МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КАСПИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕХНОЛОГИЙ И ИНЖИНИРИНГА ИМЕНИ Ш. ЕСЕНОВА
ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИИ

Нур Гулайым Кожабайкызы

Теория и методика изучения истории математики в школе

Учебное пособие для студентов педагогических специальностей

Актау 2010

УДК 373 : 51 (075.8)
ББК 22.1 я73
Н90

Рецензенты: М. Х. Каламкалиев – доктор педагогических наук, профессор;
Ж. А. Караев – доктор педагогических наук, профессор;

Нур Гулайым Кожабайкызы.
Н90 Теория и методика изучения истории математики в школе : учебное пособие для студентов педагогических специальностей.- Актау, 2010. – 176 с.

ISBN 978-601-226-073-1

В данной работе рассмотрена проблема использования истории науки в процессе преподавания математики в школе как средство гуманизации математического образования.

В учебном пособии описаны пути формирования математики, исследуются закономерности её развития. Как учебное пособие данная работа содержит методические рекомендации по использованию историко-математических материалов в общеобразовательной школе в условиях гуманизации образования.

Материал изложен в соответствии с Государственным стандартом по специальности «Математика» в рамках дисциплины «Методология и история математики».

Учебное пособие предназначено для учителей школ, студентов и преподавателей педагогических институтов.

ББК 22.1 я73

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом Каспийского Государственного университета имени Ш. Есенова

ISBN 978-601-226-073-1

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены вопросы изучения истории науки как средство гуманизации математического образования. В нем описываются пути формирования математики, исследуются закономерности её развития от первых древних цивилизаций до второй половины XIX века. Описана история развития математики в Европе. Отдельная глава посвящена китайской и индийской математике, чьи пути развития проходили вдали от западной науки. Уделено важное место развитию арабской математики, которая часто остается за рамками рассмотрения. В книге содержатся краткие биографии ученых-творцов математики. В отдельные главы выделены разделы по истории фундаментальных математических дисциплин, которые изучаются в школе – это история арифметики, геометрии, алгебры и математического анализа.

История математики необходима педагогу не только для того, чтобы ознакомиться с основными вехами развития математики, но и для того, чтобы увидеть пути формирования основных математических понятий и самих математических дисциплин. Только история науки способна вскрыть тот медленный и сложный процесс, который проделало человечество от «полного незнания к совершенству знаний», а от него к прогрессу. Этот путь исключительно важно пройти каждому педагогу, поскольку его понимание абсолютно необходимо для эмоционального и рационального воздействия на учащихся.

Исчерпывающая история невозможна, поэтому в данном учебном пособии изложены те вопросы истории науки, которые заинтересуют и будут полезны студентам, учителям математики. Зная лишь историю математики, можно понять, почему современная математика достигла столь высоких успехов.

В пособии даны методические рекомендации по использованию истории математики в школе. Описаны пути реализации принципа историзма в обучении математики, раскрыты вопросы использования историко-математических сведений для активизации познавательной деятельности учащихся и организации их самостоятельной работы на основе использования историко-математических материалов. Рассмотрены вопросы совершенствования историко-методической подготовки будущих учителей математики как подвида его профессиональной подготовки.

Материалы учебного пособия могут быть использованы студентами педагогических специальностей при изучении дисциплин «История математики» и «Теория и методика обучения математики».

Учебное пособие обращено к учителям математики, студентам и преподавателям педагогических факультетов вузов.

ГЛАВА 1. ПРИНЦИП ИСТОРИЗМА В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ

1.1. О роли истории науки в развитии математики

Наука всегда усваивается полнее, когда она рассматривается в состоянии рождения.

Максвелл

Для чего необходимо изучать историю науки?

Чтобы иметь возможность подняться к истокам совершенных фундаментальных идей, проследить их эволюцию, а порой, и сложную судьбу путь через отрицание и возрождение понять закономерность этого процесса; узнать, как шло человечество к раскрытию тайн Вселенной. Какие препятствия преодолевало на этом пути; понять что ускоряло, а что тормозило научный прогресс в отдельные эпохи и на протяжении всей истории человечества. Изучение истории науки помогает лучше ориентироваться и в современных событиях, и в тенденциях развития знаний, т.е. видеть перспективы науки. Как всякий предмет научного исследования история науки требует не только накопления фактического материала, его систематического изложения, но и теоретического анализа для выявления закономерностей развития науки.

История науки заслуживает математической разработки так как:

- история математики дает нам широкую картину развитая самой математики - возникновения ее понятий и проблем, связь с практикой, стремление к общности и завершенности научных положений;
- история математики является частью всеобщей истории и рассказывает о том, как человечество самим ходом событий было вынуждено развивать математику и использовать ее выводы;
- история математики является одним из условий современного развития математики;
- она является базой научной методологии и одним из важнейших источников анализа процесса мышления;
- история математики служит совершенствованию преподавания математики;
- история математики является частью общечеловеческой культуры.

История математики дает широкую картину развития математики на протяжении тысячелетий. Она сообщает, как люди учились считать и как постепенно зарождались правила арифметики. Она учит тому, какой мучительный путь прошло человечество, прежде чем появилась позиционная система исчисления - один из величайших завоеваний человеческого разума. История науки рассказывает о том, как на базе практических проблем - измерения площади участков, длин расстояний, объемов зернохранилищ - зародились начатки геометрии и как постепенно создавались основы абстрактной науки.

Для прогресса человечества огромную роль сыграло то, что в Древней Греции математика из сборника практических рецептов превратилась в строгую дедуктивную науку. На ход истории открытие законов Ньютона и создание математического анализа оказали исключительное влияние, и современный научно-технический прогресс был бы без них попросту невозможен [1].

1.2. Творчество в области истории математики

Весьма полезно познать истинное происхождение замечательных открытий, особенно таких, которые были сделаны не случайно, а силою мысли. Это приносит пользу не столько тем, что история воздает каждому свое и побуждает других добиваться таких же похвал, сколько тем, что познание метода на выдающихся примерах ведет к развитию искусства открытия.

Г.Лейбниц.

Интересные и многообещающие области самостоятельной творческой деятельности связаны для математика с исследованием исторических закономерностей развития математики. История математики представляет собой увлекательную ветвь научных исследований, в которой еще очень много неизвестного и, как оказывается, мало завершенного. Причина этого в том, что каждая эпоха выдвигает присущие ей вопросы, на которые, естественно, предшествующие эпохи не могли дать ответа.

Для всех математиков характерна ***дерзость ума***. Математики не любят, когда им о чем-нибудь рассказывают, они сами хотят дойти до всего. Как писал великий философ Монтень в своем труде «О педантизме»: «Не представляю себе, как можно довольствоваться знаниями, полученными из вторых рук; хотя чужое знание может нас кое-чему научить, мудр бываешь лишь своей собственной мудростью». У юных математиков дерзость ума проявляется особенно сильно. Если Вы, преподавая геометрию девяти-десятилетним ребятам, расскажите им, что никто еще не смог разделить угол на три равные части с помощью линейки и циркуля, то Вы непременно увидите, что один два ученика останутся после уроков и будут пытаться найти решение. То обстоятельство, что в течение двух тысяч лет никто не решил эту задачу, не помешает им надеяться, что они смогут сделать это. Это не свидетельство их самонадеянности. Они просто готовы принять любой вызов. Хороший ученик всегда старается забежать вперед.

Желание исследовать является второй отличительной чертой математика. Эта одна из сил, содействующих росту математика. Математик получает удовольствие от знаний, которыми овладел, и всегда стремится к новым знаниям.

Третье необходимое качество математика ***интерес к закономерностям.*** Там, где есть закономерность, есть и смысл. Например, из четырех камней можно сложить квадрат, а из пяти - нельзя. Даже в начальной школе можно развить навык наблюдения за закономерностями. Большая часть ранних работ Гаусса явилась следствием его привычки делать вычисления и анализировать полученные результаты [2].

Думаем, что среди учащихся найдутся такие, которые (испытают) получат огромную интеллектуальную радость и большое внутреннее удовлетворение, глубокое оттого, что ему удалось узнать нечто новое из прошлого математики и тем самым полнее увидеть закономерности и развития.

Выявление и развитие способностей учащихся, привлечение их к творческому труду - одна из основных задач школы. Молодой нашей республике нужны творцы нового во всех областях деятельности, в том числе и в математике.

Но мало выявить способности, необходимо создать условия для их развития, для творческого поиска [3].

Жизнь - изумительный дар природы, но чтобы она приносила радость, нужно научиться трудиться с увлечением, стремиться обеспечить свой труд и усовершенствовать его привычные формы. Привычка мыслить, открывать новое превратит труд во внутреннюю потребность.

Важно учить молодежь творческому труду, привить ей стремление к познанию нового и неизвестного.

История как говорил великий Г. Лейбниц, учит самому искусству научного открытия. Важно учить молодежь творческому труду, привить ей стремление к познанию нового и неизвестного.

История как говорил великий Г. Лейбниц, учит самому искусству научного открытия.

Первая школа, где была выработана концепция математического образования, была создана чуть более 1200 лет тому назад (в 795 году). Это произошло при Карле Великом». Он повелел открыть в городе Аахене школу и пригласил для её организации монаха из Британии по фамилии Алкуин. Алкуин выполнил поручение и написал первую в средневековой Европе учебную книгу по математике, озаглавленную «Задачи для изощрения ума».

Задачей под номером 18 в этой книге была следующая. «Человеку надо перевезти волка, козу и капусту через реку. Но лодка не позволяет перевезти сразу всех троих, можно взять только двух. И нельзя оставлять вместе на берегу без присмотра волка и козу, козу и капусту. Как следует поступить?»

С тех пор эта задача кочует из одной занимательной книги по математики в другую.

«Изощрение ума» - безусловная цель математического образования любого уровня. В частности, того образования, которое осуществляется в гуманитарных и технических вузах, не говоря уже об университетах.

Ещё одной важнейшей задачи математического образования является воспитание в человеке способности понимать смысл поставленной перед ним задачи, умение правильно и логично рассуждать. В 1267 году знаменитый английский философ Роджер Бекон сказал: «Кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества».

1. 3. Использование истории математики в процессе преподавания

Только история науки способна вскрыть тот медленный и сложный процесс, который проделало человечество от «полного незнания к совершенству знаний», а от него к прогрессу.

Математика как учебный предмет имеет большие возможности для раскрытия роли научных методов в познании окружающего нас мира. Одна из таких возможностей является введение в курс математики средней школы историко-математических материалов.

Одним из недостатков преподавания математики в школе можно считать излишнюю формализацию знаний, полный отказ от принципа историзма в объяснении тех или иных математических положений. Многие казахстанские ученые - сторонники исторического подхода к изучению основ математики исследовали возможность, целесообразность и необходимость введения историко-математических материалов в школьный курс (что и составляет принцип историзма). Однако, осуществление полученных рекомендаций в учебниках и учебных пособиях не находило достаточной реализации.

Совершая экскурсии в историю математики, рассказывая об основных понятиях науки, учитель должен ставить вопрос перед учащимися: «Что явилось в реальном мире прообразом этих понятий?» Для того чтобы понимание учащимися опытного происхождения математических понятий переросло в мировоззрение, необходимо останавливаться на этих вопросах неоднократно, систематически.

Как появилось понятие числа? Как человечество от понятия целого числа перешло к понятию рационального и иррационального числа?

Необходимо останавливать внимание учащихся на том, что, возникнув из потребностей жизни, практики, наука стала развиваться и независимо от нее. Возникали теории, которые долгое время относились только к «Чистой» математике и не имели никакого практического применения. Но развитие производства, других наук всегда приводило к тому, что эти теории находили применение.

Так теория вероятностей возникла как теория игры в кости, а теперь без нее не обходится не только физика, но и экономика, лингвистика, социология и т.д. Неевклидовы геометрии, открытые за письменным столом,

находят решение и применение в мореплавании, физике, астрономии. Исследования конических сечений, служимых «гимнастикой для ума» в древней Греции и долгое время не имели практического применения, пока Кеплер не открыл законы движения небесных тел,

В дальнейшем полезно остановиться на истории возникновения и роли системы аксиом на том, что любая наука не может быть построена на пустом месте, для этого необходим прочный фундамент. Фундаментом математики является ее основные понятия и система аксиом. Учащиеся с интересом слушают учителя о том, что система аксиом должно удовлетворять трем требованиям: быть полной, непротиворечивой, независимой. Все эти общие положения нужно иллюстрировать не один раз при изучении, как планиметрии, так и стереометрии [4].

В связи с темой «Аксиомы» в IX классе следует остановиться на пятом постулате Евклида (аксиоме параллельности), истории создании геометрии Н.И.Лобачевского. Хорошей иллюстрацией объективности науки, как результата отражения действительности является то, что многие открытие в математике делались одновременно разными людьми, часто живущими в разных странах. Учащимся можно объяснить, что только то, что существует независимо от нашего сознания, может быть обнаружено, открыто несколькими людьми сразу.

А сколько человек в классе могут решить одним и тем же способом задачу, но никогда не сочинят одинаковых стихов. В современной математике также имеются факты одновременных открытий. Так известный американский математик Н.Винер - «отец кибернетики» писал о том, что академик Колмогоров и он в течении 20-30 лет работали в одной области математики [5].

В X классе в связи с понятием интеграла можно остановиться на истории этого вопроса (открытие И.Ньютона и Г.Лейбница в этой области). Очень нравится учащимся, когда говорят им о том, что они тоже на каждом уроке делают маленькие открытия уже известных истин, когда решают задачи или разбирают новый материал под руководством учителя.

Практика показала, что большую пользу может принести введение элементов историзма в преподавание математики, в школе привлекая сведения по истории науки, учитель может облегчить учащимся усвоение основной программы, оживив процесс обучения. Действительно самая сложная теория становится более понятной, если представляешь, какие практические потребности вызвали ее к жизни, и каким путем она развивалась.

Вопрос об использовании элементов истории в преподавании математики ставился и обсуждался еще в конце XIX века [6].

В разное время и по- разному определяли задачи введения элементов истории математики в преподавании. Однако можно выделить следующие задачи:

- повышение интереса учащихся к изучению математики и углубления понимания ими изучаемого фактического материала;

- расширение умственного кругозора учащихся и повышения их общей культуры;
- знакомство с историей математики Казахстана служит общим целям воспитания учащихся.

В программе по математике для общеобразовательной школы в разделе: Общие цели и задачи - обучения математике записано: «В содержание школьного курса должны органически вплетаться богатые в эмоциональном отношении эпизоды истории науки, знакомящие школьника с трудной борьбой идей, судьбами великих открытий, именами людей, творивших науку» [7].

Однако в программе нет рекомендаций, какие сведения из истории математики сообщать учащимся, в каких классах, в каком объеме, по каким разделам. Школьные учебники такие сведения содержат мало. Но вместе с тем просто сообщений сведений по истории математики недостаточно, необходимо систематическое планомерное сплетение фактов из истории науки и изложение программного материала. И если такую систематическую работу проводить с V класса, то со временем исторический материал, тоньше и глубже раскрывающий изучаемое, станет для учащихся необходимой частью урока.

Большую методическую трудность представляет обзор материала по истории математики и ее использование в том или другом классе. Думаем, что следует:

- руководствоваться программой по математике;
- учитывать возрастные особенности учащихся.

Содержание, объем, стиль изложения вопросов истории математики в разных классах различен

Если, например, в V-VI классах - начальные сведения из истории математики это:

- элементарные вопросы развития счета;
- математические терминологии и символики;
- возникновение мер;
- способы измерения и создание простейших инструментов.

Стержневые вопросы истории математики (можно частично затронуть):

- развитие понятия числа;
- происхождение и школьные аксиомы, развития алгебры и геометрии;
- начальные сведения из истории уравнений.

То в VII-VIII классах можно ограничиться начальными сведениями, связанные с программным материалом.

К некоторым вопросам истории математики приходится возвращаться в курсе средней школы по несколько раз.

Трудным кажется, вопрос, как найти на уроке необходимое время. Вопрос времени и формы использования элементов истории подчинены главному: связи изучаемой в школе математики с ее историей: краткая беседа, экскурс, лаконичная справка, решение исторической задачи, показ и разъяснение рисунка, эмоциональный рассказ учителя, заранее подготовленное сообщение учащегося. Если учитель сумеет исторический факт преподнести в тесной связи с излагаемым на уроке практическим материалом, то повышается интерес учащихся к математике, повышается эффективность обучения [8].

1.4. Классики математики

Если я увидел больше других, то только потому, что стоял на плечах гигантов.

И. Ньютон

История математики - это, прежде всего история развития математических идей. Однако носителями этих идей в каждую эпоху были выдающиеся ученые, которых мы называем классиками науки [9].

Изучая их наследие, мы, получаем возможность проиллюстрировать общий ход развития математики конкретными примерами, наглядно показать связь математики с жизнью на разных этапах истории. Именно поэтому академик С.И.Вавилов писал:

«История науки не может ограничиться истории идей - в равной мере она должна касаться живых людей с их особенностями, талантами, зависимостью от социальных условий, страны и эпохи».

История науки может и должна вводить учащихся в творческую лабораторию ученого и показывать, как постепенно возникают формулировки результатов и идей доказательств.

Для воспитания молодого поколения история науки важна сама по себе. На примерах прошлого следует учить молодежь страсти, к поиску нового, к творчеству, научной честности. Пример великих представителей науки прошлого их упорство в преодолении трудностей способны вдохновить молодых людей. Такое воспитание может натолкнуть юношество на выбор научной карьеры, приучить к упорной работе, поиску.

Из книги по истории математики учащийся узнает о жизни, творчестве классиков математики. Узнает многое - не только по обилию фактов, но и по их значению для истории науки и истории цивилизации в целом. И все же биография каждого ученого заставляет задуматься, причем вызывает не только, и даже, не столько образы прошлого, столько картины будущего и в этой связи попытается ответить на вопрос, что означает личность ученого, его жизненный путь и развитие их идей для истории математики.

Математика является неотъемлемой частью человеческой культуры, т.е. участвует в формировании духовного мира человечества. Равно как и искусство. И поэтому каждому человеку полезно знать некоторые фрагменты истории этой науки, имена её творцов, сущность их вклада в неё, ход научной эволюции, преодоление ошибок. Преподавание должно воспитывать уважение к авторитетам, но воспитывать и творческий дух, и смелость в отстаивании истины, свойственной великим творцам.

Следует помнить слова Галилея: «Авторитет, основанный на мнении тысячи в вопросах науки, не стоит искры разума одного единственного», отмечал в своём выступлении академик РАН В.Тихомиров в Словении на международной конференции «О некоторых проблемах математического образования»

Особое внимание исследователей и широкой математической общественности обращено в последние годы на персоналистический компонент истории математического образования в стране.

Возникает противоречие между значительным интересом научного сообщества к творческой биографии и научному наследию учёного и практической невозможностью удовлетворения этого интереса вследствие отсутствия профессионального анализа научного и педагогического творчества этого выдающегося ученого.

Историко-биографические книги часто характеризуют роль выдающегося математика в развитии отечественного математического образования. Однако в публикациях подобного рода мы не встречали профессионального анализа методического наследия выдающихся математиков. Исследование эффективности его методических идей в современной практике обучения математике. Методическое творчество явно или неявно очень часто занимает значительное место в их деятельности

Этот факт актуализирует необходимость исследований, посвященных истории отечественного математического образования. Какими путями оно развивалось? Как влияла на этот процесс подготовка учителя математики? Какова роль в нем математической науки и ученых-математиков, преподавателей высших учебных заведений? Как зарождаются и развиваются методические идеи? Эти и другие глобальные проблемы, связанные с историей математического образования, несомненно, актуальны для современного этапа его развития. Они позволяют не только выявить факторы, способствовавшие его эффективности в ретроспективе, но и наметить перспективные направления совершенствования математического образования.

ГЛАВА 2. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

1. АРИФМЕТИКА

1.1. История арифметики

Из всех искусств не осталось бы ни единого. Все они совершенно исчезли бы, если бы было исключено искусство арифметики.

Платон

Счет вычисления - основа порядка в голове.

Песталоцци И.

С арифметики - науки о числе начинается наше знакомство с математикой. С арифметикой мы входим, как говорил М. Ломоносов, во «врата учености» и начинаем наш долгий и нелегкий, но увлекательный путь познания мира.

Слово «арифметика» - происходит от греческого *arithmos* (арифмус), что значит «число».

Эта наука изучает действия над числами, различные правила обращения с ними, учит решать задачи, сводящиеся к сложению, вычитанию, умножению и делению чисел.

Арифметика появилась тогда, когда возникла необходимость считать предметы, измерять земельные участки, делить добычу, вести счет времени. Арифметика развивалась медленно и долго. Арифметика возникла в странах Древнего Востока: Вавилоне, Китае, Индии, Египте.

Накопленные в странах Древнего Востока знания были развиты и продолжены учеными Древней Греции. Много ученых занималось арифметикой в античном мире. Это: Анаксагор и Зенон, Евклид и Архимед, Аратосфен и Диофант.

Яркой звездой сверкает имя Пифагора. Пифагорейцы (ученики и последователи Пифагора) преклонялись перед числами, считая, что в них заключена вся гармония мира.

О большом значении, которое получила в Древней Греции арифметика, можно судить и по мифу о Прометее, имя которого связывается с появлением у людей культуры: легендарный титан Прометей, похитивший огонь у богов и принесший его людям, изобрел числа.

В средние века развитие арифметики также связано с Востоком: Индией, странами арабского мира и Средней Азией. От индейцев пришли к нам цифры, которыми мы пользуемся, ***ноль*** и ***позиционная система счисления***; от аль-Каши (XV веке), работавшего в Самаркандской обсерватории Улугбека - десятичные дроби.

От ***практической*** арифметики, названной в Греции «логистикой» начинается отделяться ***теоретическая*** арифметика, которая содержала, не только правила о том, как решать те или иные задачи, но и логическое обоснование правил, ***доказательства***.

Большой вклад в развитие арифметики в VII-XV вв. внесли ученые стран ислама: аль Хорезми, Омар Хайям, аль Караджи, Насирэддни ат Туей, ал Каши, писавшие свои труды на арабском языке [10].

Начиная с XVI в. ведущую роль в математической науке занимают европейские ученые. Вводятся постепенно ныне употребляемые новые арифметические обозначения и знаки, название чисел и группирование их по классам и разрядам.

И так, основной объект арифметики - число. Аль-Фараби писал: «Под наукой чисел понимаются две науки: практическая и теоретическая. Практическая изучает числа, постольку речь идет о числах и считаемых. Эту науку принимают в рыночных и гражданских делах. Теоретическая наука чисел изучает числа в абсолютном смысле, отвлеченные разумом от тел и всего, что поддается в них счету» [11].

Таким образом, возникновение и развитие арифметики связано с трудовой деятельностью людей с развитием общества.

1.2. Системы счисления

Системы счисления - это способы записи чисел в виде удобном для прочтения и выполнения арифметических операций. Наши далекие предки учились считать, пользуясь пальцами одной руки, затем пальцами обеих рук и ног вместе. Так возникла ***пятеричная, десятичная*** и ***двадцатеричная*** система счисления.

Вообще, системы счисления с более высоким основанием появились позднее, чем с низким.

Древнейшей из всех является двоичная система счислений. Как считают ею пользовались древние египтяне.

Археологические находки эпохи палеолита (камни, кости животных) говорят о том, что люди стремились группировать точки, полосы и насечки по 3, 4, 5 или по 7.

Такая группировка облегчала счет. В древности чаще всего считали на пальцах, и поэтому предметы стали группировать по 5 или по 10. Каждый десяток получал особое название, десяток сотен свое название и т.д. Для удобства записи такие узловые числа стали обозначать особыми значками. Знаки единиц десяток сотен были не похожи друг на друга. При такой записи числа знаки можно было располагать в любом порядке и при этом значение числа не менялось.

В такой записи положение знака не играет роли. Такие системы счисления называют непозиционными. Непозиционные счисления были у древних египтян, греков и римлян. Такая система более или менее пригодна для выполнения операции сложения и вычитания, но совсем не удобны для умножения и деления.

Совершенно новая замечательная идея была развита в Древнем Вавилоне. Там впервые была создана позиционная система. Вавилонская система была шестидесятеричной. В их системе своеобразно сочетался счет с помощью чисел 10 и 60. Следы вавилонской системы счисления сохранились до наших дней в порядке счета единиц времени

1 час = 60 мин 1 мин = 60 с

Позиционная десятичная система впервые сложилась в Индии. Сочетая вавилонский метод обозначения чисел, индейцы создали в VI в. способ записи, использующий лишь 9 цифр. Вместо нуля оставляли пустое место, а позднее стали ставить точку или маленький кружочек. Из Индии новая система распространилась по всему миру.

Знаменитый ученый XVIII в. Лаплас писал: «Мысль выражать все числа десятью знаками, придавая им кроме значения по форме, еще значение но занимаемому месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно осознать насколько она удивительна. Как нелегко прийти к этому методу, мы видим на примере величайших гениев греческой науки Архимеда и Апполония, от которых эта мысль осталась скрытой» [12].

Число десять называется основанием десятичной системы счисления. Но почему мы считаем десятками? Как возникла десятичная система счисления?

Десятичную систему счисления (счет десятками, сотнями, тысячами) впервые создали китайские математики 3400 лет тому назад.

В настоящее время общепринята во всех странах десятичная система счисления:

10 единиц образуют десяток;

10 десятков образуют сотню;

10 сантиметром образуют дециметр;

10 центнеров образуют тонну и т.д.

Однако в некоторых странах раньше использовала двенадцатеричная система счисления (12 единиц называли русском языке дюжиной).

Остатки двенадцатеричной системы сохранились в исчислениях времени. Так, в году 12 месяцев (дюжина месяцев), в сутках две дюжины часов (12x2=24).

Изучая науку о числах - арифметику, надо различать два понятия: десятичная запись чисел и позиционная система счисления. Римляне использовали десятичную систему, но у них не было развито позиционной системы. Например, число 30 они записывали так: XXX. Знак X имел один и тот же смысл (десяток), какое бы место он ни занимал в записи числа.

Соединение десяти арабских цифр с позиционной записью стало мощным средством вычислений. Так, числа 13 и 31 - это различные числа, хотя написаны одними и теми же цифрами (1 и 3).

В современной математике (в вычислительных машинах) используют двоичные системы записи чисел, которые являются также позиционными.

Сравним записи одного и того же числа 25 в различных системах:

Римская десятичная непозиционная:	XXV-10+10+5=25
Арабская десятичная позиционная:	$25=2*10^1+5=2*10^1+5^1=25$
Двоичная позиционная (в вычислительных машинах)	$11001=1*2^4+1*2^3+0*2^2+0*2^1+1=2^4+2^3+0+0+1=25$

Однако были племена и пароды, в частности в Африке, которые при счете пользовались лишь пятью пальцами одной руки, считали пятками: у них выработалась ***пятеричная*** система исчисления, в которой ***основой*** служит число пять.

Как известно, счет у нас ведется десятками: десять единиц образуют один десяток, десять десятков - одну сотню и т.д.

Такой способ счета, группами в десять, которыми пользуемся мы, называется десятичной системой счисления или десятичной нумерацией.

1.3. Письменная нумерация. Цифры

Цифры - условные знаки для обозначения чисел. Любое число можно записать с помощью всего лишь десяти числовых знаков, цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Современные цифры были выработаны на протяжении многих веков.

Первыми записями чисел можно считать зарубки на деревянных бирках или костях, а позднее черточки. Далее стали обозначать число один - одной черточкой, два - двумя, три - тремя черточками и т.д. Примером таких цифр являются римские цифры I, II, III. Но с развитием производства и культуры, когда нужно было записывать большие числа, стало неудобно пользоваться черточками. Тогда, например, в Древнем Египте, стали вводить особые знаки для отдельных чисел. Каждое число, как и каждое слова обозначалось особым знаком, иероглифом. В Китае и Японии для записи чисел применялись иероглифы. С развитием письменности появились буквы. Было время, когда в качестве цифр, например в Древней Греции, использовались буквы. Над буквами, обозначавшими числа, ставили специальный знак - титло. Эта нумерация называлась алфавитной.

Из Древнего Рима дошли до нашего времени цифры:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Неудобная была римская нумерация: записи длинные, умножение и деление в письменном виде производить невозможно. Все действия надо производить в уме.

Потребности практики, развитие производства и торговли способствовали созданию более удобных современных цифр и образованию современной письменной нумерации.

Современная десятичная запись натуральных чисел впервые появилась в Индии в VI в. Через арабов, завоевавших в VII-VIII вв. обширные районы Средиземноморья и Азии, индийская нумерация получила широкое распространение. Отсюда и название - арабские цифры. Правильно бы их назвать индийскими.

В странах Европы новая, индийская нумерация была также занесена арабами в X-XIII вв., однако до XVIII в. в официальных бумагах разрешалось применять только римские цифры. Лишь в начале XIX в. индийскую нумерацию стали применять повсеместно.

В книге «Арифметика» известного хорезмского математика Мухамедда Ибн Муса ал-Хорезми дано первое изложение на арабском языке ***десятичной позиционной нумерации***. Оно сыграло огромную роль в распространении новой нумерации в Европе [13].

В современной письменной нумерации имеет значение, не только вид, написание цифры, но и ее место, се положение, ее позиция среди других цифр.

Например, в числе 16 цифра 6 означает 6 единиц, а в числе 65 та же цифра 6 означает 6 десятков, т. е. шестьдесят единиц.

Именно поэтому современная ***нумерация*** называется ***позиционной***.

§4. О происхождении дробей. Обыкновенные дроби

С Древних времен люди считали предметы, измеряли длину, площадь, объем, время и другие величины. В результате измерения не всегда получалось ***натуральное число***. Приходилось учитывать и ***части.*** Так появились ***дроби***. Вначале это были ***конкретные дроби*** - части известных единиц.

В Древнем Риме была единица измерения массы, а также денежная единица - асс.

Асс делится на 12 равных частей - унции. Унции применяют для измерения любых величин. Так, в Риме возникли двенадцатеричные дроби, т.е. дроби, у которых знаменатель - 12. Римляне говорили вместо $\frac{1}{12}$ - «одна унция», $\frac{5}{12}$ - «пять унций». Три унции называли - четвертью, четыре унции - третью, шесть унции - половиной.

Интересен отрывок из произведения римского поэта Горация, который говорит о беседе учителя с учеником в одной из римских школ этой эпохи:

«Учитель: Пусть скажет Сын Альбина, сколько останется, если от 5 унций отнят 1 унцию?

Ученик: одна треть.

Учитель: Правильно, ты сумеешь сберечь свое имущество».

В Древнем Египте первая дробь, с которой познакомились люди была половина. За ней следовали $\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16}\ldots$ затем $\frac{1}{3};\frac{1}{6}$ и так далее, то есть самые ***простые дроби*** - доли целого, называемые ***единичными*** или ***основными*** дробями. У них числитель всегда единица, т.е. дроби вида $\frac{1}{n}$, где n - натуральное число.

Лишь значительно позже у греков, затем у индейцев и других народов стали входить в употребление и дроби общего вида, как мы их называем - ***обыкновенные***, у которых число и знаменатель - любые натуральные числа.

В Древнем Вавилоне была шестидесятеричная система счисления, поэтому шестидесятые доли были привычны в жизни вавилонян. Они пользовались дробями со знаменателем 60 или его степени.

60^2-3600, 60^3=216000, то есть, в астрономии ***шестидесятеричными*** дробями пользовались ученые всех народов до XVII в., называя их ***астрономическими*** дробями.

В Греции употреблялись обыкновенные дроби и они свободно владели действиями с дробями. Однако современной записи дробей с помощью черты не было. Такая запись дроби введена лишь в 1202 г. итальянским математиком Л.Фибоначчи (1180-1240 гг.) в его произведении «Книга абака».

В VI в. до н.э. знаменитый ученый Пифагор на вопрос, сколько учеников посещают его школу ответил: «Половина изучает математику, четверть - музыку, седьмая часть пребывает в молчании, кроме этого есть три женщины».

Сколько учеников посещают школу Пифагора? Попробуй - ответить.

1.5. Десятичные дроби

Во II в. до н.э. древние греки познакомились с многовековыми астрономическими наблюдениями вавилонян. Они у них переняли и их систему счисления и в своих вычислениях, связанных с астрономией вплоть до XVI в. использовали ***шестидесятеричные*** дроби. Эти дроби имели свои преимущества:

1.Действия над дробями производились по тем же правилам, как и над целыми.

2.Основание мер и нумерации было одно и то же - 60.

В восточноарабских государствах некоторые весовые и денежные единицы также подразделялись на 60 меньших единиц. Например, 1 диргем = 60 ашир. Поэтому часто на практике употреблялись шестидесятеричные дроби. Но в том время уже в Индии была создана ***десятичная*** система счисления для работы с ***целыми*** числами. И ученые стран ислама, а затем Европы активно ее использовали на практике.

В вычислениях того периода, естественно было много неудобств, т.к. вычисления натуральных чисел велся в десятичной системе, а дробей - в шестидесятеричной. Нелегко усваивались обыкновенные дроби. Дроби считались самыми трудными разделом арифметики. До сих пор у немцев существует поговорка: «Попал в дроби»; т.е. попал в трудное положение.

В XV в. ***полную теорию*** десятичных дробей разработал самаркандский ученый, астроном Джемшид Гияссэддин ал-Каши. В своей книге «Ключ к арифметике» в 1427 г. ал-Каши писал: «Астрономы применяют дроби, последовательными знаменателями которых являются число 60 и его степени, они называют их (доли) ***минутами, секундами, терциями, квартами*** и так далее. Мы ввели, по аналогии с правилами астрономов, ***дроби*** в которых последовательными знаменателями являются число 10 и его степени. Мы называем степени (доли) десятыми, десятичными ***секундами***, десятичными ***терциями***, десятичными ***квартами*** и т.д. «Ал-Каши подробно излагает правила и приводит примеры действий с десятичными дробями. Он вводит специфическую для десятичных дробей запись: «Целая и дробная запись пишутся в одной строке. Для отделения первой части от дробной он не применяет запятую, а пишет целую часть черными чернилами, дробную же - красными, или отделяет целую часть от дробной - вертикальной чертой.

В Европе открытие десятичных дробей Ал-Каши стало известно лишь спустя 300 лет. Независимо от него в 80-х годах XVI в (около 150 лет после Ал-Каши) десятичные дроби открыл нидерландский ученый Симон Стевин и в своей книге «Десятая» изложил всю теорию десятичных дробей. Он указывал на большое практическое значение десятичных дробей и пропагандировал их.

1.6. Процент

Процентом называется сотая доля числа. Латинское слово означает «за сотню» или «со ста».

Для чего нужны проценты и почему для этого введен специальный термин?

Прежде чем ответить на эти вопросы, попробуем ответить на другой: «Много ли соли в морской воде? Конечно, можно налить в ведро морскую воду, поставить его на огонь и, подождав, пока вся вода испариться, собрать и взвесить оставшуюся соль. Если повторить эти измерения несколько раз, то мера солености морской воды - количество граммов может быть различной. Так как при измерении могут быть разные ведра, да и воды в них может быть не всегда одинаково. Возьмем другую меру - количество граммов соли на 1 кг. Для этого нужно до кипячения взвесить раствор, а потом массу полученной соли разделить на массу раствора.

Пусть масса раствора 8,4 кг, а масса соли 21 г.

Тогда получим ответ: 2,5 г соли на 1 кг раствора.

Если опыт повторить, то получится почти такое же значение. При этом удобно результаты записывать с помощью десятичных дробей, поскольку их удобнее сравнивать между собой по величине, как правило, верным можно считать первые две цифры в измеряемых нами приборах: это могут быть весы, вольтметры, спидометры и т.д. В результате будем получать 0,27; 0,64; 0,35 и другие сотые доли числа, т.е. проценты. Была придумана специальная запись 27%, 64%, 35%. Проценты были известны индийцам еще в V в. Это закономерно, так как в Индии с давних пор вел счет в десятичной системе исчисления. Проценты были особо распространены в Древнем Риме. Римляне называли процентами деньги, которые платил должник - (заимодавцу) - человеку, который давал ему взаймы за ***каждую сотню***. От римлян проценты перешли к другим народам Европы [14].

В Европе десятичные дроби ввел бельгийский ученый С. Стевин и он впервые в 1584 г. опубликовал таблицу процентов. С помощью процентов можно определить содержание одного вещества в другом.

В процентах стали измерять изменение производства товара, рост денежного дохода.

Со временем люди научились находить ***тысячную*** долю от массы вещества. И ввели новую величину ***промилле*** (латинское слово *promille* –«с тысячи»), которую обозначали ‰. Однако эту величину постоянно применяют лишь в некоторых областях техники. Чаще используют десятую или сотую доли.

Так в нашем примере содержание соли в морской воде составляет 0,25% или 2,5‰.

1.7. Возникновение отрицательных чисел

Как мы знаем из истории, натуральные числа возникли при счете предметов. И так как при счете, не всегда получались целые числа, то как следствие возникли нуль и дробные числа.

Но на этом развитие понятий числа не закончилось. И если понятие числа возникло из практической потребности людей, то понятие ***отрицательных*** чисел возникло в ходе (практике) решения алгебраических уравнений.

Долгое время казалось невозможным вычитать целое число из другого, когда вычитаемое больше уменьшаемого. Однако при решении уравнений приходилось вычитать большее число из меньшего числа и сталкиваться с таким понятием как отрицательные числа. Не только египтяне и вавилоняне, но и древние греки не знали отрицательных чисел. Отрицательные числа долгое время назывались словами «долг» и «недостача». Даже в Индии в VII в. считали: положительные числа - имущество, отрицательные числа - долг. В Древнем Китае были известны только правила сложения и вычитания положительных и отрицательных чисел, не применялись правила умножения и деления.

Уже в III в. древнегреческий математики Диофант фактически пользовался правилом умножения отрицательных чисел. Но при решении, если получалось в уравнении отрицательный корень, то он отбрасывался как «недопустимый». Совершенно по-другому относились к отрицательным числам индийские математики. Они признавали отрицательные корни уравнений. Положительные числа, называя имуществом, а отрицательные долгом применяли к тем все правила четырех арифметических действий. Ниже в таблице приведены правила сложения и вычитания, изложенные индийским математиком Брахмагуптой в VII в н.э. (слева современная запись, где а, в и с - числа).

