ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті
Педагогикалық технологиялар институты

Г. Н. Нығметова
Б.Т. Өрбісінова

# Комплекс айнымалы функциялар теориясы

050109-Математика мамандығы үшін
(Қазақ тілді топтар үшін оқу-әдістемелік нұсқау)

Ақтау, 2010

ББК 22.11. я 7
Д 40
Құрастырған: Г.Н. Нығметова, Б.Т. Өрбісінова Комплекс айнымалы функциялар теориясы . (Қазақ тілді топтар үшін оқу-әдістемелік нұсқау). Ақтау, 2010 ж., 37 бет.

Пікір жазған: ф.-м.ғ.к., доцент Б.Т.Құлжағарова

Әдістемелік жұмыста комплекс айнымалы функцияны интегралдау әдістері, оның нақты айнымалы функцияны интегралдаудан айырмашылығы, есептеу формулалары келтіріліп, олардың қолданылуы есептер шығару арқылы түсіндіріп көрсетілген. Сонымен қатар қалындылар теориясының негізгі ұғымдары және оларды интегралды есептеу кезінде қолдану әдістері келтірілген. Тақырыпты толық меңгеру үшін жеткілікті түрде есептер берілген.
Әдістемелік жұмыс жоғарғы оқу орындарының студенттеріне арналған.

Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің Оқу - әдістемелік кеңесінің шешімі бойынша баспаға ұсынылған.

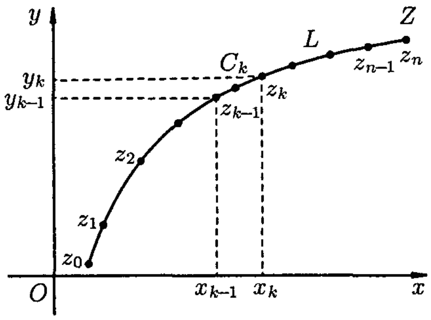
## Кіріспе

Халыққа білім беру саласындағы жаңа концепция бойынша, жаңа оқу орындарының сатылы (бакалавар, магистр) оқу жүйесіне арналған жаңа бағдарлама құрылғаны белгілі. Сондықтан да, оған сәйкестендіріліп жазылған мемлеметтік тілдегі оқулықтар мен оқу құралдарының қажеттілігі мен тапшылығы көптеген қиындықтар туғызуда. Мұндай жағдай, әсіресе, сырттай оқитын студенттерге де қиын болып тұр.

Соның ішінде «Комплекс айнымалы функциялар теориясы» пәні бойынша физика-математика мамандықтарына арналған қазақ тілінде оқулықтар мен оқу құралдарының жетіспей жатқандығы белгілі. Ұсынылып отырған оқу-әдістемелік құралы физика-математика мамандықтарына арналған. Оқу жұмысы бағдарламасына сәйкестендіріліп жазылған. Бірақ басқа мамандықтарға да пайдалы деп есептейміз. Оқулықта келтірілген мағлұматтардың барлығы да, мүмкіндігінше, түсініктемелер арқылы шығарылған мысалдар мен оларға қажетті суреттермен жабдықталып, әр тарау соңында жауаптарымен қоса, студенттердің өздерін тексеруге арналған мысалдар мен жаттығулар келтірілген.

# I тарау. Комплекс айнымалы функцияларды интегралдау

## 1.1. Комплекс айнымалы функцияларды интегралдау, оның қасиеттері




1-сурет.

Комплекс облыста интеграл ұғымына анықтама берелік. Шеткі нүктелері $z_0$ және z болатын кез келген тегіс L қисығының әрбір нүктесінде $\omega = f(z)$ үзіліссіз функциясы анықталсын (1-сурет). Бұл қисықты мына $z_1$ , $z_2$, ..., $z_{n-1}, z_n = z$ нүктелері арқылы n бөліктерге бөліп, әрбір $z_{k-1}z_k, (k = 1,2,...,n)$ элементар доғасынан $C_k$ нүктесін алып, мынадай интегралдық қосынды құрамыз:

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k ,$$

мұндағы $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

**Анықтама.** Егер $\max|\Delta z_k| \to 0$ L қисығын доғаларға бөлу және элементар доғалардағы $C_k$ нүктелерінің орнына тәуелсіз S интегралдық қосындысының шегі бар болса, онда ол $f(z)$ *функциясының* L *қисығы бойынша интегралы* деп аталады да және ол былай белгіленеді:

$$\int_L f(z)dz .$$

Сонымен:

$$\int_L f(z)dz = \int_L u\,dx - \upsilon\,dy + i\int_L \upsilon\,dx + u\,dy \qquad (1.1)$$

(1.1) формуласын төмендегідей түрде жазсақ, оны оңай еске сақтауға болады:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + i\upsilon)(dx + idy)$$

Егер L қисығы $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$, $(t_1 \le t \le t_2)$ параметрлік теңдеуімен берілсе, онда (1.1) формуласы мына түрге келтіріледі:

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt . \qquad (1.2)$$

Комплекс айнымалы функцияның интегралының негізгі қасиеттерін келтіреміз:

1. $\int_L dz = z - z_0$.
2. $\int_L (f_1(z) \pm f_2(z))dz = \int_L f_1(z)dz \pm \int_L f_2(z)dz$.
3. $\int_L af(z)dz = a\int_L f(z)dz$, $a$ – комплекс сан.

4. $\int\limits_L f(z)dz = -\int\limits_{L-} f(z)dz$,

мұндағы $L$ және $L_-$ сәйкес оң және теріс бағытта өтетін бір ғана жолды көрсетеді.

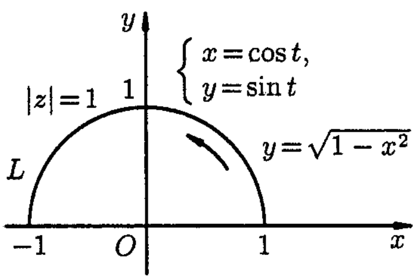
5. $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz \pm \int\limits_{L_2} f(z)dz$, мұндағы $L = L_1 + L_2$.

6. (*Интегралдың модулін бағалау*). Егер L қисығының бойында $|f(z)| \le M$ теңсіздігі орындалса, онда $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le M\,l$,

мұндағы $l$ – L қисығының ұзындығы, M-тұрақты сан.

*1-мысал.* $I = \int\limits_L \operatorname{Im} z\,dz$ интегралын есептеңіздер, мұндағы L – $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$ жарты шеңбер (2-сурет).

*Шешуі.* (1.1) формуласын қолданып,




2-сурет.

$$I = \int\limits_L y(dx + idy) = \int\limits_L y\,dx + i\int\limits_L y\,dy =$$

$$= \int\limits_1^{-1} \sqrt{1-x^2}\,dx + i\int\limits_1^{-1} \sqrt{1-x^2}\,\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_1^{-1} - i\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^{-1} = -\frac{\pi}{2}$$ аламыз.

(1.2) формуласын қолданып, $(z = \cos t + i\sin t)$:

$$I = \int\limits_0^{\pi} \sin t(-\sin t + i\cos t)dt = \int\limits_0^{\pi} -\frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt + i\int\limits_0^{\pi} \sin t\cos t\,dt =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi} + i\frac{1}{2}\sin^2 t\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}.$$

Егер $F'(z) = f(z)$ теңдігі орындалса, онда $F(z)$ функциясын $f(z)$ функциясының *алғашқы бейнесі* деп атайды.

**Анықтама**. $f(z)$ функциясының барлық алғашқы бейнесінің жиынтығын $f(z)$ функциясының *анықталмаған интегралы* деп атайды және ол мына түрде жазылады:

$$\int f(z)dz = F(z) + C, \text{ где } F'(z) = f(z).$$

Егер бір байланысты D облысында $f(z)$ аналитикалық функция болса, онда осы облыста жататын $z_0$ және z нүктелері үшін

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) - F(z_0) \tag{1.3}$$

Ньютон-Лейбниц формуласы орындалады.

**Коши теоремасы.** Егер $f(z)$ функциясы бір байланысты D облысында аналитикалық функция болса, онда осы облыста жататын кез келген L тұйық контур бойымен осы функциядан алынған интегралы нөлге тең болады, яғни

$$\oint_L f(z)dz = 0. \qquad (1.4)$$

*Дәлелдеу.* (1.1) формуласы бойынша :

$$\oint_L \mathrm{f}(z)dz = \oint_L u\,dx - \upsilon dy + i\oint_L \upsilon\,dx + udy$$

алып, әрқайсысын Грин формуласы бойынша екі еселі интегралдар

$$\oint_L u\,dx - \upsilon dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)dxdy,$$

$$\oint_L \upsilon\,dx + udy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)dxdy$$

түрінде өрнектесек, $\mathrm{f}(z) = u + i\upsilon$ аналитикалық функция болғандықтан, Коши–Римана шарттарын қанағаттандырады да, әрбір екі еселі интеграл нөлге тең болады. Демек, $\oint_L f(z)dz = 0$. ■

Коши теоремасы көп байланысты облыс үшін де дұрыс.

