УДК 624.01

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ КИНЕМАТИКИ ЧЕРВЯЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Нигметов М.Ж., Шакирова Б.Н.

Мақалада тісті берілістердің күйін көрсететін негізгі теңдеулер жасалған. Уикер-Денавит-Хартенберг әдісі негізінде жасалған алгоритм тісті берілістердің кең клас есептеріне қолдануға болатынын көрсетеді.

In article to remove the main equations of the condition worm mechanism. The Designed algorithm on base of the method Uiker-Denavit-Hartenberg shows applicability them for broad class of the worm issues.

Для описания вращательных и поступательных связей между соседними звеньями Уикер предложили матричный метод последовательного построения систем координат, связанных с каждым звеном кинематической цепи [1]. Смысл этого метода состоит в формировании и определении однородной матрицы преобразования размерностью 4×4 для описания взаимного пространственного положения двух смежных зубцов червячного механизма.

Каждая система координат формируется на основе следующих правил:

- оси z_{ji}, $z_{j(i+1)}$ являются характерными осями движения соответствующих пар и направлены вдоль оси *i*-го и (*i*+1)-го сочленения соответственно, а направления этих осей выбираются произвольно;

- ось $x_{j(i+1)}$ образована общим перпендикуляром h_{ji}, направленным от оси z_{ji} к $z_{j(i+1)}$. Если же z_{ji} и $z_{j(i+1)}$ пересекаются, то ориентацию оси $x_{j(i+1)}$ можно выбрать произвольно;

- ось x_{ji} выбрана произвольно;

- оси y_{ji} и $y_{j(i+1)}$ дополняют оси x_{ji}, z_{ji} и $x_{j(i+1)}$, $z_{j(i+1)}$ до правой декартовой системы координат.

Дополнительно к этим системам координат с кинематическими парами также связываются определенные правые декартовы системы координат.

Ось *Z* локальной системы координат (ЛСК) направлена по характерной оси движения первого сочленения.

Когда характерные оси движения предыдущей и последующей червячных пар механизмов расположены между собой произвольным образом, геометрию и положение любого звена можно полностью описать с шестью параметрами Уикер.

Когда геометрия и положение звеньев определяются с четырьмя параметрами Денавита-Хартенберга, ось h_{ji} будет направлена вдоль зубцов червячных механизмов. Кроме того, отсутствуют параметры b_{ji} и β_{ji}.

Таким образом для описания пространственного положения двух смежных зубцов червячных механизмов надо определить однородную матрицу преобразования размерностью 4×4 в ЛСК с помощью параметров Айкера, поскольку трехмерная матрица поворота не несет информацию о поступательном перемещении и используемом масштабе:

1) ЛСК $x_{ji}^{1}\,y_{ji}^{1}\,z_{ji}^{1}$ и $x_{ji}y_{ji}z_{ji}$ связаны друг с другом преобразованием элементарного сдвига относительно оси z_{ji} на величину c_{ji}.

2) Аналогично, для ЛСК $x_{ji}^{11}\,y_{ji}^{21}\,z_{ji}^{31}$ и $x_{ji}^{1}\,y_{ji}^{1}\,z_{ji}^{1}$ можно записать матрицу элементарного поворота вокруг оси z_{ji}^{1} на угол γ_{ji}

3) Получим матрицу элементарного сдвига относительно оси x_{ji}^{11} на величину a_{ji}

4) Для систем $x_{ji}^{12}\,y_{ji}^{22}\,z_{ji}^{32}$ и $x_{ji}^{2}\,y_{ji}^{2}\,z_{ji}^{2}$ будем иметь матрицу элементарного поворота вокруг оси x_{ji}^{2} на угол α_{ji}.

5) При помощи матрицы элементарного сдвига относительно оси z_{ji}^{32} на величину b_{ji} можно получить косинусы углов между осями систем координат $x_{ji}^{3}\,y_{ji}^{3}\,z_{ji}^{3}$ и $x_{ji}^{12}\,y_{ji}^{22}\,z_{ji}^{32}$.