Современная запись	Правило Брахмагупты
1. а + в = с	Сумма двух имуществ есть имущество
2. (-а) + (-в) = с	Сумма двух долгов есть долг
3. а + (-в) = а - в	Сумма имущества и долга равна их разности
4. а + (-а) = 0	Сумма имущества и равного долга равно нулю
5. 0 + (-а) = - а	Сумма нуля и долга есть долг
6. 0 + а - а	Сумма нуля и имущества есть имущество
7. 0- (-а) = а	Долг, вычитаемый из нуля, становится имуществом
8. 0 - а = - а	Имущество, вычитаемое из нуля, становится долгом

А в XII веке индийский математик Бхаскара выразил правила умножения и деления так: «Произведение двух имуществ или двух долгов, есть имущество; произведение имущества на долг есть убыток». То же правило имеет место при делении числа при решении уравнений все равно к ним, к отрицательным числам относились с недоверием, считали их нереальными. Бхаскара писал: «Люди не одобряют отвлеченных отрицательных чисел». Не одобряли отрицательные числа и европейские математики. Думали: какая необходимость складывать, вычитать, умножать имущество и долга и в чем реальный смысл в этом?

Отрицательные числа с трудом завоевывали свое место в математике.

В Европе отрицательные числа встречаются в трудах у Леонардо Фибоначчи (XII-XIII вв.) Европейские ученые тоже считали отрицательные числа как долг, и называли их «ложными», а положительные числа «истинными». Немецкий математик Михаил Штеффель в 1544 г. дал иное определение отрицательных чисел как чисел «меньших, чем ничто», то есть меньших нуля. Он писал: «Нуль находится между истинными и абсурдными числами».

В XVII в. отрицательные числа, облегчая математика вычисления, прочно вошло в математику, механику, астрономию. В знаменитом произведении французского математика, физика, философа Декарта «Геометрия» (1637 г.) дается геометрическое описание положительных и отрицательных чисел. Положительные числа изображает на числовой оси точками, лежащими ***вправо*** от начала 0, отрицательные - ***влево***.

Геометрическое толкование положительных и отрицательных чисел привело к ясному пониманию отрицательных чисел и к их признанию.

Но задолго еще до XIX в. между учеными шел спор о признании отрицательных чисел, существующих самостоятельно, так же как и положительные числа [15].

1.8. Пропорции

Пропорцией называют равенство отношений двух или нескольких пар чисел или величин. Слово пропорция происходит от латинского слова *proportio* - означает соразмерность, определенное соотношение частей между собой.

Например, размеры ***модели*** машины или сооружения отличаются от размера ***оригинала*** одним и тем же множителем, задающим масштаб модели. Поэтому если выбрать на оригинале четыре точки А, В, С и Д и обозначить их через А', В', С, Д' соответственно точки на модели, то будет выполнятся равенство

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'Д'}{CД} \qquad |A'B' : AB = |C'Д' : CД|$$

оба отношения равны масштабу. Такое равенство двух отношений и будет пропорцией. Справедлива и другая пропорция

$$\frac{AB}{CД} = \frac{A'B'}{C'Д'} \qquad |AB : CД = |A'B' : C'Д'|$$

которая показывает, что отношение расстояний точек оригинала такие же, как и отношение расстояний соответствующих точек модели.

Систематически пропорции начали изучать в Древней Греции. Учение о пропорциях было в большом почете у пифагорейцев. С пропорциями они связывали мысли о порядке и красоте в природе, о созвучных аккордах в музыке и гармонии во вселенной. Некоторые виды пропорции они называли «музыкальными» и «гармоническими».

В IV веке до н.э. древнегреческий математик Евдокс дал определение пропорции для величин любой природы. Теория пропорции подробно изложена в книге «Начал» Евклида. Евклид доказал ***основное свойство пропорции***: произведение крайних членов равно произведению средних членов.

Древнегреческие математики с помощью пропорции решали задачи, которые в наши дни решает с помощью уравнений. А некоторые типы задач в паши дни легко и быстро решается с помощью пропорций.

Пропорции применяются не только в математике, но и в архитектуре, искусстве. Пропорциональность в архитектуре искусства, это соблюдение определенных соотношений между размерами разных частей здания, фигуры, скульптуры, что является условием правильного, наглядного и красивого построения или изображения.

Существовали различные записи пропорций.

До XVI в. пропорции записывали в основном словесно. Затем были сделаны попытки ввести специальные обозначения для пропорций. Например, в индийской рукописи XII в. пропорция

В средневековье арабские математики, делавшие записи справа налево, применяли троеточие и пропорцию 7:12=84:144 записывали в виде $144 \therefore 84 \therefore 12 \therefore 7$.

В XVII в. выдающийся математик Рене Декарт записывал эту же пропорцию так: 7/12/84/144

Современную запись пропорции с помощью двоеточия и знака равенства ввел в 1693 году Г.В.Лейбниц.

2. ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Из истории геометрии

Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностях и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать.

Г. Галилей

Геометрия приближает разум к истине.

Платон

Геометрия - одна из наиболее древних математических наук. Первые геометрические работы мы находим в вавилонских клинописных таблицах и египетских папирусах (III тыс. до н.э.). Название науки «геометрия» - древнегреческого происхождения. Оно составлено из двух слов «гео» - земля и «metreo» - измеряю. Возникновение геометрии связано с практической деятельностью людей. Из истории известно, что примерно 4000 лет назад в долине реки Нил было государство Египет. Правитель этого государства - фараон установил налоги на земельные участки. Для этого надо было знать размер полей прямоугольной и треугольной формы. Река Нил разливаясь размывала границы участков. Надо было их вновь измерять. Появилась необходимость изучать приемы измерения площадей. К этому времени и относят зарождение геометрии. В Древнем Египте еще не было терминов: «фигура», «сторона фигуры». Использовались слова: «поле», «границы поля», «длина» и «ширина» поля. Вавилонская геометрия, также как и египетская тесно связана с практикой. Она использовалась при измерении и делении земель, строительстве домов, плотин, каналов, амбаров, изготовлении украшений предметов быта. Но в Древнем Вавилоне кроме простейших фигур, рассмотренных в Египте, изучали такие правильные многогранники, части круга, конуса.

Совершенно иначе выглядела геометрия Древней Греции.

Усвоив все конкретные знания, полученные в Египте, Вавилоне греки превратили геометрию в ***науку***, основанную на строгих доказательствах.

В Древней Греции, начиная с VII в. до н.э. происходит постепенный переход от практической к теоретической геометрии. Начало греческой науки положила иониийская школа философии и науки VI в. до н.э. Ее основатель Фалес из Милета, главного города Ионии (западная часть побережья Малой Азии). Фалес доказал, что диаметр делит круг пополам, доказал теоремы о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, о равенстве вертикальных углов, о равенстве треугольников. Доказательство теорем Фалес, вероятно, проводил с помощью наложения фигур. Математик, астроном Прокл (410-485 гг.), живший в Афинах, делая краткий обзор развития геометрии, от Фалеса до Евклида писал: «Иногда Фалес рассматривал вопрос несколько обще, иногда более опираясь на наглядность» [16].

Коренные преобразования геометрии произвел Пифагор и ученые его школы. Они доказали теорему Пифагора, пришли к открытию несоизмеримых отрезков и создали геометрическую алгебру, все построения в которой, проводились с помощью циркуля и линейки.

Итак, в Древней Греции уже была создана система геометрических терминов для обозначения геометрических фигур.

Большая часть употребляемых ныне геометрических терминов в школе сложилась еще в Древней Греции. Греческие термины были переведены на латинский язык, служащий на протяжении многих веков языком ученых.

1. Термин «планиметрия» - средневековый и происходит от латинского *planum* - плоскость и греческого «metreo» - мерю.
2. «Фигура» - латинское слово, означающее образ, вид, начертание, вошел в употребление в XII в. До этого вместе с ним употреблялось латинское слово - «форма», также означающее наружный вид, внешнее сгибание предмета.
3. «Линия» - от латинского слова *linea* (черта, линия), образовавшегося от слова *linum* - лен, льняная нить, шнур, веревка. Шнурком или веревкой пользовались для измерения римские земледельцы.
4. «Перпендикуляр» - от латинского слова *perpendicularis* «отвесный».

Термин был образован в средние века.

5. «Биссектриса» - от латинских слов *bis* (дважды, надвое) и *sectrix* (секущая).
6. «Вертикальные» (углы) - от латинского слова *verticalis* - вершинный.
7. «Циркуль» - от латинского *circulus* - круг.
8. «Центр» - от латинского *centrum* - транскрипция, древнегреческого слова «кентрон», означающего колющее оружие, которым в древности погоняли животных в упряжке, а также острие ножки циркуля.
9. «Радиус» - от латинского *radius* - луч, спица в колесе.
10. «Диаметр» - от греческого слова «диаметрос», поперечник, насквозь измеряющий.
11. «Хорда» - от греческого «корде» - струна, тетива.

Итак, как наука геометрия сформировалась в III в. до н.э. наибольшая заслуга в этом принадлежит Евклиду, жившему в г. Александрия, он, опираясь на исследования и выводы своих предшественников Фалеса, Пифагора, Гиппократа, Евдокса и других древнегреческих ученых, привел в систему накопленные по геометрии сведения, дополнил своими исследованиями и открытиями и затем последовательно изложил в 13 книгах и назвал их «Начала».

Эта наука по-прежнему продолжает называться геометрией, несмотря на то, что ее содержание расширилось далеко за пределы учения об измерении земли, и стала важным и большим разделом математики. В геометрии рассматриваются формы тел, изучаются свойства фигур, их отношения и преобразования.

2.2. Аксиоматическое построение геометрии

Птолемей однажды спросил Евклида нет ли в геометрии более краткого пути, чем его «Начала», на что тот ответил, что в геометрии нет царских дорог.

Прокл.

Перед античной наукой, накопившей большое число новых фактов, утверждений, теорем встала задача систематизировать изложения геометрии. Впервые такую попытку предпринял Гиппократ Хиосский (около 450-410 гг. до н.э.). Завершил этот труд древнегреческий ученый Евклид (III в. до н.э.) в своем знаменитом сочинении «Начала». Величайшая заслуга Евклида в том, что он подвел итог построению геометрии и придал изложению столь современную форму, что на 2000 лет «Начала» стали энциклопедией геометрии. Д.Я. Стройк пишет: «В истории западного мира «Начала» после Библии, вероятно, наибольшее число раз изданная и более всего изучавшаяся книга. После изобретения книгопечатания появилось более тысячи изданий, а до этого эта книга, преимущественно в рукописном виде, была основной при изучении геометрии. Большая часть нашей школьной геометрии заимствована часто буквально из первых шести книг «Начала» и традиция

Евклида до сих пор тяготеет над нашим элементарным обучением» [17]. Написана она была настолько хорошо, что повсюду в течение 2000 лет преподавание геометрии велось по книгам Евклида.

В основе «Начала» Евклида лежит система определений, аксиом и постулатом. «Начала» состоит из 13 книг, и каждая начинается с определений.

Приведем первые десять определений:

1. Точка, то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Концы линий суть точки.
4. Прямая линия есть та, которая одинаково лежит относительно всех своих точек.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Концы же или края поверхности суть линии.
7. Плоскость поверхности есть та, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых.
8. Плоский угол есть взаимное наклонение двух линий на плоскости, встречающихся и не лежащих на одной прямой.
9. Когда же линии, содержащие угол, есть прямые, то угол называется прямолинейным.

В аксиомах Евклида есть аксиомы, определяющих отношения равенства и неравенства величин.

Например:

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. Если к равным прибавляют равные, то и целые будут равны.
3. Если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.
4. Совмещающиеся друг с другим равны между собой.
5. Целое больше части.

В доказательствах Евклид использует идею движения. Равенство треугольников доказывает с помощью наложения одного треугольника на другой.

В первой книге «Начала» Евклид приводит 5 постулатов:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать до прямой.
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описана окружность.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встречаются с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых.

В первых трех постулатах Евклид описывает построения, которые можно осуществить с помощью циркуля и линейки.

Четвертый постулат - это знаменитый постулат о параллельных.

Пятый постулат удивил ученых сложностью формулировки. Он больше напоминал теорему, чем постулат. В связи со сложностью пятого постулата и его малой наглядностью было много попыток доказать его как теорему.

Вопрос о 5 постулате рассматривался учеными на протяжении двух тысяч лет. Доказать V постулат Евклида пытались такие ученые, как: греческий математик Прокл (410-485 гг.), таджикский математик Омар Хайам (1048-1131 гг.), арабский математик Насирэддин ат-Туси (1201-1274 гг.), английский математик Джон Валлис (1616-1703 гг.), французский математик Адриан Лежаидр (1752-1833 гг.).

Недостатки в аксиоматике Евклида были обнаружены лишь в конце XIX в. Наиболее распространена в наше время и общепризнанна система аксиом геометрии принадлежит Д.Гильберту. Впервые она изложена в его сочинении «Основания геометрии».

2.3. Геометрические фигуры

Геометрические фигуры встречаются в древнегреческих папирусах и древневавилонских клинописных текстах, написанных около 4000 лет назад. В них имеются задачи на вычисление площадей и объемов отдельных фигур.

Обозначение прямых, концов отрезков и вершин углов фигур буквами берет начало от геометров Древней Греции.

Еще в древности стали вводить некоторые знаки и обозначения для геометрических фигур и понятий. Так древнегреческий ученый Герон (I в.) применял знак $\triangle$ - вместо слова «треугольник», □ - вместо «прямоугольник». Ученый древней Греции Папп (III в.) писал знак ○ - вместо слова «окружность», и □ - вместо «четырехугольник». Французский математик П. Эригон в XVII в. ввел следующие знаки:

$\perp$ - для понятия «перпендикулярно»;

$\lrcorner$ - для прямого угла;

○ - для круга;

$\cap$ - для части окружности.

2.4. Параллельные прямые

Греческое слово «параллелой» означает «рядом идущий», «друг подле друга проведенные» (прямые). Оно как «геометрический» термин употреблялось 2500 лет назад в школе Пифагора.

Учение о параллельных прямых излагается в книге Евклида «Начала». Он дает такое определение: «Параллельные суть прямые, которые находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются».

В «Началах» Евклида приведены и признаки параллельности прямых. В III в. н.э. древнегреческий математик Папп пользовался для обозначения параллельности знаком =. Также поступал в XII в. французский математик Эригон. Только в XVIII в. после того, как математик Рекорд ввел знак равенства =, то для обозначения параллельных стали пользоваться знаком ||.

2.5. Треугольники

Простейший из ***многоугольников*** - треугольник - играет в геометрии особую роль. Треугольник как фигура всегда имела широкое распространение в практической жизни. В строительстве испокон веков используется свойство жесткости треугольника для укрепления различных строений и их деталей. Изображения треугольников и задачи на треугольники встречаются в древних папирусах, в старинных индийских книгах. Можно без преувеличения сказать, что вся геометрия со времен «Начал» Евклида покоится на «трех китах» - трех признаках равенства треугольников.

За несколько тысячелетий геометры столь подробно изучили треугольник, что иногда говорят о «геометрии треугольника», как о самостоятельном разделе геометрии.

В Древней Греции учение о треугольниках развивалось в ионийской школе, основанной Фалесом и в школе Пифагора. Уже Фалес доказал, что треугольник определяется одной стороной и двумя прилежащими к ней углами. Учение о треугольниках полностью изложено в «Началах» Евклида.

2.6. Равнобедренный треугольник

Равнобедренный треугольник обладает рядом геометрических свойств, которые привлекли внимание еще в древности. На практике часто применялось свойство медианы равнобедренного треугольника, являющейся одновременно высотой и биссектрисой. Термин «медиана» происходит от латинского слова *mediana* - «средняя» (линия). То, что углы при основании равнобедренного треугольника равны было известно еще в Древнем Вавилоне 4000 лет назад.

Фалесу Милетскому из Древней Греции (VI в. до н.э.) приписывают доказательство теоремы о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника.

2.7. Признаки равенства треугольников

Понятие равенства в геометрии, введенное Евклидом несколько отлично о равенстве в арифметике или алгебре.

В первой книге «Начал» Евклида содержится определение «равенства» фигур: «Совмещающиеся друг с другом равны между собой». И так под равенством понимали возможность совмещения фигур, наложения. Но, с другой стороны, вторую аксиому из «Начал» Евклида: «Если к равным прибавить равные, то получатся равные» нельзя применить к геометрическим фигурам. Например, если к прямоугольнику приложить один и тот же треугольник один раз к меньшей стороне - а другой - к большей, то получим две неравные фигуры.

Чтобы не было многозначности одного и того же термина в XIX в. в геометрии был принят общий термин «конгруэнтность фигур». Этот термин происходит от латинского *congruentia*, что означает совпадение, соответствие, сходство. Признаки конгруэнтности треугольников имели важное значение в геометрии, так как доказательство многочисленных теорем сводится к доказательству конгруэнтности тех или иных треугольников. Доказательством признаков равенства треугольников занимались еще пифагорейцы. Фалесу Милетскому приписывают доказательство теоремы о равенстве двух треугольников, имеющих равную сторону и два прилежащих к ней угла (второй признак равенства треугольников).

2. 8. Прямоугольный треугольник

В папирусе Ахмеса наряду с равнобедренным часто встречается прямоугольный треугольник. Почетное место он занимал и в вавилонской геометрии.

Пифагор искал числовые отношения в геометрических построениях. Ему был известен так называемый египетский треугольник со сторонами, выраженными числами 3, 4 и 5. Египтяне знали, что это прямоугольный треугольник, и употребляли его для определения прямых углов при восстановлении размываемых ежегодными разливами Нила границ земельных участков.

Пифагор показал зависимость между сторонами египетского треугольника, которая выражается формулой:

$$\mathbf{3^2 + 4^2 = 5^2}$$

занимаясь поисками треугольников, стороны которых а, в, с удовлетворяли бы условию $а^2 + в^2 = с^2$, Пифагор нашел формулы, которые в современной символике можно записать так:

$$а = 2n + 1 \qquad в = 2n*(n + 1) \qquad с = 2n^2 + 2n + 1,$$

где n - целое число.

Оказалось, что всякий треугольник с такими сторонами является прямоугольными треугольником.

Теперь прямоугольные треугольники, выраженными натуральными числами, мы называем пифагорейскими треугольниками.

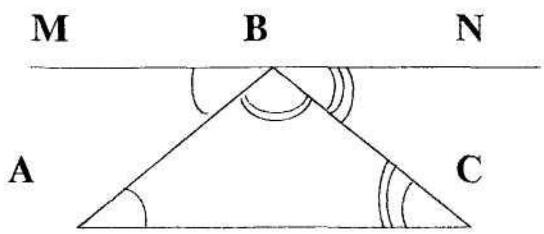
Термин «гипотенуза» в переводе с греческого означает «тянущаяся под чем-либо», «стягивающая». Слово берет начало от древнегреческих арф, на которых струны натягивались на концах двух взаимноперпендикулярных подставок.

Термин «катет» - греческий означает «отвес», «перпендикуляр».

Евклид употребляет выражение «стороны, заключающие прямой угол» - для катетов, и «сторона, стягивающая прямой угол» - для гипотенузы эмпирически.

2.9. Сумма углов треугольника

Свойство суммы углов треугольника было установлено еще в Древнем Египте. Однако дошедшие до нас сведения о разных его доказательствах относятся к более позднему периоду. Доказательство, изложенное в современных учебниках содержится в «Началах» Евклида.



Прокл утверждает, что доказательство еще было открыто пифагорейцами (V в. до н.э.)- Прокл пишет: «Пифагор впервые разработал принципы геометрии. Пифагорейцы содействовали формированию геометрии как науки, основанной на аксиомах и доказательствах».

2.10. Метрические соотношения в треугольнике. Замечательные точки и линии треугольника. Геометрия треугольника

Центральное место в геометрии треугольника играют свойства ***замечательных точек и линий***.

1. Все три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке - в центре вписанной в треугольник окружности.
2. Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке - центре описанной около треугольника окружности.
3. Три высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ***ортоцентром***. Греческое слово «ортос» означает прямой, правильный.
4. Все три медианы пересекаются в центре, называемой ***центроидом*** треугольника (эта точка является центром масс для тонкой треугольной пластины).

Евклид в своих «Началах» решает задачу: «Вписать в треугольник окружность» и находит ***первую*** замечательную точку треугольника. Из решения другой задачи была найдена ***вторая*** замечательная точка треугольника. В «Началах» не говорится об ортоцентре, хотя это предложение было известно Архимеду, Паппу, Проклу. Говоря о четвертой замечательной точке Архимед доказал, что она является центром тяжести (барицентром) треугольника. На названные 4 точки было обращено особенное внимание, начиная с XVIII в. они были названы ***замечательными*** или особенными точками треугольника. Исследование свойств треугольника, связанных с этими и другими точками положило начало созданию новой ветви элементарной математики - «***геометрии треугольника***», или «***новой геометрии треугольника***», одним из основателей которого был Леонард Эйлер. В 1765 г. Л.Эйлер доказал, что в любом треугольнике ортоцентр, барицентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой. Ее позже назвали «прямой Эйлера».

У каждого треугольника имеется и притом, единственная, окружность девяти точек. Это окружность, проходящая через следующие три тройки точек, положение которых определено для треугольника:

основания его высот;

основания его медиан;

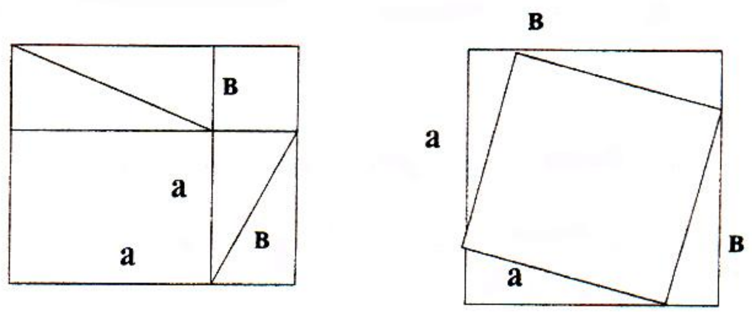
середины отрезков прямых от точки пересечения его высот до его вершин.

Эта окружность, найденная в XVIII в. великим ученым Л.Эйлером поэтому ее часто называют ***окружностью Эйлера***. Эта окружность заново была открыта в следующем столетии, учителем провинциальной гимназии в Германии, звали его Карл Фейербах. К.Фейербах установил, что центр этой окружности лежит на «прямой Эйлера».

2.11. Теорема Пифагора

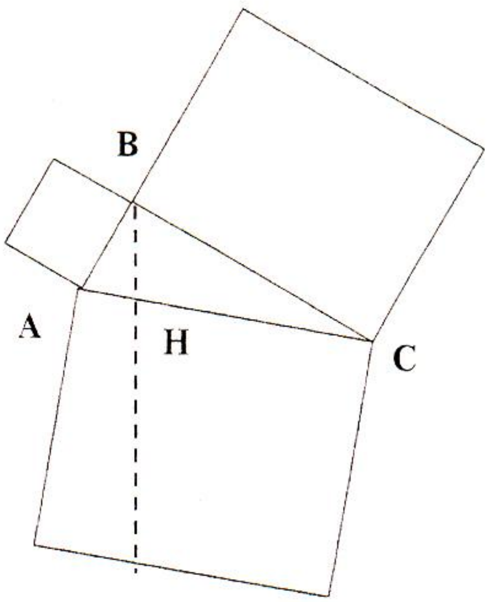
Теорема Пифагора - важнейшее утверждение геометрии. Обычно открытие этой теоремы приписывают древнегреческому философ и математику Пифагору - VI в до н.э. Но изучение вавилонских клинописных таблиц и древнекитайских рукописей показало, что это утверждение было известно задолго до Пифагора. Заслуга же Пифагора состояла в том, что он ***открыл*** доказательство этой теоремы,

Древнегреческий историк древности Плутарх и Прокл в своем комментарии к «Началам» Евклида писали: «Если слушать тех, кто любит повторять древние легенды, то придется сказать, что эта теорема восходит к Пифагору. Рассказывают, что в честь этого открытия он принес в жертву быка». История Пифагоровой теоремы начинается задолго до Пифагора. О том, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 есть прямоугольный, знали 2000 лет до н.э. египтяне. В Китае предложение о квадрате гипотенузы было известно, еще за 500 лет до Пифагора. Эта теорема была известна в Древней Индии. Для доказательства общего случая в Древней Индии располагали двумя способами: в квадрате со стороной а + в изображали четыре прямоугольных треугольника с катетами длин а и в. После чего писали одно слово «Смотри!»



и действительно, взглянув на эти рисунки, видим, что слева свободна от треугольников фигура, состоящая из 2-х квадратов со сторонами а и в соответственно ее площадь равна $а^2$ + $в^2$, а справа квадрат со стороной с - его площадь равна $с^2$ значит, $а^2$ + $в^{2==}$ $с^2$, что составляет утверждение Пифагора.

Однако в течение 2-х тысячелетий применяли не это наглядное доказательство, а более сложное доказательство, которое помещено в книге Евклида «Начала». Евклид опускал высоту из вершины прямого угла на гипотенузу и доказывал, что ее продолжение делит построенный на гипотенузе квадрат на два прямоугольника, площади которых равны площадям соответствующих квадратов, построенных на катетах. Чертеж, применяемый при доказательстве этой теоремы в шутку называют «пифагоровы штаны».



В наше время известно несколько десятков различных доказательств теоремы Пифагора.

Теорема Пифагора лежит в основе большинства геометрических вычислений решений разнообразных практических задач. На основании теоремы Пифагора выводится и формула, выражающая площадь любого треугольника через длины его сторон (формула Герона).

2.12. Формула Герона. Площадь треугольника

Эта формула позволяет вычислить площадь S треугольника его сторонам *а, в* и *с* :

$$S = \sqrt{p(p-a)*(p-b)*(p-c)}$$

где *а, в, с* стороны, *р* - полупериметр треугольника, т.е.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Формула названа в честь древнегреческого математика Герона Александрийского (около I в.).

Одним из греческих математиков-энциклопедистов, труды которого носили главным образом прикладной характер был Герои Александрийский. Известно, что он был выдающимся ученым-механиком. Его даже называли «Герон – механик». Он много внимания уделял геодезии и практическому применению геометрии. В своем известном геометрическом произведении «Метрика» Герон изложил доказательство своей формулы. Он рассматривал треугольники с целочисленными сторонами, площади которых также являются целыми числами. Такие треугольники также называются ***героновыми***. Например, это треугольники со сторонами 13, 14, 15 или 51, 52, 53.

Существуют аналоги формулы Герона для четырехугольников. Например, площадь вписанного четырехугольника находится по формуле:

$$S = \sqrt{(p-a)*(p-b)*(p-c)*(p-d)}$$

Если четырехугольник и вписанный и описанный одновременно, его площадь находится по более простой формуле:

$$S = \sqrt{a*b*c*d}$$

2.13. Теорема косинусов и теорема синусов

Теорема синусов устанавливает зависимость между сторонами треугольника и противолежащими им углами. Она утверждает, что длины а, в, с - сторон любого треугольника АВС пропорциональны синусам противолежащие углов:

$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} = 2R$$

где R - радиус описанной окружности.

Теорема синусов была впервые доказана в X-XI вв. математиками Ближнего и Среднего Востока. Установлено, что теорема доказана уроженцем Хорезма, выдающимся астрономом ал-Беруни.

Теорема косинусов - теорема тригонометрии, утверждает, что во всяком треугольнике, квадрат длины стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон без удвоенного произведения длин этих сторон на косинус угла между ними:

$$C^2 = a^2+b^2 - 2ab*CosC$$

Теорему знали еще древние греки, доказательство содержится во 2-ой книге «Начал» Евклида.

Открытие теорем синусов и косинусов сыграло важнейшую роль в развитии тригонометрии.

2.14. Параллелограмм

В древних египетских и вавилонских математических документах встречаются такие многоугольники как: квадраты, прямоугольники, равнобедренные и прямоугольные трапеции.

Термин «параллелограмм» греческого происхождения и был введен Евклидом. Понятие параллелограмма и некоторые его свойства были известны еще пифагорейцами.

В «Началах» Евклида доказывается теорема: ***в параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны, а диагональ разделяет его пополам***. Но у Евклида нет упоминания о том, что точка пересечения диагоналей параллелограмма делит их пополам. Он не рассматривает ни прямоугольника, ни ромба. Полная теория параллелограммов разработана к концу средних веков, а в учебниках появилась лишь в XVII в. Хотя вся теория основывается на аксиоме параллельности Евклида.

Термин «диагональ» - происходит от сочетания двух греческих слов диа - через и гониос - угол. т.е. прямая, проходящая через вершины углов.

Термин «ромб» - греческий, означает (в древности) вращающее тело, веретено, юла.

Термин «квадрат» - латинского происхождения, означает сделать четырехугольным четырехугольник.

2.15. Трапеция

Трапеция - слово греческое означает столик, обеденный стол (трапеза, трапезная), В «Началах» Евклида термин применялся в другом смысле: любой четырехугольник (не параллелограмм).

Еще древним египтянам было известно о том, что средняя линия трапеции равна полусумме ее основания. Это понятие было знакомо и землемерам Вавилона, а также встречается и в трудах Герона Александрийского.

2.16. Вычисление площадей

Определение площадей геометрических фигур - одно из древнейших практических задач. Правильный подход был найден не сразу. Еще 4-5 тысяч лет назад вавилоняне умели определять площадь прямоугольника и трапеции в квадратных единицах. Квадрат служил эталоном при измерении площадей. Замечательные свойства квадрата мы знаем как:

- равные стороны;
- равные и прямые углы.

Квадраты легко строить, ими можно заполнить любую плоскость. Симметричность и общее совершенство формы свойственны квадрату.

В Древнем Китае мерой площади был прямоугольник. Из Древнего Египта до наших дней дошли приемы измерения площади прямоугольника, треугольника и трапеции, которые используем мы. Например: для измерения площади треугольника делим основание пополам умножаем на высоту; для трапеции - сумма параллельных сторон делилась пополам и умножалась на высоту.

В своих «Началах» Евклид не употребляет слова ***площадь*** так как он под словом «фигура» понимает часть плоскости, ограниченной замкнутой линией. Евклид, не выражал площадь числом, а сравнивал площади разных фигур между собой. Так измеряли площади в Древней Греции.

2.17. Окружность и круг

Окружность - самая простая из кривых линий. Это одна из древнейших геометрических фигур. Философы древности придавали ей большое значение. Согласно Аристотелю, небесная материя, из которой состоят планеты и звезды, как самая совершенная, должна двигаться по самой совершенной линии - окружности. Так считали астрономы сотни лет, только в XVII в. это ошибочное мнение опровергли ученые Коперник, Галилей, Кеплер, Ньютон.

В Древнем Вавилоне и в Древней Индии считали самым важным элементом окружности - ***радиус***. Слово это латинское означает «луч». Евклид и др. ученые древности говорили вместо этого термина - «прямая из центра». В одной из латинских рукописей XI в. «Искусство геометрии» встречается термин «полудиаметр».

Термин «радиус» впервые встречается в «Геометрии» французского ученого Рамуса (1569 г.), затем у Ф. Виетта. Он писал, что «радиус» - элегантное слово, которое римские поэты употребляли в смысле «луч».

Термин «хорда» - в переводе с греческого означает «струна», был введен европейскими учеными XII-XIII вв.

Понятие, что диаметр делит круг и окружность на две равные части было открыт Фалесом Милетским.

Еще в древности пытались решить задачи, связанные с кругом, измерить длину окружности, площадь круга.

Первое из них имеет чисто «практическое решение: можно уложить вдоль окружности нить, а потом развернуть ее и приложить к линейке или отметить на окружности точку и «прокатить» ее вдоль линейки (или, наоборот, «обкатить» линейкой окружность). Измерения показывали, что отношение длины окружности L, к ее диаметру d=2R одно и тоже для всех окружностей. Это отношение принято обозначать греческой буквой symbol 112 \f «Symbol» \s 14 π (пи - начальная буква греческого слова *perimetron*, которое означает «окружность»).

Однако, древнегреческих математиков такой эмпирический, опытный подход к определению длины окружности не удовлетворял: окружность это длина без ширины, а таких нитей не бывает. Если же мы катим окружность по линейке, то возникает вопрос: почему при этом мы получаем длину окружности, а не какую-нибудь другую величину? К тому же такой подход не позволял определить площадь круга [18].

Выход был найден такой: вписали в круг ***правильные*** n-угольники. И с помощью понятия ***предел*** ввели определения - длина окружности и площадь круга. (С понятием предел ознакомитесь в старших классах средней школы).

Определение ***касательной*** как прямой, имеющей с окружностью только одну общую точку, встречается впервые в учебниках «Элементы геометрии» французского математика Лежандра (1753-1833 гг.).

В «Началах» Евклида дается следующее определение: ***прямая касается круга, если она встречает круг, но при продолжении не пересекает его***.

То, что касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания, было известно еще Архиту Тарснтскому (430 - 365 г. до н.э.). Архит, один из талантливейших греческих математиков - пифагорейцев.

Доказательство того, что отрезки касательных, проведенных к окружности из внешней точки равны, нет у Евклида, приписывают Герону Александрийскому.

2.18. Векторы

Вектор - одно из геометрических понятий. Вектор характеризуется числом (длиной) и направлением.

Примерами физических величин, которые имеют векторный характер, могут служить скорость, ускорение, сила и т.д.

Понятие вектора появилось в работах немецкого математика XIX в. Г. Грасмана и ирландского математика У.Гамильтона, затем оно было охотно воспринято многими математиками и физиками [19].

Векторы применяются в классической механике Галилея-Ньютона в теории относительности, квантовой физике. В современной математике это понятие играет важнейшую роль.

Термин «вектор» происходит от латинского слова *vector* -что означает несущий или ведущий, влекущий, переносящий.

Продолжительное время вектор рассматривался только как ***направленный*** отрезок, один из концов которого называли началом, а другой - его концом. С разработкой теории преобразований вектор стал рассматриваться не только как направленный отрезок, но и параллельный перенос, заданный парой точек - точкой 0 и ее образом 0'. В современной математике раздел, в котором излагается учение о действиях с векторами, называется векторной алгеброй, так как эти действия имеют много общих свойств с алгебраическими действиями.

2.19. Подобие

Одинаковые по форме, но различные по величине фигуры встречаются в вавилонских и египетских памятниках. В сохранившейся погребальной камере отца фараона Рамеса II имеется стена, покрытая сетью квадратиков, с помощью которой на стену перенесены в увеличенном виде рисунки меньших размеров.

Учение о подобии фигур на основе теории отношений и пропорции было создано в Древней Греции в V - IV вв. до н.э. трудами Гиппократа Хиосского, Архита Тарентского, Евдокса Книдского и т.д. Оно изложено в VI книге «Начал» Евклида и дано в виде определения: «Подобные» прямолинейные фигуры суть те, которые имеют соответственно равные углы и пропорциональные стороны».

Искусство изображать предметы на плоскости привлекало к себе с древних времен. Попытки таких изображений появились раньше, чем возникла письменность. Еще в глубокой древности люди рисовали на скалах, стенах, сосудах и прочих предметах орнаменты, растения, животных. При этом всегда стремились к тому, чтобы изображение правильно отражало естественную форму предмета. Основное требование к изображению сводилось к соответствию точек натурального объекта с точками его изображения на плоскости. Многие из законов преобразований, в том числе и преобразование подобия были известны уже в Древней Греции. И так, подобие есть некоторое взаимно однозначное точечное преобразование плоскости. При преобразовании подобия угол между прямыми в одной плоскости равен соответственному углу в другой плоскости, а отношение соответственных отрезков равно коэффициенту подобия.

Символ обозначающих подобие, есть не что иное, как перевернутая латинская буква S - первая буква в слове *similis*, что в переводе означает подобие.

Свойства подобия, установленные из опыта, издавна широко использовались на практике при составлении планов, карт, при выполнении архитектурных чертежей и чертежей различных машин и механизмов.

2.20. Вписанные и описанные многоугольники

Еще в глубокой древности была поставлена практическая задача построения правильного многоугольника с помощью циркуля и линейки. Построения трех- четырех- шестиугольников просты. При построении необходимо деление окружностей на n-равных дуг. Деление окружности на некоторое число равных частей для построения правильных многоугольников имело важное значение для пифагорейцев. Так как они считали в основе всего, лежит число.

Учение, начатое пифагорейцами, было систематизировано Евклидом. Евклид в своих «Началах» изложил построение правильного треугольника, четырехугольника, пятиугольника и шестиугольника, а затем пятнадцатиугольника с помощью циркуля и линейки.

Зная, как построен правильный n-угольник можно построить правильный 2n-угольник. Для этого дугу легко разделить пополам, построив биссектрису соответствующего центрального угла. Долгое время математики напрасно искали способы построения правильного семиугольника, десятиугольника и одиннадцатиугольника с помощью циркуля и линейки.

Прошло более 2-х тысячелетий, прежде чем евклидов список n-угольников удалось пополнить. Это сделал в конце XVIII в. в 1796 г. немецкий математик К.Ф.Гаусс. Он дал построение правильного семнадцатиугольника и доказал невозможность построения с помощью только циркуля и линейки правильных n-угольников при n = 7, и = 9. Более того Гаусс доказал, что построение правильного многоугольника при нечетном n возможно тогда и только тогда, когда n - является простым числом вида:

$$N=2^{2n}+1$$

т.е. окружность можно разделить на такое простое число равных частей. Тем самый молодой студент (Гауссу было в то время лишь 19 лет) решил задачу, которой безуспешно занимались ученые более двух тысячелетий [20].

2.21. Из истории тригонометрии

Тригонометрия - математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника,

Слово «тригонометрия» от греческих слов «тригон» - треугольник и «метрео» - измеряю, означает измерение треугольника.

Тригонометрия возникла из практических нужд человека. С ее помощью можно определить расстояние до недоступных предметов и, вообще, существенно упрощать процесс геодезической съемки местности для составления географических карт.

Зачатки тригонометрических познаний зародились в древности. На раннем этапе тригонометрия развивалась в тесной связи с астрономией и являлась вспомогательным разделом. Астрономия - одна из древнейших наук зародилась и развивалась в Вавилоне, Египте, Китае, Индии. В результате астрономических наблюдений возникла необходимость определения положений светил, вычисления расстояний и углов. Так, как некоторые расстояния, например, от Земли до планет нельзя было измерить непосредственно, то ученые искали взаимосвязь между сторонами, углами треугольника, у которого две вершины расположены на Земле, а третью представляет планета или звезда.

Зачатки тригонометрии обнаружены в сохранившихся документах Древнего Вавилона, где астрономия достигла значительного развития, где учеными была составлена одна из первых карт звездного неба.

Древнегреческие ученые разработали «тригонометрию хорд», изложенную выдающимся астрономом Птолемеем (И в.). В работе «Альмагест» (полное название сочинения Птолемея «Великое математическое построение астрономии») он вывел соотношение между хордами в круге, написанное словесно, в виду отсутствия в то время математической символики, которое равносильно современным формулам для синуса половинного и двойного угла, суммы и разности двух углов.