**Коши теоремасы** (көп байланысты облыс үшін). Көп байланысты D облысының сағат тілінің бағытына қарсы (оң) бағытталған L сыртқы контуры $L_1$, $L_2$,…,$L_n$ ішкі контурлары болса, онда $f(z)$ осы облыста аналитикалық функция болғанда

$$\oint_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k} f(z)dz$$

орындалады.

**Салдар.** Егер бір байланысты D облысында $f(z)$ аналитикалық функция болса, онда $f(z)$ функциясының интегралының мәні интегралдау жолына тәуелсіз болып, тек осы жолдың $z_0$ бастапқы және z соңғы нүктелерінің орнымен ғана анықталады.

Мұндай жағдайларда, қашан интеграл бастапқы және соңғы нүктелердің интегралдау жолына тәуелді болғанда мына белгілеуді пайдаланамыз:

$$\int_L f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

Комплекс айнымалы элементар функциялардың интегралы нақты айнымалы элементар функциялардың интегралымен бірдей.

$$\int e^z\,dz = e^z + C;\ \int \sin z\,dz = -\cos z + C;\ \int_0^i 3z^2\,dz = 3\cdot\frac{z^3}{3}\Big|_0^i = -i.$$

## 1.2. Коши интегралы

**Теорема.** Егер контуры L тұйық бір байланысты D облысында $f(z)$ аналитикалық функция болса, онда сол облыстың әрбір ішкі $z_0$ нүктесі үшін мына

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad (1.5)$$

формула орындалады, мұндағы интегралдау L контуры бойынша оң бағытта жүргізіледі. (1.5) теңдігінің сол жағын *Кошидің интегралы* деп, ал (1.5) формуласын *Кошидің интегралдық формуласы* деп атайды. Коши формуласы комплекс айнымалы функциялар теориясының негізгі формулаларының бірі болады. Бұл D облысының кез келген ішкі $z_0$ нүктесіндегі $f(z)$ аналитикалық функциясының мәнін сол облыстың L контуры бойынша алынған интегралы арқылы табуға мүмкіндік береді.

Кошидің интегралдық формуласын мына түрде жазуға болады:

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)\,. \qquad (1.6)$$

Кошидің интегралдық формуласын қолдану арқылы мына теоремаларды дәлелдеуге болады.

**Теорема**. Егер бір байланысты D облыста және оның L шекарасында $f(z)$ аналитикалық функция болса, онда D облысында жататын кез келген $z_0$ нүктесінде ол функцияның кез келген ретті туындысы $f^{(n)}(z_0),(n=1,2,...)$ бар болады және ол туындылар мына формуламен табылады:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ , \qquad (1.7)$$

мұндағы $z_0 \in D, z \in L$.

Осы тараудың 1.1 пунктінде аналитикалық функция теориясының негізгі ұсынысын дәлелдедік, осының негізінде бір байланысты D облысында аналитикалық кез келген $f(z)$ функциясы үшін $\oint_L f(z)dz=0$ теңдігі орын орын алады, мұндағы L-D облысында жататын кез келген үзінді тегіс тұйық контур. Италия математигі Морера көрсеткендей, бұл негізгі ұсыныс қайтымды.

**Морера теоремасы.** Егер бір байланысты D облысында үзіліссіз $f(z)$ функциясы осы облыста жататын кез келген үзінді тегіс тұйық контур үшін $\oint_L f(z)dz=0$ теңдігін қанағаттандырса, онда $f(z)$ функциясы осы облыста аналитикалық функция болады.

*2-мысал*. Интегралды есептеңіздер: $\int_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)dz$

*Шешуі.* Интеграл астындағы функция *f(z)= 3 z*$^2$ + *2z* аналитикалық болғандықтан, Ньютон-Лейбниц формуласын қолданып,

$$\int_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)dz=(z^3+z^2)\Big|_{1-i}^{2+i}=(2+i)^3+(2+i)^2-(1+i)^3-(1+i)^2=7+19i$$

табамыз.

*3 -мысал.* Интегралды есептеңіздер: $\int_0^i \sin^2 zdz$.

*Шешуі.* Нақты айнымалы функцияны интегралдау әдістерін қолданамыз:

$$\int_0^i \sin^2 zdz=\frac{1}{2}\int_0^i(1-\cos 2z)dz=\frac{1}{2}\left(z-\frac{\sin 2z}{z}\right)\Bigg|_0^i=\frac{1}{2}i-\frac{1}{4}\sin 2i=\frac{i}{4}(2-sh2).$$

**I тарауға арналған жаттығулар**

Төмендегі интегралды есептеңіздер:

**1.** $\int_L \operatorname{Im} zdz$, мұндағы L – радиус-вектор 2-*i* нүктесінің.

**2.** $\int_L |z|\,dz$, мұндағы L – радиус-вектор -2-3*i* нүктесінің.

**3.** $\int_L \operatorname{Re} zdz$, мұндағы L – радиус-вектор 1+*i* нүктесінің.

**4.** $\oint_L (z+\bar{z})dz$, мұндағы $L=\{z\,\big|\,|z|=1,\ \pi/2\le\arg z\le 3\pi/2\}$.

**5.** $\oint_L (2z+1)\bar{z}dz$, мұндағы $L=\{z\,\big|\,|z|=1,\ 0\le\arg z\le\pi\}$.

**6.** $\oint_L \operatorname{Im} zdz$, мұндағы $L=\{(x,y)\,\big|\,y=2x^2,\ 0\le x\le 1\}$.

**7.** $\oint_L (iz^2-2\bar{z})dz$, мұндағы $L=\{z\,\big|\,|z|=2,\ 0\le\arg z\le\pi/2\}$.

**8.** $\oint_L \operatorname{Re}(z+z^2)dz$, мұндағы $L=\{(x,y)\,\big|\,y=2x^2,\ 0\le x\le 1\}$.

**9.** $\oint_L (\overline{z^2}-z)dz$, мұндағы $L=\{z\,\big|\,|z|=1,\ \pi\le\arg z\le 2\pi\}$.

**10.** $\oint_L z\operatorname{Im}(z^2)dz$, мұндағы $L=\{z\,\big|\,\operatorname{Re} z=1,\ |\operatorname{Im} z|\le 10\}$.

## II тарау. Аналитикалық функциялар қатарлары

### 2.1. Комплекс айнымалы функциялардың қатарлары

Мына қатардың

$$f_1(z)+f_2(z)+...+f_n(z)+...=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z),\quad z\in D \tag{2.1}$$

барлық мүшелері комплекс айнымалы z-тің кейбір D облысында анықталған аналитикалық функциялар болсын. Бұл қатар D облысының әрбір z нүктесінде жинақты болады деп жориық және оның қосындасын S(z) арқылы белгілейік.

Ендеше үзіліссіз функциялардың жинақты қатарының қосындысыда үзіліссіз функция болу үшін ол қатарға қосымша шарт қою керек. Қатардың бір қалыпты жинақталық шарты осы рольді атқарады.

D облысында жинақты болатын берілген (2.1) қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысын $S_n(z)$ арқылы белгілеп, D облысының кез келген z нүктесі үшін қатардың жинақтылық саладрынан n-нің шектелмей өскенінде нөлге ұмтылатынын S(z)- $S_n$(z) айырымын қарастыралық.

Бұл $\left|S(z)-S_n(z)\right|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалады деген сөз.

Сөйтіп, анықтама бойынша, егер кез келген мейілінше кішкене оң сан ε үшін натурал сан N=N(ε) табылып, барлық $n \geq N$ де D облысындағы z нүктесі үшін қандай болсын $\left|S(z)-S_n(z)\right|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, (2.1) қатардың облысында S(z) функциясына бір қалыпты жинақты болады. Оның дербес қосындысы

$$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+...+f_n(z)$$

(2.1)функционалдық қатарының жинақталу облысын анықтау үшін Даламбер белгісін немесе Коши белгісін

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=l(z)\,, \qquad (2.2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|f_n(z)\right|}=l(z), \qquad (2.3)$$

қолданып, $l(z)<1$ теңсіздігінің шешімі (2.1) функционалдық қатарының жинақталу облысы, ал $l(z)>1$- жинақталмау облысы болады. $l(z)=1$ болғанда (2.1) функционалдық қатарының жинақталу, жинақталмауы белгісіз.

**Қатардың қосындысының үзіліссіздігі туралы теорема.** Егер (2.1) қатар D облысында бір қалыпты жинақты болса және ол қатардың барлық мүшелері облыстың $z_0$ нүктесінде үзіліссіз функциялар болса, қатардың қосындысы да сол нүктеде үзіліссіз функция болады.

**Салдар.** D облысында үзіліссіз, осы облыста бір қалыпты жинақты болатын функциялардың қатары сол облыста үзіліссіз функцияны өрнектейді.

