

## АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРАВЛЯЮЩЕГО МЕХАНИЗМА IV КЛАССА

Саурбаев Б.С.

*Бұл жұмыста IV класы кеңістіктік бағыттаушы механизмнің анализі мен синтезі қарастырылған.*

*In work the results of the analysis and synthesis of the spatial directing mechanism IV of a class are given.*

Рассмотрим алгоритмы структурно-кинематического синтеза пространственного направляющего механизма IV класса (рис.1), приближенно воспроизводящую винтовую линию

$$\left. \begin{aligned} X_p &= -0,15 \sin t \\ Y_p &= 0,4 + \frac{1}{2\pi} t \\ Z_p &= 1 - 0,15t \end{aligned} \right\} ; \quad (1)$$

Анализ и синтез пространственного направляющего механизма IV класса вида  $BC_{II}CC_{II}BCB$  проводится в несколько этапов:

1. За исходный кинематический цепь (ИКЦ) выбираем трехподвижную трехзвенную пространственную кинематическую цепь  $DEP$ , реализующую заданные законы движения (1).

2. Проводим анализ положений звеньев 1 и 2 трехзвенной направляющей ИКЦ по заданным положениям выходной точки  $P$ . Для проведения анализа положений данной трехзвенной пространственной направляющей ИКЦ используем алгоритмы анализа положений пространственной двухповодковой групп вида  $BC_{II}C$ . Результаты анализа положений трехзвенной направляющей ИКЦ приведены в таблице 1.3. Звено 2 трехзвенной ИКЦ соединяем со стойкой при помощи диады  $ABC$ , где координаты  $X_C, Y_C, Z_C$  радиус-вектора точки  $C$  выбраны конструктивно, а радиус-вектор точки  $C$  сферического шарнира определяются выражением

$$[\vec{R}_C] = [\vec{R}_{E_i}] + [T_{2i}] \cdot [\vec{r}_C]; \quad (2)$$

4. Проводим анализ положений звеньев полученного пространственного пятизвенника  $ABCDE$  по заданным положениям выходной точки  $P$ . Результаты анализа положений звеньев пространственного пятизвенника приведены в таблице 2.

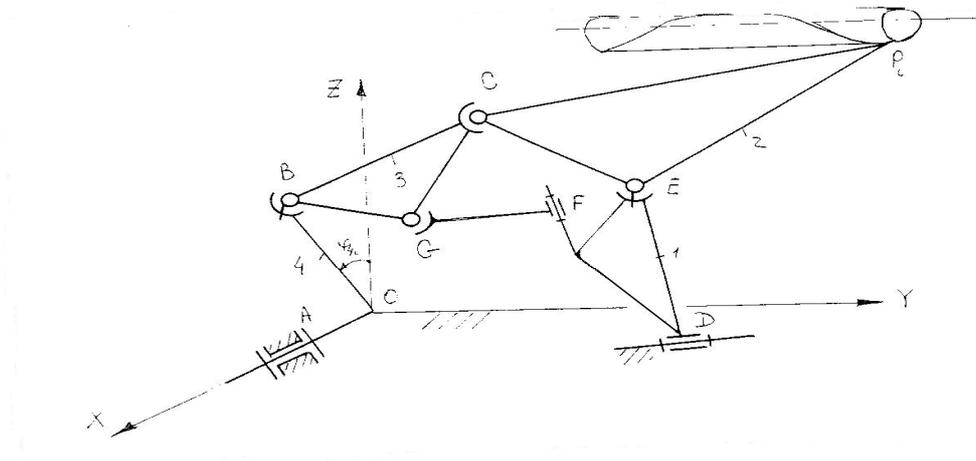


Рис. 1 Пространственный направляющий механизм IV класса вида  $VSC_1CSC_1VSC$

Таблица 1

$I$	$X_{P_i}$	$Y_{P_i}$	$Z_{P_i}$	$Y_{E_i}$	$Z_{E_i}$
1	0.0	0.4000	0.8500	-0.4752	0.3663
2	-0.4861	0.4525	0.3364	-0.4394	0.4086
3	-0.9197	0.5051	0.8815	-0.3937	0.4528
4	-0.1254	0.5576	0.9177	-0.3397	0.4946
5	-0.1453	0.6102	0.9628	-0.2799	0.5307
6	-0.1495	0.6627	1.1012	-0.2165	0.5596
7	-0.1376	0.7153	1.1060	-0.1516	0.5805
8	-0.1109	0.7678	1.1101	-0.0867	0.5937
9	-0.0721	0.8204	1.1132	-0.0233	0.5995
10	-0.0256	0.8729	1.1148	0.0374	0.5904