6) Получим матрицу элементарного поворота вокруг оси z_{ji}^{3} на угол β_{ji}.

7) После этого найдем обратную матрицу от матрицы преобразования между системами координат $x_{j(i+1)}y_{j(i+1)}z_{j(i+1)}$ и $x_{ji}y_{ji}z_{ji}$ относительно системы координат $x_{j(i+1)}y_{j(i+1)}z_{j(i+1)}$.

С целью повышения точности результата матрицы, нормы столбцов и строк которых чрезмерно различаются, подвергаются масштабированию, или балансировке.

Масштабирование выполняется диагональными матрицами [2], например D_1 и D_2. При этом решение, например, исходной системы $Ax = b$ находится решением системы $\left(D_1^{-1}AD_2\right)y = D_1^{-1}b$, где $y = D_2^{-1}x$. Матрица D_1^{-1} выполняет масштабирование заданной матрицы по ее строкам, а D_2 - по столбцам. Матрицы D_1 и D_2 неизвестны. Цель масштабирования – найти матрицу $D_1^{-1}AD_2$, число обусловленности которой существенно меньше числа обусловленности матрицы *A*. Масштабирование можно выполнить практически без ошибок округления.

Диагональные элементы однородной матрицы преобразования определяют локальное и глобальное изменения масштаба. Последние три диагональных элемента задают локальное растяжение, или изменение масштаба. Т.е. значения координат претерпевают изменение масштаба, определяемое соответственно скалярами *a, b, c*. Матрицы элементарных поворотов $[S_{\text{пов}}]$ не дают эффекта локального изменения масштаба.

Таким образом, определена взаимное ориентация двух подвижных систем координат $x_{ji}y_{ji}z_{ji}$ и $x_{j(i+1)}y_{j(i+1)}z_{j(i+1)}$, совершающие вращательное и поступательное движения. Для описания взаимного пространственного положения этих систем координат была использована однородная матрица преобразования размерностью 4×4. Эта матрица обладает тем свойством, что, воздействуя на вектор положения, выраженной в однородных координатах, производит одновременно преобразования поворота, сдвига перспективы и глобальное изменение масштаба.

Системы координат $x_{j(i+1)}y_{j(i+1)}z_{j(i+1)}$ и $x_{ji}y_{ji}z_{ji}$ связаны с *i*-м звеном червячного механизма, имеющие сочленения (*i+1)* и *i* в конце и в начале соответственно, а ЛСК XYZ связана начальным сочленением начального звена. Используя матрицу $\lfloor S_{ji} \rfloor$, по известным координатам $\left(1, x_{i+1,} y_{i+1,} z_{i+1}\right)$ точки (*i+1)*-го зубца червячного механизма в системе координат $x_{j(i+1)}y_{j(i+1)}z_{j(i+1)}$, жестко связанной с этим звеном, можно получить координаты этой точки в ЛСК XYZ, связанной с начальным сочленением начального звена в соответствии со следующей формулой:

$$\left(1, X_{j(i+1)}, Y_{j(i+1)}, Z_{j(i+1)}\right)^T = \left[S_{ji}\right]\left(1, x_{j(i+1)}, y_{j(i+1)}, z_{j(i+1)}\right)^T.$$

Если определены параметры Уикера для каждой кинематической пары червячного механизма, то геометрия считается полностью заданной, и ее можно описать символическим уравнением вида [2-4]:

$$R_{j1}\begin{vmatrix} c_{j1} \\ \gamma_{j1} \\ a_{j1} \\ \alpha_{j1} \\ b_{j1} \\ \beta_{j1} \end{vmatrix} R_{j2}\begin{vmatrix} c_{j2} \\ \gamma_{j2} \\ a_{j2} \\ \alpha_{j2} \\ b_{j2} \\ \beta_{j2} \end{vmatrix} \ldots R_{jn}\begin{vmatrix} c_{jn_j} \\ \gamma_{jn_j} \\ a_{jn_j} \\ \alpha_{jn_j} \\ b_{jn_j} \\ \beta_{jn_j} \end{vmatrix} = I. \quad (1)$$

Здесь $R_{j1}, R_{j2} \ldots R_{jn_j}$ указывают виды сочленений с соответствующими входными переменными параметрами, I -единичная матрица, $a_{ji}, \alpha_{ji}, \gamma_{ji}, c_{ji}, \beta_{ji}, b_{ji}$ - параметры Айкера, *j*- число контуров в червячном механизме.