Важный шаг в развитии тригонометрии был сделан индийскими учеными, которые заменяли хорды синусами. Это нововведение перешло в VIII в. в арабскоязычную математику стран Ближнего и Среднего Востока, где тригонометрия постепенно превратилась из раздела астрономии в самостоятельную математическую дисциплину. Помимо синуса были введены и другие ***тригонометрические функции*** и для них были составлены таблицы.

Общепринятые понятия тригонометрии, обозначения, определения тригонометрических функций формировались в процессе долгого исторического процесса. Если, например, радиус тригонометрического круга равен единице, мы считали естественным понятием, то эта простая идея усвоена лишь в X-XI вв. Окончательный вид тригонометрия приобрела в XVIII в. в трудах Л.Эйлера.

Существует также ***сферическая*** тригонометрия, рассматривающая соотношения между сторонами и углами треугольников на сфере, образованная дугами больших кругов. Она является частью сферической геометрии, и возникла исторически раньше тригонометрии на плоскости, из потребности практической астрономии.

2.22. Тригонометрические функции

Тригонометрические функции возникли в Древней Греции в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Отношения сторон в прямоугольном треугольнике, которые и есть тригонометрические функции, встречаются уже в III в. до н.э. в работах Евклида, Архимеда, Апполония Пергского и др. Индийские ученые положили начало учению о тригонометрических величинах, которые они рассматривали в пределах четверти круга. Синус и косинус встречается в индийских астрономических сочинениях уже в IV-V вв. Название «синус» происходит от латинского *sinus* - «перегиб», «пазуха» - представляет собой перевод арабского слова «джива» («тетива лука»), которым обозначали синус индийские математики. В IX-X вв. ученые стран ислама ввели новые тригонометрические величины: тангенс и котангенс, секанс и косеканс. Они установили, что в прямоугольном треугольнике острый угол можно выразить через отношение одного катета к другому. Латинское слова *tangens* означает «касательная», касательная к окружности, *secanc* - секущая. Название «косинус» и «котангенс» представляют собой сокращение терминов *complementy sinus (tangens)* («синус дополнения», «тангенс дополнения»), т.е. синус остатка (до четверти окружности), выражает факт, что косинус и котангенс угла равны соответственно синусу и тангенсу аргумента дополненной к функции до $\frac{\pi}{2}$

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad ctg\,\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Термин «косеканс» был образован в средние века по аналогии с термином «косинус», «котангенс».

Развитие учения о тригонометрических функциях и широкое применение их в практике способствовало отделению тригонометрии от астрономии в самостоятельную ветвь математики.

Выдающийся ученый Востока (XIII в.) Насирэддин ат-Туси (1201-1274 г.), уроженец иранского города Тус первый отделил тригонометрию от астрономии и выделил ее в самостоятельную дисциплину. Его первое сочинение о тригонометрии «Трактат о полном четырехугольнике» оказало влияние на европейских ученых математиков, в частности на И. Региомонтана.

В Европе первым трудом, в котором тригонометрия рассматривалась, как самостоятельная ветвь математики был труд немецкого математика И. Региомонтана (XV в.) «Пять книг о треугольниках всех видов». Основное содержание этой книги заимствовано из трудов, написанных на арабском языке. В книге систематизированы и прекрасно изложены вопросы тригонометрии. Другие работы в области тригонометрии принадлежат Копернику, Виету, Кеплеру. Современный вид тригонометрия получила в работах Леонарда Эйлера. Он разработал ее как науку о тригонометрических функциях. Установил несколько неизвестных до него формул и ввел единообразные знаки. Впервые в его трудах встречаются записи *sin x, tg x* и др. современные обозначения в том числе и строчные буквы а, в, с для сторон треугольника и прописные буквы А, В, С - для обозначения углов. И так, современную форму теории тригонометрических функций и вообще тригонометрии придал Л.Эйлер (XVIII в.). Ему принадлежат определения тригонометрических функций и принятая в наши дни символика.

2.23. Графики тригонометрических функций

График функции - один из способов се представления. Графический способ представления функции - самый наглядный. График функции синус называют ***синусоидой***, график функции тангенс - ***тангенсоидой*** и т.д.

Первым трафиком тригонометрической функции была синусоида, вычерченная французским математиком Жиль Персона ре Роберваля в конце 30-х годов XVII в. Вычерчивание и применение графиков вообще и тригонометрических в частности вошло в употребление лишь после появления «Геометрии» Декарта и создания аналитической геометрии.

Не сразу и не легко дошли ученые до полного исследования тригонометрических функций и правильною вычерчивания графиков.

Лишь в 1670 г. известный английский математик Джон Валлис разобрался в вопросе о знаках в каждом квадрате и вычертил в своей «Механике» ***два полных оборота синусоиды***, утверждая, что их бесчисленно много.

В 1668 г. в «Геометрических этюдах» английского математика Джеймса Грегори впервые начерчена ***тангенсоида*** в первом квадрате. Через два года английский математик Иссак Барроу (учитель И.Ньютона) в своих «Геометрических лекциях» поместил график косинуса, тангенса. Дальнейшее развитие тригонометрии, в том числе графиков функции изложено в трудах Д.Эйлера (XVIII в.).

2.24. Измерение углов и дуг

Дуги окружности и углы можно измерять в градусах и его долях. За градус принимают 1/360 часть всей окружности.

Градусная система измерения углов восходит к П-Ш вв. до н.э. к периоду возникновения шестидесятеричной системы счисления в вавилонской математике. Градусное измерение углов и дуг получило широкое распространение в странах Азии, Северной Африки и Западной Европы. Они применялись в астрономии, а затем и в тригонометрии. Гиппарх, Птолемей другие древнегреческие астрономы применяли таблицы, в которых давались величины хорд, соответствующих данным дугам. Хорды как и дуги измерялись градусами, минутами и секундами. Один градус составлял 60-ю часть радиуса.

Индийцы заимствовали через греков вавилонское градусное измерение дуг, но вместо хорд они измеряли линии синусов и косинусов. Градусным измерением пользовались и ученые Ближнего и Среднего Востока, которые внесли большой вклад в развитие тригонометрии. Выдающийся немецкий математик и астроном XV в. Региомонтан вместо шестидесятеричного деления радиуса за единицу измерения линии синуса принял одну ***десятимиллионную*** часть радиуса. Это позволило выразить синусы целыми числами. Со временем в тригонометрии (в связи с развитием теории пределов и математического анализа) ввели ***радианное*** измерение углов.

Термин «радиан» происходит от латинского слова радиус.

2.25. Тригонометрические таблицы

В Древней Греции тригонометрия как часть астрономии достигла значительного развития. Первые тригонометрические таблицы хорд были составлены астрономом-математиком Гиппархом из Никеи (II в. до н.э.).

Знаменитое сочинение древнегреческого астронома Клавдия Птолемея (II в.) «Альмагест» (полное название сочинения «Великое математическое построение астрономии») содержит таблицу хорд, составленную в шестидесятеричной системе счисления через полградуса 0 до 180, и играла такую же роль, как таблица синусов. Таблицы ***синусов*** были введены индийскими астрономами, которые рассматривали и линию косинусов. Дальнейшего развития тригонометрические таблицы достигли в трудах ученых стран ислама, которые ввели понятие линии ***тангенса***. Тригонометрические таблицы, отличавшиеся особой полнотой и точностью, были составлены в Самаркандской обсерватории Улугбека (XV в.). В основе их лежало более точное, чем это было прежде значение синуса угла величиной в один градус. Большая заслуга в этом великого математика Джемшида ал-Каши. Это оказало благотворное влияние на развитие европейской науки. Большой точности таблицы тригонометрических функций составил Региомонтан и др. европейские ученые XVI - XVIII вв.

2.26. Начальные сведения по стереометрии

Стереометрия слово греческого происхождения - «стереос» - пространственный, «метрео» - измеряю. Оно встречается еще у древнегреческого философа Аристотеля (IV в до н.э.). Главы 11-13 «Начал» Евклида посвящены стереометрии [21]. Стереометрия возникла позже планиметрии.

В стереометрии (геометрии в пространстве) изучаются взаимное расположение прямых и плоскостей; многогранники (в основном призмы и пирамиды); тела вращения - цилиндр, конус, шар; объемы тел и площади их поверхностей.

Призма слово греческое в буквальном смысле «отпиленный кусок». Термин «параллелепипедальное тело» по Евклиду означает параллелеплоскостное тело. Куб или гексаэдр /шестигранник/ - прямоугольный параллелепипед с правильными измерениями.

2.27. Измерение объемов

Объем - величина, характеризующая размер геометрического тела. Поиск формул для вычисления объемов тел был долог. Объем зерновых амбаров и других сооружений в виде кубов, призм и цилиндров египтяне, вавилоняне, китайцы и индийцы вычисляли путем умножения площадей основания на высоту. Например, в древнеегипетских папирусах, в вавилонских клинописных табличках встречаются правила для определения объема усеченной пирамиды, но не сообщаются правила для вычисления объема полной пирамиды. Определять объем призмы, пирамиды, цилиндра и конуса умели древние греки и до Архимеда. Но только он нашел общий метод, позволяющий определить любую площадь и объем. Он вывел, что объем шара, составляет две трети от объема описанного около него цилиндра. Он считал это открытие самым большим своим достижением. На могильной плите Архимеда, как завещал ученый, был изображен цилиндр с вписанным шаром, а эпитафия говорила о величайшем открытии Архимеда - о том, что объемы этих тел относятся как 3:2.

В Древнем Египте гробницы фараонов имели форму ***пирамид***. В III веке до н.э. египтяне сооружали ступенчатые пирамиды. Позже египетские пирамиды приобрели правильную форму. Например, пирамида Хеопса, высота которой достигает 147 м. и др.

Согласно Архимеду, еще в V в. до н.э. Демокрит установил, что объем пирамиды равен одной трети объема призмы, с тем же основанием и высотой. Полное доказательство этой теоремы дал Евдокс Книдский в IV веке до н.э.

2.28. Конус. Цилиндр

Прямой круговой конус (греческое слово означает «сосновая шишка»). Эта фигура, получающаяся при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов. Уже в книге «Начала» Евклида встречается определение (прямого) конуса.

Апполоний различает ***прямые*** и ***косые*** конусы.

Евдокс Книдский доказывает теорему: Объем конуса равен одной трети объема цилиндра с равным основанием и равной высотой. Само ***вычисление*** объема конуса дает Герон Александрийский.

Боковая поверхность ***конуса*** и ***цилиндра*** была найдена Архимедом. Это было описано в его книге «О шаре и цилиндре». Цилиндром называют фигуру, которая получается при вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон. Слово цилиндр - греческое - означает «валик», «каток».

В книге Архимеда «О шаре и цилиндре» выведены следующие теоремы:

- Объем цилиндра в полтора раза больше объема вписанного в него шара.
- Площадь поверхности цилиндра, включая основания, равна 3/2

площади поверхности вписанной сферы [22].

2.29. Сфера. Шар

Точки пространства, удаленные от данной точки О на расстояние R, образуют сферу с центром О и радиусом R. Сфера ограничивает шар, состоящий из точек, удаленных от О на расстояние не больше R. В древности сфера была в большом почете. Астрономические наблюдения под небесным сводом неизменно вызывали образ сферы. Пифагорейцы считали, что существует десять сфер Вселенной, по которой движутся небесные тела. И расстояние между ними пропорциональны интервалам музыкальной гаммы. В этом усматривали элементы мировой гармонии. В подобных полумистических рассуждениях заключалась и пифагорова «музыка сфер». Аристотель считал, что шарообразная форма как наиболее совершенная, свойственная Луне, Солнцу, Земле и всем мировым телам.

«Сфера» и «шар» - оба слова происходят от одного и того же греческого слова «сфайра» - мяч.

Вывод формул объема шара и площади поверхности сферы - одно из величайших открытий Архимеда. В его произведении «О шаре и цилиндре» имеются теоремы:

- Площадь поверхности сферы равна учетверенной площади ее большого круга, т.е. $S = 4/\Pi R^2$.
- Объем шара равен учетверенному объему конуса, основанием которого служит большой круг, а высотой - радиус шара, т.е. $V = \frac{4}{3}\Pi R^3$.

3. АЛГЕБРА

3.1. Становление алгебры

> Алгебра, есть не что иное, как математический язык, приспособленный для обозначения отношений между количествами.
>
> И. Ньютон

Алгебра - часть математики, которая изучает общие свойства действий над различными величинами и решение уравнений, связанных с этими действиями. В арифметике рассматривают только 4 действия - сложение, вычитание, умножение, деление. В курсе алгебры изучают еще два новых действия: возведение в степень и извлечение корня. В отличие от арифметики в алгебре применяется буквенная символика. Алгебра складывалась в недрах арифметики. В VI в. центр математических исследований перемещается в Индию и Китай, страны Ближнего Востока и Среднюю Азию. Китайские ученые разработали общий метод для решения систем линейных уравнений. Индийские математики использовали отрицательные числа и усовершенствовали буквенную символику. Однако лишь в трудах ученых Ближнего Востока и Средней Азии алгебра оформилась в самостоятельную ветвь математики. В первой половине IX в. Мухаммед Ибн Муса ал-Хорезми написал на арабском языке книгу «Китаб ал-джебр вал-Мукабала». От слова в названии этой книги «ал-джебр» - произошло слово алгебра. Это было первое ***самостоятельное сочинение*** по алгебре. Для ал-Хорезми алгебра - это искусство решения уравнений [23].

Отсутствие удобной и хорошо развитой символики сковывало дальнейшее развитие алгебры, самые сложные формулы приходилось излагать в словесной форме. Поэтому алгебру тех времен называли ***риторической***, т.е. словесной. Создателем буквенного исчисления по праву считают Ф.Виста, крупнейшего французского математика XVI в.

Ф.Виет ввел буквенные обозначения не только для неизвестных, но и для произвольных постоянных. Окончательный ей вид придал в начале XVII в. французский философ-математик Р.Декарт,

В начале XIX в. были решены основные задачи, стоящие перед алгеброй в первом тысячелетии ее развития. Она получила самостоятельное обоснование, не опираясь на геометрические понятия. Более того, алгебраические методы стали применяться для решения геометрических задач. Были разработаны буквенные исчисления для рациональных и иррациональных чисел.

И так, мы видели, что, начиная с древнейших времен, алгебра была в центре внимания математиков. Ее основным объектом всегда было уравнение, а главная задача состояла в отыскании корней уравнения.

При решении уравнений второй, третьей и четвертой степени были найдены формулы для их решения. Формулу решения квадратного уравнения знает каждый школьник.

Решение кубических уравнений приводится по формуле итальянского математика Дж. Кардано, которую он впервые опубликовал в своей книге «Великое искусство или о правилах алгебры» (1545 г.). Уравнения четвертой степени сводится к решению кубического и квадратных уравнений.

Но с течением времени изменился и сам предмет алгебры. Сейчас она занимается не только решением уравнений, а исследованием алгебраических структур, групп, колец, полей.

3.2. Уравнения

Уже около 4000 лет назад вавилоняне и египтяне решали разные задачи землемерия, строительства и военного дела с помощью уравнений. Уравнение первой степени и уравнение второй степени умели решать в древности также китайские и индийские ученые.

Задачи, решаемые с помощью уравнений, встречаются во многих тестах глубокой древности.

Уравнение - одно из важнейших понятий математики. Долгое время основным предметом изучения ***алгебры***, был метод решения уравнений.

Решая уравнение с одним неизвестным, мы пытаемся прийти к простейшим уравнениям, для решения которых есть готовые формулы. Это ***линейные*** уравнения, ***квадратные*** уравнения. Однако, не все уравнения можно решить подобным образом. Например, в начале XIX в. было доказано, что не существует общей формулы для решения ***алгебраических уравнений***, начиная с пятой степени. Уравнения второй степени (квадратные уравнения) умели решать еще в Древней Вавилоне. Во II тысячелетии математики Древней Греции решали квадратные уравнения геометрически: например, Евклид - при помощи деления отрезка в среднем и крайнем отношениях. Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, рассматриваются во многих математических рукописях и трактатах.

Формула корней квадратного уравнения «переоткрывалась» неоднократно. Один из дошедших до наших дней выводов формул - формула индийского математика Брахмагупты (около 598 г.). Среднеазиатский ученый ал-Хорезми (IX в) в трактате «Китаб аль-джебр вадь-Мукабала» получил эту формулу методом выделения полного квадрата с помощью геометрической иллюстрации.

3.3. Системы линейных уравнений

Значительные результаты в развитии алгебры получили математики Древнего Китая. Они нашли общий метод решения системы n-линейных уравнений с n-неизвестными. Регулярный алгоритм, разработанный китайскими учеными по существу совпадает с методом Гаусса, которым мы сейчас пользуемся. Китайское правило носило название «фан-чэн», что буквально означало выстраивание чисел по клеткам. Систему уравнений записывали с помощью таблицы, составленной из коэффициентов при неизвестных и из свободных членов (В Европе такие таблицы были введены в математику для решения систем линейных уравнений лишь в XIX в. Их называли матрицами).

Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными. Китайские ученые прежде всего освобождались от дробей, а затем приводили систему к следующему «каноническому» виду:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{matrix} a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

где все коэффициенты - целые числа. Справа приведена таблица, которая соответствует данному уравнению.

Путем исключения неизвестных система (1) приводится к треугольному виду:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ a'_{33}z = b'_3 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & a_{11} \\ 0 & a'_{22} & a_{12} \\ a'_{33} & a'_{23} & a_{13} \\ b'_3 & b'_2 & b_1 \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

Первое уравнение остается неизменным, второе содержит только y и z, а третье уравнение содержит одну неизвестную величину z. Находим z, затем из второго уравнения y, и из первого уравнения x.

Задача из древнекитайского трактата. Два человека A и B получили некоторое число монет. Если к монетам человека A добавить половину монет B. или к монетам, имеющимся у B добавить 2/3 монет A, то в обоих случаях получится 48. Пусть A имеет x монет. B - y монет. Получаем систему:

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} = 48 \\ \dfrac{2}{3}x + y = 48 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 96 \\ 2x + 3y = 144 \end{cases} \qquad (3)$$

В трактате дается правило: установи в правом столбце 2 для A, 1 для B и 96 монет, установи в левом столбце 2 для A, 3 для B и 144 монеты, получаем таблицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 144 & 96 \end{pmatrix}$$

из системы (3) мы легко находим:

В Китае поступали так: из первого столбца таблицы вычитали второй, а в результате получали таблицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 48 & 96 \end{pmatrix}$$

откуда находим $2y=48$ $y=24$ $x=\frac{96-24}{2}=36$ $x=36$

3.4. Квадратные уравнения

Еще в египетских текстах мы находим зачатки алгебры как науки о решении уравнений.

Ученые Древнего Вавилона сделали огромный шаг вперед по сравнению с математиками Египта. Они нашли правило для решения любого квадратного уравнения. Но все задачи, приводящие к решению квадратных уравнений записывались словесно, без символических обозначений. Решение представлено в виде правила, которое указывало, какие действия и в какой последовательности нужно произвести, чтобы получить результат. В клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения уравнений.

Древнегреческий математик Диофант Александрийский (III в.) при составлении уравнений для упрощения решения умело выбирает неизвестные. ***Задача*** Диофанта: найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение 96.

Он рассуждал так: искомые числа не равны, если бы они были равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы, то есть 10 + x, а другое же меньше, т.е. 10-x. Разность между ними 2x. Отсюда уравнение:

$(10 + x)\text{-}(10 - x) = 96$ или

$10\text{-}x^2 = 96$

$x^2 - 4 = 0$

$x = 2$

Одно из чисел равно 12, другое 8. Решение x=-2 у Диофанта не существовало, греческая математика знала только положительные числа.

Как бы решили эту задачу в настоящее время. Обозначим за y - одно число, тогда другое будет 20 - y, произведение их - 96.

Составим уравнение:

$y * (20 - y) = 96$

$y^2 - 20y + 96 = 0$

Решая квадратное уравнение, имеем y=12 y=8. Мы видим, выбирая за неизвестные полуразность искомых чисел, Диофант упрощает решение. Он приводит задачу к решению неполного квадратного уравнения. В Индии задачи на квадратные уравнения встречаются у математика и астронома Ариабхата. А индийский математик Брахмагупта (VII в) изложил ***правила*** решения квадратных уравнений, приведенных к каноническому виду:

$$ax^2 + bx = c \qquad a>0$$

В уравнении коэффициенты кроме a, могут быть отрицательными.

Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим.

Знаменитый ученый из Средней Азии Хорезми Мухаммед Ибн Муса (IX в.) книгу «Китаб аль джебр валь Мука-бала» посвятил в основном решению уравнений первой и второй степени. Метод решений уравнений, которым он пользуется заключается в ***двух*** операциях. Первая операция, которую он называет «аль-джебр», т.е. ***восстановление*** состоит в устранении из уравнения отрицательных величин, путем добавления но общим сторонам уравнения выражений, противоположных данным отрицательным выражениям. Вторая операция - валь мукабала - ***противопоставление***, сводится к сокращению подобных членов, но так чтобы не появлялись отрицательные члены.

В алгебраическом трактате Ал-Хорезми дается классификация ***линейных* и *квадратных*** уравнений. У них их шесть видов:

1. «Квадраты равны корням» - т.е. $ax^2 = bx$
2. «Квадраты равны числу» - т.е. $ax^2 = c$
3. «Корни равны числу» - т.е. $ax = c$
4. «Квадраты и корни равны числу» - т.е. $ax^2 + вx = c$
5. «Квадраты и числа равны корням» - т.е. $ax^2 + c = вx$
6. «Корни и числа равны квадрату» - т.е. $вx + c = ax^2$

А. Мухаммед бен-Муса Аль-Хорезми описал методы решений уравнений от 1 до 6. Трактат Аль-Хорезми является первой дошедшей до нас книгой, в которой проведена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.

В Европе формулы решения квадратных уравнений по образцу Аль-Хорезми были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи. Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета. Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета была им сформулирована в 1591 г. и была записана с помощью символов [24].

3.5. Многочлены

Многочленом P(x) от одной переменной x называют выражение вида:

$$P_{(x)}=a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... +a_nx^n \qquad a_n\neq 0$$

Число n - называют степенью многочлена, a_n - старшим коэффициентом, a_0 - свободным членом.

Труды ученых стран ислама значительно способствовали развитию алгебры, в частности теории уравнений. Однако, в этих трудах отсутствовали символы и знаки. В алгебре задачи, название величин, решения, ответы все полностью записывались ***словами***, т.е. алгебра была ***риторической***. В процессе становления алгебры возникла необходимость в точных, ясных и сжатых формулировках, требовалось устранить громоздкость словесных описаний. Громоздкие записи затрудняли алгебраические действия. Особенно после введения книгопечатания в XV в. была возможность введения кратких записей и символики. Создание буквенного исчисления относится к XIV-XVII вв. В конце XV в. француз Н. Шюке и итальянец Л. Пачоди впервые написали знаки сложения и вычитания *p* и *m* (от латинского plus и minus), а немецкий математик Я. Видман ввел современные обозначения «+» и «-» в конце XV века.

В начале XVII в. вошли в употребление знак равенства и скобки:

квадратные скобки предложил итальянский математик Р.Бомбелли;

круглые скобки - итальянский математик Н. Тарталья;

фигурные скобки - французский математик Ф. Виет.

Знаки умножения (обозначение умножения в виде точки) и знак деления ввел Г.Лейбниц в конце XVII в.

Важным шагом в развитии алгебраической символики оказалось введение Ф.Виетом математических знаков для произвольных постоянных величин. Он обозначал их прописными согласными буквами латинского алфавита, а неизвестные величины - гласными. Виет создал и алгебраические формулы. В 1637 г. Р.Декарт придал знакам алгебры современный вид. Он изображал неизвестные - последними буквами алфавита x, y, z, а данные величины - начальными буквами a, в, c. Только на основе разработанной системы математических знаков стало возможным запись многочлена.

3.6. Арифметические и геометрические последовательности. Числовая последовательность

Последовательность - одно из основных понятий математики. Последовательность может быть составлена из чисел, функций и векторов и т.д. Последовательность считается заданной, если указан закон, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие элемент x_n, некоторого множества. Последовательность записывается в виде x_1, x_2, ... x_n или кратко (x_n). Наиболее часто рассматривают числовые последовательности, т.е. последовательности, члены которых числа.

Понятие числовой последовательности возникло и развивалось задолго до создания учения о функции. Вот примеры бесконечных числовых последовательностей, известных еще в древности:

1,2, 3, 4, 5, ...	последовательность натуральных чисел;
2, 4, 6, 8, 10, ...	последовательность четных чисел;
1, 3, 5, 7, 9, ...	последовательность нечетных чисел;
1, 4, 9, 16, 25,...	последовательность квадратов натуральных чисел;
2, 3, 5, 7, 11, ...	последовательность простых чисел;
1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5...	последовательность чисел, обратных натуральным.

Число членов каждого из этих рядов бесконечно. Первые пять последовательностей - монотонно ***возрастающие***, последняя - монотонно

убывающая [25]. Аналитический способ - самый простой способ задания числовой последовательности. Это делают с помощью формулы, выражающей n-й член последовательности x_n через его номер и, т.е. правило получения члена с любым номером. Все перечисленные выше последовательности, кроме предпоследней задаются формулой. Для последовательности простых чисел, общий член неизвестен. Однако еще в III в. до н.э. александрийский ученый Эратосфен указал способ (хотя ж очень громоздкий) получения n-ого его члена. Этот способ был назван «решетом Эратосфена», Примеры числовых последовательностей - арифметическая прогрессия и геометрическая прогрессия.

3.7. Прогрессии. Сведения из истории

Итак, прогрессии - частные виды числовых последовательностей. В клинописных таблицах вавилонян, как и в египетских папирусах, относящихся ко II тысячелетию до н.э. встречаются примеры арифметических и геометрических прогрессий. Первые из дошедших до нас задач на профессии связаны с запросами хозяйственной жизни и общественной практики, как, например, распределение продуктов, деление наследства и т.д.

Теоретические сведения, связанные с прогрессиями, впервые встречаются в дошедших до нас документах Древней Греции. Уже в V веке до н.э. греки знали следующие прогрессии и их суммы:

$$1+2+3+...+n=\frac{n*(n+1)}{2}$$

$$2 + 4 + 6 + ... + 2*n = n*(n + 1)$$

$$1 + 3 + 6 + ... + (2*n + 1) = (n + 1)^2$$

и др.

В «Псаммите» («исчисление песчинок») Архимед впервые сопоставляет арифметическую и геометрическую прогрессии:

$$1, 2, 3, 4, 5, ...$$

$$10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, ...$$

и указывает на связь между ними, например:

$$10^3*10^5=10^{3+5} =10^8,$$

т.е. для умножения двух членов геометрической прогрессии достаточно сложить соответствующие члены арифметической прогрессии и взять полученную сумму в качестве показателя 10. Оно было заново открыто немецким ученым М. Штифелем в 1544 г., который также отметил, что если перемножить два члена геометрической прогрессии (q^1, q^2, q^3, ...), то показатель произведения будет равен сумме соответствующих членов арифметической прогрессии: $q^2*q^3 = q^{2+3}= q^5$

Для решения некоторых задач из геометрии и механики Архимед вывел формулу суммы квадратов натуральных чисел, хотя ею пользовались и до него:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6} * n(n+1)*(2*n+1)$$

Некоторые формулы, относящиеся к прогрессиям, были известны китайским и индийским ученым. Так, Ариабхатта (V в.) знал формулы для общего члена суммы арифметической прогрессии. Магавира (IX в.) пользуется формулой (I) и другими более сложными конечными радами. Однако правило для нахождения суммы членов произвольной арифметической прогрессии впервые встречаются в «Книге абака» (1202 г.) Леонардо Пизанского. В «Науке о числах» (1484 г.) Н. Шюке, как и Архимед, сопоставляет арифметическую профессию с геометрической и дает общее правило для суммирования любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Формула для суммирования бесконечно убывающей прогрессии была известна П. Ферма и другим математикам XVII в.

Слово профессия латинского происхождения (*progressio*), буквально означает «движение вперед» (как и слово «професс») и встречается впервые у римского автора Боэция (V - VI вв.). Первоначально под ***прогрессией*** понимали всякую числовую последовательность, построенную по закону, позволяющему неограниченно продолжать ее в одном направлении, например, последовательности натуральных чисел, их квадратов и кубов. Но со временем термин перестает быть общеупотребительным. Например, в XVII в Дж. Грегори употребляет вместо профессии термин «ряд», а другой видный английский математик Джон Валлис, применяет для бесконечных рядов термин «бесконечные прогрессии».

М.Штифель без колебания продолжил арифметические прогрессии в область отрицательных чисел. В геометрической прогрессии появились отрицательные показатель степени.

3.8. Арифметическая прогрессия

Арифметической профессией называется последовательность (a_n), у которой каждый член, начиная со второго, больше (или меньше) предыдущего на постоянное (для данной профессии число) *d*. Число *d* называют разностью арифметической профессии. Другими словами, арифметическая прогрессия - это последовательность, заданная по правилу:

a_1 и d даны $a_{n+1}=a_n+d$ при $n\geq1$

Арифметическая прогрессия и их свойства изучались математиками с древних времен. Вот одна вавилонская задача, в которой используется арифметическая прогрессия:

Задача. Пусть тебе сказано: «раздели 10 мер ячменя между 10 человеками, разность между каждым человеком и его соседом равна 1/8 меры».

Греческих математиков интересовала связь прогрессий с так называемыми многоугольными числами: вычислением площадей, объемом, красивыми числовыми соотношениями типа:

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

$$1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$$

Для арифметической прогрессии справедливы следующие формулы:

$$a_n = a_1+(n-1)*d$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)*d}{2}*n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}*n$$

где S_n - сумма первых n членов арифметической прогрессии.

Приведем интересный эпизод из жизни великого немецкого математика К Ф Гаусса (1777 г. - 1855 г.) Когда ему было 9 лет, учитель занятый проверкой работ учеников других классов, задал на уроке следующую задачу:

«Сосчитать сумму всех натуральных чисел от 1 до 40 включительно: 1+2+3+4+5+…+40» Каково же было удивление учителя, когда один из учеников (это был Гаусс) через минуту воскликнул: «Я уже решил». Большинство учеников после долгих подсчетов получили неверный результат. В тетради Гаусса было только одно число, но зато верное.

Вот схема его рассуждений. Сумма чисел в каждой паре равна 41:

+	1	2	3	…	20
	40	39	38	…	21
	41	41	41	…	41

Таких пар 20, поэтому исковая сумма равна 41*20 = 820. Большой популярностью даже в наши дни пользуются логические квадраты [26]. Это квадраты, в каждую клетку которых вписаны числа так, что суммы чисел вдоль любой диагонали равны. Такой логический квадрат изображен на гравюре немецкого художника А. Дюрера «Меланхолия»:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

3.9. Геометрическая прогрессия

Прогрессии встречаются в памятниках II тысячелетия до н.э. В папирусе Ахмеса содержится задача, в которой требуется найти сумму n членов геометрической прогрессии, зная ее первый член и знаменатель.

Из одной клинописной таблички можно заключить, что наблюдая Луну от новолуния до полнолуния, вавилоняне пришли к такому выводу: в первые 5 дней после новолуния рост освещения лунного диска совершается по закону геометрической прогрессии со знаменателем 2. В другой более поздней табличке идет речь о суммировании геометрической прогрессии:

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9$$

(Решите !)

Решение и ответ S = 512 + (512 - 1) данные в табличке, наводят на мысль, что автор задачи пользовался формулой:

$$S_n=2^n+(2^n-1),$$

однако о том, как он дошел до нее ничего не известно.

Издавна большой популярностью пользуется следующая задача-легенда: «Индийский царь Шираль позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, чтобы наградить его за остроумную выдумку. Сета издеваясь над царем, потребовал за первую клетку шахматной доски пшеничное зерно, за вторую - 2 зерна, за третью - 4 зерна и т.д. Оказалось, что царь не был в состоянии выполнить это «скромное» желание Сеты».

В этой задаче речь идет о суммировании геометрической прогрессии $1, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^{63}$, Ее сумма равна:

$$2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

Такое количество зерна пшеницы можно собрать лишь с урожая планеты, поверхность которой примерно в 2000 раз больше всей поверхности Земли.

Любопытно отметить, что в задачах на геометрические профессии в китайской «Математики в девяти книгах» знаменатель равен 2. Формул суммирования здесь нет. Примеры арифметических и геометрических профессии имеются в индийских «сиддхантах».

3.10. Степень с натуральным показателем

Современная запись, вроде x^3, x^4 и т.д. была введена Рене Декартом и систематически применялась им в его «Геометрии», изданная в 1637 г.

(Это была новая геометрия, изложенная с помощью алгебры). Понятие степени, возникшее свыше 400 лет назад, и первоначально означало произведение конечного числа равных сомножителей. Название ***квадраты*** и ***кубы*** для 2-х и 3-х степени чисел древне-греческого происхождения. Индийские ученые оперировали степенями с натуральными показателями до 9 включительно.

Отрицательные показатели степеней систематически стал впервые применять И.Ньютон (1676 г.), который писал: «Как алгебраисты вместо a*a, a*a*a, и т.д. пишут a^2, a^3 и т.д., так я ..., вместо $\frac{1}{a}$ $\frac{1}{a^2}$ $\frac{1}{a^3}$ пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} и т.д.».

Обозначения с помощью отрицательных показателей широко используются в современной технике и науке с целью сокращения громоздких записей и упрощения действий, когда речь идет о числах, представляющих очень малые величины.

3. 11. Степень с рациональным показателем

При решении все более сложных алгебраических задач возникла необходимость в ведении в качестве показателя степени, кроме положительных чисел еще и нуля, отрицательных и дробных чисел.

Равенство $a^0 = 1$ (где $a \neq 0$) применял в своих трудах в начале XV в. самаркандский ученый ал-Каши. Независимо от него нулевой показатель ввел в XV в. Н. Шюке. Он ввел и отрицательные показатели степени. Французский математик Н. Орема в XIV в. в своем труде «Алгоритм пропорций» высказывал идею дробных показателей.

Позже дробные и отрицательные показатели встречаются у немецкого математика М.Штифеля в его книге «Полная арифметика» (1544 г.), а также и нидерландского математика С. Стевина. О необходимости введения нулевого, отрицательного и дробных показателей и современных символов впервые подробно писал в 1665 г. английский математик Джон Валлис. Его дело завершил И. Ньютон, он стал систематически применять новые символы.

Также как целые, дробные (положительные и отрицательные) и нуль получили общее название рациональных чисел, так и было введено новое определение степени с рациональным показателем. Для степени с нулевым, отрицательным и дробным показателями применяются тоже правила действий, что и для степени с натуральным показателем. А именно:

$$(a*b)^n = a^n * b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (a^m)^n = a^{m*n}$$

$$a^m * a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3.12. Функция

Функция - это одно из основных математических и общенаучных понятий, выражающее зависимость между переменными величинами. Понятие «функция» претерпело длительную и довольно сложную эволюцию. Термин «функция» впервые появился в 1692 г. у Г.В.Лейбница (от латинского слова - исполнение, совершение).

Функциями он называл абсциссы, ординаты и др. Отрезки, связанные с точкой, описывающей некоторую линию. Дальнейшее развитие математического анализа привело к переходу от наглядной или геометрической (механической) точки зрения на функцию к точному «аналитическому» т.е. алгебраическому определению. В 1718 г. известный швейцарский математик Иоганн Бернулли писал: «Функцией переменной величины называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной и постоянных». Аналогичное определение дал ученик

Бернулли академик Леонард Эйлер в своем знаменитом произведении «Введение в анализ» (1748 г.). Таким образом, согласно точке зрения Бернулли и Эйлера каждая функция должна быть выражена ***аналитически***, т.е. с помощью формулы, например:

$$y = a * x + b, \qquad y=x^3, \qquad y = ax^2+bx+ c, \qquad S = v*t$$

или при помощи уравнения.

Аналитическое задание функции находит широкое применение в науке и в технике.

Существует еще и старейший - ***табличный*** способ задания функции. Например, математические и специальные таблицы (таблицы квадратов кубов и квадратных корней, тригонометрические таблицы и т.д.). С помощью системы координат функцию можно задать геометрически, ***графическим*** способом [27].

3.13. Степенная функция. График степенной функции.

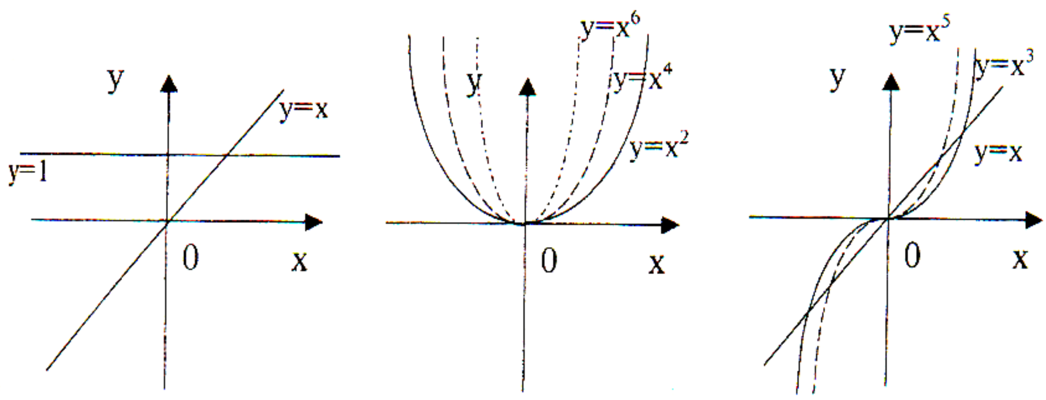
Степенной функцией называют функцию вида: $y = x^a$, где а - заданное число, называемое показателем степени. Рассмотрим график степенной функции $y = x^a$

1. При а = 0 у = 1 графиком является прямая, параллельная оси ОХ
2. При а=1 у = х график-биссектриса 1-ого и 3-ого координатных углов
3. При а = 2 $y = x^2$, но не только при а=2, но и при а=2*n (т.е. а=2, 4, 6, ...) графиком функции является парабола

Декарт и Ферма часто использовали параболу для построения корней уравнения.

4. При а = 3 $y = x^3$ графиком является ***кубическая*** парабола.

Французский математик Г.Монж, которого называли отцом начертательной геометрии (1746-1818 г.г.) использовал кубическую параболу для построения действительных корней кубических уравнений.