Таблица 2

$I$	$X_{C_i}$	$Y_{C_i}$	$Z_{C_i}$	$X_{B_i}$	$Y_{B_i}$	$Z_{B_i}$
1	0.0	0.4000	0.8500	0.0	0.4000	0.8500
2	-0.4861	0.4525	0.3364	-0.4861	0.4525	0.3364
3	-0.9197	0.5051	0.8815	-0.9197	0.5051	0.8815
4	-0.1254	0.5576	0.9177	-0.1254	0.5576	0.9177
5	-0.1453	0.6102	0.9628	-0.1453	0.6102	0.9628
6	-0.1495	0.6627	1.1012	-0.1495	0.6627	1.1012
7	-0.1376	0.7153	1.1060	-0.1376	0.7153	1.1060
8	-0.1109	0.7678	1.1101	-0.1109	0.7678	1.1101
9	-0.0721	0.8204	1.1132	-0.0721	0.8204	1.1132
10	-0.0256	0.8729	1.1148	-0.0256	0.8729	1.1148

Таблица 3

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi_{1i}$	0.6568	0.7490	0.8540	0.9689	1.0854	1.2016	1.3153	1.4269	1.5319	1.5082
$\varphi_{4i}$	0.1633	0.8862	0.2277	0.3473	0.4147	0.4738	0.5198	0.5561	0.5842	0.6042

5. Чтобы получить из данной кинематической цепи одноподвижный пространственный направляющий механизм IV класса соединяем несмежные звенья 1 и 3 бинарным звеном  $GF$  вида **СВ**.

Для синтеза бинарного звена 5 вида **СВ** обращаемся к задаче о координации движений двух подвижных пространственных систем координат при помощи бинарного звена вида **СВ**.

Синтезируемое бинарное звено  $GF$  вида **СВ** реализует связь, ограничивающую движение точки  $G$  по окружности радиусом  $l_{OF}$  с центром в точке  $F$  при движении системы координат  $Bx_3y_3z_3$  относительно системы  $Dx_1y_1z_1$ .

Искомыми параметрами синтеза данного бинарного звена являются координаты  $x_G, y_G, z_G$  точки  $G$ -центра сферического шарнира, координаты  $x_F, y_F, z_F$  центра  $F$  окружности описываемой точкой  $G$ ,  $a, b, c$  - коэффициенты уравнений приближающей плоскостей  $\tau$ , направляющие косинусы  $q_x, q_y, q_z$  оси вращательной пары, определяющие направление последней, и длина  $l_{GF}$  бинарного звена.

Приближающая окружность определяется как линия пересечения сферы и плоскости. Поэтому в качестве минимизируемых функций используем взвешенные разности:

$$\Delta q_i = (\vec{r}_{G_i} - \vec{r}_F)^2 - l_{GF}^2, \quad (1)$$

$$\Delta q_i = ax_{G_i} + by_{G_i} + cz_{G_i} - 1. \quad (2)$$

где  $a, b, c$ - коэффициенты уравнения приближающей плоскости, а радиус-вектор  $\vec{r}_{G_i}$  точки  $G$  в системе координат  $Dx_1y_1z_1$  определяются выражениями

$$\vec{r}_{G_i} = [T_{1i}]^T \cdot [\vec{R}_{G_i} - \vec{R}_D], \quad (3)$$

$$\vec{R}_{G_i} = \vec{R}_{B_i} + [T_{3i}] \cdot \vec{r}_G; \quad (4)$$

Здесь  $\vec{r}_{G_i}$  и  $\vec{R}_{G_i}$  - радиус-векторы точки  $G$  соответственно в системах координат  $O_1x_1y_1z_1$  и  $OXYZ$ ;  $[T_{1i}]$  и  $[T_{3i}]$  - матрицы направляющих косинусов координатных систем  $Dx_1y_1z_1$  и  $Bx_3y_3z_3$ .