Шынында, қатардың барлық мүшелері D облысының әрбір нүктесінде үзіліссіз мәні болғандықтан, теорема бойынша қатардың қосындысы D облысының әрбір нүктесінде, яғни бүкіл облыста үзіліссіз болуға тиіс.

**Қатардың бір қалыпты жинақтылық белгісі**. Егер D облысында (2.1) қатардың барлық мүшелері

$$\left|f_n(z)\right| \leq a_n$$

шартты қанағаттандырса, мұндағы $a_n$ -тұрақты оң сандар, сонымен бірге

$$a_1+a_2+...+a_n+... \qquad (2.4)$$

сандық қатар жинақты болса, берілген (2.1) қатар D облысында бір қалыпты (әрі абсолют) жинақты болады.

*Дәлелдеу.*

$$|f_1(z)|+|f_2(z)|+...+|f_n(z)|+...$$

қатары D облысының әрбір z нүктесінде жинақты, өйткені оның мүшелері жинақты (2.4) қатардың сәйкес $a_n$ мүшелерінен артық емес. Демек, берілген (2.1) қатар D облысының әрбір z нүктесінде абсолют жинақты болады. (2.1) қатардың қосындысы мен бірінші n мүшелерінің қосындысының сәйкес *S(z)* пен $S_n(z)$ белгілеп, мынаны аламыз:

$$|S(z)-S_n(z)| \le |f_{n+1}(z)|+|f_{n+2}(z)|+... \le a_{n+1}+a_{n+2}+... \,. \qquad (2.5)$$

Шарт бойынша (2.4) қатар жинақты болатындықтан, оның қалдық мүшесі $a_{n+1}+a_{n+2}+...$ қандай болмасын (ε>0) үшін жеткілікті үлкен $n \ge N$ = N=N(ε) - нан бастап ε- нан кем болады. Сөйтіп, (2.5) теңдіктен D облысындағы z нүктесіне тәуелсіз мынаны аламыз:

$$n \ge N = N=N(\varepsilon) \text{ болғанда } |S(z)-S_n(z)| < \varepsilon \,.$$

Бұл (2.1) қатардың D облысында бірқалыпты жинақталатындығын дәлелдейді.

## 2.2. Дәрежелік қатар

Мына

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ... \qquad (2.6)$$

түріндегі қатарды комплекс облыстағы дәрежелік қатар деп аталады, мұндағы $c_0, c_1, ..., c_n, ...$ коэффициенттері– мәні тұрақты комплекс сандар, z-тәуелсіз комплекс айнымалы.

(2.6) дәрежелік қатардың жинақты болатын барлық z мәндерінің жиыны осы қатардың жинақталу облысы деп аталады.

**Абель теоремасы. 1)** Егер $z = z_0 \ne 0$ нүктесінде (2.6) дәрежелік қатары жинақты болса, онда $|z| < |z_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген z үшін берілген қатар абсолют жинақты болады.

**2)** Егер $z = z_0 \ne 0$ нүктесінде (2.6) дәрежелік қатары жинақсыз болса, онда $|z| > |z_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген z үшін берілген қатар жинақсыз болады.

**Анықтама.** $|z_0| = R$ шамасын (2.6) қатарының жинақталу радиусы деп, ал $|z| < R$ дөңгелегін (2.6) қатарының жинақталу дөңгелегі деп атайды. $|z| < R$

дөңгелегін (2.6) қатарының жинақталады, ал осы дөңгелектің сыртында – жинақталмайды.

(2.6) дәрежелік қатардың жинақталу радиусы мына формула бойынша анықталады:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad \text{немесе} \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

*1 -мысал.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z-i)^n}$, $z \in C$ функционалдық қатарының жинақталу облысын табыңыздар.

*Шешуі.* Даламбер белгісін қолданып,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(z-i)^n}{n(z-i)^{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{z-i}\right| < 1$$

теңсіздігін деп жаза аламыз. Бұдан қатардың центрі $i$ нүктесінде радиусы 1-ге тең дөңгелектің сыртында абсолют жинақталатындығы шығады. $|z-i| = 1$ шеңберінде қатар жинақталмайды.

*2-мысал.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} = 1 + \frac{z-1}{1!} + \frac{(z-1)^2}{2!} + \ldots$

қатарының жинақталуын зерттеңіздер.

*Шешуі.* Қатардың жинақталу радиусы

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

тең болады.

Демек, берілген қатардың жинақталу дөңгелегі центрі $z$ =1 нүктесінде радиусы $R = \infty$ тең дөңгелек, яғни барлық $z$ жазықтығы.

*3-мысал.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ қатарының жинақталу облысын табыңыздар.

*Шешуі.*

Мұнда $c_n = \frac{1}{n!}$, $c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

яғни $R = \infty$.

Демек, берілген қатардың жинақталу облысы барлық $z$ жазықтығы болады.

*4-мысал.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(n+1)2^n}$ қатарының жинақталу облысын табыңыздар.

*Шешуі.*

Мұнда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^{n+1}(n+2)}{(n+1)2^n}\right|$. Берілген қатар $|z-i|<2$ облысында жинақталады.

## 2.3. Тейлор қатары

**Теорема.** $|z-z_0|<R$ дөңгелегінде кез келген $\mathrm{f}(z)$ аналитикалық функциясы осы дөңгелекте

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \qquad (2.7)$$

бір ғана дәрежелік қатарына жіктеледі және оның коэффициенттері

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi \quad , \quad (n=0,1,2,3,\ldots), \qquad (2.8)$$

формуласымен анықталады, мұндағы $l_r$ – центрі $z_0$ нүктесі болатын дөңгелектің ішінде жатқан кез келген шеңбер.

(2.7) дәрежелік қатары қарастырылып отырған дөңгелектегі $f(\mathrm{z})$ функциясы үшін **Тейлор қатары** деп атайды.

Кейбір элементар функциялардың Маклорен қатарына жіктелуі келтірейік:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots, \qquad |z|<1$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \qquad |z|<\infty$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \qquad |z|<\infty$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n n}{}+\ldots, \qquad |z|<1$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots, \qquad |z|<1$$

$$(1+z)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}z^n+\ldots, \quad |z|<1.$$

## 2.4. Аналитикалық функцияның нөлдері

**Анықтама.** D облысында голоморфты $f(z)$ *функцияның нөлі* деп,

$$f(z_0)=0$$

теңдігі орындалатын осы облыстың кез келген $z_0$ нүктесін айтады.

Біздің $f(z)$ функциясының D облысында жататын нөлдері жиыны шектеулі және шектеусіз болуы мүмкін. Алайда егер $f(z)$ нөлге теңбе-тең болмаса, D облысының ешқандай нүктесі $f(z)$ функциясының нөлдер жиынының шекті нүктесі бола алмайды. Демек, $f(z)$ функциясының нөлдер жиынының барлық шекті нүктелері D облысының шекарасында болуы керек. Осыдан, дербес жағдайда, $f(z)$ функциясының кез келген нөлінің аймағында центр ретінде жеткілікті кіші радиусы бар шеңберді, осы шеңбердің центрлерінен басқа шеңбер ішінде ешқандай нөлдер болмайтындай сызуға болатыны келіп шығады.

Бұдан былай берілген функция голоморфты болатын $f(z)$ $(f(z) \neq 0)$ функциясының D облысында жататын барлық нөлдері жиынын нүктелердің тізбегі ретінде қарастыруға болады, яғни барлық нөлдерді натурал сандар көмегімен нөмірлеуге болатынын оңай көруге болады.

Егер D облысында голоморфты $f(z)$ функциясы осы облыстың $z_0$ нүктесінде нөлге тең болса, оның $z_0$ нүктесінің кейбір аймағындағы жіктелуі мына түрде болады:

$$f(z) = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots, \qquad ``(2.8)$$

өйткені $c_0 = f(z_0) = 0$.

(2.8) жіктелудің барлық $c_n$ коэффициенті нөлге тең бола алмайды, өйткені $z_0$ нүктесінің кейбір аймағының барлық жерінде нөлге тең $f(z)$ функциясы бұл жағдайда жалғыздық теорема бойынша D облысында нөлге теңбе-тең болар еді. Олай болса, $c_n$ коэффициенттерінің арасында нөл еместері де бар; осындай коэффициентердің ең кіші нөмірін $m, (m \geq 1)$ арқылы белгілейік.

Сонда мынаны аламыз:

$$\tilde{n}_1 = \tilde{n}_2 = \dots = \tilde{n}_{m-1} = 0,$$

демек, (2.8) жіктелуі төмендегідей түрге келеді:

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots, \qquad (2.9)$$

мұндағы $c_m \neq 0$.

Бұл жағдайда $z_0$ нүктесін $f(z)$ функциясы үшін m – ретті нөл деп атаймыз. Егер $m = 1$ болса, онда жай нөл деп, ал $m > 1$болғанда еселі нөл деп атайды.