3.14. Показательная функция

Показательной функцией называют функцию вида:

$y = a^x$ где $a>0$, x - любое действительное число. Еще в 1679 Г.Г. Лейбниц рассматривал уравнения вида:

$$x^x+z^z = c \qquad\qquad x^x-x = 24$$

Аналогичными уравнениями занимался Иоганн Бернулли.

Л. Эйлер ученик Бернулли посвятил показательным и логарифмическим функциям две главы «Введение в анализ» (1748 г.). Одним из замечательных достижений Эйлера было установление связи между показательной и тригонометрической функциями.

3.15. Логарифм

Изобретение логарифмов в начале XVII в. тесно связано с развитием в XVI в. производства и торговли, астрономии и мореплавания, требовавших усовершенствования методов вычислительной математики. Недаром французский математик П. С. Лаплас сказал, что «изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизни...» Не меньшее значение имело изобретение логарифмов для развития теоретических вопросов математики. Идея логарифма в XVIII - XIX вв. привела к развитию учения о показательной и логарифмической функций.

Логарифмы были введены шотландским математиком Дж. Непером (1550-1617 г.г.) и независимо от него швейцарским механиком и математиком И. Бюрги (1552-1632 г.г). Бюрги пришел к логарифмам раньше, но опубликовал свои таблицы с опозданием (в 1620 г.) и первой появилась работа в 1614 г. Непера «Описание удивительной таблицы логарифмов». Основанием таблицы логарифмов Непера является иррациональное число. Это число называют неперовым числом и со времен Л.Эйлера обозначают буквой ℓ

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Дальнейшим развитием учение о логарифмах обязано Л.Эйлеру. Он не только дал новое определение логарифму, но и распространил это понятие на комплексные числа.

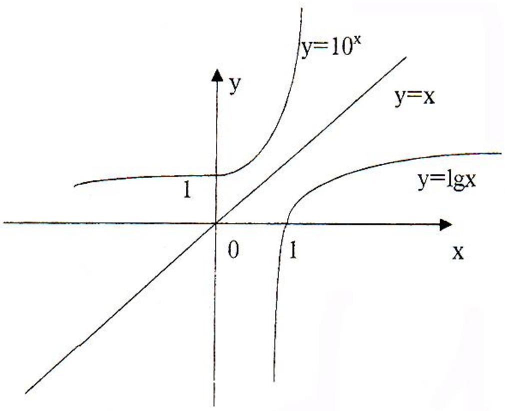
Первые таблицы десятичных логарифмов были составлены необыкновенно изобретательным и остроумным вычислителем, английским математиком Г. Бриггсом (1561-1630 г.г.). Голландский математик А. Флакк (1600 - 1667 г.г.) заполнил пробелы бриггсовских таблиц.

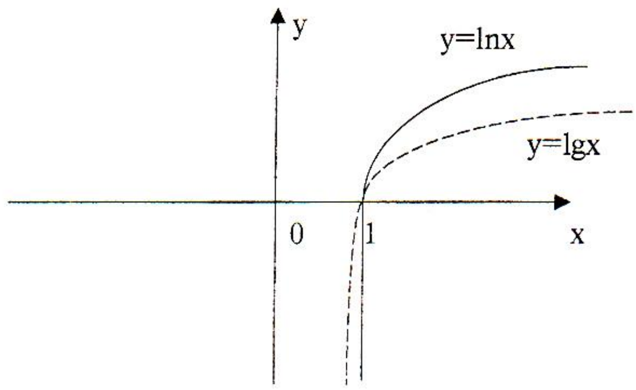
Таким образом, история логарифмов еще раз показывает, что великие открытия являются результатом труда не одного человека и, даже не одного поколения. Она убеждает нас в том, что научные открытия не являются плодом одной лишь гениальности или выдающихся способностей ученого, они являются результатом гигантского труда, огромного напряжения мысли и воли к достижению цели [28].

3.16. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция по основанию a ($a>0$ $a\neq1$) обозначается $y = \log_a x$ и определяется как функция, обратная показательной функции $y=a^x$ с тем же основанием. Так как логарифмическая и показательная функции взаимнообратны, то график логарифмической функции получается из графика показательной симметрией относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Джон Непер (1550-1617 г.г.) в работах, вышедших в 1614 и 1619 гг. дал определение логарифма синуса.





На другом рисунке сопоставлены графики $y=\lg x$ и $y=\ln x$

4. Математический анализ

Математический анализ не менее всеобъемлющ, чем сама природа; он определяет вое ощутимые взаимосвязи, измеряет времена, пространства, силы, температуры.

Ж. Фурье.

Весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных величин и их функции.

Л. Эйлер

В истории математики условно можно выделить два основных периода: элементарной и современной математики. Рубежом, от которого принято вести отсчет эпохи ***новой*** (иногда говорят - высшей), математики стал XVII век - век появления математического анализа. В конце XVII в. И.Ньютоном, Г.Лейбницем и их предшественниками был создан аппарат нового ***дифференциального исчисления и интегрального исчисления***, составляющего основу математического анализа.

Математический анализ - это обширная область математики с характерным объектом изучения (переменной величины), своеобразным методом исследования (анализом посредством бесконечно малых или посредством предельных переходов), определенной системой основных понятий (функция, предел, производная, дифференциал, интеграл, ряд) и постоянно совершенствующимся и развивающимся аппаратом, основу которого составляют дифференциальные и интегральные исчисления.

Попробуем дать представление о том, какая математическая революция произошла в XVII в., чем характеризуется связанный с рождением матанализа переход от элементарной математики к современной, что составляет предмет исследований матанализа и чем объясняется его фундаментальная роль во всей современной системе теоретических и прикладных знаний.

Движение, переменные и их взаимосвязи окружают нас повсюду. Так вот, матанализ и составляет основу языка и математических методов описания ***переменных*** величин и их взаимосвязь. В наши дни без матанализа невозможно не только рассчитать космические траектории, работу ядерных реакторов, бег океанской волны и закономерности развития циклона, но и экономически управлять производством, распределением ресурсов, организацией технологических процессов и т.д. потому что все это - ***динамические*** процессы.

Элементарная математика была в основном математикой ***постоянных*** величин, она изучала главным образом соотношения между элементами геометрических фигур, арифметические свойства чисел и алгебраические уравнения.

Итак, матанализ открыл возможности для научного описания количественного и качественного изучения переменных величин и движения в широком смысле этого слова. Предметом изучения в матанализе являются функции или зависимость между переменными величинами.

Каковы же предпосылки появления математического анализа?

К концу XVII в. сложилась следующая ситуация. Во-первых, в рамках самой математики за долгие годы накопились некоторые важные классы однозначных задач. Например, задачи измерения площадей и объемов нестандартных фигур, задачи проведения касательных к кривым и появились методы их решения в различных частных случаях. Во-вторых, оказалось, что эти задачи теснейшим образом связаны с задачами описания механического (не обязательно равномерного) движения, и в частности с вычислением его мгновенных характеристик (скорости, ускорения в любой момент времени, а также с нахождением величины пройденного пути для движения с заданной переменной скоростью). Решение этих проблем было необходимо для развития физики, астрономии и техники. Наконец, в-третьих, в середине XVII в., трудами Р.Декарта и П. Ферма были заложены основы аналитического метода координат (основы аналитической геометрии). Это позволило сформировать разнородные по своему происхождению геометрические и физические задачи на общем (аналитическом) языке чисел и числовых зависимостей, то есть числовых функций.

Революция в математике этого времени: выдвижение на передний план идеи переменной величины и разработка анализа ***бесконечно малых*** как основного математического аппарата естествознания.

Создание математического анализа является одним из важнейших достижений науки XVII в. В это время в Европе укрепляется новый общественный строй - капитализм. Развитие промышленности, строительной и транспортной техники, создание машин, постройка судов для плавания в океане и многие другие технические задачи приводили к необходимости изучать законы движения. И так, проблема движения выдвигается в XVII столетии на первый план.

Х.Л.Лагранж писал: «Открытие исчисления бесконечно малых дало математикам возможность свести законы движения тел к аналитическим уравнениям».

Итак, математический анализ появился 300 лет назад. Его начало датируют 1684 г., когда в октябрьском номере журнала «Ada Eruditorum», выходящем в Лейпциге появилась статья Г.В.Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которых не служат препятствием пи дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Это была первая опубликованная работа в этой области; речь в ней шла, как можно видеть из заголовка о дифференциальном исчислении [29].

В течение всей трехвековой истории матанализ занимал в математике ведущее положение. Его методами решали труднейшие практические задачи. Он был объектом бесчисленных теоретических исследований.

Сведения из матанализа были включены в математическое образование впервые в 1696 г., когда появился первый учебник Г.Ф. Лопиталя (1661 - 1704). С тех пор и до наших дней матанализ является и остается важнейшей учебной дисциплиной. В школах изучают только начальные сведения из матанализа. Это операции дифференцирования и интегрирования функций, исследование функций с помощью производной и начальные сведения о дифференциальных уравнениях.

4.1. Математические знаки

Математические знаки вводились постепенно учеными разных стран. Удачные математические знаки облегчают математические рассуждения и вычисления. Ученый Карио имел основание сказать образно: «Знаки умнее нас».

Все математические знаки можно разделить на знаки объектов, (например: π, i и т.д.), знаки операций (например: +, -, : и т. д.), знаки отношений (например: =, >, <) и вспомогательные знаки, устанавливающие порядок сочетания основных знаков (скобки).

Дата возникновения некоторых математических знаков

Знак	Значение	Кто ввел	Когда знак введен, год
1	2	3	4
Знаки объектов			
∞	бесконечность	Дж. Валлис	1655
π	отношение длины окружности к диаметру	У. Джонс Л. Эйлер	1706
i	корень квадратный из **- *i***	Л. Эйлер	1777
x, y, z	неизвестные или переменные величины	Р. Декарт	1637
$\vec{r}$	вектор	О. Копти	1853
Знаки операций			
+	сложение	Я. Видман	конец XV в.
-	вычитание	Я. Видман	конец XV в.
*	умножение	У. Оутред	1631
·	умножение	Г. Лейбниц	1698
:	деление	Г. Лейбниц	1684
a^2, a^3, a^n	степени	Р. Декарт	1637
$\sqrt{\ }\quad \sqrt[3]{\ }$	корни	Х. Рудольф	1525
Log, log	логарифм	И. Кеплер	1624
sin	синус	Б. Кавальери	1632
cos	косинус	Л. Эйлер	1748
tg	тангенс	Л. Эйлер	1753
arcsin	арксинус	Ж. Лагранж	1772
$\sum$	сумма	Л. Эйлер	1755
dx, ddx... d^2x, d^3x	дифференциал	Г. Лейбниц	1675
$\int ydx$	интеграл	Г. Лейбниц	1675
$\frac{dy}{dx}$	производная	Г. Лейбниц	1675
$\int_a^b f(x)dx$	определенный интеграл	Ж. Фурье	1819-1822
!	факториал	Х. Крамп	1808
lim	предел	У. Гамильтон	1853
$\lim\limits_{n=0}$		многие математики	начало XX в.

$\lim\limits_{n=\infty}$			
ux	функция	И. Бернулли	1718
f(x)		Л. Эйлер	1734
Знаки отношений			
=	равенство	Р. Рекорд	1557
> <	больше, меньше	Т. Гарриот	1631
≡	сравнимость	К. Гаус	1801
‖	параллельность	У. Оугрсд	1677
⊥	перпендикулярность	П. Эригон	1634
Вспомогательные знаки			
( )	круглые скобки	Н.Тарталья	начало XVII в.
[ ]	квадратные скобки	Р.Бомбелли	
{}	фигурные скобки	Ф.Виет	

ГЛАВА 3. Пути формирования математической науки

1. Великие периоды истории математики

Вопросы о том, как складывались первичные математические представления, какой вид они принимали, как проходили первые этапы их совершенствования, никогда не теряли своей актуальности и не потеряют ее в будущем. Увидеть в преподаваемом математическом материале его исторически обусловленное место в логически последовательной структуре математического знания, передать ученикам это понимание - значит увлечь их, сделать математические занятия доступными и интересными.

В истории математики различают 4 великих периода:

1) зарождение математики (Египет, Вавилон до VI в. до н.э.);

2) период элементарной математики (Древняя Греция, Китай, Индия, Средняя Азия и Ближний Восток, Западная Европа до XVI в. Россия до XVIII в.) - период развития математики постоянных величин;

3) период создания математики переменных величин (XVIII вв.);

4) современная математика (XIX - XX вв.) с присущей ей высокой степенью абстракции в трактовке пространственных форм и количественных отношений действительного мира. Возможно, что с середины текущего столетия после появления электронных вычислительных машин начал формироваться новый период математики с характерным для него резким возрастанием значения учения о дискретном методе вычислений и алгоритмах.

Когда мы говорим о странах с древними цивилизациями, о ранних этапах истории математики, то мы имеем в виду совершенно конкретный материал. Первые древние цивилизации, от которых до нас дошли источники, позволяющие судить об их математических познаниях были вавилонская (III тыс. лет до н.э.) и египетская (2,5 тыс. лет до н.э. до завоевания Египта Александром Македонским в 332 г. до н.э.)

Формирование математической науки происходило, как убеждает нас история, в научном творчестве ученых Древней Греции. Это группа государств в VIII-V1 в. до н.э. на территории современной Греции, близлежащего побережья Малой Азии и юга Италии. Далее материалы будем группировать по месту происхождения, называя эти части условно: Египет Вавилон (государства, расположившиеся на территории современного Ирака, и соседние территории), Китай, Индия, страны Среднего и Ближнего Востока.

Как люди накапливали математические знания?

Начнем с ***описания источников***. То, что нам известно о математике древнего Египта, почерпнуто из рукописей, написанных черной и красными красками на ***папирусе*** - бумаге, выделанной из нильского тростника. Таких рукописей до нас дошло только две. Самый известный папирус Ринда хранится в Британском музее. В нем собраны 85 задач, записанных писцом

Ахмесом, около 1650 г. до н.э. Второй папирус Московский, схожий с папирусом Ринда. и кожаный свиток египетской математики, распрямленный в 1927 году.

В двух египетских математических папирусах содержится более 100 задач, посвященных вычислениям площадей фигур и объемов тел, а также операциям с дробями. По всей видимости, папирусы служили своеобразными учебно-справочным пособиями, о чем свидетельствуют подбор задач и форма их изложения.

Документальной основой, позволяющей изучать математическое наследие Древнего Вавилона, являются глиняные таблички, на которых палочками выдавливался текст. Значки (буквы, цифры) были похожи на клинья, отчего вавилонское письмо называется ***клинописным.*** После нанесения текста таблички обжигали на огне, что придавало им прочность и долговечность. Ярко выражена вычислительная и измерительная проблематика в табличках Древнего Вавилона. Поскольку в математике Вавилона преобладала 60-ричная система исчисления, то для облегчения вычисления и для справок существовали вспомогательные, не сопровождающиеся пояснениями таблицы умножения.

Все суждения о математике Древнего Китая опираются на единственный источник: сборник сочинений в большинстве анонимных, с общим заголовком «Десять классических трактатов по математике» или «Десятикнижие». Издан этот сборник был в VI - VII вв. н.э. В нем указано, что трактаты составлены были в основном во II в. до н.э., и что, они в свою очередь являются обработкой более древних текстов.

Самыми ранними памятниками математических достижений народов Индии являются научно-религиозные сочинения: ***сутры*** и ***веды***. В них математические сведения переплетены с астрономическими, изложение имеет религиозный оттенок и своеобразную стихотворно-легендарную форму. Математические сведения в индийских сутрах и ведах были сгруппированы вокруг архитектурных проблем и астрономических сведений. Ни в одном из источников нет теорем, доказательств, есть только указания рецептурного типа, а в индийских источниках нередко нет даже пояснений или рецептов, просто чертеж и слово «смотри».

Первые века нашей эры, как известно, не были благоприятными для развития наук, в том числе и для математики. Только гораздо позже, в государствах средневекового Востока стали возникать научные центры, возрождались занятия математикой, не только прикладной, по и теоретической. Научные сочинения в те времена были написаны на арабском языке, являвшимся официальным языком многих государств, расположенных на огромных пространствах - от Испании до Индии. Поэтому математику называют нередко арабской или математикой стран ислама.

Арифметические и алгебраические трактаты пользовались большой известностью. Алгебраические арабские трактаты IX - XV вв. помимо решения уравнений первой и второй степени, включили в себя и кубические уравнения. В трудах математиков средневекового Востока алгебраические элементы были впервые выделены в новый специальный отдел математики - алгебру. Начиная с XШ в. Тригонометрия преобразовалась в самостоятельную область, часть математики. Впервые специальные сочинения, посвященные математическому изложению тригонометрии, появились среди арабских рукописей.

Дальнейшее формирование алгебры происходило в странах Европы, где сложилась благоприятная для этого обстановка. Ученые усваивали достижения античной Греции, Византии, арабоязычиых народов Средней Азии и Ближнего Востока. Арабские рукописи научного содержания переводились на латинский язык - универсальный язык науки в средние века. В Европе новый подъем математической науки начался с эпохи Возрождения (вторая половина XV столетия).

2. МАТЕМАТИКА В ЕВРОПЕ

2.1. Древняя Греция

Самая важная роль в развитии западной математики принадлежит Древней Греции. Математика вступила в совершенно новый этап логического развития. В IV в. до н.э. в Греции происходит расцвет науки. Находясь в постоянном контакте с народами Востока: Вавилонией и Египтом, греки не довольствовались усвоением их знаний, они создали абстрактную и дедуктивную математику. Греки были прежде всего геометрами. Появилась потребность в отчетливых математических доказательствах, были сделаны первые попытки систематического построения математической теории. Это изменение характера математической пауки объясняется более развитой общественно-политической и культурной жизнью греческих государств, приведших к высокому развитию диалектики, искусству спора, к привычке отстаивать свои убеждения. Этому же способствовала деятельность учебно-научных объединений натурфилософского направления («научных» школ). Самыми ранними из них были: ***ионийская*** (VII - VI вв. до н.э. в островной части Греции) и ***пифагорейская*** (VI - V вв. до н.э. в южной части Апенинского полуострова). В IV в. до н.э. в материковой части Греции функционировали научные школы, среди которых выделялись Академия Платона (428 или 427 до н.э. - 348 или 347) и Лицей (ликей, ликейон) Аристотеля (384-322 до н.э.) - учителя Александра Македонского (356-323 до н.э.) [30].

2.2. Эллинистическая и римская эпоха

После смерти Александра Македонского и распада завоеванной им громадной империи, один из его полководцев, Птоломей в столице своего государства Александрии основал ***Музейон*** (что означает прибежище муз) с величайшей библиотекой (по свидетельству современников, содержащей до 700 000 рукописей). Там на полном государственном обеспечении работали многочисленные ученые. С 3 в. до н.э. на протяжении семи столетий основным центром научных, особенно математических исследований являлась Александрия. Наибольшей напряженностью математического творчества отличается первый век Александрийской эпохи (3 в. до н.э.). Этому веку принадлежат Евклид, Архимед, Эратосфеи и Апполоний Пергский.

Существенным недостатком всей математики древнего мира было отсутствие окончательно сформулированного иррационального числа. Это обстоятельство привело к полному отрицанию законности применения арифметики к изучению геометрических величин. Первым самостоятельным изложением приемов вычислительной геометрии является сочинение «Метрика» Герона (вероятно I в.н.э.)- В ней содержится знаменитая формула для площади треугольника. Однако самостоятельное и широкое развитие настоящего алгебраического исчисления встречается лишь в «Арифметике» Диофанга.

2.3. Средневековая Европа

Социальная эпоха, начавшаяся с V-VII вв. гибелью Римской империи в 476 г. (на территории Европы установилось феодально-крепостническое общество) и длившаяся до английской буржуазной революции в середине XVII в., получила название средних веков.

Огромное значение для прогресса математических знаний в Европе имели как уже говорилось переводы с арабского как оригинальных сочинений, так и греческой литературы, имевшейся т арабском языке. Переводами с арабского особенно интенсивно занимались в ХП-ХШ вв., но изучение арабских рукописей продолжало обогащать европейских математиков и в XV-XVI вв., период XII-XV вв. являются для западноевропейской математики периодом усвоения наследства древнего мира и Востока. Тем не менее, уже в этот период, не приведший еще к открытию особенно значительных новых математических фактов, общий характер европейской математической культуры отличается рядом существенных прогрессивных черт, обусловивших возможность стремительного развития математики в после дующие века. Меньше чем через 100 лет после появления в XII в. первых латинских переводов греческих и арабских математических сочинений итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи) выпускает свои «Книгу об абаке» (1202 г.) и «Практику геометрии» (1220 г.).

Наиболее значительным среди средневековых математиков был Николай Орезми, применявший дробные степени. Типичен для этого периода Иоган Мюллер из Кенигсберга, иначе Регионтанус, ведущая математическая фигура XV столетия. Его главное оригинальное произведение - книга «О различных треугольниках». Книга «Сумма арифметики» Луки Пачоли - одна из первых печатных математических книг, появилась в 1494 г.

2.4. Эпоха Возрождения

Для нового подъема математической науки был нужен новый подъем производительных сил человеческого общества. В Европе и в районе Средиземноморья принципиально новый подъем наступил только спустя много веков начиная с ***эпохи Возрождения***. Эпоха конца феодализма и начала развития капиталистического способа производства

XV и XVI столетия вошли в историю Европы под названием эпохи Возрождения.

С XVI в. развитие науки в Европе пошло по иному пути. Этот век был первым веком превосходства Западной Европы над древним миром и Востоком. Экономические, а затем общественные и культурные преобразования эпохи Возрождения повлекли существенные изменения во всех областях научного мировоззрения. Так было в астрономии (открытие польского астронома Н.Коперника) и в механике (первые исследования итальянского ученого Г.Галилея). Так в целом и в математике. Расцвет науки происходит главным образом в Италии, Франции и Германии, а позднее в конце XVI века в Голландии. В XVI веке новая эра в математике начинается с открытия алгебраического решения уравнений третьей степени: итальянским математиком С.Ферро (1515 г.), и позднее независимо итальянским математиком Н.Тартальей (около 1530 г.) и четвертой степени, итальянским математиком Л.Феррари (1945 г.) степени, которое считалось в течении столетий неосуществимым. Дальнейшее развитие получила алгебра у французского математика Ф.Виета. Учение о перспективе излагается знаменитым немецким художником А.Дюрером (1525 г.). Независимо от Джемшида Каши, немецкий математик М.Штифель (1544 г.) открыл закон образования биноминальных коэффициентов, а нидерландский ученый С. Стевин (1585г.) разработал правила арифметических действий с десятичными дробями.

2.5. Математизация науки в XVII веке

Весь опыт развития математики стал рассматриваться с позиции возможности его применения к решению актуальных для того времени задач математического естествознания. К началу XVII века в Европе сложились предпосылки того, что называют «научной революцией» многие события способствовали ей, или ускоряли ее развитие.

Создавалась новая обстановка в математике, позволившая в XVII столетии создавать аналитическую геометрию, а затем и анализ бесконечно малых.

Период элементарной математики заканчивается в Западной Европе в начале XVII в., когда центр тяжести математических интересов переносится в область математики переменных величии.

К последней трети XVII века относится открытие дифференциального и интегрального исчисления. Приоритет времени этого открытия принадлежит И. Ньютону (1665-1660 гг.), а в отношении публикации приоритет открытия принадлежит Г. Лейбницу (1682-1686 гг.).

Теперь математика получила быстрое развитие: закончился длительный процесс совершенствования символической алгебры (Вист), возродилась теория чисел (Ферма), была создана теория вероятностей (Паскаль и Ферма), аналитическая геометрия (Декарт), исчисление бесконечно малых (Лейбниц, Ньютон). Этот бурный подъем расширил поле действия математики и направил поток ее энергии в другие науки.

К началу XVIII в. происходит развитие новых областей математики: теория чисел, теория множеств. В XIX и XX вв. - теория дифференциальных уравнений. Немецкий математик К. Гаусс, французский математик Ж. Фурье, С. Пуассон, О. Коши, немецкий математик П. Дирихле, английский математик Дж. Грин, русский математик М. В. Остроградский работали в этом направлении [31].

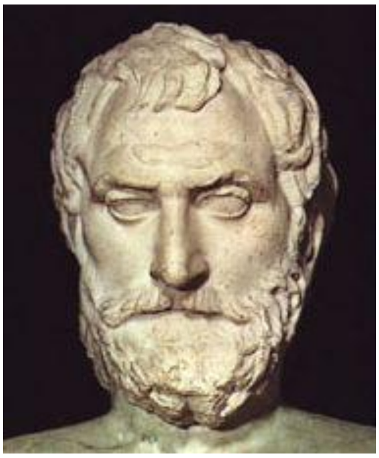
3.МАТЕМАТИКИ ЕВРОПЫ

3.1. Античные математики.

Фалес и Демокрит

Фалес и Демокрит - крупнейшие мыслители, первые греческие геометры, философы древней Греции.

Фалес (624-547 до н.э.) основатель Ионийской школы - считается одним из первых древне-греческих геометров и философов. Он был родом из города Милета. В молодости, занимаясь торговлей, посещая Египет, знакомится с египетской наукой. На родину Фалес вернулся уже в летах и в Милете организовал свою школу. Много внимания уделял Фалес геометрии. По свидетельству древнегреческого ученого Прокла Фалесу принадлежит открытие следующих теорем:



- Вертикальные углы, полученные при пересечении двух прямых линий равны.
- В равнобедренном треугольнике углы, лежащие при основании, равны.
- Треугольник вполне определяется двумя углами и прилежащей к ней стороной. На основании этого предложения Фалес определил расстояние от корабля в море до берега.
- Круг делится диаметром пополам.
- Угол, вписанный в полуокружность, прямой.

Фалесу принадлежат способы нахождения высоты пирамиды и вообще различных предметов по их тени. Итак, с именем Фалеса связано заложение дедуктивной геометрии и доказательство первых теорем.

Демокрит жил около 460-370 гг. до н.э. Он был опытным геометром и писал о несоизмеримых линиях, о числах и перспективе. Демокрит оставил один из первых трактатов «О геометрии».

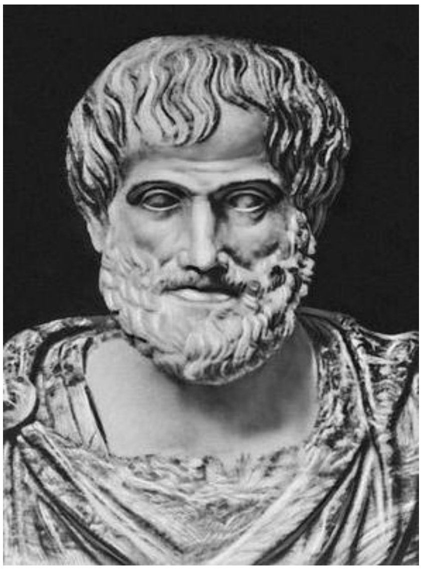
Платон (IV в. до н.э.) - древнегреческий философ, идеалист, ученик Сократа.

В IV веке до н.э. в материковой части Греции была основана научная школа - Академия Платона, которая в течение целого века руководила всей интеллектуальной жизнью государства. У входа в здании надпись гласила: «Пусть сюда не входит тот, кто не знает геометрию». Одному из желающих поступить в его школу для изучения философии без знания геометрии Платон сказал:

«Уйди прочь, у тебя нет орудия для изучения философии». «Геометрия приближает разум к истине», - считал Платон. Сам Платон не был математиком, но он придавал исключительное значение математике.

Аристотель
(384-322 гг. до н.э.)

Спросили Александра Великого:
- Почему ты уважаешь своего учителя больше, чем своего родного отца?
- Отец подарил мне жизнь грешную, - ответил Александр, - а учитель - вечную.
Аль Хусри



Аристотель занимался в знаменитой Академии Платона, который называл его умом Академии. За 20 лет пребывания в Академии Аристотель глубоко изучил математику, логику и философию этого времени.

С 343 г. до н.э. Александр Македонский был учеником Аристотеля. Ученый дал своему воспитаннику традиционно греческое образование.

К 335 г. до н.э. Александр Македонский утвердил свою власть в греческих городах. В этот же год Аристотель возвратился в Афины, где создал свою школу - Лицей. Александр Великий поставлял своему учителю все, что требовалось для научной работы: рукописи и другие материалы, которые находил на завоеванных им территориях.

Лицей Аристотеля стал учреждением широких исследований. Прогуливаясь в тени высоких деревьев, Аристотель читал свои лекции. Слово «прогуливаться» по гречески звучит как «перипатейн». Отсюда и название последователей Аристотеля - перипатетики.

Аристотель исследовал практически все отрасли науки. Известны его произведения по логике, которые составляют сочинения «Органон». Аристотель - общепризнанный основатель логики.

Знамениты его труды по математики такие как «Логика», «Физика», «Метафизика», «Аналитика». Творчество Аристотеля является завершением целого этапа развития философской и научной мысли эллинистической эпохи, часто упоминаемое как «греческое чудо».

Пифагор
(около 580-500 гг. до н.э.)

Письменных доказательств Пифагора Самосском не осталось, а по более поздним свидетельствам трудно восстановить подлинную картину его жизни и достижений. Известно, что Пифагор покинул свой родной остров Самос в Эгейском море у берегов Малой Азии в знак протеста против тирании правителя. На учение Пифагора большое влияние оказала философия и религия Востока. Он много путешествовал по странам Востока: был в Египте и в Вавилоне. Там Пифагор познакомился с восточной математикой.

Математика стала частью его учения и важнейшей ее частью. Он, организовал пифагорейскую школу, которая внесла ценный вклад в развитие математики и астрономии.

Пифагорейцы верили, что в числовых закономерностях спрятана тайна мира. Мир чисел для пифагорейцев жил особой жизнью, числа имели свой особый жизненный смысл. Числа, равные сумме своих делителей, воспринимались как ***совершенные*** (6, 28, 496, 8128), ***дружественными*** называли пары чисел, из которых каждое равнялось
сумме делителей другого (например, 220 и 284). Пифагор впервые разделил числа на четные и нечетные, простые и составные. Ввел понятие фигурного числа. В его школе подробно рассмотрены пифагоровы тройки натуральных чисел, из которых квадрат одного равнялся сумме квадратов двух других.

Пифагору приписывается высказывание: «Все есть число». К числам (а он имел в виду лишь натуральные числа) он хотел свести весь мир, и математику в частности. Но в самой школе было сделано открытие, нарушившее эту гармонию. Было доказано, что корень из 2 не является рациональным числом, т.е. не выражается через натуральное число.

Естественно, что геометрия у Пифагора была подчинена ***арифметике***, это ярко проявилось в теореме, носящей его имя, и ставшей в дальнейшем основой применения численных методов в геометрии (позже Евклид вновь вывел на первое место геометрию, подчинив ей алгебру).

Пифагору приписывают систематическое введение ***доказательств*** в геометрию, создание планиметрии прямолинейных фигур, учении о подобии, начало учения о правильных многогранниках.

С именем Пифагора связывают учение об арифметических, геометрических и гармоничных пропорциях, ***средних***. В школе Пифагора арифметика из простого искусства счисления перерастает в теорию чисел.

Евклид (III в. до н.э.)

Евклид жил в III в. до н.э. в Александрии. Наука располагает очень скудными сведениями о жизни и деятельности Евклида. Известно, что он родом из Афин, был учеником Платона. По приглашению Птоломея I переехал в Александрию и там организовал математическую школу. По свидетельству его современника Папп Александрийского

Евклид был человеком мягкого характера, очень скромным и независимым. О его прямоте и независимости можно судить по следующему факту. Однажды царь Птоломей спросил Евклида: «Нет ли в геометрии более короткого пути, чем тот, который предложен Евклидом в его книгах?» На это Евклид ответил: «Для царей нет особого пути в геометрии!»

К III веку до новой эры в Греции накопился богатый геометрический материал, который необходимо было привести в строгую логическую систему. Эту колоссальную работу и выполнил Евклид. Он написал 13 книг «Начал» (геометрии). Его сочинение получило всеобщее признание как основа систематических знаний, логическая строгость которой оставалась непревзойденной в течение свыше двадцати веков. Все это время геометрию изучали по Евклиду. Его «Начала» до сих пор лежат в основе современных школьных курсов геометрии.

В книге I рассматриваются основные свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов, сравниваются их площади.

В книге II излагается геометрическая алгебра, с помощью геометрических чертежей, даются решения задач, сводящиеся к квадратным уравнениям.

В книге III рассматриваются свойства круга, свойства касательных и хорд, в книге IV - правильные многоугольники, появляются основы учения о подобии. В книгах VII-IX изложены начала теории чисел, основанной на алгоритме нахождения ***наибольшего*** общего делителя, приводится алгоритм

Евклида, сюда входит теория делимости и теорема о бесконечности множества простых чисел.

Последние книги посвящены стереометрии. В книге XI излагаются начала стереометрии, в XII - с помощью метода исчерпания определяются отношения площадей двух кругов и отношение объемов пирамиды и призмы, конуса и цилиндра. Вершина стереометрии у Евклида - теория правильных многогранников. Одно из великих достижений греческих геометров - теория ***конических сечений***. О них Евклид написал отдельную книгу «Начала конических сечений».

В «Началах» Евклида дан образец дедуктивного изложения геометрического материала на основе систем аксиом. Значение «Начал» Евклида в истории математики трудно переоценить. «Начала» Евклида составили целую эпоху в развитии элементарной геометрии.

Архимед

(около 287-212 до н.э.)

Архимед имел возвышенную душу и глубокий ум.

Плутарх

В г. Сиракузы на острове Сицилия жил и работал Архимед. Об Архимеде - великом математике и механике известно больше, чем о других ученых древности. Архимеду принадлежит ряд замечательных изобретений. Сложные гидротехнические сооружения (например, архимедов винт, отвечающие требованиям военной техники метательные машины Архимеда). Известны исследования Архимеда о равновесии плавающих тел. Огромен вклад Архимеда в развитие математики,

Спираль Архимеда, описываемая точкой двигающейся по вращающемуся кругу, стала особняком среди многочисленных кривых, известных его современникам. Архимед научился находить ***касательную*** к своей спирали. Особенно, он гордился своим открытием: соотношением объема шара и описанного вокруг него цилиндра, которое равно 2:3. Архимед много занимался и проблемой квадратурой круга (занимательные задачи древности). Он вычислил отношение длины окружности к диаметру (число π) и нашел, что оно заключено между $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{1}{7}$. Созданный им метод вычисления длины окружности и площади фигуры был существенным шагом к созданию дифференциального и интегрального исчислений, появившихся лишь 2000 лет спустя. Архимед нашел также сумму бесконечной

геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{4}$. В математике это был первый пример бесконечного ряда.

Большую роль в развитии математики сыграло его сочинение «Псаммит» - «О числе песчинок», в котором он показывает, как с помощью существовавшей системы счисления можно выражать сколь угодно большие числа. Тем самым было опровергнуто существовавшее тогда мнение о наличии таинственных «самых больших чисел».

Г. Лейбниц писал: «Внимательно читая сочинения Архимеда перестаешь удивляться всем новым открытиям геометров».

4. Математики Средневековья

Леонардо Пизанский (Фибоначчи)
(1180-1240 г.г.)

Леонардо Пизанский (Фибоначчи) - крупнейший математик христианского средневековья. Уроженец Пизы, изучал арифметику, арабский язык, бывал в Египте, Сирии, Греции, на Сицилии. По возращении он написал в 1202 г. свой знаменитый труд «Книга абака», настоящую энциклопедию, которая вместе с «Практикой геометрии» (1220 г.), приобщила итальянских ученых XIII в. к математике арабов и греков и проложила путь расцвету алгебры в Италии эпохи Возрождения.

Книги, служившие одними из важных средств распространения новой арифметики, алгебры, геометрии в Европе.

Под словом «абак» Леонардо подразумевает не счетную доску, а арифметическую вообще. В «Книге абака» он систематизировал огромное количество сведений из арабских трудов, добавил, как выражается сам, кое-что из геометрического искусства Евклида, по существу из античного наследия вообще, а также присоединил ко всему этому собственные задачи и методы. Труд, поражающий уже своими размерами, в печатном издании «Книга абака» насчитывает 459 страниц. Арифметику и алгебру линейных и квадратных уравнений Леонардо изложил с не превзойденной ранее полнотой и глубиной в латинской и арабской литературе. Первые пять глав посвящены арифметике целых чисел. Большое место занимают различные задачи, приводящие к линейным уравнениям, для решения которых применяют различные приемы. Многие задачи - восточного или древнегреческого происхождения, хотя в способе решения Леонардо пошел дальше. С исследованием линейных уравнений связана другая выдающаяся заслуга итальянского математика. Рассматривая некоторые невозможные задачи этого рода, он - первый в Европе пришел к мысли о введении отрицательных чисел и их толковании как долга.

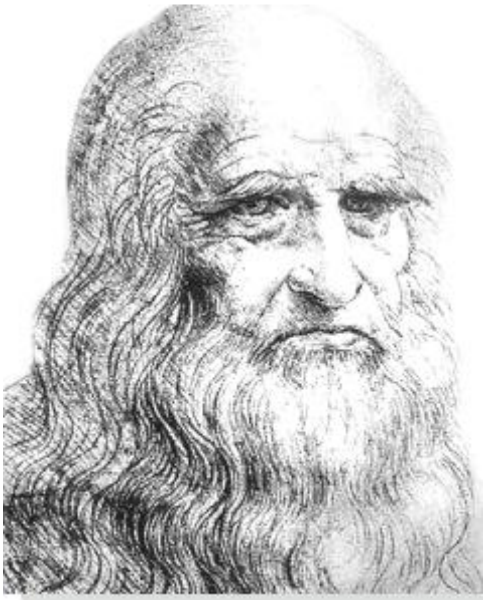
Последние две главы «Книги абака» посвящены извлечению корней и алгебре. Он на числовых приемах разъясняет способы приближенного извлечения квадратных и кубических корней.

Наконец в книге собран ряд задач геометрии на применение теоремы Пифагора и большое число примеров на квадратные уравнения.

5. Математики эпохи Возрождения

Леонардо Да Винчи

(1452-1519)



Леонардо Да Винчи - крупнейший представитель итальянского Возрождения - был не только великим художником, но и великим математиком, механиком. В любой области знаний он оставил глубокий след. Леонардо да Винчи написал трактат «О многообразии» (1505 г.), где изложил весьма интересный геометрический материал, нужный в скульптуре, зодчестве и строительном искусстве. Значительное место в трактате занимают вопросы преобразования равновеликих площадей и объемов. В математике Леонардо да Винчи видел образец научного доказательства. «Никакое человеческое исследование, - говорил он, не может быть названо истиной, если оно не проходит через математические доказательства». Сквозь призму математических знаний он лучше понимал ***перспективу*** картин и глубже проникал в окружающий мир. Издавна художники изображали на картине ***перспективу***, при помощи линий, пересекающихся на горизонте. Один из замечательных этапов в истории геометрии начался, когда французский математик и архитектор Ж. Дезарг (1593-1662) решил придать этим представлениям художников точный математический смысл. Мы получили понятие проективной геометрии. Об этом написано было так: «Основная идея этой чистой геометрии родилась из желания художников Возрождения создать «зрительную» геометрию. Как выглядят предметы в действительности и как их можно изобразить в плоскости чертежа», - писал С.Г. Гульд.