Подставляя выражения (3) и (4) в уравнения (1) и (2), получим полиномы

$$\Delta q_i = 2 \sum_{j=1}^n (p_j f_{ji} - F_i), \quad (j = 1,16; i = 1,N), \quad (5)$$

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta q_i^2; \quad (6)$$

который могут быть представлены в виде линейных форм

$$\Delta q_i^{(1)} = \sum_{k=1}^4 (p_k \cdot g_{ki} - g'_i), \quad (7)$$

$$\Delta q_i^{(2)} = \sum_{k=4}^4 (p_k \cdot g_{ki} - g_i'), \quad (8)$$

$$\Delta q_i^{(1)} = \sum_{j=1}^3 p_j \varphi_{ji} + \varphi_i', \quad (9)$$

$$\Delta q_i^{(2)} = \sum_{j=4}^6 p_j \varphi_{ji} + \varphi_i'', \quad (10)$$

или в виде,

$$\Delta q_i^{(1)} = \vec{G}_{1i}^{(1)} \cdot \vec{Q} - g_i', \quad (11)$$

$$\Delta q_i^{(2)} = \vec{G}_{1i}^{(2)} \cdot \vec{P} - g_i'', \quad (12)$$

$$\Delta q_i^{(1)} = \vec{G}_{2i}^{(1)} \cdot \vec{Q} - \varphi_i', \quad (13)$$

$$\Delta q_i^{(2)} = \vec{G}_{2i}^{(2)} \cdot \vec{T} - \varphi_i'', \quad (14)$$

для которых

$$p_1 = x_G, \quad p_2 = y_G, \quad p_3 = z_G, \quad p_5 = x_{F_1}, \quad p_6 = y_{F_1}, \quad p_7 = z_{F_1},$$

$$p_4 = \frac{1}{2} (x_G^2 + y_G^2 + z_G^2 + x_{F_1}^2 + y_{F_1}^2 + z_{F_1}^2 - l_{F_1G}^2), \quad p_8 = a, \quad p_9 = b, \quad p_{10} = c,$$

$$\vec{G}_{1i}^{(1)} = [g_{1i}, g_{2i}, g_{3i}, g_{4i}]^T, \quad \vec{G}_{1i}^{(2)} = [g_{5i}, g_{6i}, g_{7i}, 1]^T,$$

$$\vec{G}_{2i}^{(1)} = [\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \varphi_{3i}]^T, \quad \vec{G}_{2i}^{(2)} = [\varphi_{4i}, \varphi_{5i}, \varphi_{6i}]^T,$$

$$\vec{Q} = [p_1, p_2, p_3, p_4]^T, \quad \vec{P} = [p_5, p_6, p_7]^T, \quad \vec{T} = [p_8, p_9, p_{10}]^T, \quad \vec{L} = [\vec{P}, \vec{T}]^T,$$

а  $g_{ji}$ ,  $g_i^{(1)}$ ,  $g_i^{(2)}$  и  $\varphi_{ki}$ ,  $\varphi_i^{(1)}$ ,  $\varphi_i^{(2)}$  ( $j=1,7; k=1,6; i=1,N$ ) - известные функции.

Рассматривая линейные формы (7)-(10) или (11)-(14), характеризующие отклонения от сферы и плоскости, представим их в виде сумм

$$S^{(1)} = \sum_{i=1}^N (\Delta q_{1i}^{(2)^2} + \Delta q_{2i}^{(2)^2}), \quad (15)$$

$$S^{(2)} = \sum_{i=1}^N (\Delta q_{1i}^{(1)^2} + \Delta q_{2i}^{(1)^2}). \quad (16)$$

Необходимые условия минимума суммы (16) относительно вектора  $\vec{Q}$  приводят к аналогичной системе линейных уравнений вида

$$[H] \cdot \vec{Q} = \vec{h}, \quad (17)$$

где

$$[H] = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} g_{1i}^2 & g_{1i} \cdot g_{2i} & g_{1i} \cdot g_{3i} & g_{1i} \\ g_{1i} \cdot g_{2i} & g_{2i}^2 & g_{2i} \cdot g_{3i} & g_{2i} \\ g_{1i} \cdot g_{3i} & g_{2i} \cdot g_{3i} & g_{3i}^2 & g_{3i} \\ g_{1i} & g_{2i} & g_{3i} & N \end{bmatrix}, \quad \vec{h} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} g_{1i} \cdot g_i' \\ g_{2i} \cdot g_i' \\ g_{3i} \cdot g_i' \\ g_i' \end{bmatrix};$$

По найденным значениям вектора  $\vec{Q}$  определяются искомые параметры синтеза пространственного бинарного звена

$$x_G = p_1, \quad y_G = p_2, \quad z_G = p_3, \quad l_{F_1G} = (x_G^2 + y_G^2 + z_G^2 + x_{F_1}^2 + y_{F_1}^2 + z_{F_1}^2 - 2p_4)^{\frac{1}{2}}.$$