Поскольку механизм состоит из произвольных замкнутых контуров, то (*n+1*)-я система координат идентична 1-й системе координат. Поэтому при неизвестных обобщенных координатах решение прямой задачи червячного механизма о положениях сводится к перемножению матриц, определяющих относительные положения звеньев, и можно выразить следующим матричным соотношением:

$$S_{j1} S_{j2} S_{j3} \ldots S_{jn} = I, \quad (2)$$

где *n* – номер звена, включая нулевые звенья и при необходимых условиях стойку, *I* – единичная матрица порядка 4×4.

Из последнего полученного соотношения можно получить исчерпывающий анализ перемещений любой точки червячного механизма, т.е. определить величины переменных параметров всех зубцов механизма в зависимости от фиксированных параметров и входных переменных.

Для реализации итерационного процесса необходимо получить некоторые начальные оценки неизвестных величин по символическим уравнениям (1).

Для любого положения червячного механизма величины γ_{jp} известны как входные углы, где *p* - число степеней свободы. Каждая из величин $a_{ji}, \alpha_{ji}, c_{ji}, \beta_{ji}, b_{ji}$ также известны, поскольку эти величины характеризуют размеры червячного механизма. Необходимо определить остальные переменные величины γ_{jl} итерационным методом:

$$\gamma_{jl} = \bar{\gamma}_{jl} + d\gamma_{jl} \tag{3}$$

где *l* - число зависимых параметров, $\bar{\gamma}_{jl}$ - начальная оценка и $d\gamma_{jl}$ - ошибка начальной оценки $\bar{\gamma}_{jl}$ по отношению к точной величине.

Подставляя (3) в (2) и допуская, что начальные оценки достаточно точны, чтобы было справедливым предположение о малости углов $d\gamma_{jl}$ и учитывая свойства итерационного процесса, можно пренебречь всеми членами высших порядков, имеющими форму $d\gamma_{ji} d\gamma_{jk}$, будет получено

$$B_{j1} + B_{j2} + \ldots + B_{jl} + \ldots + B_{j(n-1)} \cong I - B_{j0} \tag{4}$$

Здесь $B_{j0} = \bar{S}_{j1}\bar{S}_{j2} .. S_{j3} .. \bar{S}_{jn}$ **,**

Хотя уравнение (4) в развернутом виде остается очень громоздким и содержит много операций перемножения матриц, оно имеет симметричную форму и может быть легко реализовано на вычислительной машине. Уравнение (4) называется основным уравнением итерационного процесса и решается относительно величин $d\gamma_{jl}$.

Введем матрицу D_{jl} линейного оператора, осуществляющего дифференцирование матрицы $\lfloor S_{ji} \rfloor$, в соответствии с соотношением

$$D_{jl} = \partial S_{jl}(\gamma_{jl}) / \partial \gamma_{jl}. \tag{5}$$

Рассмотрим частные случаи взаимного расположения систем координат $x_{j(i+1)} y_{j(i+1)} z_{j(i+1)}$ и $x_{ji} y_{ji} z_{ji}$.

Пусть система $x_{j(i+1)}y_{j(i+1)}z_{j(i+1)}$ получается из системы $x_{ji}y_{ji}z_{ji}$ путем поступательного перемещения (сдвига) последней вдоль оси x_{ji} на расстояние dx_j. При этом матрица $\lfloor S_{ji} \rfloor$, которую в этом случае обозначим $\lfloor S_{\text{сдв}}(\bar{i}_1, dx_j) \rfloor$.