А Леонардо да Винчи писал: «Художнику необходима математика его искусства. Учение о перспективе - это и вожатый и врата; без него ничего хорошего в живописи создать невозможно».

В области изобразительного искусства Леонардо да Винчи создал замечательные шедевры, которые поражают человека красотой форм и глубиной внутреннего содержания. Его картины «Тайная вечерня», «Мадонна в скалах», «Мона Лиза» («Джоконда») будут всегда радовать глаз человека, доставляя людям высокое наслаждение.

Франсуа Виет

(1540 - 1603 г.)

Франсуа Виет - крупнейший французский математик XVI века. Несмотря на то, что Франсуа Вист был по образованию и специальности юристом, он отличался способностями к точным наукам и способностями к математике. Будучи совсем молодым офицером, он путем математических рассуждений нашел ключ к шифру, которым пользовался испанский король Филипп II при переписке. Благодаря этому французы расшифровать все секретные испанские документы. Заинтересовавшись астрономией, Виет был вынужден заняться тригонометрией и алгеброй. Его иногда называют ***отцом*** современной буквенной алгебры. Он основатель настоящего буквенного исчисления.

Виет нашел общие методы решения уравнений второй, третьей и четвертой степени, а также вывел общеизвестные теперь формулы суммы и произведения корней квадратного уравнения (формулы Виета). Свои исследования по математике Виет опубликовал в книге «Математический канон» (1579 г.). Это исследования алгебраических уравнений и формулы для тригонометрических функций. В тригонометрии Виет нашел полное решение плоского и сферического треугольников по трем данным ее элементам. Нашел гакже очень важное разложение величин $cosnx$, $sinnx$ в ряд по степеням $cosnx$ и $sinnx$.

Франсуа Виет завершил развитие математики эпохи Возрождения и подготовил почву для появления результатов Ферма, Декарта, Ньютона.

6. Математики XVII-XVIII вв.

Исаак Ньютон

(1642-1727 г.)

Исаак Ньютон - великий английский математик и физик XVII века. Родился в 75 км от Кембриджа. В нем рано проявился талант к точным наукам. В семнадцать лет поступил учиться в Кембриджский университет. Уже в студенческие годы Ньютон зарекомендовал себя пытливым, упорным и настойчивым исследователем. Так будучи студентом, Ньютон доказал теорему о биноме известную формулу - «ином Ньютона», в которой

приводится решение выражения $(a+b)^n$ при любой натуральной степени n. По словам самого Ньютона наиболее плодотворными в его научной работе были 1665 - 1666 гг. В истории науки, пожалуй, не найти достижений, достойных сравнения с трудами Ньютона, в эти два золотых года. Он первый (одновременно с Лейбницем) создал основы дифференциального и интегрального исчислений, начал работу над своим крупным произведением об оптике «новая теория света и цветов», создал основы теории всемирного тяготения.

Крупнейшим произведением Ньютона было «Математические начала натуральной философии» (1687 г.). Этот капитальный труд прославил Ньютона на весь мир и сделал его «великим из великих» ученых. В нем он дал определение трех основных принципов классической механики и открыл закон тяготения, на основе которого разработал теорию движения планет. Все эти достижения в физике были бы невозможны без одновременного развития математических методов. В своих трудах «Рассуждения о квадратуре кривых» (1704 г.), «Метод флюксии и бесконечных рядов» (1736 г.) он разработал основы математического анализа, т.е. дал решение таких вопросов, как нахождение экстремумов функций, точек перегиба, уравнений касательных к кривым, вычисление длины кривых, площадей, ограниченных кривыми и дал методы решения простых дифференциальных уравнений. В частности, Ньютон создал свой метод решения уравнений, так называемый метод касательных (метод Ньютона). Трактат «Всеобщая арифметика» (1707 г.) содержит лекции по алгебре, прочитанные Ньютоном будучи заведующим кафедры математики и физики в Кембриджском университете. В 1672 г. Ньютон был избран членом Королевского научного общества в Лондоне, став позднее его председателем. В девяностых годах XVII в. Ньютон был избран членом Академии наук в Париже.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

(1646-1716 г.)

Готфрид Вильгельм Лейбниц - великий немецкий ученый философ математик. Родился в семье профессора философии Лейпцигского университета.

Биографы утверждают, что отец рано разгадал гениальную натуру своего сына. Но отец умер, когда Готфриду было 6 лет. Мать решила дать солидное образование сыну. Среда, в которой родился и рос Лейбниц, оказала большое влияние на развитие у него интереса к науке. Он учился на юридическом факультете Лейпцигского университета. Интересовался философией и математикой. Математическое образование Лейбниц получил в Париже и Лондоне. Он занимался изучением достижений современной ему математики. Он считал, что в 27 лет его математические сведения были совершенно ничтожны. Это не помешало Лейбницу в ближайшее время стать соавтором создателя дифференциального и интегрального исчислений. Это крупнейшая заслуга Лейбница и самое большее достижение в его жизни. Заслугой Лейбница было создание полной системы понятий и теорий математического анализа.

Заслуживает внимания и достижения Лейбница в области логики. В XIX веке его идеи стали исходной точкой современной математической логики.

В научном наследии Лейбница важным элементом была его математическая символика. Именно он является создателем современной символики дифференциального и интегрального исчислений. Делу символики Лейбниц придавал очень большое значение «Следует озаботиться тем, чтобы математические знаки были удобными для открытий» - писал Г.Лейбниц. Он ввел символы дифференциала dx, d^2x, d^3x, интеграла $\int$, равенства =. Ввел термины «функция», «координаты».

Из истории математики известен спор между сторонниками Лейбница и Ньютона о приоритете открытия дифференциального и интегрального исчисления. В настоящее время этот вопрос хорошо изучен. Никто из ученых плагиата не совершил. К открытию нового исчисления Лейбниц и Ньютон пришли независимо друг от друга, каждый своеобразным путем, причем Ньютон несколько раньше Лейбница. Зато Лейбниц пришел к открытию собственным путем и совершенно самостоятельно при решении вопроса о нахождении касательной к кривой опередил в публикации и выработке более современного математического языка и символики, что составило самостоятельный раздел математики. Тогда как у Ньютона оно было средством решения задач по механике.

Блез Паскаль
(1623-1662 гг.)

Я нахожу математику наиболее возвышенным занятием для ума.

Блез Паскаль

Блезу Паскалю была присуще удивительная разносторонность, которая была характерна для эпохи Возрождения, но уже почти изжила себя в XVII веке. Еще не наступило время полного размежевания естественных наук (скажем физики и математики), но занятия гуманитарные и естественнонаучные уже обычно не совмещались. В историю естествознания Паскаль вошел как великий физик и математик, один из создателей математического анализа, проективной геометрии, теории вероятностей, вычислительной техники, гидростатики.

В 12 лет Блез Паскаль самостоятельно изучил «Начала» Евклида, а в 16 подготовил свой «Опыт о конических сечениях», в которой сформулировал одну из основных теории проективной геометрии (теоремы Паскаля). Он разработал некоторые основные положения элементарной теории вероятностей. Исследованиями, связанными с циклоидой, Паскаль занимался более года. В вычислениях определенных интегралов связанных с циклоидой, уже содержались черты общего метода, разработанного впоследствии Лейбницем. Сам Лейбниц подчеркивал, что на понятие производной его натолкнул трактат Паскаля «О синусах четверти круга».

Франция чтит в Паскале одного из самых замечательных писателей: «Тонкие умы удивляются Паскалю, как писателю самому совершенному в величайший век французского языка... Каждая строка, вышедшая из-под его пера, почитается как драгоценный камень».

Паскаль один из самых знаменитых людей в истории человечества. Ему посвящена необъятная литература. Особенно популярен Паскаль во Франции. Имеется своеобразное свидетельство этого: портрет Блез Паскаля воспроизведен на ассигнациях.

Карл Фридрих Гаусс
(1777-1855 г.)

Не считать ничего сделанным, если еще кое-что осталось сделать.

К.Гаусс

Карл Фридрих Гаусс - гениальный немецкий математик, которого современники называли Королем математиков, еще ребенком обнаружил удивительные способности к вычислениям в уме.

О своем искусстве считать в уме сам Гаусс впоследствии в шутку говорил: «Я научился считать раньше, чем говорить». В гимназические годы он успешно изучал древние языки и мечтал быть философом. Однако математика одержала верх. Окончательное решение стать математиком сложилось на 19 году жизни, когда он год проучился в Гетингенском университете и сделал важное открытие. Решив уравнение x^{17}-1=0, он дал построение правильного 17-угольника при помощи циркуля и линейки. Этому открытию Гаусс придавал весьма большое значение и дорожил им. Недаром правильный 17-угольник, вписанный в круг, он завещал выгравировать на своем могильном памятнике, что и было выполнено после его смерти.

Первый крупный труд Гаусса «Арифметические исследования» содержит его работы по теории чисел и высшей алгебры, включая интересную теорию уравнения деления крута, т.е. уравнения x^{11}=1 и, связь между этим уравнением и возможностью конструкции правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки. Гаусс доказал, что правильный n-угольник, где n - число простое, может быть построен циркулем и линейкой в том, и только в том случае, когда имеет вид $2^{2^к}$+1. Гаусс дал полное решение проблемы, над которой трудились ученые в течение двух тысяч лет. Затем последовало второе открытие Гаусса. Он доказал так называемый квадратный закон взаимности - один из основных в теории чисел /золотая теорема/. (Этот закон открыл еще Л.Эйлер, но доказать его не смог).

К. Гаусс писал: «Я случайно натолкнулся на одну изумительную арифметическую истину, и она не только показалась мне прекрасной сама по себе, но и навела на мысль, что она связана и с другими выдающимися фактами, я со всей энергией взялся за то, чтобы выяснить принципы, на которых она основывается и получить строгое ее доказательство. После того, как это желание, наконец, осуществилось, прелесть этих исследований настолько увлекла меня, что я уже не мог их оставить».

К. Гаусса интересует общая проблема: Какими могут вообще быть остатки от деления квадратов на различные простые числа.

Теория чисел - первая любовь Гаусса.

К. Гаусс: «Любимейшая наука величайших математиков». Это один из многочисленных эпитетов, которыми Гаусс наделял арифметику (теорию чисел).

С именем К.Ф. Гаусса связаны многие замечательные страницы в истории математики. Он дал доказательство основной теоремы алгебры (всякое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имеет корень). Гаусс создал теорию поверхностей. До него была изучена геометрия только на двух поверхностях: на плоскости (планиметрия Евклида) и на сфере (сферическая геометрия). Гаусс нашел способ построения геометрии на любой поверхности. Теория Гаусса получила название внутренней геометрии. Гаусс занимался также астрономией, электромагнетизмом, ему удалось вычислить орбиту малой планеты (астероида) Цереры. Эта планета в начале XIX века была открыта итальянским астрономом Д. Плацци. Во время наблюдений за ней, она приблизилась к Солнцу и скрылась в его лучах. Попытки вновь обнаружить ее были безуспешны. Телескопы бессильны. И вот поисками занялся Гаусс (ему тогда было не больше 30 лет). На основе полученных наблюдений, Гаусс рассчитал орбиту новой планеты и с большой точностью указал ее местонахождение. Так математик Гаусс «кончиком карандаша» обнаружил новую планету.

Решение этой сложной задачи принесло ученому известность, и он был приглашен заведовать кафедрой математики Геттингене некого университета и одновременно директором астрономической обсерватории в Геттингене. Этот пост Гаусс не покидал до конца жизни.

Результаты своих исследований по астрономии Гаусс объединил в фундаментальном труде «Теория движения небесных тел».

Роль К. Гаусса в математике можно сравнить с ролью Гегеля в философии, Бетховена - в музыке, Гете - в литературе.

По заказу Ганноверского двора уже после смерти ученого в феврале 1885 г. была изготовлена медаль. Под барельефом Гаусса было написано: mathematicorum princep's/ король математиков/.

4.МАТЕМАТИКА В КИТАЕ И ИНДИИ

4.1. Математика древнего Китая

С окончательным упадком культуры греко-римского мира центр научного прогресса на долгое время переносится на Восток. На дальнейшее развитие математики в Европе наибольшее влияние оказали работы математиков Индии, Средней Азии и Ближнего Востока. Однако, хронологически во многих вопросах первенство принадлежит математикам Китая. Отрывочные знания о математике Китая в древнейший период его истории восходят к середине 2-го тысячелетия до нашей эры; они опираются преимущественно на сведения о календаре. Земледелие тогда было основным занятием населения, и правильное определение сроков сева и уборки риса и других зерновых приобрело решающее значение для всего хозяйства.

Соответствующие календарные расчеты предполагали хорошие арифметические знания.

В первом дошедшем до нас специальном математическом сочинении «Математика в девяти книгах» были подведены итоги многовековой работы математиков, живших в I-ом тысячелетии до н.э., и оно же оказало сильнейшее влияние на все последующее развитие, математики в Китае, и отчасти и за его пределами. «Математика в девяти книгах», составленная по более ранним источникам Чжан Чаном, обнаруживает наличие у китайских математиков высоко разработанной вычислительной техники и интерес к общим алгебраическим методам. В этом сочинении впервые описывается способ извлечения квадратного и кубического корня из целых чисел, совпадающий в существенном с современным школьным способом. Собственно говоря, это была энциклопедия математических знаний для землемеров и строителей, финансовых работников и хозяйственников, купцов и ремесленников и т.д.

В Древнем Китае высоко ценились образованные люди. Чтобы занять государственную должность, нужно было выдержать экзамен но математике, изучив трактат «Математика в девяти книгах».

Книга I «Математики», называемая «Измерение полей», содержит правила вычисления площадей некоторых простых прямолинейных фигур, круга и его частей, а также вспомогательные сведения об арифметических операциях над дробями.

Книга II «Соотношение между различными видами зерновых культур» открывается обширной таблицей норм взаимного обмена зерновых культур. К задачам, выражающимся пропорциями с одним неизвестным примыкают задачи на расчет стоимости одного или нескольких одинаковых предметов по известной стоимости данного числа тех же предметов. Такие задачи в последствии в Европе получали название задач на тройное правило.

В книге III «Деление по ступеням» содержатся несколько задач на раздел величин пропорционально данным числам.

В IV книге речь идет об отыскании стороны прямоугольника по площади и другой стороне, стороны квадрата по его площади и ребра куба по его объему, а также диаметров круга и шара.

Книга V «Оценка работ» имеет предметом измерения объемы стен, каналов, плотин, рвов различной, иногда довольно сложной формы и вычисление числа рабочих, потребного для различных строительных работ.

В книге VI «Пропорциональное распределение» собраны линейные задачи различного содержания, разнообразные задачи на определение пути, задачи на бассейны. Интересны задачи на арифметические и геометрические прогрессии.

В книге VII об «Избытке и недостатке» даются приемы решения систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Один из приемов - это правило двух ложных положений, которое сперва применяется к одному из уравнений с одним неизвестным. В описанных правилах нашла отражение важнейшая черта математика Древнего Китая: стремление к созданию детально разработанных вычислительных алгоритмов для решения определенных задач. Насколько известно, такой регулярный прием решения линейных систем с двумя неизвестными встречается впервые в китайской литературе.

Книга VIII «Фан-Чэн» содержит общий алгоритм решения определенных линейных систем со многими неизвестными (фан-чэн в переводе с китайского означает алгоритм). Метод фан-чэн является вершиной достижения китайских ученых в решении линейных задач. (Это - алгоритм решения систем n-линейных уравнений с n-неизвестными). Пользуясь символикой можно сказать, что этот метод фан-чэн применяется к канонической системе. Ученые других стран и раньше решали линейные задачи, но единообразный алгоритм решения канонической системы линейных уравнений с любым числом неизвестных явился открытием ученых Китая (смотри: глава «Алгебра», «Система линейных уравнений»). Впервые в истории науки встречаются различение положительных и отрицательных чисел. Древние китайские математики свободно обращались с отрицательными числами. Введение отрицательных чисел и правил их сложения и вычитания над ними явилось одним из самых крупных открытий сделанных китайскими учеными. Позднее отрицательные числа распространяются и в индийской математике. Впервые мы находим их в сочинениях Брахмагупты, т.е. в начале XII в.

В книге IX «Гоу-гу» собран ряд задач на применение прямоугольных треугольников. Среди них есть задачи на определение расстояний до недоступных предметов, глубины колодца. Книга именуется «Гоу-гу» так как гоу называли меньший и притом горизонтальный катет прямоугольного треугольника, а гу - больший, вертикальный; гоу-гу означало также саму зависимость, выражаемую теоремой Пифагора. Примером высокого развития вычислительных методов в геометрии может служить результат Цзу Чун - Чжи (2-я половина V века), который показал, что отношение длины окружности к диаметру лежит в пределах

$$3{,}141526 < \pi < 3{,}1414927$$

Особенно замечательны работы китайцев по численному решению уравнений. Геометрические задачи, приводящие к уравнениям третьей степени, впервые встречаются у астронома и математика Ван Сяо-туна (1-я половика VII века). Изложение методов решения уравнений четвертой и высших степеней было дано в работах китайских математиков XIII - XIV вв. К XIV века средневековая китайская математика достигла своего высшего развития.

4.2. Математика Индии

«Я глубоко почитаю математику, потому что знакомые с нею видят в ней средство к пониманию всего существующего»

Бхаскара

Расцвет индийской математики относится к V-XII вв. Наиболее известны индийские математики Ариабхата (конец V в.). Брахмагупта (VII в), Бхаскара (XII в). Индийцам принадлежат две основные заслуги. Первое из них является введение в широкое употребление современной десятичной системы нумерации и систематическое употребление пуля для обозначения отсутствия единиц данного разряда и разработка на этой основе более совершенной вычислительной техники, включая близкие к современным приемы деления многозначных чисел. Происхождение в Индии употребляемых цифр, называемых ныне «арабскими». И так, величайшим научным и общекультурным достижением народов Индии явилась позиционная система нумерации, к которой уже подходили в Вавилоне и других странах, но которая нигде не получила завершения. Второй, еще более важной основной заслугой индийских математиков является ***создание алгебры***, свободно оперирующей не только с дробями, но и иррациональными и отрицательными числами.

О реальном использовании отрицательных чисел (с противоположностью имущества и долга) у индийцев встречаются лишь отдельные упоминания. Обычно при решении задач отрицательные решения считаются невозможными. Брахмагупта дал общее правило решения квадратных уравнений.

Бхаскара указал на двузначность квадратного корня, занимался исследованием иррациональных выражений вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, делал преобразования типа $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, решал некоторые частные случаи уравнений высших степеней.

Наконец, Брахмагупта и Бхаскара дали общие методы решения в целых числах неопределенного уравнения первой степени с двумя неизвестными, а также уравнений вида:

$$ax^2 + b = cy^2 \qquad\qquad xy = ax + by + c.$$

Исключительно важны были для развития математики работы индийских ученых по тригонометрии. В тригонометрии заслугой индийских математиков явилось введение линий синуса,косинуса, синусов-верзусов. Индийцы рассматривали тригонометрические величины только в пределах первой четверти круга.

Применение тригонометрии в астрономии невозможно без таблиц Первая таблица синусов имеется уже в трактате в стихах по астрономии и математике «Ариабхаттия», составленной 24-х летним Ариабхатой. Здесь приведены правила решения отдельных задач по арифметике, геометрии и тригонометрии. Таблица синусов в большей своей части верна до последнего знака. Характерной особенностью таблицы является мера тригонометрических величин: окружность делилась на 360 градусов, а градус на 60 минут.

Математика издавна пользовалась в Индии большим уважением. Наука вычисления высоко почиталась в Индии. Изложение в индийских работах по математике очень сжато и часто не содержит доказательств. Лаконичность правил иногда предельная, как в китайской литературе, и понять их без дополнительных пояснений было невозможно. Отчасти это было связано с тем, что ряд книг написаны в стихах: правила Сформированные в коротких строфах, заучивали наизусть. Преподавание в большинстве случаев, как и всюду в средние века, носило догматический характер и более опиралось на память, чем обращалось к разуму.

Но, хотя индийцы и не ввели новых тригонометрических; функций явно, последним и необыкновенно ярким взлетом математики в Индии явилось открытие бесконечных рядов тангенса и арктангенса. Изложенные открытия достойно увенчивают развитие математики в средневековой Индии.

4.3. Ариабхата - выдающийся математик Индии.

Ариабхата (476-??? гг.)

Ариабхата - Коперник Востока

19 апреля 1975 г. был запущен первый индийский искусственный спутник Земли. По предложению премьера - министра Индии Индиры Ганди спутник назван именем выдающегося математика и астронома древности Ариабхаты.

В 1976 г. прогрессивная мировая общественность отметила 1500 летие со дня рождения Ариабхаты.

Ариабхате было всего 24 года он написал свое первое и единственное дошедшее до нас произведение «Ариабхатия». «Ариабхатия» - сравнительно небольшое сочинение, оно содержит 118 строк, и написано в традиционной индийской манере - стихами. Стихотворная форма изложения способствовала лучшему запоминанию правил. Это сочинение оказало огромное влияние на все последующее развитие математики и астрономии в Индии и положило начало новой научной традиции в этой стране. «Ариабхатия» - это своеобразная энциклопедия, в которой собрано самое лучше, что было сделано в предшествующие эпохи, все наиболее важное и ценное в индийской математике и астрономии. Современные индийские ученые называют Ариабхату - Коперником Востока. Его можно сравнить с Евклидом «Начала» которого были для эллинической математики, как и «Ариабхатия» для индийской науки, важной вехой в развитии математического естествознания.

«Ариабхатия» охватывает многие вопросы арифметики, алгебры, геометрии, теории чисел, тригонометрии. Величайшим достижением индийских ученых было создание десятичной позиционной системы счисления. Первые правила этой системы, а именно правила извлечения квадратного и кубического корней встречаются у Ариабхаты. Здесь же имеются несколько задач, сводящихся к решению линейного уравнения с одним неизвестным.

Впервые даны правила арифметической прогрессии.

5. МАТЕМАТИКА НА АРАБСКОМ ВОСТОКЕ И В СРЕДНЕЙ АЗИИ

5.1. Багдадская научная школа

Ведущую роль в развитии математики в средние века играли ученые стран Востока. В VII в. мир был поражен необыкновенно быстрым возникновением Арабской империи. Менее чем за сто лет арабы овладели огромной территорией. Завоевания проводились под знаменем новой религии - ислама. Язык этой религии арабский стал и государственным и основным научным языком. Поэтому мы используем термины «арабская математика», «математика стран ислама», хотя математические открытия были результатом сотрудничества ученых многих народов - персов, арабов, таджиков, узбеков, сирийцев и других.

Расцвет культуры и науки стран ислама приходится на VII-VIII вв. Сохранилось предание о том, что Халиф Омар, завоевав Александрию, приказал уничтожить ее знаменитую библиотеку. Он сказал: «Если в книгах содержится нечто ведущее к истине, то мы имеем от Аллаха то, что еще лучше ведет к ней, а если в вей содержится ложное, то они не нужны». Эти слова отражают фанатизм первых арабских завоевателей.

Последующие правители содействовали процветанию наук. Жизненно важным в Арабском Халифате были вопросы орошения, строительства, караванной и морской торговли. Для их решения требовалось развитие астрономии и математики. Большой интерес правителей вызывала астрология, и поэтому развитию астрономии на Востоке уделялось много внимания. Преуспевающие правители создавали обсерватории, которые становились центрами развития точных наук. Первым большим научным центром Халифата был Багдат. Здесь была создана своего рода академия, названная «Домом мудрости». Ученый, работавший в ней, отличался энциклопедической образованностью. Он проявлял выдающиеся способности как философ и математик, и астроном и физик и врач одновременно, к тому же, как историк, географ и поэт. Багдадская математическая школа активно работала два столетия. В ней большое место занимало изучение и издание на арабском языке древних авторов. Были переведены с греческого на арабский основные произведения Евклида, Архимеда, Аполлония, Герона, Птолемея, Диофанта и других авторов.

Математика стран ислама включала в себя также знания, полученные из Индии, Вавилона, Персии, Хорезма, и позже из Китая. Переведенные на арабский язык, классические труды великих ученых, были переведены на латинский язык, которым пользовались в средние века ученые Европы. Математика стран ислама, включающая в себя и сведения, взятые из греческой, индийской и вавилонской науки, оказывала значительное влияние на науку Западной Европы.

В развитии математики в странах ислама можно выделить три незаметно переходящих один в другой этапа.

Первоначально, естественно, преобладало усвоение культурного наследия как греческого, так и восточного. Вместе с тем глубокое и долгое изучение Евклида, Архимеда, Птолемея имело для математики на Ближнем и Среднем Востоке исключительное значение и обусловило ее специфическое отличие от близких по общему направлению интересов китайской и индийской школ.

Освоение классического наследия позволило математикам стран ислама значительно поднять уровень разработки вычислительно алгоритмических проблем. Ученые стран ислама нередко строили целые теории. Так, на основе античной теории конических сечений они создали развитое геометрическое учение об уравнениях третьей степени.

Математики Ближнего и Среднего Востока, опираясь на греческое наследие, пошли значительно дальше в разработке вычислительной математики. Математики стран ислама создали тригонометрию как разветвленную большую науку. Широкий интерес к алгебраическим задачам геометрии привел не только к разработке приемов числового решения уравнений, но к выделению алгебры в самостоятельную дисциплину. Ярким примером теоретической обработки конкретных процедур вычислительной математики является общая теория отношений и введение понятий об иррациональном числе. В «Каноне Мас'уда» Ал-Беруни писал: «Окружность круга к его диаметру составляет отношение. Это отношение числа окружности к числу диаметра, но это отношение - иррационально». Математики стран ислама не ограничились фактически употреблением иррациональных чисел, а подошли к ним как к объекту теоретического наследия. Развили собственную теорию, расширили объем понятий о числе до множества действительных положительных чисел. И так, факты из истории свидетельствуют, что математика стран ислама оказала благотворное действие на развитие европейской науки. Ученые средневековой Европы благодаря переводам с арабского на латынь, познакомились с открытиями египтян, вавилонян, индийцев, греков и ученых стран ислама. Они стали строить математику на прочном фундаменте, используя все ценное, что создали их предшественники.

Усвоив наследие своих предшественников, ученые средневекового Ближнего и Среднего Востока пошли по принципиально новому пути. Видный советский историк математик А.П. Юшкевич обоснованно считает «Главное, однако, в том, что математики Средней Азии не просто продолжали дело своих предшественников, содействуя его некоторому количественному росту, но придали математическим исследованиям новое идейное направление, приступили к созданию качественно новой математики и как раз поэтому обогатили нашу науку открытиями первостепенной важности» [32].

Теоретический уровень математики в Индии и, особенно в Ближнем и Среднем Востоке был выше, чем в Китае.

Ряд выдающихся деятелей багдадской школы открывает первый классик математики стран ислама Мухаммед Ал-Хорезми.

Большой вклад в развитие арифметики в VII - XV вв. внесли ученые стран ислама: ал-Хорезми, Омар Хайям, ал-Караджи, Насирэддин ат-Тусси, ал-Каши, Абу-Райхан Бируни и другие. В длинном ряду имен выдающихся ученых, которые своими трудами создавали математику, насчитывается немало имен, представителей Востока и Средней Азии. Особенно велики достижения среднеазиатских математиков, работавших в IX -XУ столетиях. Именно в этот период формировались те дисциплины, которые мы рассматриваем сейчас как фундамент математической науки, объединяя их под названием элементарной математики.

5.2. Арабская арифметика

Десятичная позиционная нумерация возникла в Индии примерно 1500 лет назад. В ее распространении в Европе огромную роль сыграл труд «Арифметика» среднеазиатского ученого Мухаммеда ал-Хорезми (780-850 гг.). В нем он дал первое на арабском языке изложение десятичной позиционной нумерации и основанной на ней действий. Десятичные дроби и действия с ними в систематическом виде описал среднеазиатский ученый Джемгаид Каши в своей книге «Ключ арифметики» (1427 г.).

5. 3. Алгебра - самостоятельная наука

Большую роль в создании и развитии алгебры сыграли ученые Востока. Она была одновременно и теоретической наукой, и алгоритмической техникой и искусством вычислений. Вот какое определение алгебры дал Омар Хайям (XI в.) «Алгебра, есть научный метод. Ее предмет есть числа и величины, которые будучи неизвестными, поставлены в такое соотношение с чем-нибудь известным, что их можно определить, алгебра определяет соотношения, соединяющие данные величины, задачи с неизвестными. Алгебраическое решение получается, не иначе, как при помощи уравнения». С именем Омара Хайяма связано дальнейшее развитие алгебры как самостоятельной науки.

Большой вклад в развитие уравнений первой степени сделал Мухаммед ал-Хорезми. Он также дал правило решения квадратных уравнений. Знамениты труды по арифметике и алгебре Ал-Хорезми в числе первых сочинений по математике переведены в Европе с арабского на латынь. От термина - «ал джебр», использованного в книге ал-Хорезми возникло современное слова «алгебра». «Краткая книга об исчислении ал-джебр и ал-мукабада» - первая книга по алгебре на Востоке. Алгебра ал-Хорезми - это наука о решении числовых квадратных и линейных уравнений. Среднеазиатский ученый Абу-Райхан Беруни (973—1050 гг.) описал извлечение корня с любым натуральным показателем. Вскоре после ал-Хорезми значительно продвинулся в области алгебры и ее приложений уроженец Египта Абу Камил Шуджа ибн Аслан (850-930 гг.). Он первый при решении квадратных уравнений выделяет три рода величин: простые числа, корни и квадраты. Каждое правило обосновывает с помощью геометрической алгебры. В изложении алгебраического исчисления мы наблюдаем у Абу-Камиля две стороны процесса развития алгебры: повышение теоретического уровня, и несмотря на использование геометрических приемов доказательств, тенденцию к арифметизации.

Книга багдадского ученого Абу-Бакра Мухаммеда ибн ал-Хасана ал Караджи «Достаточная книга - о науке арифметике», написанная в конце X в начале XI в. посвящена арифметике и геометрии. В предисловии сказано, что цель науки исчисления как отыскание неизвестной величины с помощью известной, лучшим средством к чему служат правила алгебры, обладающие общностью и силой. В книге рассмотрены вопросы, связанные с понятием степени, разложение квадрата, суммы и разности куба, произведено суммирование некоторых арифметических рядов. Арифметические действия над квадратичными и кубическими иррациональностями. Решение уравнений высших степеней, приводимых к квадратным. Ал Каши в своей работе «Ключ арифметики» изложил единственное для того времени правило возведение двучлена в любую натуральную степень.

Античная наука обращалась к кубическим уравнениям лишь эпизодически, На арабском Востоке над этой проблемой работали многие математики, в результате был накоплен большой материал. Омар Хайям (1048-1131 гг.) систематизировал и построил общую теорию кубических уравнений. Унаследованное от восточных математиков учение о линейных и квадратных уравнениях, стало той основой, на которой развивалась алгебра в Европе.

5. 4. Геометрия в трудах арабских математиков

В своей книге «Об измерении окружности» (1424 г.) Джемшид Ал-Каши нашел для π значение с 16 верными знаками, при этом он пришел к убеждению, что π число иррационально. Он заметил, что найденное им значение числа π ближе к истине, чем значение Архимеда и добавил: «Но всей истины не знает никто, кроме Аллаха».

Омар Хайям развил теорию параллельных линий - «четырехугольник Хайяма - Саккери». Это первые теоремы неевклидовой геометрии.

В своем труде «Изложение Евклида» Насирэддин ат Туси развил теорию параллельных. Написал «Трактат о полном четырехугольнике».

Трактат Абу Камила «Книга об измерении» посвящена правильным пяти и десятиугольникам. Речь идет не о построении их, и не о классификации, а о численном выражении их элементов друг через друга, через диаметры описанного и вписанного кругов.

Вопросы, относящихся к геометрии, исследуются во многих сочинениях Абу Райхаи Беруни. Одно из них «Тракт об определении хорд в круге». В нем даны доказательства геометрических теории, даны построения правильных вписанных многоугольников с различным числом сторон. В алгебраическом трактате ал-Хорезми сообщаются сведения геометрии - наиболее ранние в арабоязычной литературе. Здесь приведено доказательство теоремы Пифагора для случая равнобедренного прямоугольного треугольника, вычисляются площади треугольника и круга, объема шара, цилиндра и т.д., показано простейшее применение алгебры в задачах на треугольники, некоторые правила снабжены определениями и доказательствами. Великий философ восточного средневековья Абу Наср Мухаммед ибн Мухам-мад ал-Фараби (870 - 970 гг.) комментировал

«Начала» Евклида и «Альмагест» Птолемея с точки зрения принципиальных положений, на которых строятся точные науки. Обоснованию основных геометрических понятий он посвятил специальный трактат «Коментарии к трудностям во введении к первой и пятой книгам Евклида». Большую роль для развития геометрии сыграли комментарии и дополнения Авиценны (Абу-Али ибн Сина (980 - 1037 гг.)) к «Началам» Евклида.

5. 5. Тригонометрия - отдельная область математики

Тригонометрия как наука, изучаемая в средней школе, оформилась в трудах математиков Ближнего и Среднего Востока в IX - XIII вв., которые использовали достижения древних греков и индийцев. В науке арабоязычных стран Ближнего и Среднего Востока накопление и усовершенствование тригонометрических знаний происходило значительно энергичнее. Оно достигло такого уровня, что фактически началось выделение тригонометрии в отдельную область математики.

Первой книгой на арабском языке, содержащей таблицу синусов и таблицу тангенсов явился астрономический труд Ал-Хорезми. В 1260 г. Насирэддин ат Туси написал систематический курс по тригонометрии, изложенный независимо от астрономии. Ахмад ибн Абдаллах Марвази ввел понятие тангенса и котангенса и составил таблицы этих функций.

Книга Абу Райхан Беруни «Канон Мас уда» занимает в истории плоской и сферической тригонометрии особое место. В ней даны подробные тригонометрические таблицы, а также геометрическое обоснование тригонометрических правил.

В книге «Собрание правил астрономии» Омар Хайям сделал первое систематическое изложение сферической и плоской тригонометрии, независимо от астрономии. Лучшие по точности тригонометрические таблицы были составлены, в обсерватории Улугбека (1394-1449 гг.). Правитель Самарканда, внук Тимура, Улугбек, был одним из самых образованных людей своего времени. Он выстроил в Самарканде обсерваторию, оборудованную по последнему слову техники, в которой работала большая группа математиков и астрономов во главе с Джемшидом Каши. Здесь составили знаменитый «Зидж Улугбека». Арабские ***зиджи*** - это сборники астрономических и тригонометрических таблиц, которые сопровождались пояснениями и доказательствами соотношений между тригонометрическими линиями. Эти таблицы отличались особенной полнотой и точностью.

6. МАТЕМАТИКИ ВОСТОКА

Мухаммад ибн Муса Хорезми
(около 780 - около 850 гг.)

Один из первых по времени выдающихся математиков восточного средневековья - Мухаммед ибн Муса Хорезми (IX в.) уроженец Хорезма, впоследствии долгое время жил в Багдаде, где принадлежал к кругу ученых, группировавшихся вокруг академии - ал-Ма'муна так называемого Дома мудрости. Научные интересы охватывали математику, астрономию, географию, геодезию. В каждой из этих наук им были получены фундаментальные результаты.

Известный узбекский алгебраист первой трети IX в ал-Хорезми увековечил свое имя главным образом благодаря двум математическим трактатам: один по алгебре «Китаб аль-джабр валь-Мукабала» /«Китаб аль-джебр валь-Мука-бала»/, а другой по арифметике - «Арифметика». Трактат Хорезми по арифметике - объяснение десятичной позиционной системы исчисления с применением ноля и основанной на ней арифметике. Хорезми продемонстрировал преимущество индийской системы счисления и положил начало ее распространению в странах Востока, а затем и в Европе. Современный математический термин алгоритм» (общее решение любой математической задачи) происходит от латинизированной формы имени ал-Хорезми (Алгоритмус). В этой книге Хорезми, вероятно, алгебра впервые рассматривалась как самостоятельная паука. Свой замечательный трактат по алгебре ал-Хорезми написал как учебное руководство для юношества о вычислениях посредством восстановления (ал-джебр) и сопоставления /противоположения/ (вал-Мукабала).

От термина «ал-джебр», с которыми европейские математики познакомились по латинским переводам восточных алгебраических сочинений, возникло современное слова «алгебра». Слово «ал-джебр» (аль-джебр) означает перенос отрицательных членов уравнения из одной части в другую с изменением знака. В теоретической части сочинения изложены правила алгебраических преобразований, дана классификация уравнения второй степени и приводятся правила их решения, доказанные геометрическим способом. Вторая часть содержит приложение алгебраических методов к решению задач практики.

Хорезми рассматривает шесть видов линейных и квадратных уравнений (смотри: глава «Алгебра», квадратные уравнения) [33].

Один персидский математик методы «ал-джебр» и «вал-Мухабала» даже изложил стихами:

Ал-джебр

При решении уравнения,
Если в части одной,
Безразлично какой,
Встретится член отрицательный,
Мы к обеим частям,
С этим членом сличив,
Равный член придадим,
Только со знаком другим, -
И найдем результат, нам желательный!

Вал-Мукабала

Дальше смотрим в уравнение,
Можно ль сделать приведенье,
Если члены есть подобны
Сопоставить их удобно.
Вычитая равный член из них,
К одному приводим их.

Например, уравнение x^2-5x-12=x-14 посредством операции «ал-джебр» принимает вид x^2+14=x+5x+12, а это уравнение после операции «вал-Мукабала» приводится к виду:

$$x^2+2=6x.$$

Следовательно, при помощи указанных двух выше операций данное уравнение сводится к «нормативной» форме, в данном случае к виду:

$$x^2+a=bx.$$

В словесном объяснении у ал-Хорезми имеется правило, которое в современном обозначении сводится к формуле:

$$x = \frac{b}{2} \pm \frac{b^2}{4} - a\,.$$

В алгебраическом трактате Хорезми сообщаются и сведения по геометрии - наиболее ранние в арабоязычной литературе. Здесь приведено доказательство теоремы Пифагора для случая равнобедренного, прямоугольного треугольника, вычисляются площади треугольника и круга, объемы шара, цилиндра и т.п.