Вместо минимизируемой функции (15) принимаем новую функцию в виде

$$F(\vec{P}) = \min S(\vec{Q}, \vec{L}), \quad (18)$$

или

$$F(\vec{L}) = S(\vec{Q}^o, \vec{L}) = S^o(\vec{L})$$

где вектор  $\vec{Q}^o$  определяется из выражений

$$\frac{dF}{d\vec{P}} = \frac{dS^o}{d\vec{P}} = 2 \sum_{i=1}^N \Delta q_i^o \frac{\partial \Delta q_i^o}{\partial \vec{P}}; \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta q_i^o &= \Delta q_i(\vec{Q}^o, \vec{P}), \\ \frac{\partial \Delta q_i^o}{\partial \vec{P}} &= \left[ \frac{\partial \Delta q_i^o}{\partial p_5}, \frac{\partial \Delta q_i^o}{\partial p_6}, \frac{\partial \Delta q_i^o}{\partial p_7} \right] = \vec{G}_i^{(2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

уравнения (19) и является решением (17) для заданного значения  $\vec{L}$ , при  $\det|H| \neq 0$ .

Функцию  $F(\vec{L})$  можно минимизировать градиентными методами первого или второго порядка. Для этого необходимо определить ее производные по вектору  $\vec{L}$ .

Первая и вторая производная от функции  $F(\vec{L})$  по вектору  $\vec{L}$  определяется по формулам

$$\frac{dF}{d\vec{L}} = \frac{\partial S^o}{\partial \vec{L}} = 2 \sum_{i=1}^N \Delta q_i^o \frac{\partial \Delta q_i^o}{\partial \vec{L}}; \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta q_i^o &= \Delta q_i(\vec{Q}^o, \vec{L}), \\ \frac{\partial \Delta q_i^o}{\partial \vec{L}} &= \left[ \frac{\partial \Delta q_i^o}{\partial p_5}, \frac{\partial \Delta q_i^o}{\partial p_6}, \frac{\partial \Delta q_i^o}{\partial p_7} \right] = \vec{G}_i^{(2)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Вычисленные неизвестные коэффициенты градиентными методами первого или второго порядка определяют следующие параметры синтеза

$$x_{F_1} = p_5, \quad y_{F_1} = p_5, \quad z_{F_1} = p_7, \quad a = p_8, \quad b = p_9, \quad c = p_{10}.$$

Направляющие косинусы  $q_x, q_y, q_z$  оси вращения кинематической пары  $F$  определяются по формуле

$$(Q_x, Q_y, Q_z) = (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (a, b, c). \quad (23)$$

Основание перпендикуляра, опущенного из центра  $F_1$  найденной сферы к плоскости, определяет координаты  $x_F, y_F, z_F$  центра  $F$  приближающей окружности из выражений

$$\left. \begin{aligned} x_A &= x_{A_1} + Q_x d \\ y_A &= y_{A_1} + Q_y d \\ z_A &= z_{A_1} + Q_z d \end{aligned} \right\}, \quad (24)$$

где

$$d = \frac{ax_{A_1} + by_{A_1} + cz_{A_1} - 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} ;$$

Длина  $l_{AB}$  бинарного звена, т.е. радиус окружности вычисляется по формуле

$$l_{AB} = r = \left( l_{A_1B}^2 - d^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

На основе приведенного алгоритма получены следующие значения параметров синтеза:

$$\begin{aligned} x_G &= -0.8498, & y_G &= -0.2065, & z_G &= 0.9540, \\ x_F &= 3.2490, & y_F &= -0.2856, & z_F &= 3.3370, \\ x_{F_1} &= 4.4806, & y_{F_1} &= 0.6281, & z_{F_1} &= -0.4536, \\ a &= 0.0529, & b &= 0.0148, & c &= -0.1630 \\ l_{F_1G} &= 4.113, & l_{FG} &= 3.644 \end{aligned}$$

Значения градиентов и функций:

$$G(1) = -0.1365-12, \quad G(2) = 0.5348-12, \quad F = 0.2597-26$$

Для оценки достоверности полученных значений параметров синтеза проводим анализ положений синтезированного направляющего механизма IV класса и вычисляем отклонения полученных значений переменных параметров выходной точки  $P$  от их заданных значений.

