УДК 517.958

ПОСТРОЕНИЕ КЛАССА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

М.Ш. Тилепиев, Э.У. Уразмагамбетова, М.Р. Кулиманова

Берілген жұмыста қос фазалық сұйықтың қуыс ортадағы сүзгіленуін сипаттайтын есептің дәл шешімін анықтайтын класы қарастырылған.

Есептің шешімі екі өлшемді жағдайда зерттеліп, бір бос (белгісіз) шекарасы болғандағы дәл шешімін табудың алгоритмі келтірілген. Алынған нәтижелер теоремалар арқылы тұжырымдалады.

In work the class of exact decisions of a problem of a biphase filtration of a liquid in the porous environment is considered. In a two-dimentional case the algorithm of construction of the decision of the considered problem containing free (unknown) border is resulted. The received results are formulated as theorems.

Работа посвящена построению класса точных решений задачи двухфазной фильтрации жидкости в пористой среде. При построении математической модели решающим моментом является гипотеза Х.А.Рахматуллина: характеризующее двумерное изотермическое движение двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей с общим давлением и без учета фазовых переходов. Тогда уравнения неразрывности и импульса для каждой из фаз (i=1,2) имеют вид[1]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div(\rho_i \cdot \vec{v}_i) = 0, \\ \rho_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla)\vec{v}_i \right) = \nabla(s_i \cdot \sigma_i) + \vec{F}_i.\end{gathered} \tag{1}$$

В системе уравнений (1) $\vec{v}_i$ -скорость соответствующей фазы; ρ_i - приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией s_i соотношением $\rho_i = s_i \cdot \rho_i^0$. Условие $s_1 + s_2 = 1$ ($s = s_1$ - водонасыщенность, s_2 - нефтенасыщенность) является следствием определения ρ_i. Для тензора напряжений фазы σ_i принимается аналог гипотезы Стокса: $\sigma_i = -p + \mu_i \cdot div\vec{v}_i$, где p - общее давление для фаз, μ_i – коэффициент динамической вязкости фазы. Функции $\vec{F}_i$ - определяют силы и имеют вид: $\vec{F}_i = p \cdot \nabla s_i + \vec{\varphi}_i + \rho_i \cdot \vec{g}$, $\vec{\varphi}_1 = K(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$, $\vec{\varphi}_2 = -\vec{\varphi}_1$, K - коэффициент взаимодействия фаз (заданная функция концентраций [1]), $\vec{g} = \vec{g}(x, y, t)$ - задано. Условие $\rho_i^0 = const > 0$ - приводит к замкнутой системе уравнений относительно искомых функций $s_i(x, y, t)$, $\vec{v}_i(x, y, t)$ и $p(x, y, t)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial s_i}{\partial t} + div(s_i \cdot \vec{v}_i) = 0, \quad i = 1{,}2, \\
&\rho_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla)\vec{v}_i \right) - \nabla(\mu_i s_i \cdot div\vec{v}_i) = -\nabla(s_i \cdot p) + \vec{\varphi}_i + \rho_i \vec{g}, \\
&s_1 + s_2 = 1, \qquad \vec{\varphi}_1 = K(\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \quad \vec{\varphi}_2 = -\vec{\varphi}_1.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Выражая производные от скорости $\vec{v}_i$ из первого уравнения (2) и подставляя во второе уравнение, получим:

$$
\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla)\vec{R}_i = -\nabla p + \frac{\vec{\varphi}_i}{s_i} + \rho_i^0 \cdot \vec{g}, \quad \vec{R}_i \equiv \rho_i^0 \cdot \vec{v}_i + \frac{\mu_i}{s_i} \cdot \nabla s_i, \quad i = 1{,}2. \tag{3}
$$

Всюду ниже рассматривается течение вытесняющей фазы, а именно определяется топологическая структура водной фазы. Тогда в (3) вязкость вытесняющей фазы $\mu = 0$ и $i = 1$. Кроме того, в стационарном случае уравнение (3) представляет уравнение Эйлера. Для замыкания модели добавим уравнение относительно насыщенности.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское установившееся течение однородной жидкости в пористой среде в области Ω, имеющий вид плоского канала $A_1A_2A_3A_4$ с одной криволинейной стенкой A_1A_4. Для определенности будем считать, что жидкость втекает в Ω через участок A_1A_2 и вытекает через A_3A_4. Боковые стенки A_2A_3 и A_1A_4 считаем непроницаемыми для жидкости. Пусть a - длина канала, b – ширина входа канала, т.е. длина отрезка A_1A_2; $y = f(x),\ x \in [0, a]$ - уравнение границы A_1A_4. Такое движение жидкости в пористой среде соответствует вытесняющему агенту от нагнетательной скважины до добывающей скважине [2]. При указанных выше предположениях уравнение (3) в стационарном случае приводится следующему виду:

$$
div\vec{v} \equiv div\left[s \cdot \vec{v}_{и} + (1 - s) \cdot \vec{v}_{н}\right] = 0 \tag{4}
$$