Абу-Райхан Беруни
(978-1048 /973 около 1035/)

Не являло время подобно ему
по знаниям и по проницательности.

XIII в. Якут

Одно из почетных мест в истории математики средневековья по праву принадлежит великому среднеазиатскому ученому Абу-Райхан Беруни.

Необыкновенно многогранная деятельность принесла Беруни славу подлинного энциклопедиста и одного из самых видающихся мыслителей этого периода. Ею внимание привлекали история, лингвистика и философия, география и методология, минералогия и фармакология. Однако особый интерес вызывали у него точные науки - математика, астрономия, геодезия в развитие которых он внес огромней вклад. Родина Абу-Райхан Беруни - Хорезм. На территории Хорезма уже в древности (II тыс. лет до н.э.) находился очаг высокой цивилизации. У себя на родине Беруни получил образование и начал научную деятельность. Беруни был одним из образованнейших математиков своей эпохи. О его высоком научном авторитете свидетельствуют высказывания его современников «Не являло время подобно ему по знаниям и по проницательности».

В сочинениях Беруни постоянно решаются задачи как прикладного, так и теоретического характера. Однако многие его труды - около 20-посвящены чистой математике.

Арифметика в средние века по древнегреческой традиции подразделялась на теоретическую и практическую. В одном из разделов «Книги вразумления начаткам науки о звездах» Беруни определяет прежде всего основное понятия теоретической арифметики - понятия единицы и числа. Другой раздел этой книги посвящен практической арифметике, включающий в себя различные вычислительные методы. Беруни дает определение основных арифметических действий - умножения, деления, возведения в квадрат и куб и извлечения квадратного и кубического корней. Особое внимание уделяет понятию иррационального корня. Вопросы геометрии и тригонометрии исследуются во многих сочинениях Беруни. Одно из них «Трактат об определении хорд в круге при помощи ломаной, вписанной в него».

По словам известного историка того времени Абу-л-Фараджа 1226-1286 гг.) Беруни «пересекший моря греческой и индийской философии», специализировался в математических науках и написал многочисленные книги, которые являются совершенными и предельно надежными.

Внимательно изучали сочинения Беруни ученые самаркандской астрономической математической школы XV в., возглавлявшейся Улугбеком (1394-1449 г.).

Наиболее важен для характеристики математического творчества Беруни его замечательный труд «Канон Мас'уда». В книге кроме доказательства геометрических теорем приведены решения задач на построение сторон вписанного равностороннего треугольника, квадрата, правильных пяти- шести- восьми- девяти- и десятиугольников. Третья книга этого сочинения тригонометрии «Канон Мас уда» Беруни занимает в истории плоской и сферической тригонометрии особое место. Рассматривавшаяся ранее только как вспомогательная астрономическая дисциплина в этом сочинении тригонометрия по существу изложена как самостоятельная наука. Тригонометрический раздел «Канон Мас'уда» оказал сильное влияние на работы математиков более позднего времени. Беруни не только обобщил и значительно уточнил результаты, полученные его предшественниками, изложив их в виде стройной теории, но и существенно дополнил их.

В книге имеются вычисления отношения длины окружности к диаметру, т.е. числа Я, а также таблицы синусов, вычисленные через 15°. Рассматриваются функции тангенса, котангенса, секанса, косеканса. Дается доказательство теоремы синусов. Беруни переходит к изложению сферической тригонометрии. Большое внимание Беруни уделял геометрической задаче проектирования сферы на плоскость. В книге «Памятники минувших поколений» предлагает способы проектирования сферы на плоскость.

Исследователи математического творчества Беруни приходят к заключению, что общие методы, которые он систематически применял при анализе функциональных зависимостей между тригонометрическими и астрономическими величинами (задаваемых таблицами или в виде словесно выраженных правил), составляют важный этап в развитии понятия функции [34].

Абу-Али-Ибн Сина

(около 980-1037 гг.)

Авиценна (Абу-Али-Ибн Сина) - великий таджикский ученый-энциклопедист, много сделавший для процветания математической науки. Родился в бухарском селении Афшана. Уде в молодости стал видным ученым и овладел многими профессиями. Он был крупным астрономом, замечательным математиком, видным химиком и одаренным врачом-исследователем. В своих математических трудах Авиценна обобщил достижения своих современников и предшественников, а также ставил и разрешал собственные математические проблемы. Большую роль для развития математической науки сыграли комментарии и дополнения Авиценны к «Началам» Евклида. Известны математические главы его энциклопедических трактатов, «Книга исцеления», «Книга знания», «Книга спасения».

В своей арифметике Авиценна решал проблемы, которые в настоящее время принадлежат к теории чисел. Об атом красноречиво говорят следующие два правила Авиценны.

Первое правило: «Если дано число, которое, будучи разделено на 9, дается в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, даст в остатке 1. Если число, разделенное на 9, дает в остатке 2 или 7, то квадрат этого числа, разделенный на 9, даст в остатке 4. Если число, деленное на 9, дает в остатке 4 или 5, то его квадрат, деленный на 9, дает в остатке 7. Наконец, если число, деленное на 9, дает в остатке 3, 6 или 9, то его квадрат, разделенный на 9, дает в остатке 9».

Второе правило: «Если число, деленное на 9, дает в остатке 1, 4 и 7, то его куб, деленный на 9, дает в остатке 1; если число, деленное на 9, дает в остатке 2, 5 и 8, то его куб, деленный на 9, дает в остатке 8, и если число, деленное на 9, дает в остатке 3, 6 или 9, то его куб, деленный на 9, дает в остатке 9».

Авиценна был непререкаемым авторитетом в самых разнообразных областях науки своего времени и по заслугам назывался тогда «главой философов».

Историки рисуют Авиценну как человека, верующего в непобедимую силу разума. Кроме научных сочинений Авиценна писал стихи [34].

Омар Хайям

(1048-1123 гг.)

Омар Хайям - выдающийся таджикский ученый-астроном, математик, философ, поэт, широко известный в наши дни как автор знаменитых четверостиший. О жизни Омара Хайяма имеются скудные сведения. Еще в молодости он проявлял особую склонность к математическим паукам. Многогранный талант молодого ученого был подмечен главным самаркандским судьей. Это обстоятельство заставило Омара Хайяма переехать в Самарканд к своему целителю и покровителю. В этот период он написал замечательный алгебраический трактат «О доказательствах задач алгебры и альмукабалы», посвященный решению кубических уравнений.

Когда Хайям был молодым Среднюю Азию и Иран завоевали кочевники турки-сельджуки. Но исключительное дарование Омара Хайяма, его растущая слава позволили ему сделаться придворным ученым сельджукского султана Мелик-шаха. По поручению которого в 1074 году Омар Хайям возглавляет обсерваторию в Исвахана (Иране). В 1079 году по заданию Мелик-шаха он составляет более современный календарь, намного точнее григорианского, которым пользуется человечество в настоящее время. Он проводил астрономические наблюдения, составил «Малик-шахские астрономические таблицы». В 1077 году написал выдающийся математический трактат «Комментарии к трудным постулатам книги Евклида». Этот трактат состоит из трех книг. Первая содержит оригинальную теорию параллельных прямых, вторая и третья посвящены усовершенствованию отношении и пропорций. Перевел на персидский язык труды Авиценны.

Параллельно с занятиями наукой Хайям создавал свои четверостишия - «Рубай». Научные труды Хайям писал на арабском языке, стихотворения на персидско-таджикском наречии.

Однако сравнительное благополучие Омара Хайяма кончилось со смертью Малик-шаха (1092 г.). Его материальное благополучие сильно пошатнулось, кроме того, он подвергся нападкам со стороны духовенства, был обвинен в безбожии. На старости лет был вынужден совершить паломничество в Мекку. Омар Хайям скончался в бедности в своем родном Нишапуре.

В своем крупнейшем математическом сочинении «Алгебра» он подробно рассматривает решение линейных и квадратных уравнений, а также геометрическое построение кубического уравнения. Алгебру как науку он определяет так «Алгебра есть научный метод. Ее предмет абсолютные числа и измерение величии... Алгебраические решения получаются не иначе, как через уравнение». Заслуга Омара Хайяма в алгебре заключается в том, что он первый дал способы решения кубических уравнений, которые не были известны до него, положил начало приложениям алгебры к геометрии. Он дал классификацию кубических уравнений, выделив 19 классов, из которых 5 классов сводится к линейным и квадратным. Для каждого из остальных 14 классов он указал метод решения с помощью конических сечений: парабол, равносторонних гипербол и окружностей.

В геометрии Омар Хайям составил оригинальную теорию параллельных линий.

«Исфаханский аноним» и его собрание правил науки астрономии - это первое систематическое изложение сферической и плоской тригонометрии независимо от астрономии. Первое изложение 6 случаев решения сферических треугольников по трем данным элементам.

Омар Хайям навсегда вошел в историю всемирной культуры не только как блестящий ученый-энциклопедист, но и как прекрасный поэт Его мудрые лирические четверостишия, наполненные глубоким философским смыслом, в XIX-XX веках были переведены на многие языки мира. Вот одно из четверостиший Хайяма:

Чтоб мудро жизнь прожить, знать надобно немало
Два важных правила запомни для начала
Ты лучше голодай, чем, что попало есть,
И лучше быть один, чем вместе с кем попало

Как настоящий ученый, Хайям был скромен, он сознавал, что лишь очень небольшая часть всех тайн Вселенной известна ему

Реакционные, религиозные мусульманские деятели стремились оклеветать ученого и поэта-философа, и предать, забвению имя Омара Хайяма. Однако это им не удалось. В XVIII в имя Хайяма и его труды стали известны европейским математикам и ученым.

В настоящее время Омар Хайям по праву оценивается как одна из самых видных фигур в истории мировой поэзии и науки.

Абу Наср Мухаммед ибн Мухаммед аль Фараби
(870- 950 гг.)

Великий философ, ученый - энциклопедист восточного средневековья, оказавший влияние на развитие математики, и сыгравший существенную роль в привлечении внимания к комментированию начала «Начал» - Абу Наср Мухаммед ибн Мухаммед аль Фараби родился в местечке близ г. Фараба, при впадении реки Арысь в Сыр-Дарью (ныне г. Отрар Казахстана) Аль Фараби происходил из среднеазиатской тюркско-военной аристократии Работал он в Багдаде, затем в Алеппо (Сирии).

Аль Фараби написал более ста трудов по философии и естественным наукам Его наследие необычайно велико и разнообразно Он изучал все известные в то время отрасли знаний. На первом месте стояла философия и особенно логика Известны его комментарии почти по всем основным логическим сочинениям Аристотеля (384-322 гг. до н. э.).

Философы Востока еще при жизни аль Фараби называли ею «ал-муаллим-ас-сани» - вторым учителем. Первым учителем они называли Аристотеля.

Аль Фараби поставил своей задачей узнать подлинного Аристотеля и повернуть путь развития философии в сторону аристотелизма Он является одним из основоположников прогрессивной общественной философской мысли на мусульманском Востоке Вслед за Аристо1елем Аль-Фараби также изучает многие отрасли науки Помимо чисто философских логических сочинений, он написал много естественно-математических сочинении

Среди трудов, посвященных математическим проблемам, дошедшие до нас трактаты аль Фараби:

- математический раздел «Перечисление наук».
- тригонометрические главы «Книги приложений к «Алмагесту»;
- «Книга духовных искусных приемов» природных тайн о тонкостях геометрических фигур»;
- «Комментарии к трудностям во введениях к первой и пятой книгам

Евклида».

Воззрения Аль Фараби представляют собой сочетание некоторых мусульманских идей с платонизмом и особенно с аристотелизмом. Интерес его к «Началам» объясняется тем местом, которое в них занимает анализ основных понятий геометрии и арифметики, понятий, играющих важную роль в трудах Аристотеля. Составленный аль Фараби трактат «Комментарии к трудностям во введениях к первой и пятой книгам Евклида» дошел до нас в древнееврейском переводе. В нем рассмотрены вопросы, относящиеся к основаниям геометрии, а именно: правильность и понятность некоторых определений, данных Евклидом. Например, Аль Фараби не удовлетворяют определения точки, прямой и плоскости у Евклида. Он дает подробное разъяснение этих определений, уточняет определение части, кратного и отношения. Аль Фараби свободно владел геометрическим наследием Евклида и использовал эти знания. Доказывал новые теоремы. Он поддерживает аксиоматическое построение Евклида.

Аль Фараби много занимался методологическими вопросами науки вообще и физико-математических наук в частности. Математику он подразделяет на семь разделов и определяет предмет каждой из этих наук:

«Наука чисел» (арифметика и теория чисел);

«Наука геометрии»;

«Наука оптики»;

«Наука о музыке»;

«Наука о звездах» (астрономии и астрологии);

«Наука о тяжестях» (статике) и

«Наука об искусных приемах».

Арифметику, геометрию, астрономию и музыку он разделяет на теоретические и практические части.

Исходя из того, что в основе познания многообразия всего мира лежат познания чисел и величин, аль Фараби особое место среди разделов математики придает арифметике и геометрии. В математических сочинениях много места оп отводит арифметике и алгебре. Большой интерес представляет определение алгебры, данное аль Фараби. Эта наука является общей как для арифметики, так и для геометрии. Она содержит разнообразные искусные методы нахождения чисел, основы которых для рациональных и иррациональных величин даны в десятой книге «Начал» Евклида и в том, что не приведено в этой книге. Определяя алгебру как общую науку для геометрии и арифметики, Аль Фараби обнаружил связь между арифметикой и геометрией. Дальнейшее развитие подтвердило правильность этой установки. Попытки сближения исторически имевшей место противоположности между числом и величиной завершилось созданием аналитической геометрии Декарта (1596-1659 гг.).

В своем труде «Перечисление наук» Аль Фараби определяет предмет геометрии и приводит ее краткое содержание. Разделяя геометрию на практическую и теоретическую, он считает, что практическая ее часть возникла в результате деятельности людей. О теоретической части пишет:

«Эта наука состоит из двух частей. Одна часть рассматривает линии и плоскости, а другая – тела». Таким образом, он разделяет геометрию на планиметрию и стереометрию.

Геометрический трактат «Книга духовных искусных приемов и природных тайн о тонкостях геометрических фигур» полностью посвящен геометрическим построениям. В нем даны алгоритмы геометрических построений. Но все построения даны без доказательств. Элементарные построения выполняются с помощью циркуля и линейки. Рассматриваются правильные многоугольники, построенные на данном отрезке, правильные многоугольники, вписанные в круг. Рассматриваются задачи разделения треугольника на равные части, увеличения и уменьшения его в несколько раз, разделение параллелограммов и трапеций, прямыми, удовлетворяющими различным условиям, применяется метод гомотетии. Даны различные построения на сфере, а также деление сферы на правильные сферические многоугольники.

Вопросы тригонометрии рассматриваются Аль-Фараби в Книге «Коментарии к Алмагесту». Как известно из истории тригонометрических таблиц ранними считаются таблицы хорд греков, приведенных в первой «Книге Алмагеста» Птолемея, которые служили в течение веков в астрономии. Крупным достижением индийских ученых в этой области была замена таблиц хорд на таблицы синусов. Одним из важных этапов в составлении таблицы тригонометрических функций в странах Ближнего и Среднего Востока было нахождение синуса одного градуса. Аль-Фараби как и Птолемей, пользуется шестидесятеричной системой и принимает радиус круга равным 60 частям. Хотя методы вычисления совпадают, однако Аль-Фараби значительно улучшает точность вычисления. Как известно у греческих математиков роль синусов играли хорды, стягивающие углы. Индийцы добавили синус, косинус, синус-версус. Аль-Фараби дает определение тригонометрических линий - хорды, синуса, косинуса, синуса-версуса. Причем для облегчения установления соотношения между хордами и новыми тригонометрическими линиями они характеризуются параллельно. Большой интерес для истории математики представляют исследования аль Фараби «О тригонометрии и геометрии». Его изложение основных понятий о тригонометрических линиях, принципах составления тригонометрических таблиц более точные их значения, доказательств теорем синусов для прямоугольных и сферических треугольников сыграло большую роль в предыстории сферической тригонометрии [35].

ГЛАВА 4. ПРОБЛЕМЫ ГУМАНИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИСТОРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

1. Гуманизация математического образования

Противоречия быстро меняющегося и развивающегося современного мира обусловили актуальность проблемы ответственности человека за возможные результаты и последствия научно-технического прогресса. Поэтому разработка современных педагогических концепций основана на идеях гуманизации и гуманитаризации [36].

Гуманизация образовательного процесса в средней школе предполагает ориентацию на духовные приоритеты, гармоническое развитие личности и актуализацию нравственных ценностей как основы гуманистического мировоззрения учащегося и наиболее устойчивое ядро его внутреннего мира. Гуманитаризация образования связана с обновлением его содержания и определяет методологическую основу интеграции естественно-математического и гуманитарного знания на разных уровнях; концептуальном, понятийном и содержательном. Интеграция знаний из разных областей познания вокруг проблемы взаимодействия человека и природы отражает сущность процесса гуманитаризации естественно-математического образования и является механизмом ее реализации.

В числе основных приоритетных направлений реформирования образования в Республике Казахстан названо совершенствование и обновление образовательного процесса в контексте гуманизации всего содержания образования [37].

Гуманизм - общефилософское понятие, отражающее социально-ценностный комплекс идей, утверждающих отношение к человеку как к высшей ценности, признающих его право на свободу, счастье, развитие и творческое проявление своих сущностных (физических и духовных) сил. Этот комплекс идей, представляющий собой обобщенную систему взглядов, убеждений, идеалов, в которой человек выражает свое отношение к окружающей его природной и социальной среде. При этом его отношение содержит не только оценку мира как объективной реальности, но и оценку своего места в нем и связей с другими людьми. В гуманистическом мировоззрении, следовательно, находят свое выражение многообразные отношения человека к человеку, обществу, духовным ценностям, профессиональной деятельности и др., составляющие гуманности личности.

Гуманность в отличие от гуманизма - это качество личности, обнаруживающее себя в совокупности нравственно-психологических свойств, выражающих осознанное и сопереживаемое отношение к человеку как высшей ценности.

Гуманизация как производное от понятий «гуманизм» и «гуманность» выступает социально-ценностной и нравственно-психологической основой общественной жизни, отношений между людьми. В этой связи она характеризует и ценностные аспекты образования как общественного явления.

Гуманизация образования, следовательно, может быть рассмотрена как важнейший социально-педагогический феномен, отражающий современные общественные тенденции в построении и функционировании системы образования. Сущность данного феномена выявляется на пересечении нескольких смысловых координат. По своим целевым функциям гуманизация образования является условием (фактором) гармоничного развития личности, обогащения ее творческого потенциала, роста сущностных сил и способностей. Она представляет собой и процесс, направленный на развитие личности как субъекта творческого труда, познания и общения. Гуманизация образования составляет и важнейшую характеристику образа жизни педагогов и воспитанников, предполагающую установление подлинно человеческих (гуманных) отношений между ними в педагогическом процессе. Наконец, гуманизация - ключевой элемент нового педагогического мышления, изменяющий взгляд на характер и суть педагогического процесса, в котором и педагоги, и воспитанники выступают как субъекты развития своей творческой индивидуальности. Гуманистическая сущность педагогического процесса, поэтому состоит в развитии личности, качество и мера которого являются показателями работы учебных заведений, учителей, всей системы образования.

Гуманизацию математического образования школьников следует отнести к сложным дидактическим явлениям и анализировать с разных точек зрения.

Решение проблем, связанных с гуманизацией образования при изучении математики в общеобразовательной школе, во многом зависит от смысла, вкладываемого в понятие гуманности. В последнее время стало обычным исходить из трактовки, данной этому понятию В.Далем: «гуманность-человечность, людность; благодушие, человеколюбие, милосердие; любовь к ближнему». В соответствии с этой трактовкой образование гуманно, если таким являются, как его конечная цель, так и средства достижения этой цели. Обучение математике потенциально удовлетворяет этому условию. При правильной его организации, перед духовным взором школьника может быть раскрыта одна из важнейших граней бытия, а сам он приобщен к ценнейшей сокровищнице человеческой культуры, а также обеспечено духовное развитие личности, отточены мышление и речь, сформированы ценные нравственные качества.

Как известно, гуманизм - это потребность добрых проявлений для блага других людей, необходимое условие общения, признак поддержки со стороны преподавателя. При отсутствии гуманного отношения к учащимся со стороны преподавателя нет гарантий, что они психологически готовы к полному восприятию материала. Очевидно, что они естественным образом готовы к установлению отношений гуманного характера с преподавателем. Это проявляется в их доброжелательности, отзывчивости, заботе, справедливости, участии в совместной работе, желании стать собеседником, заслужить похвалу, одобрение, положительную оценку [38].

Эти положения кажутся естественными в преподавании гуманитарных дисциплин и необязательными в обучении математических дисциплин. По нашему мнению, нужно учитывать эти особенности в преподавании естественно-математических курсов, что является необходимым условием успешного обучения математике. Достаточным условием гуманной направленности математического образования является индивидуализация учебно-воспитательной работы.

По словам известного методиста-математика В.А.Гусева «под гуманизацией образования понимается всестороннее развитие личности ребенка средствами школьного учебного предмета, создание интеллектуального, духовного и жизненно-практического потенциала, необходимого для нормальной деятельности человека в обществе. Реализация концепции гуманизации образования предусматривает:

1) индивидуализацию и дифференциацию обучения;
2) реализацию принципов развивающего обучения;
3) связь обучения с практической деятельностью человека, с окружающим миром» [39].

Гуманизация образования означает усиление личностного подхода к учащемуся и учителю, создание оптимальных условий для их всестороннего развития. При этом гуманизация математического образования не отвергает необходимость преодоления трудностей в обучении, ибо особенности характера личности формируются в процессе достижения трудных целей, к которым, несомненно, можно отнести процесс формирования системности знаний школьников.

Гуманизация обучения математике означает признание ценности ученика как личности его права на свободное развитие и проявление своих способностей.

При рассмотрении проблемы гуманизации математического образования целесообразно выделение аспектов:

- **педагогического**, определяемого характером взаимоотношений учителя с учащимися в процессе обучения (гуманные отношения предполагают равноправное учебное сотрудничество учителя и учащихся). Современная педагогика обращается к учащемуся как к субъекту учебной деятельности и предполагает гуманно-личностный подход к нему.

- **организационного** (технологического), характеризующегося степенью адекватности организационной структуры учебного процесса (ОСУП) составу школьного класса и этапу усвоения учащимися знаний или умений (несвоевременность организационных изменений, их несоответствие ходу усвоения математических знаний ведут к сдерживанию интеллектуальной деятельности обучаемых, что антигуманно, по сути, и не должно допускаться учителем);

- **психологического**, определяемого мерой комфортности ученика, усваивающего математический материал.Ученик будет чувствовать себя комфортно лишь тогда, когда учиться интересно, когда он осознает, что успешно справляется со своим основным делом учением, когда учебное познание доставляет ему радость, удовлетворение, другими словами, интерес, понимание, успех, творчество - это те эмоциональные ситуации, которые должны определять психологический климат каждого урока математики, каждого этапа учебного познания;

- **содержательного**, связанного с усилением гуманитарной составляющей математического образования школьников, с усилением развивающей ценности учебного содержания, его практического, воспитывающего значения. Математика раскрывает общие методы научного познания, объясняет суть законов общечеловеческой логики, вооружает человека надежными схемами рассуждений ,доказательств, что и должно, составлять сердцевину математического образования школьников [40].

В заключении отметит, что гуманизация обучения математике - это такое обучение, для которого главное - личность ученика, его духовный мир, интересы и способности. Признание личности каждого человека как высшей социальной ценности общества - вот сущность гуманизации образования вообще и математического в частности. Магистральный путь реализации этого принципа - осуществление личностного подхода в обучении математике, направленность учебно-воспитательного процесса на удовлетворение запросов и потребностей учащихся, внимание к их формированию, устанавливающее разумное равновесие между личными и общественными интересами.

1.2. Изучение истории науки как средство гуманизации математического образования

Одним из основных принципов диалектического метода познания является принцип историзма. Суть ее сводится к тому, чтобы любое исследуемое в науке или изучаемое в учебном процессе явление рассматривать в его движении и развитии. Историзм - это и определенный взгляд на окружающий нас мир и определенный метод его познания. Поэтому и постановка математического образования в школе уже с самого начала предполагает учет исторического как в построении курса математики, так и в его преподавании.

Сегодня идея историзма является одной из важнейших идей современной математической науки, пронизывая ее содержание, методы исследований, методические и философские принципы и даже манеру мышления самого исследователя. Следовательно, чтобы преподавание математики в школе было по-настоящему научным, принцип историзма должен находить соответствующее отражение в учебном курсе математики, в процессе обучения и воспитания. Заранее можно предполагать, что реализация этого требования в практике преподавания явится основой для формирования научного мировоззрения учащихся. Отсутствие исторических сведений в курсе математики школы приводит к тому, что ее выпускник вступает в жизнь, преклонив голову перед всесилием науки или испытывая определенную неприязнь к научным догмам. Избежать этого можно, если на материале истории науки показывать конкретные пути научного познания. В итоге это будет содействовать повышению уровня математического образования учащихся, осознанию ими роли научных знаний в дальнейшем развитии современного общества, пониманию взаимоотношений природы и человека в целом, сохраняя жизнь на Земле.

Таким образом, выступая, вначале как средство формирования мировоззрения историко-научный материал не только помогает формировать взгляды и убеждения, вырабатывать способ исторической оценки окружающего мира и информации о нем, но и позволяет учащимся приобретать конкретные исторические знания. Эти знания помогают, с одной стороны, обоснованию формируемых у учащихся мировоззренческих взглядов и убеждений, а с другой, - воспитанию положительных качеств собственной личности. И хотя такие знания со временем заметно уменьшаются или даже совсем исчезнут из памяти, они, тем не менее, сыграют свою основную роль, послужат формированию мировоззрения учащихся и их нравственных позиций.

Как правило, исторический материал рекомендуется использовать на уроках для показа борьбы научных идей. Но история научных идей включает в себя историю их опытного обоснования, историю практического приложения теоретических знаний и, конечно, творческое наследие выдающихся исследователей. Педагогическая теория и опыт преподавания свидетельствуют о том, что весь применяемый в преподавании исторический материал по возможности должен быть связан с творчеством выдающихся ученых. Какие для этого существуют основания?

- Одним из важнейших принципов формирования научного мировоззрения является требование освещать научные открытия как закономерный результат специфической трудовой деятельности людей. Плоды усилий огромной армии исследователей – научные знания, обоснованы теоретическими расчетами и экспериментами. И в этом отношении цена научных знаний в экономическом и социальном измерении чрезвычайно высока.
- В творчестве всякого ученого находит отражение содержание, методы, философия и методология науки. По существу, вся наука представляет собой совокупность творческих достижений людей науки. Поэтому рассматривать на уроках основные моменты творчества ученого целесообразно как в познавательном, так и в воспитательном отношении. Задача облегчается тем, что большинство открытий и изобретений до начала XX в. и изучаемых в курсе математики школы, связано с именем какого-либо одного автора.
- Для учащихся биография творца науки и техники притягательна тем, что изучаемые при этом открытия «окрашиваются» конкретным человеческим существованием, а это позволяет влиять на эмоциональную сферу и в определенной степени управлять весьма сложным процессом формирования взглядов и убеждений. Это ценно еще и потому, что

большинство учащихся волнует не только само достижение ученого, но и то, как он этого достиг, в силу каких качеств собственной личности.

- Необходимость изучения в школе творчества ученых диктуется и таким социальным явлением глобального характера, как превращение науки в производительную силу общества. Сегодня в научную деятельность вовлекаются широкие массы, которые должны быть заранее подготовлены к творческому труду. Знакомство с творчеством ученых, с их методами и приемами решения возникающих перед ними задач будет содействовать воспитанию элементов научной и технической культуры труда учащихся.
- Материал о творцах науки и техники позволяет также формировать у учащихся мировоззренческие представления о месте человека современном обществе. Выпускник средней школы еще недостаточно знает тех ученых, которым мы обязаны нынешним уровнем развития человеческой цивилизации. У него отсутствуют необходимые представления о непреходящем влиянии на материальную и духовную культуру общества таких выдающихся представителей естествознания. Как Аль-Фараби, Н.Коперник, И.Ньютон, И.Дарвин, Д.И.Менделеев, А.Эйнштейн и др. В условиях научно-технической революции, когда стремительно растет социальная роль ученого, должно возрасти к ним внимание и в процессе обучения математике. В этом заключается гуманистический аспект формирования мировоззрения учащихся.

Историзм как элемент методологии гуманитарного знания в его приложении к математическим наукам представляется перспективным средством обновления структуры и содержания системы математического образования. Как показала практика обучения в школах республики Казахстана, ознакомление учащихся с историей науки дает импульс их нравственному совершенствованию, воспитанию в духе патриотизма и интернационализма. Пример жизни великих мыслителей прошлого, ознакомление с их научным вкладом и нравственными убеждениями оказывает сильное влияние на процессы самосовершенствования школьников. Между тем, возможность, целесообразность и необходимость введения историко-математических материалов в школьный курс, что и составляет суть принципа историзма в преподавании математики, сследовались известными методистами-математиками. В частности И. К. Андроновым [41], Г. И. Глейзером [42], И. Я. Депманом [43]. Казахстанскими учеными-математиками О. А. Жаутыковым [44], А. Закариным [45], М. У. Искаковым [46], А. Кубесовым [47] и др. Учебно-воспитательные возможности истории науки подчеркивались в дидактических исследованиях Б. П. Есипова [48], И. Я. Лернера [49], В. Н. Молодший [50], казахстанского методиста-математика К. Нурсултанова [51], узбекских ученых-методистов З. Атаджановой [52], С. Х. Сираждинова [53] и др.

М.Ө. Искаков [54] «Математика мен математиктер жайындағы әңгімелер» деген кітабында былай жазады: «Орыс әдебиеті сабақ-тарында Пушкиннің, Гогольдың, Толстойдың, есімдерін атамай, өмір сүрген замандарын сөз етпей, тек «Евгений Онегин», «Өлі жандар», «Соғыс пен бейбітшілік» сияқты шығармаларын ғана талдай берсек оқушы білім алар ма еді? Іс жүзінде мектеп математикасы осы жолмен құрылған». То есть в математике незнание истории считается нормальным явлением. Но ведь математика не свод давно открытых правил и законов, а живая, развивающаяся во времени человеческая деятельность. «Только тогда можно понять сущность вещей, когда знаешь их происхождение и развитие», - писал Аристотель (384-322 гг. до н.э.) [55].

Одним из недостатков преподавания математики в школе можно считать излишнюю формализацию знаний, полный отказ от принципа историзма в объяснении тех или иных математических положений. Известный психолог и методист Л.М.Фридман отмечает, что только по этой причине «у многих учащихся отсутствуют правильные представления о математике как науке, они не знают основных фактов истории ее возникновения и развития, ее современного состояния и проблем» [56].

Прежде всего, хотелось бы обратить внимание на необходимость более глубокого, чем до сих пор это делается, использования исторического подхода в обучении. Мы стремимся к тому, чтобы математика в представлении учащихся выглядела как важнейший элемент культуры. Но культура вне истории немыслима, и вся наша деятельность по гуманизации без привлечения историко-научного материала, следовательно, будет малоэффективной.

Элементы мировой истории, истории науки и отчасти применение математики в технике должны пронизывать содержание курса школьной математики, гармонично сочетаясь при этом современными примерами, фактами и представлениями. В то же время следует помнить, что физико-математическая наука, по характеристике выдающегося американского историка науки Дж. Сартона «есть не что иное, как человеческое зеркало природы; изучая науку, мы в определенной степени изучаем человека, человеческую культуру».

Согласимся и с тем, что восприятие культурной ценности математического образования и математической науки происходит лишь через диалог культур. Включение в процесс обучения математике хотя бы элементов подобного диалога может сыграть, на наш взгляд, положительную роль в восприятии абстрактной сущности математики, в осознании культурной ценности математических знаний и математической науки в целом.

Особую роль в воспитании личности учащегося играет историко-биографический материал позволит показать учащимся научные знания как результат специфической трудовой деятельности людей, раскрыть через нее содержание и методы науки и одновременно убедить учащихся в настоятельной необходимости приобретения ими ряда важнейших человеческих качеств необходимых для трудовой деятельности.

Вместе с тем, если на своих уроках мы будем рассматривать мир математики через деятельность человека, общества в целом, то приобретаемые учащимися научные знания и представления отложатся в их сознании как живой процесс поиска, открытий, изобретения как историческая **драма идей и людей** как осознание глобальных проблем человеческого общества. Тем самым на практике мы будем вносить существенный вклад в гуманизацию школьного математического образования.

Перед педагогами, и педагогами-математиками нашей республики в частности, стоит в настоящий момент насущнейшая задача. Усовершенствовать процесс обучения с таким расчетом, чтобы с одной стороны, сохранить его научное содержание, а с другой - приблизить его к задачам современной жизни; повысить интерес учащихся к изучаемым математическим закономерностям, не впадая в то же время во внешнюю занимательность; помочь учащимся осмыслить математические знания с тем, чтобы выработать у них широкий и свободный взгляд на весь круг идей, рассматриваемых в математике, пробудив тем самым самостоятельность и творческое начало.

При анализе отражения принципа историзма в школьных учебниках по математике мы обнаружили, что в содержании учебного материала находит отражение только определенный круг сведений из истории математики. Они не дают представления о динамике научного познания: от анализа совокупности фактов и постановки проблемы к гипотезе, от гипотезы к теоретическому осмыслению и выводам, от выводов - к их интерпретации, экспериментальной проверке и практическому применению знаний, о том, что любой ученый (а вместе с ним ученик), познающий природу проходит эти этапы.

Изучая педагогический опыт многих учителей математики, мы пришли к выводу, что актуальной задачей становится использование историко-математического материала как средства гуманизации математического образования. Оно ориентированно на выявление истории науки с различными аспектами развития духовной и материальной культуры определенной исторической эпохи, отказ от технократического мышления, становление экологического типа мышления и актуализацию этических аспектов современной математической науки.

Однако, как показывает практика учителя, в процессе обучения мало используют богатые возможности программного материала школьного курса математики в воспитательных целях. В их работе по действующим учебникам математики элементы истории математики применяются редко, бессистемно. Это, на наш взгляд, далеко не случайное явление.

Анализ учебников и учебных пособий по математике, использовавшихся ранее и сегодня действующих в процессе обучения школьников, показывает, что исторические сведения приводятся только в тех параграфах, где речь идет об открытии или опыте, связанном с именем ученого или названного в его честь.

По результатам анализа анкетирования учителей математики, мы пришли к выводу о том, что большинство учителей (88,0 %) указывает на необходимость включения исторических сведений в учебный процесс (Таблица 1), но при этом все опрошенные учителя указывают, что эта деятельность сопряжена с трудностями в условиях школьной практики (Таблица 2).

Таблица 1

Виды учебных занятий, на которых учителя используют сведения по истории математики

№ п/п	Варианты ответов	% учителей давших данный ответ, от общего числа опрошенных
1	На уроках изучения материала	88,5
2	Во время проведения учебных конференций	60,0
3	Во время лекций	56,7
4	При проведении практических занятий	46,0
5	На уроках систематизации и обобщения	39,6
6	На факультативных занятиях	62,0
7	Во время экскурсий	37,8

Таблица 2

Трудности, которые испытывает учитель при подготовке и проведении учебных занятий с использованием исторического материала

№ п/п	Варианты ответов	% учителей давших данный ответ, от общего числа опрошенных
1	Ограниченность времени на изучение программ нового материала	70,0
2	Нехватка времени на поиск материала с историческим содержанием	60,5
3	Недостаточная информированность об имеющейся литературе и других пособий	35,2
4	Недостаточная методическая оснащенность кабинета математики (литература, дидактический и раздаточный материал)	32,4
5	Требуется дополнительная подготовка, в том числе и на курсах повышения квалификации	36,0

В ходе личных бесед с учениками было выяснено, что об истории того или иного открытия учителя указывали на уроках, но при контроле выполнения заданий на эти вопросы не обращали внимания учеников. Учениками отмечалось, что используемые ими планы обобщенного характера помогают при работе с материалом учебника, но при этом затрудняются их применять при раскрытии исторического содержания учебного материала, так как в них четко не указывается на описание и анализ истории изучения явления или иного элемента научного знания. При этом ими же высказывалось пожелание о включение вопросов, связанных с историей введения того или иного термина в науку, при изучении математики, чтобы лучше понимать логику математической науки.

А вот мнение студента казахского Национального Технического университета о роли истории наук, о методике ее преподавания:

«Наука и техника шагнули далеко вперед... Студенту приходится осваивать по фундаментальным и прикладным дисциплинам очень многое из того, что он в повседневной жизни не встречал. И дается ему это с трудом. Преподаватели же в большинстве своём не стремятся облегчить нам усвоение нового материала. И причина тут не в халатности или некомпетентности их, а во взгляде на методику преподавания. Например, начинаем мы проходить интеграл и на первой же лекции узнаём, что изучаемый предмет впервые введен тем-то в такие-то годы, и дальше идут непонятные определения, доказательства, методы решения. Я бы рассказал об интеграл, поведал о том, что до его появления перед людьми стояла такая-то практическая задача, решить которую не могли существовавшими методами. И вот такой-то ученый-практик, поразмыслив, выразил данную задачу через математические знаки. Дали название знаку - интеграл. Имеет он следующие свойства... Потом уже можно начинать учить решать задачи. И уже в конце давать определение интегралу. То есть методику преподавания строить не вспять, а по течению истории. Пример из математики я привел для наглядности. А вообще надо менять почти всю методику преподавания. И при этом учить студентов не столько уже устоявшимся теориям и определениям, сколько умению выразить через математические знаки, графики или теории нашу жизнь. А потом уже учить оперировать и применять их на практике. Ведь, в конечном счете, эти математические знаки и определения скажем, экономические теории призваны решать проблемы нашей жизни. Так?» [57].

Отсутствие исторических сведений в курсе математики школы приводит к тому, что её выпускник вступает в жизнь, преклонив голову перед всесилием науки или испытывая определенную неприязнь к научным догмам. Избежать этого можно, если на материале истории науки показывать конкретные пути научного познания. В итоге это будет содействовать повышению уровня математического образования учащихся.