Анализ положений сформированного пространственного направляющего механизма IV класса проводится методом условных обобщенных координат, согласно которому удаляем бинарное звено 2. При этом исследуемый механизм приобретает одну дополнительную степень свободы. Если выбрать звено 1 за условное ведущее, а одну переменную параметру  $\varphi_1$  вращательной кинематической пары  $D$  - за условный обобщенный координат, то рассматриваемый пространственный механизм IV класса преобразуется в пространственный механизм II класса со структурной формулой

$$I(4) \rightarrow II(3,5) \leftarrow I^*(1) \quad (26)$$

В процессе изменения величин обобщенных координат  $\varphi_1$  при заданном значений обобщенной координаты  $\varphi_1$  изменяется значения параметра  $\vec{a}_{CE}$  элементы кинематических пар бинарного звена 2, принадлежащих звеньям 1 и 3. Тогда целевая функция положения имеет вид

$$\Delta_1 = \Delta_1(\vec{a}, q_1^*) = P_1 - \tilde{P}_1 \quad (27)$$

где  $\vec{a}$  - вектор метрических параметров механизма, а  $q_1^* = \varphi_1, P_1 = a_{CE}, \tilde{P}_1 = \tilde{a}_{CE}$ .

Условные обобщенные координаты определяются минимизацией функции (27), а остальные переменные параметры находятся аналитическим решением задачи о положениях пространственной диады II (3,5) вида  $ВСС_{II}$  и рассмотрением бинарного звена 5 вида  $СС_{II}$ .

Величина  $\tilde{a}_{CE}$  находятся по значениям координат разъединенных сферических шарниров  $F$  и  $G$

$$\tilde{a}_{CE} = \left[ (\bar{R}_{C_i} - \bar{R}_{E_i})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (28)$$

где  $R_{C_i}$  и  $R_{E_i}$  - радиус-векторы сферических шарниров  $C$  и  $E$  с пальцем относительно неподвижной системе координат определяются следующими выражениями

$$\bar{R}_{C_i} = \bar{R}_{B_i} + [T_{B_i C_i}] \cdot \bar{r}_{C_i}; \quad (29)$$

$$\bar{R}_{E_i} = \bar{R}_D + [T_{D_i E_i}] \cdot \bar{r}_{E_i}; \quad (30)$$

где  $[T_{B_i G_i}]$  и  $[T_{D_i F_i}]$  - матрицы направляющих косинусов относительно неподвижной системе координат  $OXYZ$ .

Находим координаты шарниров  $B$  и  $F$  относительно систем координат  $OXYZ$

$$\bar{R}_{B_i} = \bar{R}_A + [T_{A_i B_i}] \cdot \bar{r}_{B_i}; \quad (31)$$

$$\bar{R}_{F_i} = \bar{R}_D + [T_{D_i F_i}] \cdot \bar{r}_{F_i}; \quad (32)$$

После нахождения координаты шарниров  $B$  и  $F$  решаем пространственную диаду II(3,5) вида **ВСС**<sub>II</sub>. Координаты шатунной точки  $P$  определяются из следующих соотношений

$$\bar{R}_{P_i} = \bar{R}_{E_i} + [T_{E_i P_i}] \cdot \bar{r}_{P_i}; \quad (33)$$

Если величины отклонений не удовлетворяют заданную точность, то уточняем параметры синтеза пятизвенной пространственной направляющей ИКЦ  $ABCED$  и переходим к пункту 2 данного итерационного алгоритма. В противном случае синтез пространственного направляющего механизма IV класса завершается.

На основе приведенного алгоритма анализа положений направляющего механизма IV класса полученные значения приведены в таб.3.

Анализ положений синтезированного пространственного направляющего механизма IV класса показал достоверность полученных значений параметров синтеза. Отклонение от заданной траекторий составляет не более 0.7-2%.

Спроектированный пространственный направляющий механизм IV класса вида **ВС**<sub>II</sub>**СС**<sub>II</sub>**ВСВ** может быть использовано как пространственный манипулятор, предназначенный для перемещение рабочего органа (схвата) по заданной криволинейной траектории.

В отличие от существующего пространственного четырехзвенного направляющего механизма создан пространственный направляющий шестизвенный механизм IV класса, роль шатуна выполняет четырехсторонний изменяемый замкнутый контур. Следовательно, созданный пространственный направляющий механизм IV класса является аналогом пространственного направляющего четырехзвенного механизма с переменной длиной "шатуна". Переменность длины "шатуна" пространственного направляющего механизма IV класса обеспечивает широкий диапазон изменение законов движения выходного звена по сравнению с пространственным четырехзвенным направляющим механизмом.