Если система $x_{j(i+1)}y_{j(i+1)}z_{j(i+1)}$ может быть получена из системы $x_{ji}y_{ji}z_{ji}$ путем поворота последней вокруг одной из своих координатных осей на угол γ_{ji}, то матрицу $\lfloor S_{ji} \rfloor$ называется называть матрицей вращения.

При достаточном количестве итерации и при условии, что начальные оценки достаточно близки к истинным значениям, процесс будет сходится таким образом, что матрица B_{j0} обратится в единичную матрицу. Если окажется, что процесс сходится к одной из возможных матричных форм, не совпадающих с единичной матрицей, то это означает, что контур червячного механизма замкнут неправильно [2, 6]. Поэтому необходимо в качестве дополнительных уравнений добавить к системе три условия на диагональные элементы. В итоге получаем всего девять совместных линейных уравнений $9(n_{jl} - p)$ с неизвестными $d\gamma_{jl}$.

Эта система из девяти уравнений с необходимым количеством неизвестных вообще не имеет точного решения. Однако, поскольку весь метод основан на итерационном подходе, точность его не будет существенно снижена, если использовать приближенное решение системы, удовлетворяющее девяти уравнениям наилучшим образом в смысле среднеквадратичного критерия.

Для решения прямой задачи кинематики, т.е. для нахождения неизвестных углов поворота $d\gamma_{jl}$ используется итерационный метод Гаусса-Зейделя [7], суть которого заключается в нижеследующем:

- общем случае *r*-е уравнение системы из N уравнений для момента времени $t + \Delta t$ может быть записано в виде

$$\sum_{l=1}^{r-1} B_{rl} d\gamma_{jl} + B_{rr} d\gamma_{jr} + \sum_{l=r+1}^{N} B_{rl} d\gamma_{jl} = B_{j0}; \qquad (6)$$

- из этого уравнения можно найти

$$d\gamma_{jr} = B_{rr}^{-1}\left\{B_{j0} - \sum_{l=1}^{r-1} B_{rl} d\gamma_{jl} - \sum_{l=r+1}^{N} B_{rl} d\gamma_{jl}\right\}; \tag{7}$$

- если процесс итераций таков, что в правой части используются последние приближения δ_l, то для k-й итерации имеем

$$d\gamma_{jr}^{k} = B_{rr}^{-1}\left\{B_{j0} - \sum_{l=1}^{r-1} B_{rl} d\gamma_{jl}^{k} - \sum_{l=r+1}^{N} B_{rl} d\gamma_{jl}^{k-1}\right\}. \tag{8}$$

Часто для уточнения решения используется прием, состоящий в умножении разности между итерациями для $d\gamma_{jl}$ на некоторый коэффициент и представлении уточненной величины $d\gamma_{jl}$ в виде

$$d\gamma_{jr}^{k} = d\gamma_{jr}^{k-1} + \Delta\left(d\gamma_{jr}^{k*} - d\gamma_{jr}^{k-1}\right), \tag{9}$$

где $d\gamma_{jr}^{k*}$ - величина, вычисленная в соответствии с (8), а Δ - коэффициент верхней релаксации, значение которого обычно лежит между *1* и *2*. Установлено, что во многих практических случаях самым подходящим является значение, близкое к *1.8*.

Итерационный метод Гаусса-Зейделя легко программируется. Каждое уравнение итерируется в соответствии с (8), и найденное значение уточняется в соответствии с (9). Процесс повторяется столько раз, сколько необходимо для получения приемлемого решения, причем сходимость обычно оценивается путем вычисления разности между двумя последовательными приближениями.

Определим обобщенные скорости точек $q'_{(j,i)p}$ червячного механизма, дифференцируя по обобщенным координатам q_p матричное соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial q_p} = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{\partial S_{ja}}{\partial q_{h(j,a)}} \cdot \frac{\partial q_{h(j,a)}}{\partial q_p} = 0, \tag{10}$$

$$\sum_{a=1}^{n_j} B_{ja} q'_{h(j,a)p} = 0, \tag{11}$$

или

$$\sum_{l} B_{jl} q'_{h(j,l)p} = -B_{j0} - \sum_{w_c} B_{jw_c} q'_{h(j,w_c)p} \; . \qquad (12)$$