### 2.5. Дәрежелік қатардың коэффициенттері үшін Коши теңсіздігі

Егер

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \qquad (2.10)$$

дәрежелік қатары $|z| < R$ дөңгелегінде жинақты болса және ол дөңгелекте модулі әр уақытта М-нен кем $f(z)$ функциясын кескіндесе, онда төмендегі теңсіздік орын алады:

$$|c_n| \le \frac{M}{R^n} \qquad (n = 0, 1, 2, ...). \tag{2.11}$$

Егер дәрежелік қатардың коэффициенттері үшін (2.7) интегралдық формуланы пайдалансақ, онда (2.11) теңсіздік бірден алынады:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \qquad (n = 0,1,2,3,...),$$

мұндағы интегралдау қалауымызша алынған $|\xi| = r \quad (r < R)$ шеңбері бойымен жүргізіледі. $|c_n|$-ны бағалап, мынаны табамыз:

$$|c_n| \le \frac{M}{r^n}.$$

Соңғы теңсіздік барлық $r \quad (r < R)$ үшін орындалатындықтан, $r$-ды $R$-ға ұмтылдыра отырып, шекке өту арқылы, ең соңында мынаны табамыз:

$$|c_n| \le \frac{M}{R^n}.$$

**Лиувилль теоремасы.** Егер барлық жазықтықта голоморфты $f(z)$ функциясы модулі бойынша шектелген болса, онда ол функция теңбе-тең тұрақты болады.

Шынында, қарастырылып отырған жағдайда

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ...$$

жіктеуі жазықтықтың кез келген z нүктесінде орын алады. Кошидің (2.10) теңсіздігін пайдалана отырып, мынаны аламыз:

$$|c_n| \le \frac{M}{R^n} \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

мұндағы М тұрақты сан, ал $R$-ды қалағанымызша үлкен деп есепиеуге болады. Демек, егер $n \ge 1$ болса, $c_n = 0$ болады, ал (2.9) салдарынан $f(z) = c_0$ болады.

*1-мысал.* $f(z) = e^z - 1 - z$ функциясы үшін $z_0$=0 нөлінің ретін анықтаңыздар.

*Шешуі.* $f(z)$функциясын $z$-тің дәрежесі бойынша жіктейміз:

$$e^z - 1 - z = (1 + z + z^2/2! + z^3/3! + ...) - 1 - z = z^2/2! + z^3/3! + ...$$

Өйткені алынған жіктеудегі коэффициент $c_2 = 1/2$ болады, яғни нөлге тең емес, ал $c_0 = c_1 = 0$. Олай болса, берілген функция үшін $z_0$=0 нүктесі $n = 2$ ретті нөл болатындығын көреміз.

*2-мысал.* $f(z) = (z^4 + 2z + 1)^2 (z^2 - 2z + 2)$

функциясының нөлдерін және олардың ретін анықтаңыздар.

*Шешуі.* $f(z)$ функциясын көбейткіштерге жіктейміз :

$$f(z)=(z-i)^4(z+i)^4(z-(1+i))(z-(1-i))$$

Функцияның нөлдерін табамыз: $z_1=i$, $z_2=-i$, $\varphi_2(z)\neq 0$ $z_3=1+i$, $z_4=1-i$.

Функцияның әрбір нөлінің ретін анықтаймыз.

$z_1=i$ нүктесі үшін

$$f(z)=(z-i)^4\varphi_1(z),\quad \varphi_1(z)\neq 0$$

теңдігінен, $z_1=i$ нүктесінің 4-ші ретті нөл екендігін аламыз.

Осыған ұқсас $z_2=-i$ нүктесі үшін

$$f(z)=(z+i)^4\varphi_2(z),\quad \varphi_2(z)\neq 0$$

теңдігінен, бұл нүктенің 4-ші ретті нөл екендігін аламыз.

$$f(z)=(z-(1+i))\varphi_3(z),\quad \varphi_3(z)\neq 0$$

теңдігінен, $z_3=1+i$ нүктесінің жәй нөл екендігі шығады. Осыған ұқсас

$$f(z)=(z-(1-i))\varphi_4(z),\quad \varphi_4(z)\neq 0$$

теңдігінен, $z_4=1-i$ нүктесінің жай нөл екендігі шығады.

Мұндағы

$$\varphi_1(z)=(z+i)^4(z^2-2z+2),$$

$$\varphi_2(z)=(z-i)^4(z^2-2z+2),$$

$$\varphi_3(z)=(z-(1+i))(z^4+2z+1),$$

$$\varphi_4(z)=(z-(1-i))(z^4+2z+1).$$

## II тарауға арналған жаттығулар

Қатардың жинақтылығын зерттеңіздер.

**№ 1.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2^n+5^n}{10^n}+\dfrac{i}{(n+2)!}\right)$; ә) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(z+n)}$.

**№ 2.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n\cdot n!}+\dfrac{i}{3^n}\right)$; ә) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+z^n}\right)$.

**№ 3.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[tg\,\dfrac{\pi}{4n}+i\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\right]$; ә) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+z)^2}$.

**№ 4.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+i\,\dfrac{(-1)^{n+1}\pi^{2n-1}}{(2n-1)!\,6^{2n-1}}\right)$; ә) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z-\pi n)^2}$.

Қатардың абсолют және шартты түрде жинақтылығын зерттеңіздер.

**№ 5.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$; ә) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3-i}{2}\right)^n$.

**№ 6.** а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+i}{3}\right)^n$; ә) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in\pi}{2^n}$.

Төмендегі көрсетілген қатардың жинақталу облысын табыңдар $z \in C$:

**№ 7.** а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$; ә) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3)^{2n}}{(2n+1)\cdot 3^n}$.

**№ 8.** а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nz^n}{3n-2}$; ә) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nz^n$ .

## III тарау. Лоран қатары. Қалындылар теориясы

### 3.1. Аналитикалық функцияны Лоран қатарына жіктеу

**Теорема.** $r<|z-z_0|<R \quad (0\le r<R\le\infty)$ сақинасында голоморфты болатын $f(z)$ функциясы осы аймақта $(z-z_0)$-дің дәрежесі бойынша қатарға жіктеледі:

$$\mathrm{f}(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n, \qquad (3.1)$$

мұндағы

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{\mathrm{f}(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi \quad (n=0,\pm1,\pm2,...), \qquad (3.2)$$

ал L – берілген сақинаның ішінде жатқан центрі $z_0$ нүктесіндегі кез келген шеңбер.

(3.1) қатары берілген сақинадағы $f(z)$ функциясы үшін Лоран қатары деп аталады.

Алдыңғы пункттегі айтылғаннан, Лоранның (3.1) жинақтылық қатарының нақты облысы ішінде $\mathrm{f}(z)$функциясы голоморфты болатын центрі $z_0$ нүктесінде дөңгелек сақина және $|z-z_0|=R$ мен $|z-z_0|=r$ шеңберлерінің әрқайсысында кем дегенде бір-бәрден осы функцияның ерекше нүктесі бар екендігі шығады. Дербес жағдайда, егер $f(z)$ функциясының $|z-z_0|=R$ шеңберінің ішінде ерекше нүктесі болмаса, онда оның Лоран жіктелуі Тейлор қатарына айналады.

$\mathrm{f}(z)$функциясы үшін

$$\mathrm{f}(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

Лоран қатары екі бөліктен тұрады. Лоран қатарының бірінші бөлігі, яғни

$$\mathrm{f}_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

қатары Лоран қатарының *дұрыс бөлігі* деп аталады; бұл қатар $|z-z_0|<R$ шеңберінің ішінде $f_1(z)$ голоморфты функциясына жинақталады. Лоран қатарының екінші бөлігі, яғни

$$\mathrm{f}_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

қатары Лоран қатарының бас бөлігі деп аталады; бұл қатар $|z-z_0|>r$ шеңберінің сыртында $f_2(z)$ голоморфты функциясына жинақталады.

$r<|z-z_0|<R$ сақинасында $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$ қатары $\mathrm{f}(z)=\mathrm{f}_1(z)+\mathrm{f}_2(z)$ голоморфты функциясына жинақталады.

Дербес жағдайда, егер $f(z)$ функциясының $|z-z_0|<R$ шеңберінің ішінде ерекше нүктелері болмаса, онда оның Лоран қатарына жіктелуі Тейлор қатарына айналады.

*1-мысал.* $z_0=0$ нүктесінің аймағында $\mathrm{f}(z)=e^{\frac{1}{z}}$ функциясын Лоран қатарына жіктеңіздер.

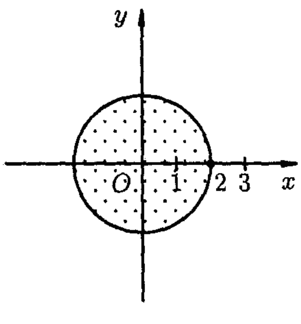
*Шешуі.*

$$e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+...+\frac{u^n}{n!}+...,$$

белгілі жіктеуін пайдаланамыз. $u=\frac{1}{z}$ деп алайық,сонда

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+...+\frac{1}{n!z^n}+..., \qquad z\neq 0.$$

*2-мысал.* $z_0=0$ нүктесінің аймағында $\mathrm{f}(z)=\dfrac{1}{z^2-z-6}$ функциясын Лоран қатарына жіктеңіздер.




