең;
D) үштік интеграл тек дұрыс облыс бойынша есептеледі;

E) екі функцияның көбейтіндісінің үштік интегралы интегралдардың көбейтідісіне тең.

16. Есептеңіз: $\iiint\limits_{v} xyzdxdydz \quad 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3, 0 \le z \le 1$

A) 0,5; B) 1,5; C) 4,5; D) 2,5; E) 3,5.

17. Кеңістіктегі G денесінің көлемі неге тең?

A) $\int\int\int\limits_{G} xyzdxdydz$; B) $\int\int\int\limits_{G} xydxdydz$; C) $\int\int\int\limits_{G} zdxdydz$;

D) $\int\int\int\limits_{G} x(x-y)dxdydz$; E) $\int\int\int\limits_{G} dxdydz$.

18. Есептеңіз $\iiint\limits_{V} dxdydz$ мұндағы V – куб $0 \le x \le 2; \quad 0 \le y \le 2; \quad 0 \le z \le 2.$

A) 2 B)3 C) 4 D) 5 E) 8

19. Нүктенің тікбұрышты координаталарынан цилиндрлік координаталарға көшу формулалары

A) $x = r\cos\phi; y = r\sin\phi$ B) $x = r\sin\varphi; y = r\cos\varphi$ C) $x = r; y = \phi$

D) $x = \rho\cos\theta; y = \rho\sin\theta; z = z$ E) $x = r\sin\phi\cos\theta; y = r\sin\phi\sin\theta; z = r\cos\phi$

20. Үш еселі интегралда тік бұрышты координаталардан сфералық координаталарға көшу формуласы

A) $\iiint\limits_{V} f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x;y)}^{\varphi_2(x;y)} f(x;y;z)dz$

B) $\iiint\limits_{V} f(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_{G} dydz \int\limits_{a}^{b} f(x;y;z)dx$

C) $\iiint\limits_{V} f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dy \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} dx \int\limits_{\varphi_1(x;y)}^{\varphi_2(x;y)} f(x;y;z)dz$

D) $\iiint\limits_{V} f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_{V} f(r;\phi;\theta)r^2 \sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta$

E) $\iiint\limits_{V} f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_{V} f(\rho;\theta;z)\rho d\rho d\theta dz$

21. Есептеу керек $\int\limits_{0}^{1} xdx \int\limits_{0}^{3} ydy \int\limits_{0}^{2} zdz$

A)9/2; B) 16/3; C) 4/3; D) 5/6; E) 6/5.

22. Дененің OX осіне қарағандағы инерция моментін есептеу формуласы.

A) $M = \iiint_V f(x;y;z)dxdydz$; B) $V = \iiint_V dxdydz$; C) $I_z = \iiint_V (y^2 + x^2)\gamma(x;y;z)dxdydz$;

D) $I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\gamma(x;y;z)dxdydz$; E) $I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\gamma(x;y;z)dxdydz$.

23. Координаталары $B_x = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; B_y = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; B_z = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ болатын вектор векторлық өрістің ... деп аталады.

A) ағыны; B) дұрыс жауабы жоқ; C) циркуляциясы;
D) құйыны; E) дивергенциясы.

24. Қисық сызықты интеграл арқылы аудан есептеу формуласы қайсы?

A) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$; B) $S = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx$; C) $Ц = \int_L \vec{F}ds$;
D) $\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$; E) $\int d(f(x)) = f(x) + C$.

25. Жазық D облысы бойыша қос интегралды оның шекарасы C қисығы бойынша интегралмен байланыстыратын формула қайсы?

A) Ньютон-Лейбниц формуласы; B) Стокс формуласы;
C) Остроградский формуласы; D) Коши формуласы; E) Грин формуласы.

26. $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ векторлық өрісінің циркуляциясын есептеу формуласын табу керек.

A) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$; B) $\int udv = uv - \int vdu$;

C) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$; D) $Ц = \int_L \vec{F}ds$; E) $\int d(f(x)) = f(x) + C$.

27. Мына өрнектердің ішінен $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ векторлық өрісінің ағынын есептеу формуласын табу керек.

A) $A = \int_a^b F(s)ds$; B) $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$; C) $Q = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)}dt$;

D) $P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$; E) $\Pi = \iint_\sigma \vec{F}\vec{n}\, d\sigma$.

28. $\oint_C X(x;y)dx + Y(x;y)dy = 0$ теңдігі орындалуы үшін мына шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті:

A) $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$; B) $\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x}$; C) $\frac{\partial Y}{\partial x} \neq \frac{\partial X}{\partial y}$; D) $\frac{\partial Y}{\partial x} > \frac{\partial X}{\partial y}$; E) $\frac{\partial Y}{\partial x} < \frac{\partial X}{\partial y}$.

29. Қисық сызықты интегралмен массаны есептеу формуласын табу керек.

A) $A=\int_a^b F(s)ds$; B) $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$; C) $S=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}dt$;

D) $M=\int_L f(x;y)ds$; E) $A=\int_L Xdx+Ydy$.

30. Есептеу керек $\int_{OA} ydx+xdy$, мұндағы $(OA)-y=x^3$ параболасының $O(0;0), A(1;1)$ нүктелерін қосатын доғасы.

A) 1; B) 0; C) ∞; D) e; E) 3.