В (10) $q_{h(j,a)}$ есть функции от обобщенных координат q_p.
Абсолютные скорости точек червячного механизма в инерциальной системе координат определяются следующим образом:

$$\dot{R}_{jl} = S_{jl}\left(S_{jl} r_{jl}\right)' = S_{jl} S'_{jl} r_{jl} = S_{jl} \sum_{b=1}^{a-1} \frac{\partial S_{jb}}{\partial q_{h(j,b)}} \cdot \frac{\partial q_{h(j,b)}}{\partial q_p} \cdot \frac{dq_p}{dt} r_{jl} = S_{jl} \sum_{b=1}^{a-1} B_{jb} q'_{h(j,b)p} \dot{q}_p r_{jl} \qquad (13)$$

где r_{jl} - координаты точек в локальной системе координат, $\dot{q}_p$ - заданные скорости точек манипулятора.
Продифференцируем (10) по времени:

$$\left(\sum_{l} B_{jl} q'_{h(j,l)p} \right)' = \left(- B_{jp}\right)' \qquad (14)$$

$$\sum_{l} \left(B'_{jl} q'_{h(j,l)p} + B_{jl} q''_{h(j,l)p} \right) = -B'_{jp} \qquad (15)$$

$$\sum_{a=3}^{n_i-2} B'_{ia} q'_{h(i,a)p} = \sum_{a=3}^{n_i-2} B_{ia} q'_{h(i,a)p} \sum_{b=3}^{n_i-2} B_{ib} q'_{h(i,b)r} \dot{q}_p = \sum_{a=3}^{n_i-2} \sum_{b=3}^{n_i-2} B_{ia} B_{ib} q'_{h(i,a)p} q'_{h(i,b)r} \dot{q}_p \qquad (16)$$

Определим обобщенные ускорения точек, дифференцируя по обобщенным координатам матричное соотношение (12):

$$\sum_{l} B_{jl} q''_{h(j,l)p} = -B^2_{jp} - \sum_{l} \sum_{b} B_{jl} B_{jb} q'_{h(j,l)p} q'_{h(j,b)r} \dot{q}_p \; . \qquad (17)$$

Определим ускорения точек в абсолютной системе координат, продифференцировав (16) по времени:

$$\ddot{R}_{jl} = \left[T_{jl}\right] \left\{ \left[B^2_{jp} + \sum_{d} \sum_{c} B_{jd} B_{jc} q'_{h(j,d)p} q'_{h(j,c)} r_{jl} \dot{q}_r + \sum_{d} B_{jd} q''_{h(j,d)p} \dot{q}_p \right] \cdot \dot{q}_p + \right.$$
$$\left. + \left(B_{jp} + \sum_{d} B_{jd} q'_{h(j,d)p} \right) \ddot{q}_p \right\} \cdot r_{jl} \qquad (2.50)$$

С применением эффективного машинно-ориентированного метода Уикер-Денавит-Хартенберга решается прямая задача кинематики червячных механизмов; представляются алгоритмические аспекты моделирования на

ЭВМ задачи кинематики червячных механизма; легко составляются прикладные программы и проводится кинематический анализ вышеуказанных червячных механизмов на языке высокого уровня.

Литература:

1. Постнов В.А., Суслов В.П. Строительная механика корабля и теория упругости. – Л.: Судостроение, 1987. - 288 с.
2. Айкер, Денавит, Хартенберг. Итерационный метод анализа перемещений пространственных механизмов //Конструирование и технология машиностроения. – 1965, №1. - с: 169-176.
3. Курков С.В. Метод конечных элементов в задачах динамики механизмов и приводов. - СПб., Политехника, 1991. - 67 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.-541 с.
5. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Ч.:Изд-во «Основа» при Харьковском ун-е, 1991. - 272 с.
6. Уикер мл. Динамика пространственных механизмов. Часть 1. Точные уравнения движения //Конструирование и технология машиностроения. – 1969. - №1. - с: 264-270.
7. К. Бате, Е. Вилсон. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982.-447 с.