где $\vec{u} \equiv (u_1, u_2) = s \cdot \vec{v}$ - приведенная скорость. Тогда, исходя из работы [2] с помощью замены $\psi = \dfrac{u_2}{u_1},\ \ r = \ln u_1,\ \ (u_1 > 0)$ преобразуем (3) и (4) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\psi + 2(r_x \cdot \psi_x + r_y \cdot \psi_y) = \omega, \quad r_x + r_y \cdot \psi + \psi_y = 0, \\
&v_1 \cdot s_x + v_2 \cdot s_y + s \cdot (v_{1x} + v_{2y}) = 0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

В силу условий непроницаемости функция ψ на A_2A_3 и A_1A_4, а функция s на A_1A_2 удовлетворяют условиям:

$$\psi\big|_{A_2A_3} = 0, \quad \psi\big|_{A_1A_4} = f', \; s\big|_{A_1A_2} = s^0(y). \tag{6}$$

Таким образом, получена задача для уравнения типа Эйлера. На A_1A_2 будем считать известным значение r, т.к. на нагнетательной скважине задается расход. Для определения единственного решения системы (5) необходимо еще задать значения ψ на A_1A_2 и A_3A_4. Указанные значения ψ не задается, а определяется из условия существования точного решения системы (5). С учетом краевых условий (6) можно положить $\psi = \Phi(y/f)f'$, где Φ - некоторая функция, определенная на промежутке [0, 1], удовлетворяющая условиям $\Phi(0) = 0,\; \Phi(1) = 1$. Всюду ниже считается, что Φ - является линейной функцией вида: $\Phi = \frac{y}{f}$. Таким образом, задача сведена к решений уравнений (4), причем в области течения фильтрационного канала выполняется условие:

$$\psi = \frac{y}{f} \cdot f' \equiv y \cdot (\ln f)'. \tag{7}$$

Переходя параметрической форме определения отрезка A_1A_2, имеем:
x=0, y=t, где $t \in [0, b]$ - параметр. Подставляя (7) во второе уравнение (5) находим, что линии $y = \frac{t}{b} f$, $t \in [0, b]$ - являются его характеристиками, а решение этого уравнения имеет вид:

$$r(t) = \ln \frac{b}{f} + r_0(t), \qquad t = b \cdot \frac{y}{f}, \tag{8}$$

где $r_0(t)$ - заданное значение $r(t)$ на A_1A_2. Подставляя далее (7) и (8) в первое уравнение (5), получаем для определения функций f и $r_0(t)$ уравнение:

$$y\left[(\ln f)''' - 2(\ln f)'(\ln f)''\right] = 2r_0'\left[\frac{by^2 f'}{f^2}(\ln f)'' - \frac{b}{f}(\ln f)'\right] \tag{9}$$

Уравнение (9) будет рассматриваться в двух случаях: $r_0'(t) \neq 0$ и когда $r_0'(t) = 0$, соответственно. В первом случае $r_0'(0) = 0$. Последнее условие предполагает выполнение y=0 в уравнений (9). При $y \neq 0$ уравнение (9) можно рассматривать как систему двух уравнений

$$\begin{aligned} &(\ln f)^{///} - 2(\ln f)^{/}(\ln f)^{//} = \mu(x) \\ &2r_0^{/}\left[\frac{by^2 f'}{f^2}(\ln f)^{//} - \frac{b}{f}(\ln f)^{/}\right] = \mu(x) \end{aligned} \qquad (10)$$

где $\mu(x)$ - некоторая функция. Второе уравнение в (10) параметрической форме можно представить:

$$2r_0^{/}\left[(f \cdot f'' - f'^2) \cdot t - \frac{b^2}{t}\right] \cdot \frac{f'}{f^3} = \mu(x).$$

Это уравнение может выполняться только в случае, если

$$\mu = C_1 \cdot \frac{f'}{f^3} \text{ и } f \cdot f'' - f'^2 = C_2, \qquad (11)$$