31. Грин формуласын табыңыз:

A) $S=\iint_D f(x;y)dxdy$; B) $\lim_{n\to\infty} S_n=S$;

C) $\int_L X(x;y)dx+Y(x;y)dy=\iint_D (\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})dxdy$;

D)

$$\int_\lambda Xdx+Ydy+Zdz=\iint_\sigma [\ (\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z})\cos(n;x)+(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x})\cos(n;y)+(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})\cos(n;z)\ ]d\sigma;$$

E) $\iiint_V (\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z})dxdydz=\iint_\sigma [X\cos(n;x)+Y\cos(n;y)+Z\cos(n;z)]d\sigma$.

32. Доғаның ұзындығы бойынша қисық сызықты интегралдың анықтамасы.

A) $\int_l f(x;y)ds=\lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i;y_i)\sqrt{1+\varphi'^2(\zeta_i)}\Delta x_i$;

B) $\int_C X(x;y)dx+Y(x;y)dy=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n (X(x_i;y_i)\Delta x_i+Y(x_i;y_i)\Delta y_i)$; C) $S=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx$;

D) $\int_L X(x;y)dx+Y(x;y)dy=\iint_D (\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})dxdy$; E) $S=\iint_D f(x;y)dxdy$.

33. Координталар бойынша қисық сызықты интегралдың анықтамасы.

A) $\int_l f(x;y)ds=\lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i;y_i)\sqrt{1+\varphi'^2(\zeta_i)}\Delta x_i$; B) $S=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx$

C) $\int_C X(x;y)dx+Y(x;y)dy=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n (X(x_i;y_i)\Delta x_i+Y(x_i;y_i)\Delta y_i)$;

D) $\int_L X(x;y)dx+Y(x;y)dy=\iint_D (\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})dxdy$. E) $S=\iint_D f(x;y)dxdy$

34. $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$ векторлық өрісінің дивергенциясын табыңыз:

A) 0 ; B) $\frac{\partial X}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial Y}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial Z}{\partial z}\vec{k}$;C) $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$;

D) $Xdx+Ydy+Zdz$; E) $\frac{\partial X}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial Y}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial Z}{\partial z}\cos\gamma$.

35. Векторлық түрдегі Остроградский формуласын табыңыз:

A) $gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$; B) $\int_{\lambda} \vec{F}d\vec{s} = \iint_{\sigma} \vec{n}\ rot\vec{F}d\sigma$; C) $\iiint_{V} div\vec{F}dv = \iint_{\sigma} \vec{F}\vec{n}d\sigma$;

D) $S = \iint_{D} f(x;y)dxdy$; E) $\int_{L} X(x;y)dx + Y(x;y)dy = \iint_{D} (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})dxdy$.

36. $\vec{F} = (6x + 7yz)\vec{i} + (6y + 7xz)\vec{j} + (6z + 7xy)\vec{k}$ векторлық өрісінің роторын табыңыз:

A) $7y$; B) $7x$; C) 0; D) -14; E) 21.

37. $\vec{F} = (9x + 5yz)\vec{i} + (9y + 5xz)\vec{j} + (9z + 5xy)\vec{k}$ векторлық өрісінің дивергенциясынн табыңыз::

A) 21 ; B) 27; C) 8; D) 32; E) 0.

38. Есептеу керек $\int_{OA} ydx + xdy$, мұндағы $(OA) - y = x^2$ параболасының $O(0;0), A(1;1)$ нүктелерін қосатын доғасы.

A) 1; B) 0; C) ∞; D) -1; E) 3.

39. Фурье коэффициенттерін табыңыз.

A) $\ell im_{x \to a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{f(a)}{\phi(a)}$; B) $\ell im_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$; D) $\ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$;

E) $a_0 = \frac{\bar{1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx;\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$.

40. Коэффициенттері мына формулалармен

$$a_0 = \frac{\bar{1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx;\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

табылатын қатар қалай аталады?

A) сан қатары; B) дәрежелік қатар; C) Лоран қатары;
D) Фурье қатары; E) Тейлор қатары.

Жауаптары

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	E	B	C	A	E	B	E	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	A	C	C	E	C	E	E	D	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	D	D	B	E	D	E	A	D	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	A	C	B	C	C	B	A	E	D

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Берман Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа. – Москва: Наука, 1985.-384 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М., Наука, 1980.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть1,2. - М., Высшая школа, 1998.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнении по математическому анализу. - М., Наука, 1985.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальные и интегральные исчисления. Часть I, II. - 1972.
6. Сборник индивидуальных задании по высшей математике. Под ред. Рябушка А. П. - Минск, 2001.
7. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – Москва: Наука, 1996.-736 с.

МАЗМҰНЫ

Жоспар 2011 ж., реті.

Мұрат Шәпенұлы Тілепиев,
Базаргүл Табылғанқызы Құлжағарова

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУДАН
ЕСЕПТЕР ЖИНАҒЫ
4-бөлім

Оқу құралы

Редакторы

Басуға қол қойылды Пішіні 60 x 84 1/16
Тираж _500_ дана № 1 типографиялық қағаз
Көлемі _____ оқу-баспа т. Тапсырыс _____
Бағасы _____ тенге

«Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті» РМҚК, Редакция-баспа бөлімі
Ақтау, 27 шағын аудан