*Шешуі.* Функцияның екі ерекше нүктесі бар: $z_1=-2$ және $z_2=3$. Ол а) $0\le|z|<2$; б) $2<|z|<3$; в) $|z|>3$ облыстарында аналитикалық функция .

$\mathrm{f}(z)$ функциясын $\mathrm{f}(z)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+2}\right)$ түріне келтіреміз .

а) $|z|<2$ дөңгелегінде :

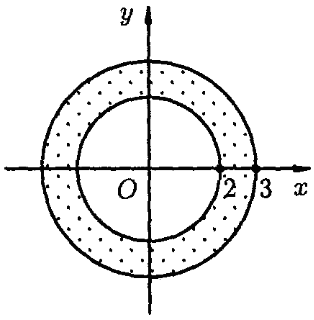
$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+...\right) \ \text{(мұнда } \left|\frac{z}{3}\right|<1\text{, яғни } |z|<3\text{)},$$

$$-\frac{1}{z+2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots\right) \text{ (мұнда } \left|-\frac{z}{2}\right|<1\text{, яғни } |z|<2\text{)},$$

Демек,

$$\mathrm{f}(z)=\frac{1}{z^2-z-6}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n=-\frac{1}{6}+\frac{1}{36}z-\frac{7}{27\cdot 8^2}+\ldots,$$

$\mathrm{f}(z)$функциясының Лоран қатары Тейлор қатарына айналады.




б) $2<|z|<3$ сақинасында:

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\ldots\right) \quad (|z|<3),$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\ldots\right) \quad (|z|>2).$$

Демек,

$$\mathrm{f}(z)=\frac{1}{z^2-z-6}=-\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}\right)$$

в) $|z|>3$облысында:

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\ldots\right) \quad (|z|<3),$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\ldots\right) \quad (|z|<2).$$

Демек,

$$\mathrm{f}(z)=\frac{1}{z^2-z-6}=\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}\right).$$

## 3.2. Бір мәнді функцияның ерекше нүктелерінің классификациясы

**Анықтама.** Егер $z_0$ нүктесінің аймағында $f(z)$ функциясы аналитикалық функция, ал $z_0$ нүктесінде $f(z)$ функциясы аналитикалық емес функция болса, онда $z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының *оңашауланған ерекше нүктесі* деп аталады.

Ерекше нүктелердің үш түрін анықтауға болады:

1. Егер $z_0$ нүктесінде $f(z)$ функциясының ақырлы шегі бар болса, онда бұл нүкте $f(z)$ функциясының *жөнделетін ерекше нүктесі* деп аталады.

2. Егер $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ болса, онда $z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының *полюсы* деп аталады.

Егер $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}$ ($c_{-m}\neq 0$, $c_{-m}\neq\infty$) болса, онда $z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының $m$ *–ретті полюсы* деп аталады. $m=1$ болғанда, $z_0$ нүктесі жай полюс болады.

3. Егер $f(z)$ функциясының $z_0$ нүктесінде ақырлыда, ақырсыз да шегі жоқ болса, онда $z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының *елеулі (маңызды) нүктесі* деп аталады.

$z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының полюсы болуы үшін бұл нүкте $f(z)$ функциясының $\dfrac{1}{f(z)}$ функциясының нөлі болуы қажетті әрі жеткілікті.

**Теорема** (нөл мен полюс арасындағы байланыс туралы). Егер $z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясы үшін $m$ –ретті нөлі (немесе $m$ –ретті полюсы) болса, онда бұл нүкте $\dfrac{1}{f(z)}$ функциясы үшін $m$ –ретті полюсы (немесе $m$ –ретті нөлі) болады.

*Дәлелдеу.* Айталық, $f(z)$ функциясының $z_0$ нүктесінде $m$ –ретті нөлі болсын. Осындай $z_0$ нүктесінің кейбір аймағында $f(z)$ функциясы

$$f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\dots \qquad (3.3)$$

дәрежелік қатармен берілетіні белгілі, мұндағы

$c_m\neq 0$ немесе $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, бұл жағдайда $\varphi(z)$ функциясы $z_0$ нүктесінде голоморфты және нөлге тең емес. (3.3) салдарынан $\dfrac{1}{f(z)}$ кері шама былай беріледі:

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}, \qquad (3.4)$$

әрі $\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$ функциясы $z_0$ нүктесінде голоморфты және нөлден ерекше. Сонда

$$\psi(z)=\psi(z_0)+\psi'(z_0)(z-z_0)+\dots$$

ескеріп, (3.4) теңдігінен $z_0$ $(z\neq z_0)$ нүктесінің аймағында мынаны аламыз:

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{\psi(z_0)}{(z-z_0)^m}+\frac{\psi'(z_0)}{(z-z_0)^{m-1}}+\dots$$

осыдан $\dfrac{1}{f(z)}$ функциясы үшін $z_0$ нүктесі $m$ –ретті полюс болатындығы шығады.

Керісінше, $z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының $m$ –ретті полюсы деп жорып, осы нүктенің аймағында $(z\neq z_0)$ мынадай болатынын табамыз:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}, \qquad (3.5)$$

мұндағы z нүктесі $z_0$ нүктесіне ұмтылғанда $\varphi(z)$функциясы нөлден басқа шекке ұмтылады. Демек, оны $z_0$ нүктесінде голоморфты және нөлге тең емес функция ретінде қарастыруға болады. (3.5) теңдіктің көмегімен

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\cdot\frac{1}{\varphi(z)}=(z-z_0)^m\cdot\psi(z) \qquad (3.6)$$

өрнегін құрып және жоғарыдағы есептеуді қолдана отырып, мынаны табамыз:

$$\frac{1}{f(z)}=\psi(z_0)\cdot(z-z_0)^m+\psi'(z_0)\cdot(z-z_0)^{m+1}+\ldots,$$

мұндағы $\psi(z_0)\neq 0$, ал бұдан, егер $\frac{1}{f(z_0)}=0$ деп ұйғарсақ, $z_0$ нүктесі $\frac{1}{f(z)}$ функциясының $m$ –ретті нөлі болатындығы шығады.■

Егер $f(z)$ функциясын $f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$түріне келтіруге болса, онда $z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының $m$ –ретті полюсы болады, мұндағы $g(z)$ – функциясы $z_0$ нүктесі аналитикалық функция, ал $g(z_0)=c_{-m}\neq 0$.

Функцияның ерекше нүктелерінің түрлерін табу үшін мына төмендегі қорытынды бойынша іздеу керек:

1. $z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының жөнделетін ерекше нүктесі болуы үшін $f(z)$ функциясының $z_0$ нүктесінің аймағында Лоран қатарының негізгі бөлігі жоқ болуы қажет.

2. $z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының полюсы болуы үшін $f(z)$ функциясының $z_0$ нүктесінің аймағында Лоран қатарының негізгі бөлігі ақырлы мүшеден тұруы қажет:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}, \text{ мұндағы } c_{-m}\neq 0.$$

негізгі бөліктегі $z-z_0$-дің ең үлкен дәрежесі полюстің ретін көрсетеді.

3. $z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының елеулі (маңызды) ерекше нүктесі болуы үшін $f(z)$ функциясының $z_0$ нүктесінің аймағында Лоран қатарының негізгі бөлігі ақырсыз көп мүшеден тұруы қажет.

*1-мысал.* $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$ функциясының ерекше нүктелерін табыңыздар.

*Шешуі.* $z=0$ нүктесі берілген функцияның ереше нүктесі болады. $z\to 0$ болғанда берілген функцияның шегін табамыз:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^4}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\frac{1}{z^3}=\infty.$$

Демек, $z=0$ нүктесі полюс болады.

$$\lim_{z\to 0} z^2\frac{\sin z}{z^4}=\infty,\ \lim_{z\to 0} z^3\frac{\sin z}{z^4}=1\neq 0$$

екеніне көз жеткізуге болады.

сонымен, $z=0$ нүктесі үшінші ретті полюс болады.

*2-мысал.* $f(z)=\dfrac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2}$ функциясының ерекше нүктелерін табыңыздар.

*Шешуі.* $z_1=0$ және $z_2=-2$ нүктелері берілген функцияның жай полюстері, ал $z_3=1$ – екінші ретті полюсы.

*3-мысал.* $z=\infty$ нүктесінің аймағында $f(z)=\dfrac{1}{z-3}$, $g(z)=\dfrac{z^2}{1+z^2}$ функцияларының тәртібін анықтаңыздар.

*Шешуі.*

$z=\dfrac{1}{\omega}$ алмастыруын жасаймыз. Сонда $f\left(\dfrac{1}{\omega}\right)=\dfrac{\omega}{1-3\omega}$ болады. $|3\omega|<1$ шарты орындалғанда

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right)=\omega\left(1+3\omega+(3\omega)^2+\ldots\right)$$

жіктелуі болады.