Освещать историю развития изучаемых в средней школе вопросов математики даже в самом кратком виде в школьном курсе математики не представляется возможным. Можно говорить только о сообщении учащимся некоторых сведений из истории математики в процессе классных и внеклассных занятий. Вряд ли можно и нужно строго регламентировать объем, содержание и формы сообщения учащимся таких сведений. Важно дать учащимся ясное и увлекательное представление о возникновении и развитии математических знаний. Здесь представляется широкий простор для появления инициативы учителей математики. Важно, чтобы каждый учитель математики осознавал необходимость сообщения учащимся историко-математических сведений и сумел это сделать.

ГЛАВА 5.МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

1. Пути реализации принципа историзма в обучении математике в общеобразовательных школах

В соответствии с проведенным анализом научно-методической литературы и передового педагогического опыта мы выделили следующие основные функции (соответственно, приемы) использования историко-математического материала на уроках математики в общеобразовательной школе. Историко-математический материал используется для раскрытия взаимосвязей науки, жизни, производства. Показа диалектического взаимодействия изучаемой теории и учебной практики, что может служить основой для ознакомления учащихся с исторически возникшими проблемными ситуациями в развитии математики. Ознакомления учащихся с конкретными историческими особенностями развития математики; для достижения разнообразных воспитательных целей: воспитание патриотизма и интернационализма, эстетического, нравственного воспитания Активизации формирования познавательных интересов учащихся в процессе обучения математике в школе.

Использование историко-математических материалов во многих случаях зависит от конкретного учебного материала и его отражения в истории науки. Исходя, из этого можно выделить следующие **дидактические условия**, которые можно использовать в процессе обучения математике. Историко-математический материал используется:

1. Для усиления доказательности в изложении учебного материала (включая и объяснение учеником). В этом случае необходимо избавиться от несущественных подробностей истории, но исторический факт должен оставаться неизменным, не следует вносить искажения при его интерпретации. Следует в понятном и доступном виде указать основные идеи и цели, послужившие толчком к познанию в данной области математики.
2. Для обобщения и систематизации знаний учащихся в связи с изучением конкретных явлений, законов, теорий и т.д. и в то же самое время исключает догматизм в изложении учебного материала.
3. Для усиления аспекта важности изучаемого материала учащимися, а в результате их деятельности они могут четко увидеть ту роль, которую сыграли в истории науки рассматриваемые открытия, явления, законы, теории на развитие самой математики. Их влияние на прогресс техники и технологий, как знание изучаемого ими вопроса позволило человечеству решить конкретные задачи, например, проблемы измерения земли.
4. Для предотвращения неверного понимания учащимися изучаемых явлений в том случае, когда имеющиеся у них знания и представления

тождественны знаниям и представлениям, некогда существовавшим в науке, а сегодня отвергнутым в ходе ее исторического развития.

5. Для упрощения процесса понимания учащимися учебного материала, особенно в младших классах.

Основными моментами включения историко-математических сведений является ознакомление учащихся:

1. С источником возникновения ими первоначальным смыслом математических терминов.
2. С историей происхождения математических законов и символов.
3. С историей возникновения отдельных понятий и разделов (ветвей, теорий) математики, с яичным вкладом выдающихся ученых-математиков, с их жизнью и деятельностью.
4. С периодами интенсивного развития математики у разных народов (выборочно).
5. С материалами по истории математики средневекового Ближнего и Среднего Востока и Казахстана.

Ознакомление учащихся с историей математики должно происходить, прежде всего, на уроках математики. Внеклассные занятия дадут возможность углубить и расширить историко-математические сведения, сообщенные на уроке. Сложным, методическим вопросом оказывается вопрос об отборе материала по истории математики и соединение его с программными темами уроков. Здесь нет однозначного ответа. Поэтому учитель должен постоянно иметь достаточно широкий запас сведений по истории математики, чтобы в подходящий момент его использовать. Выбор формы сообщения этих сведений учитель должен сделать в связи с темой, а также в зависимости от степени заинтересованности, математической подготовки и возраста учащихся.

Можно указать следующие **формы введения историзма** в преподавание математики:

1. Историческое отступление на уроке, беседа от 2-3 до 8-10 мин.
2. Сообщение исторических сведений органически связывается с отдельными вопросами теории или задачами.
3. Специальные уроки по истории математики.
4. Математические кружки (можно организовать специальный историко-математический кружок).
5. Историко-математические вечера.
6. Использование стенной газеты или организация специальной математической газеты.
7. Внеклассное чтение.
8. Домашние сочинения и рефераты учащихся.
9. Составление альбомов и альманахов.
10. Работа по собранию «народной математики».
11. Сообщение учителя или заранее подготовленного учащегося на классном собрании.
12. Беседы, лекции и доклады учителя или приглашенных научных

работников.

13. Просмотр специальных научно-исторических кинофильмов, диапозитивов и т.д.

Первая и основная форма введения исторического подхода к преподаванию математики - это эпизодическое сообщение исторических сведений. Преподавание математики (не обязательно каждый вопрос) как и всякой другой дисциплины должно сопровождаться историческими экскурсами, отступлениями, сравнениями, историческими задачами. Эти сведения, как правило, должны занимать немного времени, не должны отвлекать учащихся далеко в сторону от непосредственных интересов проходимой темы. Иногда такие исторические отступления, экскурсы полезно дать в начале прохождения того или иного материала, иногда связать с каким-нибудь определенным вопросом темы, урока или даже задачей, иногда с заключением урока. Такие сведения иногда могут быть ограничены несколькими словам, иногда можно более подробно осветить историю того или иного вопроса, биографические сведения о том или ином математике. Иногда исторические отступления будут занимать 2-3 минуты, иногда им нужно уделить 8-10 минут. Здесь нельзя дать единого рецепта.

Для учащихся биография творца науки и техники притягательна тем, что изучаемые при этом открытия «окрашиваются» конкретным человеческим существованием, а это позволяет влиять на эмоциональную сферу и в определенной степени управлять весьма сложным процессом формирования взглядов и убеждений. Это ценно еще и потому, что большинство учащихся волнует не только само достижение ученого, но и то, как он этого достиг, в силу каких качеств собственной личности.

Изучение творчества ученого при правильной постановке методической работы на уроке становится по существу обсуждением глобальных и вечных по своей значимости проблем бытия и мышления, т.е. мировоззренческих проблем.

Биография и биографический фрагмент будут формировать мировоззрение учащихся и их нравственные позиции, если будут отвечать следующим методическим требованиям:

1. Учитель должен заранее представлять, какие исторические факты и положения целесообразно применять в мировоззренческих целях, о жизни и деятельности каких ученых школьник должен знать; какие представления о взаимодействии науки и человека, индивидуальном творчестве у него должны быть сформированы. Эти вопросы следует определить и конкретизировать уже до их рассмотрения в курсе математики.

2. Имеющийся историко-биографический материал должен быть преобразован и приспособлен к конкретным условиям обучения (особенности школы, класса и самого учителя). Так, чтобы этот материал действительно «работал» в мировоззренческом и воспитательном направлении. Поскольку процесс формирования мировоззрения чаще всего связан с решением других образовательных задач, то применяемый в мировоззренческих целях исторический материал в определенной степени

должен решать и остальные задачи урока.

3. Весь смысл жизни и деятельности ученого в науке, в решении научных проблем, в установлении научных истин. «Несомненно, - отмечал М.Планк-, значение крупного исследователя для мировой культуры находит свое выражение прежде всего в научных результатах, содержащих в его трудах; они являются наиболее-непосредственным и ценным результатом его деятельности». Поэтому вести на уроке математики разговор об ученом - это значит говорить о науке во всех ее проявлениях и о том, в какие взаимоотношения с наукой вступает человек, какие научные идеи и открытия воздействуют на материальную и духовную культуру человека.

4. Формирование представлений у учащихся о научной деятельности, как специфической форме человеческой деятельности, требует показа того, какими качествами должен обладать ученый. Очевидно, он должен быть объективным в познании интересующего его вопроса.Бескорыстным и беспристрастным в проведении научных исследований; ему должны быть присущи бесстрашие и стремление постичь истину, умение преодолевать встречающиеся на его пути трудности, смелость в выводах, какими бы парадоксальными они ему ни казались, стойкость в борьбе с суждениями, предрассудками, устоявшимися мнениями; и наконец, ученый должен быть кристально честным как перед самим собой, так и перед людьми, перед обществом в целом.

5. Обращаясь к жизненным вехам ученого, нет нужды требовать от учащихся запоминания дат его рождения и смерти. Целесообразно указывать на какой период истории приходится его жизненный путь.

6. Излагая на уроке историю науки, учитель должен применять при этом не только элементы научного, подчас формализованного языка, но, главным образом, языка литературного. И от того, насколько богат язык учителя, насколько развиты его навыки владения им, зависят его возможности умело и образно раскрывать на уроках самые различные по содержанию и сложности вопросы творчества ученого. Таким образом, речевая культура учителя в немалой степени содействует созданию на уроке математики благоприятной психологической обстановки без которой процесс воспитания обычно не получается.

Математические сведения по-настоящему будут содействовать формированию у учащихся нравственных взглядов и убеждений, если после знакомства с ними основные положения исторического содержания станут предметом обсуждения и дискуссии. В ходе такого обсуждения могут быть рассмотрены вопросы следующего мировоззренческого содержания.

В какой мере данный математик осознал свою ответственность перед обществом. Какое влияние на исследования ученого оказывали его философские и политические убеждения, какую позицию он занимал в общественных конфликтах своего времени, как он выступал против реакционных идей, псевдонаучных взглядов, против антигуманного использования научных достижений, в какой мере данный ученый содействовал воспитанию граждан своей страны бережливого отношения к природе, человеку, интеллекту?

Рассмотрение таких вопросов на конкретном историко-биографическом материале стимулирует мысль учащихся, побуждает их высказывать собственное суждение, которое в ходе столкновений с мнениями своих товарищей в чем-то видоизменяется, корректируется, оттачивается, приобретая постепенно статус собственного взгляда на обсуждаемый вопрос. В итоге именно таких обсуждений, становящихся по своей сути нравственными упражнениями для учащихся у них вырабатывается свое собственное отношение к известным проблемам человечества и каждого человека в отдельности к добру и злу, миру и войне, личности и обществу, правам и обязанностям и т.д.

1.2. Принципы использования элементов истории математики Ближнего Востока, Средней Азии и Казахстана в обучении математике в школах центрально-азиатских республик

Первым методическим принципом использования элементов истории математики. Ближнего Востока, Средней Азии и Казахстана в обучении математике в школах центрально-азиатских республик является принцип включения этих элементов в общий контекст исторических элементов в курсе математики средней школы. Он означает, в частности, что проблема использования элементов истории математики Ближнего Востока и Средней Азии в обучении математике не может быть решена вне решения более общей проблемы историзма в обучении.

В Концепции становления исторического сознания в Республике Казахстан [58] отмечено, что «восприятие истории не должно сводиться к запоминанию хронологической последовательности произошедших исторических событий, а представлять собой осознание логики исторического процесса... Для негуманитарных специальностей наряду с общими курсами истории предусмотреть изучение курса истории профилирующих предметов».

Второй принцип есть принцип формирования у учащихся научно-правильного, научно-диалектического понимания зарождения и развития математики как науки. Мы должны раскрыть учащимся, что математические понятия изменяются и развиваются на основе внутренних противоречий, на основе практики, с развитием человеческого общества, т.е. раскрыть диалектический путь развития математики. Суть гуманитарного содержания математики в значении курса математики в развитии научно-технической революции, которая представляет человечеству огромные возможности преобразования природы, создания материальных богатств, развитие творческих способностей. Учащиеся также должны видеть взаимосвязь производства и науки. Учащиеся также должны понять, что производство открывает возможности, предъявляет новые требования, создает материальную базу для развития науки, с другой стороны саморазвивается на основе достижений науки. Гуманистическая сущность использования достижения науки, лежащей в основе математики, предполагает доказательство учащимся широкого прикладного использования человеком научных знаний.

Третий принцип состоит в использовании историзма для объяснения логики развития математики. Правильное и разумное объяснение логики развития математики возможно лишь при широком использовании истории науки. Например, 5 и 6 классах изучаются три вида записи дробных чисел: обыкновенные дроби, десятичные дроби и проценты. Почему изучаются эти три формы записи дробных чисел? Почему бы не изучать лишь одно из них? Существуют ли другие формы записи дробных чисел? Почему они не изучаются в школе? На все эти вопросы, которые естественно у пытливого школьника, может дать ответ лишь история математики и в частности, история центрально-азиатской математики.

И так, обучение математике, при правильной его ориентации, раскрывает суть законов общечеловеческой логики, основ рассуждений. Это один из важнейших аспектов гуманизации математического образования.

Четвертый принцип есть использование историзма для создания проблемных ситуаций в обучении математики. В последние годы убедительно была доказана эффективность использования идей проблемного обучения [59]. В основе проблемного обучения лежит создание в процессе обучения проблемных ситуаций, разрешение которых приводит к лучшему усвоению учащимися знаний, умений и навыков. Обычно создание проблемных ситуаций достигается путем постановки перед учащимися каких-то задач-проблем. Однако в ряде случаев более целесообразным способом создания проблемных ситуаций является использование отдельных фактов истории науки. Оно открывает широкие возможности для творческого поиска учителя и развития творческих способностей учащихся. Это и работает на гуманизацию математического образования, так как способствует развитию личности ученика.

Пятый принцип - использование историзма для формирования у учащихся глубокого интереса к математике. Проведенные исследования показали, что целенаправленное ознакомление школьников с историческими материалами определенного содержания из трактатов среднеазиатских ученых IX-XV вв. в тесной связи с изучением программных вопросов на уроках и внеклассных занятиях и решение историко-геометрических задач (с последующим анализом решений и комментариями) стимулирует математическое мышление школьников, формирует у них интерес к истории математики, служит активизации их учебно-познавательной и исследовательской деятельности. Ознакомление учащихся с огромным вкладом центрально-азиатских ученых в развитии математики может несомненно способствовать появлению интереса к математике.

Шестой принцип - использование историзма для воспитания у учащихся чувств патриотизма, национальной гордости и интернационализма. Реализуя идеи гуманистического воспитания учащихся на уроках математики, учитель должен помнить о том, что принцип историзма является одним из наиболее эффективных средств воплощения этих целей в учебном процессе. Так, говоря о зарождении и развитии науки, учитель упоминает ученых разных времен и народов. Тем самым достигаются цели интернационального воспитания, формируется чувство гордости за родную страну, ее культуру. Уже одна эта цель оправдывает систематическое включение кратких исторических сведений в изучаемый курс.

Седьмой принцип - органическое включение элементов историзма в курс математики. Этот принцип означает, что элементы историзма должны быть включены в курс математики средней школы не как дополнительный материал, а в органической связи с изучаемым материалом. Не следует вводить в курс математики какие-то особые темы или разделы, посвященные истории математики. Элементы истории математики привлекаются постольку, поскольку цели и содержание изучаемого материала требует использования элементов истории этого материала. Историческое сознание формируется наукой, образованием, семейным воспитанием, средствами массовой информации литературой, искусством, культурно-просветительской работой, каналами, «по которым идет приобщение человека к историческому разуму, достижениям исторической мысли, к культуре общества в целом», - говорится в Концепции становления исторического сознания в Республике Казахстан. Поэтому главная задача в системе образования: создание в обществе атмосферы знания истории, уважения, соприкосновения с историей.

Восьмой принцип - предпочтительное использование фактов истории математики Ближнего Востока и Средней Азии. Этот принцип относится, естественно, лишь к методике обучения математике в школах центрально-азиатских республик. Он означает, что в условиях работы в этих школах целесообразно при использовании исторических фактов в обучении математике предпочтение отдавать фактам истории центрально-азиатской математики. Например, рассказывая учащимся историю нумерации необходимо особое внимание уделить истории письменной и устной нумерации народов центрально-азиатских республик. Заметим, что в школах России вместо этого излагается история славянской нумерации. Точно также, говоря об истории мер, в школах наших республик необходимо рассказать о системе мер, используемой древними таджиками, узбеками, казахами и т.д. «Предстоит огромная работа по преодолению **моноцентрического мировоззрения**, приписывавшего на протяжении последних веков достижения человеческой культуры и техники. Исключительно европейской цивилизации», - подчеркивает Х. Рахимбекова [60]. Необходимо отметить и существенные проблемы в изложении истории математики. Из нее зачастую исключается главы, посвященные индийской, китайской, среднеазиатской математике. «Выход из создавшегося положения видится в развитии исследований в новом направлении, получившего название этноматематики (создателем его является Бразильский методист Убиратан Д. Амброзио), - говорится в Государственном стандарте среднего образования в Республике

Казахстан, - основные положения этноматематики состоят в том, что в **преподавании математики в школе должны быть учтены культурные особенности народа**. Учет этих особенностей тем важнее, чем меньше возраст детей. Попросту говоря, детей нельзя отрывать от материнской культуры без должных гарантий сохранения их душевного здоровья. Дальнейшие обучение должно средствами математики воспитывать в молодых людях чувство ответственности перед народом, нации, миром в целом. На вершине этой гуманистической пирамиды находится тезис о том, что математика как учебный предмет несет свою долю ответственности за формирование у молодежи светлых человеческих идеалов - духовной красоты, гармонии, ясности и четкости мышления, понимание необходимости приносить добро в мир» [36].

К тому же, в Государственном стандарте среднего образования Республики Казахстан записано, что одна из задач обучения математики является формирование представления о математике как части общечеловеческой культуры, понимания значимости математики для общественного прогресса [36].

«История науки – пишет известный математик Б.В.Гнеденко - обладает огромным воспитывающим воздействием. Это утверждение относится ко всей гамме представлений о воспитании: внушение потребности к труду, ответственности за порученное дело, формирование высокой нравственности, развитие научного любопытства, т.е. желания не только приобрести знания, но и умножить их.

Знакомство с биографиями крупных ученых, с методами их работы дает исключительно много для формирования характера учащихся их идеалов и высоких стремлений. Надо всеми силами помочь учителям глубже и полнее использовать в школе свои знания по истории математики.

Я вспоминаю, с каким трепетом я и мои товарищи по классу выслушивали, к сожалению, редкие рассказы учителей об истории научных достижений, о практическом использовании математики» [61].

Стремясь повысить «коэффициент полезного действия» использования такого материала в воспитательных целях, учитель всегда может вводить его в учебный процесс именно тогда, когда становится явной его учебная целесообразность. Но даже в тех случаях, когда включение соответствующего историко-математического материала в процесс обучения математике вызвано воспитательными целями, требования доминирования образовательной (учебной) функции при определении объема такого материала и конкретного урока его изучения должно соблюдаться неукоснительно.

К примеру, учитель почувствовал, что в одном из его классов эффективность классных занятий заметно снижается из-за отсутствия порядка, организованности, трудолюбия, ответственности ребят за коллективный учебный труд на уроке. Он приходит к выводу: в силу учебной целесообразности необходимо запланировать проведение беседы на темы нравственного воспитания (скажем, на примерах жизни и деятельности великих ученых и государственных деятелей). Эта беседа, проводимая в конце урока, может быть построена примерно так:

- Ребята, все великие люди были величайшими тружениками.

Недаром один из известных изобретателей Томас Эдисон говорил, что талант - это один процент вдохновения и девяносто девять процентов пота. Поэтому не бойтесь трудиться, шаг за шагом побеждайте свою лень и расхлябанность, воспитывайте в себе волю, дисциплину учебного труда, добросовестность при выполнении своих учебных обязанностей.

В заключение отметим, что требование о доминировании образовательной (учебной) функции историко-математического материала сохраняет свою силу и в случаях, когда сведения об истории математики преследуют цели эстетического воспитания. К изучению определенной темы или выработки навыков решения учебных задач подбирается соответствующий материал исторического плана, который может быть представлен учащимся в форме, заключающей большое эстетическое воздействие.

Хотелось бы больше внимание уделить именно **патриотическому воспитанию**, так как, беседуя со своими учащимися, мы обнаружили, что многие из них не смогли назвать ни одного математика прошлого века или современника, а ведь Казахстан и Средняя Азия всегда была богата талантами, в том числе и математиками. Познакомить в пределах возможного с результатами работ Аль-Фараби, Аль-Каши, А. Машанова, арифметикой М. Дулатова, алгеброй К. Сатпаева и других либо на уроке, либо кружке или факультативе - первейший долг учителя математики.

Учителя математики могут использовать в своей работе следующие интересные исторические материалы. Миржакып Дулатов (1885-1935 гг.) - автор первого казахского учебного пособия по математике «Есеп құуралы». Талантливый поэт, просветитель, общественный деятель, один из руководителей национального движения, погибший от репрессий (1937-1939 гг.). Автор сборников стихов «Оян қазақ» (1909 г.), «Азамат» (1913-1914 гг.), первого казахского романа «Бақытсыз Жамал» (1910 г.), пьесы «Балқия» (1922 г.). Но для учителей математики представляет интерес учебное пособие по математике, состоящее из двух частей «Есеп құралы» («Арифметика») изданное в 1922 г. в Ташкенте. Новое издание его вышло в 1924 г. в Оренбурге. В последствии в течение нескольких лет это учебное пособие ежегодно переиздавалось [62].

Говоря об «Учебнике алгебры для казахских школ на родном языке» нельзя не сказать об авторе - К.Сатпаеве. «Три больших дела он оставил после себя: первое - Джезказган, второе - академия наук Казахстана, третье - институт геологических наук. Во всех них живут и работают сотни людей, которые продолжают дело достойного сына казахского народа, ученого, геолога Каныша Имантаевича Сатпаева. Пройдут годы, появятся новые ученые, но надолго сохранится благодарная память о первом руководителе казахской академии наук», - писал в книге Воспоминаний профессор В. С. Коптев-Дюрников. Не скудеет с годами память о К. Сатпаеве. Его именем названы школы и улицы, ледник и вершина в Джунгарском Алатау, минерал, открытый геологами в рудах Каратауского Ванадиевого месторождения, назван сатпаевитом. Установлены стипендии для студентов-отличников геолого-разведочного факультета Казахского Национального технического университета, премии имени К. И. Сатпаева за наиболее выдающиеся работы в области науки. Малая планета, открытая 31 июля 1979 г. крымским астрономом Н.С. Черных, по желанию первооткрывателя названа именем академика К. Сатпаева.

Алгебра Сатпаева - это его первый труд. История создания рукописного учебника изложена в книге М. Сарсекеева «Сатпаев». Приведем выдержки из неё.

Из рукописи Каныша Сатпаева:

«Предлагаемый вам учебник был начат в 1919 году. С тех пор по различным причинам не раз приходилось приостанавливать работу, и закончить его удалось только в 1924 году. Много трудностей встретилось автору в части систематизации математических действий, а также при введении новых терминов...

Эта книга писалась не от безделья. Я писал ее в годы подготовки к вузу, затем в трудную студенческую пору, борясь с разными невзгодами жизни и быта. Поэтому автор мог допустить в своей работе много недостатков и ошибок. Заранее благодарю всех, кто укажет на такого рода огрехи».

Рукопись названа «Учебник алгебры для казахских школ на родном языке». Она состоит из 1642 объемистых страниц. Самый первый научный труд будущего академика.

Но почему он взялся за эту огромную работу? На этот вопрос сам автор отвечает в предисловии: «...Рассмотрим теперь положение казахских школ: ни учебная программа их, ни уровень подготовки учителей не удовлетворительны; причин этому несколько. Не хватает учительских кадров, а самое главное, совершенно нет учебников... Эти недостатки нельзя изжить в один день или в один год. На это нужны годы, самое малое - десять, двадцать. Но значит ли это, что надо ждать того дня, когда люди науки подготовят нам соответствующие учебные пособия?..» Детей в те годы обучали математике кто как. По своему разумению, по примеру того, как его самого обучали в школе, по переводам из русских учебников. Даже единых математических терминов не существовало. Каждый учитель переводил их по-своему, объяснял согласно своим представлениям. А ведь многие из этих наставников сами кончили лишь краткосрочные курсы.

Как только болезнь отступила, Каныш взялся за исполнение своего замысла - дать казахской школе столь необходимый учебник. Основой для него служил учебник, применявшийся в то время в русских школах. Однако руководство Сатпаева не дословный перевод русской алгебры А.П.Киселева. Он целиком переделывает задачи: упрощает их, вводит бытовые, хозяйственные детали из жизни кочевников. Интересна его система образования терминов. Рядом со своими терминами он в скобках указывает их русские параллели. За немногими исключениями его термины вошли в математический обиход. В конце рукописи автор дал словарь новых понятий, употребленных в учебнике; всего их 220.

И еще одно достоинство этого рукописного учебника: в нем автор применил так называемый «международный язык математиков» - латинские буквы, а не арабские, которые в то время употребляли многие учителя. Одним лишь этим нововведением молодой К. Сатпаев предугадал правильное направление казахской математической мысли на много лет. Однако его предложение было оставлено без внимания, лишь в тридцатых годах национальная математическая наука стала повсеместно применять латинские буквы, как это принято в школах во всем мире. Поразительно и то, что еще в далеком 1919 году, в период зарождения казахской научной мысли, в первой же своей самостоятельной исследовательской работе двадцатилетний Каныш Сатпаев, в то время еще не имевший высшего образования, показал глубоко осмысленный подход к задуманному делу. Разве не видны в этом задатки будущего большого ученого?..

К сожалению, по неизвестным нам причинам, этот первый труд К.И. Сатпаева не был издан, сохранился лишь в рукописи. Хотя в Государственном республиканском архиве Казахской ССР сохранилась справка, данная автору учебника 19 июня 1924 года академическим центром Кирнаркомпроса. В ней говорится: «Учебник алгебры на казахском языке одобрен, и принято постановление о немедленной сдаче его в типографию» [63].

К 100-летию К.И. Сатпаева в журнале «Ақиқат» №2 1999 г. вышла статья К. Салыкова «Боладысы да бөлекше той. В ней написано, что в результате неустанного поиска старшего преподавателя АГУ имени Абая, кандидата педагогических наук, специалиста по истории математики В.М. Косанова найден подлинник учебника «Алгебра» К. Сатпаева. Рукописи написаны с помощью:

а) арабской графики (к сожалению сохранилось 592 страницы);
б) латинской графики (объем 40 печатных листов).

Планируется издать в двух книгах учебник «Алгебра» К.И. Сатпаева. Ниже приведем отрывок из этой статьи.

Тағы да бір қуанышты іс Қ.И. Сәтбаевтың құрастырған «Алгебра» оқулықы табылды. Педагогика ғылымдарының кандидаты, АлМУ-дың аға оқытушысы, математикалық білім беру ісі тарихының маманы Б.М. Қосановтың тынымсыз ізденістері арқасында бұл оқулықтың, екі нұсқасы табылып отыр:

1) араб графикасымен жазылған қолжазба (өкінішке орай 592 беті сақталған);

2) латын графикасымен жазылған қолжазба (көлемі 40 баспа табақ).

Осы игілікті істі қолға алып «Алгебра» оқулығын екі кітап етіп шығару көзделіп отыр [64].

Нельзя не ознакомить учащихся с исследованиями известного казахстанского профессора Акжана Жакысбекулы Машанова. Он исследовал

Коран - священную книгу мусульман и установил, что каждый **аят**, каждый **суре** содержат зашифрованную математическую задачу. Выучив в 50-летнем возрасте арабский язык, который, как мы знаем, был основным научным языком стран ислама, А. Машанов изучил наследие Аль-Фараби. Он установил факт, что Аль-Фараби родился в местечке Отрар /Фараб/ - территория Казахстана, что подтверждает **карта** и **записи**, сделанные известным ученым-географом Ибн-Хаукал, современником Аль-Фараби. А. Машанов провел большую научную, исследовательскую работу по духовному возрождению знаменитого нашего земляка Аль-Фараби. Удивительные факты и сведения об Аль-Фараби содержит книга А. Машанова «Аль-Фараби және Абай» [65]. В ней он пишет: «Әр ғылымды жақсы тусіну ушін алдымн оның тарихын жете білу керек. Ол үшін алдымен өзімізден шыққан ірі ғалымдарды білу міндет». То есть, чтобы хорошо понять любую науку необходимо знать ее историю, а для этого, в первую очередь, обязаны знать своих выдающихся ученых.

О великом философе, ученом-энциклопедисте восточного средневековья, оказавшем огромное влияние на развитие математики Абу Наср Аль-Фараби можно узнать и изданных нами книг «История математики» [66] и «Математика тарихы» [67].

И так, в настоящее время в связи с приобретением государственной независимости Республики Казахстан особую значимость имеет патриотическое воспитание. Каждый выпускник школы должен знать свои исторические корни, своих великих предков: биев, акынов, батыров и ученых. Чтобы мог смело сказать: «Я этого гордого племени сын» [68].

1.3 Использование историко-математических сведений для активизации познавательной деятельности учащихся

Методология научного познания, разумеется, не может с одинаковым учебно-воспитательным эффектом применяться к построению каждого этапа, слагающего учебный процесс (среди которых есть также специфично учебные, как проверка домашнего задания, контроль и оценка знаний и т.п.). Но нет сомнений, что в процессе изучения нового учебного материала на уроках математики реализация методологических принципов научного познания является полезной как для успешного изучения курса математики, так и для активизации познавательной деятельности школьников [69]. Сближение школьного учебного процесса с современной математической наукой (предстоящей перед учащимися не просто как совокупность «готовых» знаний, а как исторический результат получения этих знаний) способствует активизации познавательной деятельности учащихся.

Говоря об активизации познавательной деятельности учащихся на уроках математики в средней школе, нельзя не коснуться и основного вопроса философии - отношения мышления к бытию.

Учитель математики с первых же уроков в пятом классе должен в доступной форме ввести учеников в суть этих разногласий и объяснить, что несмотря на нередко крайнюю абстракцию понятий, которыми оперируют математика, тем не менее она тесно связана с явлениями действительного мира; она есть результат отражения и научного обобщения в процессе многовековой практики человечества различных объектов и явлений реальной действительности.

Проводя такую беседу, учитель призывает на помощь историю науки

При ознакомлении учащихся с историко-математическими сведениями нетрудно проследить, что не только развитие уровня производительных сил влияет на круг математических идей общества, но и сама математика воздействует на научно-технический прогресс, поскольку должна отвечать требованиям своего времени.

На протяжении всего периода обучения учитель должен закреплять в сознании учеников эти основополагающие мысли при изучении различных тем курса математики. При этом не только вырабатывается научно-диалектическое мировоззрение, пробуждается и воспитывается устойчивый интерес к предмету, развивается математическое мышление, закладывается основы математической культуры. Преследуя воспитательные цели, учитель способствует математизации научно-технических знаний, усвоенных учениками.

Анализ показывает, что не в каждую историческую эпоху и не при каждом способе жизнедеятельности отдельных племен и народов наука развивалась равномерно и одинаково интенсивно. Оказывались слабость и неразвитость самой науки, влияние религии, неосознанность жизненно важных для людей целей развития науки. Эти периоды представляют интерес для понимания механизмов развития науки и роли отдельных личностей в истории науки, но нас, конечно, больше всего интересуют периоды интенсивного развития науки.

Ознакомление учащихся с историей возникновения отдельных понятий, терминов, знаков, символов, разделов (ветвей, теорий) математики, с личным вкладом выдающихся ученых-математиков, с их жизнью и деятельностью, а также с периодами развития математики у разных народов воздействует на активизацию познавательной деятельности школьников.

Рассмотрение смыслового происхождения математических терминов делает понятным, почему уяснение первоначального смысла нового для учащихся термина почти всегда служит лучшему и прочному усвоению и закреплению учебного материала. Раскрывая этимологию термина, такие пояснения указывают учащимся на практическое происхождение математических понятий, на реальный источник изучаемых ими математических абстракций и тем самым способствует активизации познавательной деятельности школьников.

Лишь в незначительном числе случаев объяснение происхождения математического термина оказывается малополезным для понимания сущности новых понятий. В таких случаях объяснение источников их происхождения может быть опущено.

Однако, как показал наш опыт, учащиеся часто сами задают учителю вопрос о происхождении и смысле нового для них термина. Учителю надо быть к этому готовым. Сам по себе этот интерес учащихся к истории математики, эта искорка развивающейся научной любознательности весьма показательны для тех образовательных, воспитательных и развивающих возможностей, которыми обладает факт включения историко-математических сведений в программный материал.

Практика обучения показывает, что даже самые скупые упоминания о том, что разделение линий на прямые и кривые (или углов - на прямые, острые, тупые) возникло в глубочайшей древности, во времена доисторические, с живым вниманием выслушиваются и отстающими учениками, и отличниками. В результате происходит приобщение школьников к современному пониманию науки как непрерывному процессу получения знаний, явлению интернациональному и историческому. Такое приобщение способно вызвать интерес к обычным учебным упражнениям и заданиям, которыми, оказывается, занимались их сверстники и даже взрослые люди десятки, сотни, тысячи лет тому назад.

Целесообразно, на наш взгляд, включить в учебный материал одну или несколько обобщающих бесед из истории математических знаков и символов - с упором на то обстоятельство, какой трудной была математическая деятельность, когда ученые не применяли математических знаков и символов, и как сильно способствовало их изобретение дальнейшему развитию математики.

Иногда от исторической справки по поводу первоначального смысла нового термина учителю целесообразно перейти к историческим сведениям о возникновении и развитии того или иного раздела (ветви) математической науки. Например, в случае пояснения термина «алгебра», а также о персональном вкладе того или иного ученого с краткой исторической справкой о его жизни, о математической и педагогической деятельности (Фалес, Евклид, Хорезми и др.). Или, например, рассказать о происхождении слова «тригонометрия»

Слово «тригонометрия» состоит из двух греческих слов - «тригонон» - треугольник и «метрайн» - измерять. К введению таких понятий тригонометрии, как синус, косинус, тангенс и т.п., имели отношение ученые Индии, затем Центральной Азии, Закавказья и др. Главной заслугой ученых средневекового Востока было отделение тригонометрии от астрономии, выделение ее в самостоятельную математическую науку, составление очень точных тригонометрических функций (до 1°).

Но такого рода беседы оправданы на уроках только тогда, когда они становятся непосредственной частью изучения учащимися самостоятельных крупных разделов или даже ветвей математики. Например, такие мировоззренческие беседы оправданы на уроке математики в 5 классе в связи с изучением десятичных дробей. На первых уроках изучения систематических курсов алгебры и геометрии в 7 классе, на уроках геометрии, посвященных изучению таких крупных разделов курса, как подобие и гомотетия (8 класс) или тригонометрические функции и тригонометрические формулы (8 класс) и т.п.

Краткие справки о жизни и деятельности ученых-математиков, переходящие при наличии интереса учащихся в развернутые беседы, могут давать также в связи с упоминанием имени этого ученого в учебном тексте (теорема Фалеса, теорема Пифагора и т.п.).

Все это не исключает более широкого знакомства с историко-математическим материалом на различных видах внеклассных занятий.

Ознакомление учащихся с историей возникновения самостоятельных разделов (теорий, ветвей) математики, упоминаемое выше, желательно строить не в виде разрозненных и случайных эпизодов, а в русле восприятия ими всей исторической картины развития, математической науки. Только при этом условии можно успешно решить многие мировоззренческие моменты обучения математике в школе.

Обращаясь от урока к уроку к истории математической науки, можно создать у учащихся представление об особенностях этого развития у разных народов в разные исторические эпохи. Так, знакомя учащихся с периодом зарождения математики, учитель говорит об особенностях исторического развития математики в Древнем Египте и Древнем Вавилоне.

Или, изучая на первых уроках математики в 5 классе тему «Обозначение натуральных чисел», учитель может упомянуть, что древние египтяне считали, так же, как и мы сейчас, десятками, но специальные значки - цифры у них были только для разрядов: единиц, десятков, сотен и тысяч.

Далее, при изучении раздела «Обыкновенные дроби» (5 класс) учитель может упомянуть: «Несмотря на то, что древние египтяне не знали удобного способа записи чисел, они производили арифметические действия не только над натуральными числами, но и над дробями. Правда, они употребляли при счете только дроби с числителями, равным единице» В Древнем Вавилоне научились записывать любые дроби. Например, в древнеегипетском папирусе Ахмеса есть задача: «Разделить поровну семь хлебов между восемью людьми». Мы, решая эту задачу сейчас, нашли бы, что каждому должно остаться по 7/8 хлеба. У древних египтян такого дробного числа не было, и Ахмес записал ответ так: 1/2 +1/4+1/8. (Проверьте арифметически: правилен ли его ответ, - говорит учитель). Опишите, пользуясь этим выражением, как мог египтянин, решая эту задачу практически, нарезать 7 хлебов на 8 равных порций.

Пробудить интерес к изучению предмета, возможно лишь используя весь арсенал педагогических средств. Кроме применения принципа историзма, принимающего в методике обучения математике сквозной характер, в развитии познавательных интересов учащихся большую роль играет использование принципа занимательности.

Решение занимательных задач дает хороший материал для развития смекалки, внимания, наблюдательности и логического мышления. Даже если за внешне занимательной фабулой задачи кроется элементарное решение, такую задачу можно использовать как одно из средств, выявляющих логическую подготовку учащихся V-VI классов к изучению систематических курсов алгебры и геометрии в VII классе.

Занимательные задачи устойчиво поддерживают положительные эмоции детей, и многие учителя математики систематически уделяют им несколько минут урока (чаще всего в конце занятия). Условия коллективной учебной работы в классе позволяют усилить эти эмоции, превратив решение занимательных задач в увлекательное соревнование, захватывающее состязание умов и творческих способностей школьников. Ученики готовы после таких логических и психологических практикумов состязаться и в решении самых обычных учебных задач и примеров, что опытные учителя используют, для организации соревновательной формы учебной работы на уроках и внеклассных занятиях.

Как показывает опыт работы учителей математики, ознакомление с какими-либо занимательными логическими и математическими фактами и задачами способствовало эффективному изучению взаимосвязанного с ними программного материала.

Связь между принципом историзма и принципом занимательности станет еще более очевидной, если учесть, что в ряде случаев историко-математический материал сам облекается в занимательную форму.

Действительно, систематическое упоминание историко-математических сведений на уроках математики должно означать, что учитель признает законным определенный элемент занимательности и развлекательности. Он связан с разного рода историческими курьезами (вроде того, что рождение теории вероятностей с ее многочисленными приложениями в народном хозяйстве, в военном деле и т.п. способствовал анализ шансов выиграть в карты).

Занимательные задачи и занимательные математические ситуации, связанные с содержанием школьного курса математики, с овладением того или иного метода решения задач, с достижением учащимися каждого раздела курса, наиболее эффективны в начальном обучении. Но и более старших классах они могут послужить толчком серьезного и даже вполне научного разговора, помогающего учащимся усвоить содержание школьного курса.

Учитель может и должен включить в урок интересные исторические задачи, раскрывающие красоту математики, исторические сведения, которые будят обостренное внимание, активизируют познавательную деятельность школьника.