где C_1, C_2 - некоторые постоянные. При выполнении этих условий из первого уравнения (10) и (11) легко получаем соотношение, $C_1 = -4C_2$, при котором выполняется первое уравнение из (10). Далее, интегрируя второе уравнение из (10), записанное в параметрической форме находим, что

$$r_0(t) = \ln \frac{bC_3}{b^2 - C_2 t^2}. \qquad (12)$$

Здесь $C_3 > 0$ и $C_2 (-\infty < C_2 < 1)$ - произвольные постоянные. Таким образом, в первом случае точные решения системы (5) существуют, если только f удовлетворяет (11), а $r_0(t)$ имеет вид (12). Уравнение (11) легко преобразовать более простому виду. А именно, сначала дифференцированием (11) получаем: $f \cdot f''' - f' \cdot f'' = 0$, откуда интегрированием приходим к уравнению:

$$f'' = C \cdot f, \qquad (13)$$

где C – произвольная постоянная. Во втором случае, интегрируя (9), находим:

$$(\ln f)'' - \left[(\ln f)'\right]^2 = C_4.$$

Полагая $f = \dfrac{1}{g}$, приходим к аналогичному уравнению:

$$g'' = C \cdot g, \ (-\infty < C < \infty) \qquad (14)$$

Полученные уравнения (13) и (14) хорошо изучены. Исходя из уравнений (13) и (14) получим точные решения системы (5) в первом случае, удовлетворяющих условию (7):

$$\psi = y(\ln f)', \ r = \ln \frac{C_3 f}{f^2 - C_2 y^2}. \qquad (15)$$

Во втором случае точные решения имеют вид:

$$\psi = y(\ln f)', \qquad r = \ln \frac{C_3}{f} \quad (\mathrm{C}_3 = const > 0) \qquad (16)$$

Таким образом, получены следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть функция f является решением уравнения (13), где С – произвольная постоянная, причем f >0 на отрезке $[0,a]$, $f(0) = b$, $f \cdot f'' - f'^2 = C_2 < 1$. Тогда функции (15) при любой постоянной $\mathrm{C}_3 = const > 0$ являются решением системы уравнений (5).

Теорема 2. Пусть функция $g = \dfrac{1}{f}$ является решением уравнения (14), где С – произвольная постоянная, причем f >0 на отрезке $[0,a]$, $f(0) = b$. Тогда функции (16) при любой постоянной $\mathrm{C}_3 = const > 0$ являются решением системы уравнений (5).

Используя эти теоремы нетрудно найти решения исходной системы (4). В первом случае из (15) легко получаем:

$$v_1 = \frac{C_3 \cdot f}{f^2 - C_2 y^2}, \quad v_2 = \frac{C_3 \cdot y \cdot f'}{f^2 - C_2 y^2}, \quad p = p_0 - \frac{C_3^2 \cdot \rho}{2 \cdot (f^2 - C_2 y^2)}, \qquad (17)$$

где p_0 - некоторая постоянная. Для определения функций водонасыщенности воспользуемся третьим уравнением в (5) и в результате получим следующее представление:

$$s(x,y) = s^0(y) \cdot \exp\left\{ -\int_0^x \frac{div \vec{v}}{v_1} d\xi \right\} \qquad (18)$$

Теорема 3. При выполнении условий теорем 1 и 2 для решения исходной системы имеют место представления (17) и (18).

Третье соотношение из (2) позволяет определить функций нефтенасыщенности s_2. Возникает вопрос, каким образом уравнения (4) определяют искомые функций в нестационарном случае? В таком случае сначала надо провести дискретизацию по времени в системе уравнений (2), затем по предложенному методу в каждом временном слое определяются искомые функции: s, $\vec{v}_i$ -скорость соответствующей фазы и давление p. Существует второй подход, а именно, применение метода слабой аппроксимации и в каждом временном случае решать одномерные по пространственным переменным задачи относительно искомых функций. Тогда рассматриваемая задача расщепляется на одномерную и двумерную задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Выше считалась, что функция Ф - является линейной функцией. Если функция Ф - является неизвестной функцией, то для определения единственного решения системы (5) необходимо еще задать значения ψ на A_1A_2 и A_3A_4 . Существует другой метод, а именно, применение вариационных методов для определения функций Φ , удовлетворяющая условиям $\Phi(0) = 0, \ \ \Phi(1) = 1$.

Литература:

1. Кабылхамитов Г.Т., Мухамбетжанов С.Т. Класс точных решений двумерного движения жидкости в пористой среде//Изв. НАН РК.сер. физ.-мат. 2004. №3.с.33-38.
2. Алексеев Г.В., Мокин Ю.А. Класс точных решений двумерных уравнений гидродинамики и магнитной гидродинамики идеальной жидкости. –В сб.: Динамика сплошной среды. –Новосибирск, 1972, вып. 12, с.5-13.
3. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 196 с.
4. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
5. Джаикбаев А.М., Исаев С.А. О параболической аппроксимации диффузионной модели неоднородной жидкости // Моделирование в механике. – Новосибирск, 1990. – Т. 4(21), № 6. – С. 27-40