Сонымен

$$\mathrm{f}(z)=\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\ldots\right)=\frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{3^2}{z^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}},\ |z|>3$$

боады.

Сондықтан $z=\infty$ нүктесі жөнделетін ерекше нүкте.

$g(z)=\dfrac{z^2}{1+z^2}$ функциясы үшін $z=\infty$ нүктесі дұрыс нүкте екеніне көз жеткізуге болады.

*4-мысал.* $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z}$ функциясының $z_0=0$ ерекше нүктесінің типін анықтаңыздар.

*Шешуі.* $z_0=0$ ерекше нүктесін сипаттау үшін берілген функцияны $z-$тің дәрежесі бойынша Лоран қатарына жіктейміз.

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1-e^{-z}\right)=\frac{1}{z}\left[1-\left(1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)\right]=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\ldots\right)=1-\frac{z}{2!}-\frac{z^2}{3!}+\ldots.$$

Бұл қатардың негізгі бөлігі жоқ. Олай болса, $z_0=0$ нүктесі жөнделетін ерекше нүкте.

## 3.3. Қалындылар және оларды есептеу

Егер $f(z)$ функциясының $z_0$ оңашаланған ерекше нүктесі түзуленетін тұйық сағат тілінің бағытына қарсы бағытталған L сызығының ішкі нүктесі болып, ол сызықтың бойында және барлық $z \neq z_0$ ішкі нүктелерінде $f(z_0)$ аналитикалық функция болса, онда $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz$ интегралы $f(z)$ функциясының $z_0$ нүктесіне қатысты қалындысы деп аталады да, оны $\operatorname{Res} f(z_0)$ немесе $\operatorname{Res}(f(z); z_0)$ деп белгілейді.

Сонымен,

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz \qquad (3.7)$$

**Коши теоремасы**. Контуры L болатын $\overline{D}$ тұйық облысында аналитикалық $f(z)$ функциясының шектеулі санды $z_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ерекше оқшауланған нүктелері бар бар болса онда

$$\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k) \qquad (3.8)$$

болады.

Бұл теорема функцияның интегралын есептеуге қолданылады. Егер $f(z)$ функциясының $z_0$ нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктесек, онда қатардың $c_{-1}$ коэффициенті $f(z)$ функциясының $z_0$ нүктесіне қатысты қалындысына тең болатынын көреміз:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz \quad \text{немесе} \quad \operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}.$$

Егер $z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының жөнделетін ерекше нүктесі болса, онда

$$\operatorname{Res} f(z_0) = 0.$$

$f(z)$ функциясының n –ретті полюсіндегі қалындысы

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}\left[(z-z_0)f(z)\right]}{dz^{n-1}}$$

формуласымен анықталады.

Егер n=1 болса, онда

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z).$$

Егер $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ бөлшек түрінде беріліп, $z_0 = a$ нүктесі бөлімінің жай нөлі $\psi(a) = 0,\ \psi'(a) \neq 0$; ал $\varphi(a) \neq 0$ болса, онда $z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының жай полюсы болар еді. Бұл жағдайда екі функцияның қатынасы түрінде берілген $f(z)$ функциясының қалындысы

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

теңдігімен табылады.

Егер $z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының елеулі (маңызды) ерекше нүктесі болса, онда $f(z)$ функциясының $z_0$ нүктесіне қатысты қалындысы (3.7) формуласымен есептеледі, яғни $f(z)$ функциясын $z_0$ нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктеу керек.

*1-мысал.* $f(z)=\dfrac{z+2}{z^3-z^4}$ функциясының ерекше нүктелеріндегі қалындысын табыңыздар.

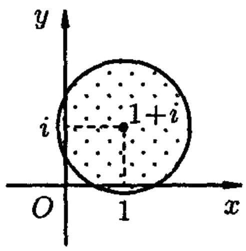
*Шешуі.* $f(z)$ функциясы үшін ерекше нүктелер: $z=1$ – жай полюс, $z_2=0$ – үшінші ретті полюс.

Демек, формула бойынша

$$\operatorname{Res}(f(z);1)=\left.\frac{z+2}{\left(z^3-z^4\right)'}\right|_{z=1}=\frac{1+2}{3-4}=-3.$$

$$\operatorname{Res}(\mathrm{f}(z);0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left((z-0)^3\frac{z+2}{z^3-z^4}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z+2}{1-z}\right)''=\frac{1}{2}\cdot 6=3.$$

*2-мысал.* Интегралды есептеңіздер: $\oint\limits_L\dfrac{dz}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}$, мұндағы L – шеңбер $|\,z-1-i\,|=\sqrt{2}$.




*Шешуі.*

$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}$ функциясы $|z-1-i|<\sqrt{2}$ дөңгелегінде $z_1=i$ жай полюсы және $z_2=1$ екінші ретті полюсы бар. Қалындыны есептеу формулаларын қолданып,

$$\oint\limits_L\frac{dz}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}=2\pi i\left(\operatorname{Res}(\mathrm{f}(z);i)+\operatorname{Res}(\mathrm{f}(z);1)\right)=$$

$$=2\pi i\left[\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}+\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}\right)'\right]=$$

$$=2\pi i\left(\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}+\lim_{z\to 1}\frac{-2z}{\left(z^2+1\right)^2}\right)=2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi i}{2}$$

аламыз.

*3-мысал.* Интегралды есептеңіздер: $\oint\limits_L \frac{e^z}{z^2+4}dz$ , мұндағы L – шеңбер $|z|=3$.

*Шешуі.* Интеграл астындағы функцияның L контурының ішінде екі ерекше нүктесі бар: $z_{1,2}=\pm 2i$ жай полюс. Қалындылар туралы теореманы қолданып,

$$\oint\limits_L \frac{e^z}{z^2+4}dz = 2\pi i(\operatorname{Re}s\, f(z_1)+\operatorname{Re}s\, f(z_2)) = 2\pi i\left(\left.\frac{e^z}{2z}\right|_{z=2i} + \left.\frac{e^z}{2z}\right|_{z=-2i}\right) = 2\pi i\left(\frac{e^{2i}}{4i}-\frac{e^{-2i}}{4i}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^{2i}-e^{-2i}) = \pi i \sin 2 = \pi\, sh\, 2i$$

аламыз.

*4-мысал.* $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}dz$ интегралын есептеңіздер.

*Шешуі.* Интеграл астындағы функцияның $|z|=1$ контурының ішінде жатқан бір ғана $z_1=0$ елеулі нүктесі бар. Осы елеулі нүктенің аймағындағы Лоран қатарын табамыз:

$$\frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z} = \frac{1}{z}\left(z^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)/n!-1\right) = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{2n-2}}-1\right) = \frac{1}{z}\left[\left(z^2+1+\frac{1}{2!z^2}+\right)-1\right]=$$

$$= z+\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{3!z^5}+\ldots$$

Олай болса $\operatorname{Re}sf(z_1)=0$. Сондықтан $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}dz = 2\pi i\cdot 0 = 0$.

## 3.4. Қалындылар теориясын интегралдарды есептеуге қолдану

Бұл пунктте қалындылар теориясының анықталған интегралдарды есептеудегі кейбір қолданылуына тоқталайық.

Нақты осьті қосқанда жоғарғы жарты жазықтықтың барлық нүктелерінде, нақты остің жоғарғы жағында орналасқан ерекше $z_1, z_2, \ldots, z_k$ нүктелерден басқа, голоморфты $f(z)$ функциясы берілсін дейік. Сонымен бірге шектеусіз алыстаған нүкте $f(z)$ функциясының ең болмағанда екінші ретті нөл нүктесі деп жориық. Бұл жағдайда $z_1, z_2, \ldots, z_k$ нүктелеріне қатысты

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{i-1}^{k}\operatorname{Re}sf(z_i)$$

форрмуласы болады.

$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x; \cos x)dz$ түріндегі анықталған интегралын $z = e^{ix}$ алмастыру арқылы $|z| = 1$ тұйық контуры бойымен комплекс айнымалы функциядан алынған интегралға келтіріледі.

*1-мысал*. Қалындының көмегімен интегралды есептеңіздер:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2}.$$

*Шешуі.* $z = e^{ix}$ алмастыруын жасаймыз. Сонда $dz = i\,e^{ix}dx = i\,zdx$,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Демек,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{i\,z\left(3+2\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{(z^2+3z+1)^2} = I.$$

$|z| < 1$ дөңгелегінде $\mathrm{f}(z) = \dfrac{z}{(z^2+3z+1)^2}$ функциясының $z_1 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ екінші ретті полюсі бар.

Формула бойынша

$$\mathrm{Re}\,s\left(f(z); \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\left(\left(z - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \frac{z}{\left(z-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(z-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \frac{\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} - z}{\left(z+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3} = \frac{3}{5\sqrt{5}}.$$

Демек,

$$I = \frac{1}{i}\cdot 2\pi\, i \cdot \frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{25}\pi.$$

2-*мысал* . $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+9)^2}$ интегралын есептеңіздер.

*Шешуі.* $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+9)^2}$ функциясының жоғарғы жарты жазықтықтығында $z_0 = 3i$ екінші ретті полюсы бар және для $|z|$ жеткілікті үлкен мәні үшін $|f(z)| \le \dfrac{M}{|z|^4}$ .

Сондықтан

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)^2}=2\pi\, i\,\mathrm{Res}(\mathrm{f(z)};3\,i)=2\pi\, i\lim_{z\to 3i}\left(\left(z-3\,i\right)^2\frac{1}{(z^2+9)}\right)'=2\pi\, i\lim_{z\to 3i}\left(\frac{1}{(z+3\,i)^2}\right)'=$$

$$=-\lim_{z\to 3\mathrm{i}}\frac{4\pi\, i}{(z+3\,i)^3}=-\frac{4\pi\, i}{(6i)^3}=\frac{\pi}{54}.$$

*3-мысал*. Пуассон интегралын есептеңіздер:

$$I(p)=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2p\cos x+p^2},\quad |\,\mathrm{p}\,|\neq 1.$$

*Шешуі.*

$z=e^{i\,x}$, $dz=i\,e^{i\,x}dx=i\,zdx$ алмастыруы жасайық:

$$\cos x=\frac{e^{i\,x}+e^{-i\,x}}{2}=\frac{z+\dfrac{1}{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},$$

Сонда

$$I(p)=\int_{|\,z\,|=1}\frac{dz}{i\,z(1-p\dfrac{z^2+1}{z}+p^2)}=-i\int_{|\,z\,|=1}\frac{dz}{-pz^2+p^2z+z-p}=i\int_{|\,z\,|=1}\frac{dz}{p(z-p)\left(z-\dfrac{1}{p}\right)}.$$

Кез келген p, $|\,\mathrm{p}\,|\neq 1$үшін $|\,\mathrm{z}\,|<1$ дөңгелегінің ішінде интеграл астындағы функцияның бөлімінің бір ғана түбірі бар. Олай болса, $|\,\mathrm{p}\,|<1$ болғанда:

$$f(z)=\frac{1}{(z-p)\left(z-\dfrac{1}{p}\right)},\qquad I(p)=\frac{2\pi\, i^2}{p}\mathrm{Re}\,s(f(z);\,p)=\frac{2\pi}{1-p^2},$$

ал егер$|\,\mathrm{p}\,|>1$ болса, онда $I(p)=\dfrac{2\pi\, i^2}{p}\mathrm{Re}\,s(f(z);\dfrac{1}{p})=\dfrac{2\pi}{p^2-1}$.

Сонымен,

$$I(p)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{1-p^2} & \text{åãåð}\ \ |\,\mathrm{p}\,|<1,\\[2ex] \dfrac{2\pi}{p^2-1} & \text{åãåð}\ \ |\,\mathrm{p}\,|>1.\end{cases}$$

## III тарауға арналған жаттығулар

**№ 1**. Берілген функцияны z-тің дәрежелері бойынша барлық лорандық жіктелуін табыңыздар:

**1)** $\dfrac{z-2}{2z^3+z^2-z}$.  **2)** $\dfrac{z-2}{4z^4+z^3-2z^2}$.

**3)** $\dfrac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$. **4)** $\dfrac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$.

**5)** $\dfrac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$. **6)** $\dfrac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$.

**№ 2.** Берілген функцияны $z-z_0$-дің дәрежелері бойынша барлық лорандық жіктелуін табыңыздар:

**1)** $\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=2+3i$. **2)** $\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=3+2i$.

**3)** $\dfrac{2z}{z^2-4}$, $z_0=-1+3i$. **4)** $\dfrac{2z}{z^2-4}$, $z_0=2+2i$.

**№ 3.** Берілген функцияны $z_0$ нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктеңіздер:

**1)** $z\cos\dfrac{1}{z-2}$, $z_0=2$. **2)** $\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

**3)** $z\,e^{z/(z-5)}$, $z_0=5$. **4)** $\sin\dfrac{2z}{z+2}$, $z_0=-2$.

**№ 4.** Берілген функцияның $z=0$ ерекше нүктелерінің түрін анықтаңыздар:

**1)** $\dfrac{e^{9z}-1}{\sin z-z+z^3/6}$. **2)** $z^3e^{7/z^2}$.

**3)** $\dfrac{\sin 8z-6z}{\cos z-1+z^2/2}$. **4)** $\dfrac{\cos 7z-1}{shz-z-z^3/6}$.

**5)** $\dfrac{sh6z-6z}{chz-1-z^2/2}$. **6)** $\dfrac{ch5z-1}{e^z-1+z}$.

**№ 5.** Берілген функцияның оңашаланған ерекше нүктелерін табыңдар және олардың түрін анықтаңдар:

**1)** $e^{1/z}/\sin(1/z)$ . **2)** $1/\cos z$.

**3)** $\mathrm{tg}^2 z$ . **4)** $ze^{1/z}\,\mathrm{tg}\, z$.

**5)** $\mathrm{tg}\,(1/z)$. **6)** $\mathrm{ctg}(1/z)$ .

**№ 6.** Интегралды есептеңіздер:

**1)** $\displaystyle\oint_{|z|=1/2}\frac{dz}{z(z^2+1)}$. **2)** $\displaystyle\oint_{|z-1-i|=5/4}\frac{2dz}{z^2(z-1)}$.

**3)** $\displaystyle\oint_{|z-i|=3/2}\frac{dz}{z(z^2+4)}$. **4)** $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$ .

**5)** $\oint\limits_{|z-3|=1/2} \dfrac{e^z dz}{\sin z}$. **6)** $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \dfrac{z(2+\sin z)}{\sin z} dz$.

**№ 7.** Интегралды есептеңіздер:

**1)** $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz$. **2)** $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{2 - z^2 + 3z^3}{4z^3} dz$.

**3)** $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{e^{1/z} + 1}{z} dz$. **4)** $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin z^3}{1-\cos z} dz$.

**5)** $\oint\limits_{|z|=1/3} \dfrac{1 - 2z + 3z^2 + 4z^3}{2z^2} dz$. **6)** $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{1 - \cos z^2}{z^2} dz$.

**№ 8.** Интегралды есептеңіздер.

**1)** $\oint\limits_{|z|=0,2} \dfrac{2\pi z - \sin 3\pi z}{z^2 - sh^2\pi^2 z} dz$. **2)** $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos 3z - 1 + 9z^2/2}{z^4 sh\frac{9}{4}z} dz$.

**3)** $\oint\limits_{|z|=0,5} \dfrac{sh 2\pi z - 2\pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi^2 z}{3}} dz$. **4)** $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{ch 3z - 1 + 9z^2/2}{z^4 \sin \frac{9}{8} z} dz$.

**№ 9.** Интегралды есептеңіздер.

**1)** $\oint\limits_{|z+i|=3} \left( \dfrac{4\sin \frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)} + \dfrac{\pi i}{e^{\pi z/2} + i} \right) dz$.

**2)** $\oint\limits_{|z+6|=2} \left( z e^{\frac{1}{z+6}} + \dfrac{2\cos(\pi z/5)}{(z+5)^2(z+3)} \right) dz$.

**3)** $\oint\limits_{|z-i|=3} \left( \dfrac{\pi}{e^{\pi z/2} + i} - \dfrac{2sh\frac{\pi i z}{4+2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)} \right) dz$.

**4)** $\oint\limits_{|z+2|=2} \left( z \operatorname{ch} \dfrac{1}{z+2} - \dfrac{2\sin(\pi z/2)}{(z+1)^2(z-1)} \right) dz$.

**№ 10.** Интегралды есептеңіздер:

**1)** $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{2 + \sqrt{3}\sin t}$. **2)** $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{4 + \sqrt{15}\sin t}$.

**3)** $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{5 + 2\sqrt{6}\sin t}$. **4)** $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{6 + \sqrt{35}\sin t}$.

**5)** $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}$.  **6)** $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{5-4\sin t}$.

**№11.** Интегралды есептеңіздер:

**1)** $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\sqrt{10/11}\cos t)^2}$.  **2)** $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+\cos t)^2}$.

**3)** $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\sqrt{6/7}\cos t)^2}$.  **4)** $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t)^2}$.

**№ 12.** Интегралды есептеңіздер:

**1)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$.  **2)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx$.

**3)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$.  **4)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$.

**5)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$.  **6)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$.

**№ 13.** Интегралды есептеңіздер:

**1)** $\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}dx$.  **2)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx$.

**3)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx$.  **4)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{(x^2+1)^2}dx$.

**5)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}dx$.  **6)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin\frac{x}{2}}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$.

## Өзін-өзі тексеру үшін тест тапсырмалары

1. $\int\limits_{AB} z^2 dz$ интегралын есептеңіз, мұндағы AB – түзудің бөлігі. $z_A=1$, $z_B=i$

A) $-(i+1)/3$;
B) $(i-1)/3$;
C) $(1-i)/3$;
D) 0 ;
E) $(i+1)/3$;

2. $\int\limits_{\gamma} z^{10} dz$ интегралын есептеңіз, мұндағы $\gamma$ - эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

A) $\pi a$ b;
B) $ab$ ;
C) 0 ;
D) 1 ;
E) $a + b$ ;

3. $\int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{z}^2}$ интегралын есептеңіз, мұндағы $\gamma$ - шеңбер $(x-4)^2+(y-3)^2=1$

A) 5 ;
B) 4;
C) 0 ;
D) 3;
E) 2;

4. $\int\limits_{i}^{1+i} z dz$ интегралын есептеңіз .

A) $1/2 + 2i$ ;
B) $1/2 + i$ ;
C) $1/2 - i$ ;
D) 0 ;
E) $2i + 1$ ;

5. $\int\limits_{i}^{2+i} z dz$ интегралын есептеңіз .

A) $2 + 2i$ ;
B) $2 + i$ ;
C) $2 - i$ ;
D) 0 ;
E) $2i + 1$ ;

6. $\int\limits_{1}^{i} z dz$ интегралын есептеңіз .

A) $1/2 + 2i$ ;
B) $1/2 + i$ ;
C) $1/2 - i$ ;
D) - 1 ;
E) $2i + 1$ ;

7. $\int_{1}^{-i} z^{2}dz$ интегралын есептеңіз .

A) $-(i+1)/3$ ;
B) $(i-1)/3$ ;
C) $(1-i)/3$;
D) 0 ;
E) $(i+1)/3$;

8. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ қатарының түрін анықта.

A) Абель теоремасы;
B) Тейлор қатары;
C) Маклорен қатары;
D) Сан қатары ;
E) Лоран қатары;

9. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ қатарының түрін анықта.

A) Абель теоремасы;
B) Тейлор қатары;
C) Маклорен қатары;
D) Сан қатары ;
E) Лоран қатары;

10. Егер $f(z_0) = 0$ болса , онда $z_0$ нүктесі . . . деп аталады.

A) ерекше нүкте;
B) жөнделетін ерекше нүкте;
C) маңызды ерекше нүкте;
D) f(z) функциясының нөлі;
E) оқшауланған ерекше нүкте;

11. Егер f(z) функциясы $z_0$ нүктесінде анықталмаған және $z_0$ нүктесінің аймағында басқа нүктелерде аналитикалық функция болса, онда $z_0$ нүктесі f(z) функциясының . . . деп аталады.

A) ерекше нүктесі;
B) жөнделетін ерекше нүктесі;
C) маңызды ерекше нүктесі;
D) f(z) функциясының нөлі;
E) оқшауланған ерекше нүктесі;

12. Қатардың жинақталуының қажетті шарты.

A) $\lim_{n\to 0} z_n = 0$;

B) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$;

C) $\lim\limits_{n\to 0} z_n = \infty$;

D) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$;

E) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$;

13. $l$ контурымен шектелген D тұйық облысында f(z) аналитикалық функциясының шектеулі $z_1, z_2, \dots z_n$ оқшауланған ерекше нүктелері болса, онда ...

A) $res\ f(z_n) = \oint\limits_L f(z)dz$;

B) $res\ f(z_n) = 2\pi i \oint\limits_L f(z)dz$;

C) $\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} res\ f(z_k)$;

D) $\oint\limits_L f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} res\ f(z_k)$;

E) $\oint\limits_L f(z)dz = \dfrac{1}{2\pi i} \sum\limits_{k=1}^{n} res\ f(z_k)$;

14. $res\left(\dfrac{\varphi(z)}{g(z)}; z_0\right)$ мәні неге тең?

A) $\dfrac{\varphi(z_0)}{g(z_0)}$;

B) $\dfrac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}$;

C) $\dfrac{\varphi'(z_0)}{g(z_0)}$;

D) $\dfrac{\varphi'(z_0)}{g'(z_0)}$;

E) 0;

15. $residue$ – қай тілден алынған, қандай мағына береді?

A) француз «қалдық»;

B) грек «қосынды»;

C) француз «бүтін бөлігі»;

D) латын «бөлшек»;

E) грек «айырма»;

16. $f(z)\dfrac{1}{(z-a)^3}$ функциясының z = a нүктесінің типін анықта.

A) жай полюс;

B) маңызды ерекше нүкте;

C) үшінші ретті полюс;
D) жөнделетін ерекше нүкте;
E) екінші ретті полюс;

17. $f(z)\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ функциясының z = 2 ерекше нүктесіндегі қалындысын тап.

A) 4;
B) $\infty$;
C) 2;
D) -2;
E) 0;

18. Егер f(z) функциясы бір байланысты облыста аналитикалық функция болып, D облысында жатқан L тұйық тегіс сызық болса, онда $\oint\limits_L f(z)dz = 0$ болады. Бұл кімнің теоремасы?

A) Абель;
B) Коши;
C) Лейбниц;
D) Кошидің интегралдық;
E) Ньютон- Лейбниц;

19. $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) - F(z_0) -$ бұл кімнің формуласы?

A) Абель;
B) Коши;
C) Лейбниц;
D) Кошидің интегралдық;
E) Ньютон- Лейбниц;

20. $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz -$ бұл кімнің формуласы?

A) Ньютон- Лейбниц;
B) Грин;
C) Лейбниц;
D) Кошидің интегралдық;
E) Абель;

21. Егер D облысындағы кез-келген z үшін $F'(z) = f(z)$ теңдігі орындалса, онда F(z) функциясы f(z) функциясының . . . деп атайды.

A) анықталған интеграл;
B) меншіксіз интеграл;
C) туынды;

D)  анықталмаған интеграл;
E)  алғашқы образы;

22. Егер  f(z) функциясының $z_0$  нүктесінде n ретті туындысы бар болса , онда ...

A) $f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$;

B) $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$;

C) $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n}}dz$;

D) $f^{(n)}(z_0) = \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$;

E) $f^{(n)}(z_0) = \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n}}dz$;

23. $u_1+u_2+ \ldots + u_n + \ldots$ қатарының мүшелері комплекс сан болса, онда ол комплекс облыстағы ... қатары деп атайды.

A)  сандық;
B)  дәрежелік;
C)  таңбасы ауыспалы;
D)  функцияналдық;
E)  дәрежелік-сандық;

24.  Егер  $\lim_{z\to z_0} f(z)$  шегі болмаса , онда $z_0$  нүктесі ... болады.

A)  полюс;
B)  m- ретті полюс;
C)  жай полюс;
D)  жөнделетін ерекше нүкте;
E)  маңызды ерекше нүкте;

25. Егер $z_0$ нүктесі f(z) функциясының m – ретті полюсі болса, онда $z_0$ нүктесі 1/f(z) функциясының m – ретті ... болады.

A)  нөлі;
B)  полюсі;
C)  туындысы;
D) дифференциалы;
E)  ерекше нүкте;

26.  Егер f(z) функциясының Лоран қатарына жіктелуінде z – $z_0$ – дің теріс дәрежесінен тұратын мүшелері болмаса, онда $z_0$ нүктесі ... нүкте болады.

A) үзіліссіз;
B) жөнделетін ерекше;
C) маңызды ерекше;

D) m – ретті полюс;
E) полюс;

27. Егер f(z) функциясының Лоран қатарына жіктелуінде z – $z_0$ – дің теріс дәрежесінен тұратын m мүшесі болса, онда $z_0$ нүктесі ... болады.

A) үзіліссіз;
B) жөнделетін ерекше;
C) маңызды ерекше;
D) m – ретті полюс;
E) полюс;

28. Егер f(z) функциясының Лоран қатарына жіктелуінде (z – $z_0$) – дің теріс дәрежесінен тұратын мүшелері шексіз көп болса, онда $z_0$ нүктесі ... болады.

A) үзіліссіз;
B) жөнделетін ерекше;
C) маңызды ерекше;
D) m – ретті полюс;
E) полюс;

29. $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z}$ функцияның $z_0$=0 ерекше нүктесінің түрін анықта.

A) маңызды;
B) жөнделетін;
C) жай полюс;
D) 2-ретті полюс;
E) оқшауланған;

30. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z-2}$ функцияның $z_0$=2 нүктесінің қалындысын тап.

A) 4;
B) 0;
C) $\infty$;
D) 5;
E) 1;

## Әдебиеттер


1. Демин С.Е., Демина Е.Л. Теория функций комплексного переменного.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука », 1979.
3. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М., «Наука », 1978.
4. Волковыский Л.И., Лунц Г.А., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., «Наука », 1975.
5. П.Е.Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. М., «Высшая школа», часть 2, 1999.
6. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике. М., «Наука», 1986.
7. Дмитрий Письменный Конспект лекций по высшей математике. Москва Айрис Пресс, ч.2, 2003.

**Мазмұны**