Сравнивая различные методы решения задач, доказательств, вычислений и т.п., необходимо рассказать учащимся о нескольких способах решений одной и той же задачи. Нескольких доказательствах одной и той же теории, о том, как при решении одной и той же математической задачи на протяжении веков оттачивалась мысль и в результате поисков выбиралось наиболее простое и остроумное решение. Некоторые из них понравятся школьникам больше, чем другие, и свой выбор они обоснуют примерно так: «Очень простое решение», «Остроумное и изящное доказательство», «Изящное и краткое рассуждение», «Простая и красивая выкладка (вычисление)».

Состояние математического развития учащихся наиболее ярко характеризуется их умением решать задачи. Задачи - это основное средство оттачивания мысли каждого школьника. Конечно, речь идет не об упражнениях тренировочного характера, а о нестандартных задачах, поиск решения которых составляет важное слагаемое доступного детям математического творчества.

Прежде всего, следует учесть, что научиться решать задачи школьники смогут, лишь решая их. «Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их»,- пишет Д. Пойа в книге «Математическое открытие» [70].

Решение любой достаточно трудной задачи требует от учащегося напряженного труда, воли и упорства, которые наиболее сильно проявляются тогда, когда дети заинтересованы задачей. Интересную задачу легче решать, так как она мобилизует умственную энергию.

Поэтому учитель должен подбирать такие задачи, чтобы учащиеся хотели их решать.

Практика показывает, что школьники с интересом воспринимают задачи с историческим содержанием, позволяющие показать тесную взаимосвязь теории и практики.

Еще одним важным фактором успешной работы над задачей является уверенность учащегося в том, что он сможет ее решить. Если задача слишком трудна, то досада школьника от безрезультатных усилий снижает эффективность его мышления и ухудшает возможность дальнейшего обучения. Умело, подбирая задачи, учитель должен дать своим воспитанникам возможность поверить в свои силы возбудить их волю и интерес.

Таким образом, интерес к задаче, желание в ней разобраться и уверенность в том, что она «по силам», являются необходимыми предпосылками для успешного решения.

Известный математик и педагог А.Я. Хинчин писал: «перед учителем математики стоит нелегкая задача - преодолеть в сознании учеников со стихийной неизбежностью возникающее представление о «сухости» формальном характере, оторванности от жизни и практики его науки». Одним из способов решения этой проблемы является использование нестандартных и занимательных задач на уроках математики [71].

Прежде всего, подчеркнем: такие задачи должны быть связаны с изучаемым материалом. Их условия целесообразно формулировать коротко, просто и сопровождать красочными иллюстрациями, которые вызывают положительные эмоции учащихся и экономят время на уяснение данных. В своей практике обычно предлагаем занимательные задачи за 10-15 мин до конца урока, учитывая данные психологов о том, что ученик в состоянии полноценно работать на уроке около 35 мин. Благодаря своей оригинальности такие задачи сами по себе вызывают интерес.

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. Задача из папируса Ахмеса: «Количество и его четвертая часть дают вместе 15. Найти количество».

2. Проверить следующие представления дробей, приведенные в папирусе Ахмеса:

1. $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$

2. $\frac{2}{7} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$

3. $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$

4. $\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$

3. Задача из папируса Ахмеса:
«Приходит пастух с 70 быками. Его спрашивают:
- Сколько приводишь ты из многочисленного стада?
Пастух отвечает:
- Я привожу две трети от трети скота. Сочти!».
(Узнайте, сколько было быков в стаде)

4. Задача Диофанта (III в.).

Найдите три числа, так, чтобы наибольшее превосходило среднее на одну треть наименьшего, среднее было больше наименьшего на одну треть наибольшего, наименьшее на 10 больше одной трети среднего.

5. На памятнике древнегреческому математику Диофанту имеется надпись: «Прохожий! Под этим камнем покоится прах Диофанта, умершего в старости. Шестую часть его жизни заняло детство, двенадцатую - отрочество, седьмую - юность. Затем потекла половина его жизни, после чего он женился. Через 5 лет у него родился сын, а когда сыну минуло 4 года, Диофант скончался». Сколько лет жил Диофант?

Или сведения о личности Диофанта в стихотворении-загадке: Прах Диофанта гробница покоит;

Дивись ей - и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С ней пять лет проведя, сына дождался мудрец;
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.
Отнят он был у отца ранней могилой своей.

Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,

Тут и увидел предел жизни печальной своей.

6. Пришельцы из Китая и Индии - магические квадраты. Магический квадрат третьего порядка (Китай IV в. до н.э.).

Расположите в таблице цифры от 1 до 9 так, чтобы сумма цифр по строкам, столбцам и диагоналям была равна 15. Магический квадрат четвертого порядка (Индия I в. до н.э.). Расположен в таблице цифры от 1 до 16 так, чтобы сумма цифр по строкам, столбцам и диагоналям была равна 34.

7. В гравюре немецкого художника А.Дюрера «Меланхолия» (1514 г.) изображен магический логический квадрат [66].

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

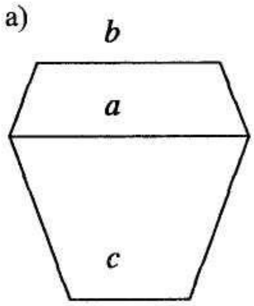
Сможешь ли ты составить магический квадрат?

8. Из «Всеобщей арифметики» Ньютона.

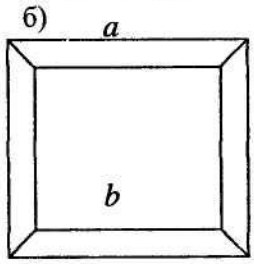
«Даны периметр и площадь прямоугольного треугольника ABC. Найти гипотенузу BC».

9. В древности в Индии впервые появилась простейшая бриллиантовая огранка алмаза - «октаэдр» (рис. 1, в). Сколько карат содержит такой бриллиант, если: a=1,12 см, b=0,6 см, c=0,3 см, α=60°. (На рис. 1, а - вид алмаза сбоку, на рис. 1, б - сверху). Плотность алмаза 3,52 г/см^3, один карат равен 2,18 г.

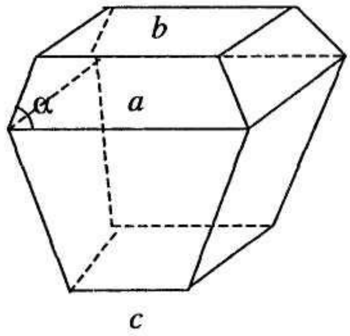
а)



б)



в)



Квадратные уравнения

Квадратные уравнения приведены в хронологической последовательности.

В клинописных текстах Древнего Вавилона (2500лет до н. э) встречаются уравнения

$$x^2 + x = \frac{3}{4} \qquad\qquad x^2 - x = 14\frac{1}{2}$$

В Арифметике Диофанта (Древняя Греция III в.), имеются задачи, решаемые при помощи уравнений. Задача Диофанта найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение 96. (Решите задачу разными способами).

В Древней Индий задачи имели своеобразную стихотворную форму: задача знаменитого математика XII века Бхаскари:

«Обезьянок резвых стая
Всласть поевши развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам...
Стали прыгать, повисая...
Сколько же было обезьянок,
Ты скажи мне в этой стае?»

В трудах ученых Ближнего Востока и Средней Азии алгебра оформилась в самостоятельную ветвь математики. В своем алгебраическом трактате Аль Хорезми даёт классификацию линейным, квадратным уравнениям. Задача Аль Хорезми: «квадрат и число 21 равно 10 корням». Найти корни.

Формулы решения квадратных уравнений по образцу Аль Хорезми в Европе впервые изложены в «Книге абака» (1202 г.) итальянского математика Леонардо Фиббоначи. Из «книги абака»:

$$\frac{36}{10-x}-3=\frac{36}{x} \qquad\qquad \frac{60}{x}-\frac{60}{x+2}=1\frac{1}{2}$$

Встречаются квадратные уравнения и у других математиков средневековья.

Из книги Региомонтана (XV в.)

$$10x=x^2+\frac{100}{27} \qquad\qquad y+\frac{1}{y}=25$$

Из книги «Наука о числах в трех частях» Николая Шюке (XV в.)

$$3x^2+12=30x \qquad\qquad 144+x^2=36x$$

На наш взгляд, задачи с историческим содержанием имеют в общеобразовательной школе большое значение, прежде всего для воспитания интереса к математике. На примере хорошо подобранных таких задач учащиеся будут убеждаться в значении математики для различных сфер человеческой деятельности, в её пользе и необходимости для практической работы, увидят широту возможных приложений математики, поймут её роль в современной культуре. Они вызывают интерес учащихся не только привлечением их любознательности к самой постановке вопроса, но и тем, что решение требует небольшого усилия творческой мысли. Например, приведенные задачи на квадратные уравнения достаточно коротко формулируется, существенно актуализирует сведения из истории математики и приведены в хронологической последовательности. Задача о драгоценных камнях также подстёгивают любознательность учащихся, неожиданно убеждая их в том, что «скучная» формула объёма имеет прямое отношение к ювелирному делу; к тому же, в задаче содержится интересная информация: что такое карат, какие способы огранки драгоценных камней существовали прежде и т.д. Полезные сведения содержатся и в других задачах: например, что такое магические квадраты и т.д.

Некоторые исторические задачи, приведены в изданном нами методическом сборнике «История математики» [66], «Математика тарихы» [67]. Хотелось бы особо обратить внимание на разночтения в условии задачи, решенной знаменитым математиком Карлом Гауссом, будучи ещё девяти летним мальчиком.

Если в книге Г.И.Глейзера «История математики в школе» IV-VI классы, в задаче № 44 стр. 188 дано условие: «Сложить все натуральные числа **от 1 до 100**» и автор делает сноску: «По другим источникам **- до 40, до 50 или до 60**. А в энциклопедическом словаре юного математика: «Сложить все натуральные числа от 1 до 40 включительно». В своей работе мы использовали два вида задачи, учитывая, что способ решения у них – один [72].

На протяжении многих веков три знаменитые задачи древности привлекали внимание выдающихся математиков. В процессе их решения рождались и совершенствовались многие математические методы. Думаем, что будет интересно ознакомить учащихся с ними. И так, классические задачи древности:

- квадратура круга (построение квадрата, равновеликого данному кругу);
- трисекция угла (деление произвольно заданного угла или дуги на три равновеликие части);
- удвоение куба (построение куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба).

1.4 Дифференция обучения школьников - одно из условий реализации гуманизации образования

Дифференциация обучения школьников предполагает углубленное обучение в старших классах, факультативы и кружки по интересам, индивидуальные или групповые занятия как внутри одного класса, так и в межклассных разновозрастных учебных группах.

Одним из факторов гуманизации образования является создание гибких учебных планов и программ по математике, обучение по которым приобретает различную окраску, определяемую строгость изложения, характером задач и приложений.

Характер изложения одних и тех же вопросов в классах физико-математической специализации и в классах гуманитарного профиля различен. Если в физико-математических классах наряду с идейной стороной выступает и строгость изложения, то в гуманитарных классах главенствует идейная сторона, доводимая до учащихся в доступной форме.

Дифференциация обучения математике может осуществляться как через дифференцированное изучение теории, так и (особенно!) через решение задач. Это относится не только к уровневой, но и к профильной дифференциации.

Теоретические задачи играют серьезную роль в дифференциации образования началам математического анализа. Учитель посредством таких задач может дифференцировать уровень в глубину усвоения понятий и их свойств, методов - выделение суждений, построение правильных умозаключений, т.е. развивать логическое мышление учащихся.

В последнее время большие надежды возлагаются на дифференцированное обучение, по мнению многих учителей и руководителей школ оно автоматически ведет к гуманизации образования. Но это не так. Проведенное нами социологическое исследование показывает, что многие родители считают, что дифференциация в их школе, особенно профильная, осуществляется административными методами, оскорбляющими человеческое достоинство их детей. Для того чтобы дифференциация была гуманной необходима строгая добросовестность и гибкость ее осуществления. Использоваться она должна, прежде всего, для формирования познавательного интереса к математике. Хотя обучение должно быть достаточно интенсивным, однако, предъявляемая требовательность не должна оскорблять достоинство ученика.

Рассматривая различные формы и приемы дифференциации, в качестве ведущего приема выделяют **уровневую** дифференциацию. Этот прием должен включать, однако, дифференциацию не только **заданий**, но и **уровней изучения** одной и той же темы, а также уровней самостоятельного поиска решений и, соответственно, помощи учителя в этом поиске [73].

В соответствии с этим в данном методическом пособии мы предлагаем составленную нами разноуровневую самостоятельную работу, содержащую историко-математический материал, а также - разработки уроков известного математика А.Окунева, как пример дифференциации уровней изучения одной и той же темы «Прогрессия». В разработке уроков использован исторический материал [74].

Тема «Прогрессия» (учебник «Алгебра 8» авторов Ш. А. Алимова и других, 1987).

I. План урока будем составлять для сильного, думающего, увлеченного математикой класса, обучающегося в обычной школе.

Итак, класс сильный, ему не надо разжевывать одну и ту же мысль несколько раз. Ребята в постоянном диалоге с учителем, занимаются с удовольствием. Сама математика, сам предмет держат их внимание. Поэтому, с одной стороны, в таком классе легко работать, не надо никого заставлять слушать учителя, решать, думать и т. д. Но, с другой стороны, есть и сложности, особенно если изучается тема простая, а тема «Прогрессии» не содержит особо сложного материала. Как тут быть?

В учебнике сначала рассказано всё об арифметической прогрессии, а затем всё о геометрической. Если идти по пути построения урока, достойного уровня развития детей, соответствующих данной выше характеристике, то можно начать изучение двух тем параллельно. Например, дается определение арифметической прогрессии, приводятся примеры, и тут же рядом записывается определение геометрической прогрессии, составленное по аналогии самими ребятами. Действительно, если есть арифметическая прогрессия, то, наверное, существует и геометрическая прогрессия. И если в первой каждый последующий член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, то нетрудно догадаться, что во второй для получения членов прогрессии надо умножать предшествующий член на одно и то же число, постоянное для данной последовательности.

Затем встает вопрос о формуле любого числа. Тут уж сами ребята догадаются о её структуре и докажут справедливость формулы. Учителю, возможно, придется подсказать лишь, каким методом это лучше сделать.

Уместен будет разговор и о методе математической индукции, хотя бы в качестве информации, что такой существует.

Последним можно рассмотреть характеристические свойства. Предоставить право открытия их самим ребятам.

Всё, кажется, выстраивается логично и интересно, но нельзя забывать, что даже этот круг учеников нуждается в отработке элементарных операций. Поэтому далее разумно включить небольшую, минут на 15, устную работу, направленную на отработку специальных умений по этой теме. Затем решить по одной задаче на характеристическое свойство каждой из прогрессий.

Закончить урок можно решением таких задач:

1. Выписаны две арифметические прогрессии. Если из каждого члена первой прогрессии вычесть соответственно член второй прогрессии, то получится ли снова арифметическая прогрессия?
2. Могут, ли три последовательных члена арифметической прогрессии вместе с тем быть и тремя последовательными членами геометрической прогрессии (прогрессии с неравными членами)? [Ответ: нет.]
3. В двух трехчленных прогрессиях - арифметической и геометрической с положительными членами - одинаковы оба первых члена и одинаковы оба последних члена. В какой из этих прогрессий сумма членов больше? [Ответ: в арифметической, так как $a_2>b_2$]

Однако вместо этих задач можно сделать экскурс в историю. Рассказать о том, что примеры отдельных арифметических и геометрических прогрессий можно встретить еще в древневавилонских и египетских надписях, имеющих возраст около 4 тысячелетий и более, что в Древней Греции еще за 5 столетий до н. э. были известны такие суммы:

$$1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$$

А знаменитая задача о награде, потребованной за изобретение шахмат, встречается впервые у хорезмского математика аль-Бируни (973 - около 1050):

$$2 + 2^2 + 2^3+... + 2^{63} = 2^{64}-1.$$

Несколько слов можно сказать и о бесконечных рядах, которые находят широкое применение, как в теоретических исследованиях, так и в вычислительной практике. Ребятам будет интересно познакомиться с записью известных им функций синуса и косинуса в виде суммы степенных рядов:

$$\mathrm{Sinx} = x - \frac{x^3}{1*2*3} + \frac{x^5}{1*2*3*4*5} - \frac{x^7}{1*2*3*4*5*6*7} + \ldots,$$

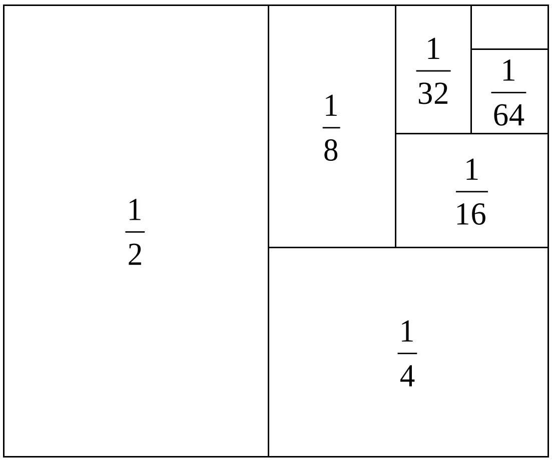
$$\mathrm{Cosx} = 1 - \frac{x^2}{1*2} + \frac{x^4}{1*2*3*4} - \frac{x^6}{1*2*3*4*5*6} + \ldots,$$

где x - радианная мера угла.

Впечатляет и способ вычисления суммы бесконечного ряда

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots,$$

как суммирование частей квадрата со стороной единица (см. рис.): **S=l**.



На этом урок можно закончить.

Два слова о последних задачах. Почему именно они? Потому, что позволяют вникнуть в суть самих определений прогрессий и в то же время сама постановка их не традиционна. Взяты они из прекрасной книги П. Ю. Германовича «Вопросы и задачи на соображение для 8—10 классов», которая, к сожалению, не переиздавалась с 1957 г.

Ну вот, план готов. По нему можно провести хороший урок. Правда, он не записан во всех деталях, не зафиксированы вопросы, которые будут направлять мысль ученика для того, чтобы он провел большую самостоятельную работу, запланированную выше. Молодому учителю продумать их чрезвычайно важно, ибо большой просчет их подготовки к уроку и неудачи в его проведении обычно связаны с тем, что в плане записаны лишь вопросы теории и решены задачи. А придумать на ходу вопросы, направляющие мысль ученика, сложно. Правда, опытному преподавателю порой даже интересно эту работу выполнять импровизируя. Тогда на уроке не ощущается скованности мысли ни ученика, ни учителя. Учитель с готовностью следует за интересными мыслями ребят. Чудо открытия, необычный взгляд на давно привычную, достаточно хорошо изученную ситуацию, радость познания - чаще всего следствие импровизации преподавателя.

«Я не отметил, что в основе этого урока лежит обучение умению анализировать и сравнивать. Если же задумать в качестве стержня урока отработку умения работать с литературой, то можно было бы просто читать учебник, ставя вопросы для размышления во всех сложных местах.

II. План урока по этой же теме для класса шумного, думающего, заинтересованного предметом, но с недостаточно развитой самостоятельностью действий.

Ребята такого класса обычно с готовностью включаются в новую по сути для них работу. Они на самом деле любят учиться, но испытывают тягу к получению быстрых результатов. Однако, как и все школьники, с особым интересом слушают учителя, когда он им рассказывает о них самих: их памяти, внимании, работоспособности. Поэтому именно для этого класса урок, построенный вокруг познания и отработки основных принципов рационального восприятия информации, запечатления информации, концентрации внимания, повторения информации, будет иметь огромный успех. Прекрасный материал для организации такого урока дает книга Ф. Лезера «Тренировка памяти» (М.: Мир, 1979). Попробуем, используя идеи этой прекрасной книги, составить несколько вариантов урока для выбранного нами класса.

Итак, с чего, же начать? Конечно, с выбора цели урока. Но не той пресловутой цели урока, которой требуют от учителя проверяющие, имея в виду приземленное стремление, научить ребят алгоритму выполнения тех или других операций. На самом деле выбор цели урока - крайне необходимый стратегический этап подготовки урока. Без значительной цели хорошего урока не бывает. Учитель овладевает вниманием, мыслями своих учеников, когда стремится, используя материал предмета, рассмотреть проблемы общечеловеческого характера, вплотную связанные с личностью ребенка, когда помогает школьнику самоутвердиться в обществе. Помню вопрос ученика: «Как можно научиться, всё улавливать с первого раза, а потом эти знания применять?» Видите, его волнует сам процесс получения и использования знаний. Пожалуй, можно оттолкнуться именно от этого вопроса и посвятить реализации этой проблемы урок. На материале данной темы можно хорошо показать, как научиться, всё улавливать с первого раза. Вопросом же применения знаний можно заняться при дальнейшем изучении этой же темы.

Урок естественно начать именно с чтения вопроса ученика. Отсюда будет ясна цель работы для каждого присутствующего на занятии. Для включения непроизвольного внимания сработает и чисто житейское сравнение требований к работе на уроке: если он задумывается над такой проблемой, то я-то, почему не размышляю о ней?

Как мы отмечали, класс с готовностью выполняет четкие указания учителя. Этот момент непременно надо использовать. Но не помешает и необычное, не трафаретное начало. Поэтому учащихся можно сразу удивить вопросом: какие анализаторы использует человек при восприятии информации? Наверняка у многих этот вопрос вызовет лишь удивление: «А что это такое?». Прекрасно. Мне это и надо. Дальше можно сказать, что человек при восприятии информации использует анализаторы запаха, вкуса, осязания, зрения, слуха. Но для рационального восприятия информации необходимо знать свой доминирующий анализатор, обычно это зрение или слух. Вот его-то в первую очередь и следует использовать. Но прежде чем использовать, надо выяснить, у кого какой доминирующий анализатор. Для реализации этого я обращаюсь к ученикам:

«Для начала проверьте вашу зрительную память. На доске написано два ряда чисел, сейчас они закрыты. Я открою их на минуту, а вы постарайтесь запомнить и по моей команде запишите в тетрадь. Приготовьтесь к работе. Внимание! Начали!»

На доске записаны числа:

$$6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20;$$

$$-12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12.$$

Проверяем правильность записи.

«Не огорчайтесь, если кто-то ошибся. Возможно, это случайность, сейчас проверим еще раз. На сей раз будут записаны равенства и вам надо будет их запомнить».

Запись на доске:

$$8=\frac{6+10}{2} \qquad 10=\frac{8+12}{2}$$

$$12=\frac{10+14}{2} \qquad 14=\frac{12+16}{2}$$

«Конечно же, вам здесь помогала не только зрительная, но и логическая память.

А теперь попробуем проверить слуховую память. Я прочту одно определение, а вы должны его записать после единственного прослушивания. Сделать это вам будет просто, так как на доске есть зрительный образ того что я сейчас вам назову. Говорить буду медленно, чтобы каждое слово вы успели осознать и привязать к соответствующему зрительному образу.

Итак, слушайте:

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом, называется арифметической прогрессией. Запишите».

После паузы читаю еще раз, и все проверяют запись.

«Не огорчайтесь если кто-нибудь допустил ошибку, видимо, у вас лучше развита зрительная память, зрительные анализаторы, да есть же еще и вкусовые т. д .

Итак, при изучении какой-либо информации необходимо всесторонне и интенсивно использовать анализаторы, и в первую очередь свой доминирующий анализатор (зрение и слух).

Вспомните: те кто безошибочно записал определение арифметической прогрессии, опирался не только на слух, но и на смысл, и на образ и, конечно, использовал и зрение, когда разглядывал записанные на доске примеры арифметических прогрессий. Но я видел, что кое-кто шевелил губами, тихонечко, про себя повторял за мной определение арифметической прогрессии, и его действия были абсолютно оправданны. Проговорить текст устно, стараясь придать ему эмоциональную окраску и определенный ритм - это один из приемов восприятия информации.

До сих пор мы с вами говорили лишь о втором условии рационального восприятия информации. Третье же заключается в том, что вы должны постараться сделать информацию для вас значимой, максимально интересной. Попробуйте начинать чтение любого параграфа со слов: «Интересно, о чем же здесь написано?» Порой же для возбуждения интереса важно понять значение этой информации для вас лично, для вашей работы и учебы.

И последнее. Сформулируем самый первый принцип рационального восприятия информации: необходимо четко и ясно осознать цель вашей работы. Можно просто постараться ответить на вопрос: чего я хочу достигнуть путем восприятия информации?

Сейчас все получение знания по этой проблеме вы сможете применить при самостоятельном чтении § 38 «Арифметическая прогрессия». Что поможет вам лучше организовать восприятие информации этого параграфа?

1. Постановка цели. Какая это может быть цель? Реализовать элементарное любопытство: что люди мыслят под этим понятием, хочу узнать про него всё.

Можно реализовать такую цель: проверить на практике советы по рациональному восприятию информации, которые дал учитель. Для осуществления этой цели подскажу еще один способ организации вашей работы:

а) бегло просмотрите текст параграфа, пропуская примеры;

б) выпишите главные узловые моменты текста,но не целиком переписывая, а коротко озаглавив их, например: определение, формула, свойство и т. д.;

в) прочитайте еще раз, подкрепляя каждое понятие не только примерами, данными в тексте, но и собственными, составленными по аналогии.

2. Использование основного анализатора.

При этом если вам необходимо для лучшего понимания и запоминания проговорить текст, то можно это реализовать с товарищем по парте. Не забывайте самое главное записывать в тетради.

3. «Интерес».

Далее дети читают в своем темпе § 38.

III. План для класса спокойного, тихого, безразличного.

В таком классе добиться реакции даже на самые творческие вопросы трудно. Ученики молчат, равнодушно взирая на учителя, а чаще всего спокойно размышляют о чём-то своем, пустыми невидящими глазами глядя в сторону учителя. В учениках такого класса чувствуется как бы покорность кому-то более сильному, загнавшему сюда их не по доброй воле, и в то же время протест: мы пришли, но ты нас не тревожь.

О, как необходимо учителю именно в таком классе быть профессионалом! Улыбка, очаровательная улыбка, теплый взгляд, каким смотрит мастер на самых лучших, самых способных своих учеников. Речь учителя, его вопросы должны быть приподнято-торжественными и в то же время деловыми, четко требующими подчинения всем его требованиям. На таком уроке учителю необходимо следить за своим голосом, мимикой. Каждая попытка ученика дать ответ на вопрос, сама попытка подумать в нужном направлении не может остаться не замеченной учителем. Но даже при выполнении всех этих условий класс необычайно трудно, как тяжело груженый поезд, включить в необходимый режим работы. Обычно в таком классе много слабых, но добросовестных учеников. Они преданно смотрят на преподавателя, поддерживают его всё понимающим взглядом, но часто на поверку оказывается, что учитель работал впустую, особенно если отобрал для урока слишком большой кусок материала, излишне насыщенного информацией. Отсюда вывод: лучше взять небольшой объем информации, но глубоко его изучить. В результате этот урок вы выиграете. Но если руководствоваться высказанным советом и на следующих уроках, то может возникнуть опасность отсутствия понимания у ребят темы в целом. Следовательно, нужны обобщающие уроки, связывающие всю информацию воедино.

Итак, начнем сочинять вариант урока для этого класса, руководствуясь соображениями, высказанными выше.

«1. Откройте тетради. Начнем урок с того, что я продиктую несколько членов последовательности, а вам надо продолжить ее, написав еще три члена, осознав предварительно закон, по которому она составлена.

1) 6, 8, 10 ...;	4) -12, -9, -6,...;
2) 25, 21, 17,...;	5) 4, $4\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$,…;
3) 7,9,11,...;	6) 3,6,12,....

2. Назовите последовательность, которая отличается от всех остальных. Постарайтесь сформулировать общий закон, по которому составлены все остальные последовательности, кроме последовательности, выделенной

вами.

3. Подумайте, относятся ли к этому же классу такие последовательности:

1) $\sqrt{2}$, $\sqrt{2-3}$, $\sqrt{2-6}$ …; 3) $a_n=3-4n$;

2) 1,7; -0,9; -0,1,...; 4) $a_n = \frac{n+1}{2}$.

4. Вводим определение арифметической прогрессии. (Вводится.)

5. Запишите последовательность:

1,6, 11, 16, a_5, ..., a_7, ;.., a_{10}, a_{11}, ... Какие числа должны стоять вместо a_5, a_7, a_{10}, a_{11}?

6. Известно, что та последовательность, которую мы сейчас с вами запишем, - арифметическая прогрессия и задана она только двумя членами. Надо написать, чему равно a_n.

а) 1,6,.... a_n в) 1, ...,21,.... a...;

б) 1,..., 11,..., a_n; г) a_1, a_2,.... a_n.

7. Записываем формулу любого члена арифметической прогрессии.

8. Читаем § 38 «Арифметическая прогрессия» (с. 145-149), где дано определение, формула любого члена и разобраны задачи.

9. Придумайте вместе с соседом по парте задачи, аналогичные задачам текста учебника и решите их».

В учебнике разобраны следующие задачи:

№ 1. Доказать, что последовательность, заданная формулой a_n=1,5+3n, является арифметической прогрессией.

№ 2. Найти 20-й член арифметической прогрессии, если a_1=l и d=4.

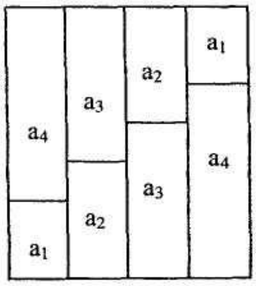
№ 3. Найти формулу n-го члена арифметической прогрессии:

6,11,14

№ 4. Число 99 является членом арифметической прогрессии: 3,5,7,9,.... Найти номер этого члена.

№ 5. В арифметической прогрессии a_8=130 и a_{12}=166. Найти формулу n-го члена.

Можно использовать в изучении темы «Арифметическая прогрессия» следующие домашние заготовки. Например, изучение вопроса о сумме n первых членов арифметической прогрессии в VIII классе можно начать с рассказа ученицы: «Примерно двести лет тому назад в одной из школ Германии на уроке математики учитель предложил, ученикам найти сумму первых 100 натуральных чисел. Все принялись подряд складывать числа, а один ученик почти сразу же дал правильный ответ. Имя этого ученика Карл Фридрих Гаусс. Впоследствии он стал великим математиком. Как удалось Гауссу так быстро подсчитать эту сумму?» Учитель предлагает учащимся поискать решение этого упражнения, подумать, как проще и удобнее выполнить его. Постепенно учащиеся с помощью учителя находят правильное решение: (1+100)*50=5050. Затем выясняется, что последовательность 1; 2; 3; ...; 100 есть частный случай арифметической прогрессии и выводится формула для суммы n первых членов арифметической прогрессии, если n - четное число. После этого учитель дает геометрическую интерпретацию выведенной формулы на примере четырех членов. На доске появляются рис. 1 и запись к нему.



$$a_1+a_2+a_3+a_4=(a_1+a_4)+(a_2+a_3)=$$
$$=2(a_1+a_4)=\frac{a_1+a_4}{2}*4$$

На дом указано задание: вывести формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии при n - нечетном.

Или: Задача очень непроста:
Как сделать, чтобы быстро
От единицы и до ста
Сложить в уме все числа?
Пять первых связок изучи.
Найдешь к решению ключи!
1+100=? 2+99=? 3+98=?
4+97=? 5+96=?
Давным-давно один мудрец сказал,
Что прежде надо
Связать начало и конец
У численного ряда.

1. 5 Организация самостоятельной работы учащихся на основе использования историко-математических материалов

Высшей формой активности и сознательности, учащихся в процессе учения является познавательная самостоятельность. В теории обучения выделены признаки познавательной самостоятельности: стремление и умение самостоятельно мыслить; способность ориентироваться в новой ситуации, находить свой подход к решению новой задачи; желание понять не только усваиваемые знания, но и способы их добывания; критический подход к суждению других; независимость собственных суждений.

Л.С. Выготским сформулировано положение о двух уровнях умственного развития ребенка. Первый уровень - актуального развития - наличный уровень подготовленности ученика, характеризующийся заданиями, которые ученик может выполнить вполне самостоятельно. Второй - зона ближайшего развития - обозначает ту предметную деятельность, которую ученик не может выполнить совершенно самостоятельно, но с которой он справляется с небольшой помощью. Здесь заключается важная мысль, что уровень развития ребенка - понятие динамичное, что предметная деятельность, выполнявшаяся сегодня учеником с помощью учителя, завтра будет выполняться им самостоятельно [75].

Мы считаем чрезвычайно важным обеспечение перехода предметных умений из зоны ближайшего развития на уровень актуального развития.

Необходимо так конструировать учебные ситуации, чтобы ученики сами овладели системой математических знаний, умений и навыков. Если ученик начал действовать самостоятельно, он непременно испытает яркие положительные эмоции, и тогда у него возникнет потребность в осмыслении наблюдаемых явлений. Стимулом к рождению такой потребности является создание учителем системы самостоятельной работы учащихся в процессе обучения их математике с учетом требований принципа историзма. Нам, прежде всего, необходимо отметить те ее виды, которые имеют наибольшую эффективность.

Под самостоятельной работой мы понимаем такую работу, которую учащиеся выполняют без непосредственного участия учителя, но по его заданию, под его наблюдением и руководством, в специально представленное для этого время. В учебном процессе можно выделить следующие виды самостоятельной работы учащихся:

- работа с учебной и справочной литературой;
- разнообразные формы работы, связанные с решением задач;
- лабораторно-практические работы;
- фронтальный эксперимент с элементами исследования;
- работа с раздаточным материалом;
- работа с различными схемами и графиками;
- рецензирование ответов своих одноклассников;
- наблюдение за опытами;
- формулировка выводов.

В структуру деятельности учителя по моделированию методической системы входит выбор средств обучения и, в том числе, самостоятельной работы с источниками сведений, которые содержат информацию:

- о начале развития данного учения;
- об открытии отдельных математических законов, правил;
- об установлении связи между ранее открытыми законами, правилами;
- о математической теории, возникшей в то или иное время;
- об открытии явлений, подтверждающих теорию;
- об открытии явления, опровергающего ту или иную теорию;
- об установлении соответствия между величинами;

- о создании новых установок, приборов и планах экспериментов;
- о новых направлениях в математической науке.

Известно, что в учебном процессе всегда можно выделить следующие этапы:

1.Приобретение новых знаний;

2.Овладение теми или иными познавательными умениями и навыками;

3.Применение на практике полученных знаний и умений;

4.Закрепление полученных знаний и умений.

Поэтому система самостоятельной работы при реализации принципа историзма может иметь следующую структуру:

При приобретении новых знаний

1. Наблюдение за историческими опытами, проводимыми учителем с последующей формулировкой выводов из них.
2. Работа с текстом учебника или учебного пособия, или другого источника на печатной основе с целью:
   а) изучения математических теорий, законов, правил и др.;
   б) изучения сущности математических закономерностей в историческом его познании;
   в) изучения вопроса о возникновении и развитии той или иной математической теории;
   г) знакомства с историей открытия для исследования математических закономерностей, правил;
   д) систематизации круга математических формул, изучаемых определенной математической теорией с учетом понимания ее необходимости в истории развития науки.
3. Проведение опытно-экспериментальных, измерительных работ на местности, для:
   а) исследования явления в различных условиях в их хронологической последовательности с целью выявления его сущности;
   б) установления связи между явлениями, используя приборы и приспособления, соответствующие эпохам их испытания;
   в) установления математических закономерностей.
4. Работа с раздаточным материалом:
   а) при изучении эволюции математических приборов и инструментов по фотографиям подлинников и макетов из музеев;
   б) при сравнении результатов исследований (таблицы, рисунки и схемы), полученных в различные исторические эпохи;
   в) при изучении свойств математических фигур.
5. Самостоятельная работа по решению задач с историческим содержанием:
   а) при знакомстве с единицами измерения величин, использовавшихся в истории науки по адаптированным текстам с оригиналов;
   б) при проверке правильности утверждений, высказанных классиками.

В процессе выполнения этого вида самостоятельной работы учащиеся также знакомятся с именами ученых, в силу определенных причин не упоминающихся в учебниках и пособиях. Учащиеся узнают о их роли в развитии науки, их личных качествах, при этом у них формируется представление об интернациональном характере науки и о закономерностях ее развития.

Следующая группа самостоятельной работы учащихся связана с овладением учащимися умениями и навыками при обучении их приемам и способам познавательной деятельности. В своем составе она имеет следующие компоненты:

1. Лабораторно-практические работы:
   а) сборка установок и проведение экспериментов по предлагаемым схемам, которые встречаются в научной и исторической литературе, а также изображенных в работах деятелей науки и искусства;
   б) изготовление макетов исторических математических установок, приборов и приспособлений, имеющих историческое значение в науке;
   в) экспериментальная проверка закономерностей, сформулированных классиками математической науки с последующим сравнением полученных результатов;
   г) построение графиков и сравнение с их историческими аналогами;
   д) моделирование процесса изучения явления и проверка модели процесса на примере исторически осуществленного исследования;
   е) выполнение заданий по изучению вопросов истории математики и деятельности ее творцов, по обнаружению общих этапов их научно-исследовательской деятельности и их отношение к эксперименту и теории.
2. Решение задач с историческим содержанием:
   а) при закреплении умения работать с дополнительными источниками информации: справочниками, схемами, рисунками и чертежами;
   б) при проверке правильности построения моделей процессов и явлений, которые были предложены в истории науки;
   в) при проверке правомерности построения аналогий при описании тех или иных математических закономерностей.

Как результат обучения реализации исторического подхода учащиеся должны показать на практике способность применять эти знания, что может быть выявлено в следующей группе самостоятельных работ:

1.В объяснении демонстрируемых учителем явлений, используя анализ исторических опытов, опираясь на современные представления об этом явлении.

2.В выполнении индивидуальных заданий по применению исторического подхода при изучении программного материала по математике, в раскрытии закономерностей в исследовании изучаемых явлений.

3.Выполнение контрольных работ по решению задач.

4. В подготовке и участии в проведении учебных конференций, семинаров и других учебных занятий, связанных с изучением вопросов истории науки:

а) рецензирование ответов и выступлений одноклассников, оценка точности в изложении исторических фактов, анализ с точки зрения научности в формулировках, оценка обобщения излагаемого материала и т.п.;
б) написание рефератов, текстов докладов и выступлений;
в) изготовление средств наглядности: макетов, приборов, установок и приспособлений на занятиях кружка или в домашних условиях;
г) подборка литературы по вопросу исторического развития того или иного раздела математики.

5. Выполнение лабораторно-исследовательских работ с целью воспроизведения аналогичных исследований в истории математики, и анализ их учениками с позиции современных научных представлений.

Поскольку практическое применение знаний связано с их закреплением в многократном повторении, то типы самостоятельной работы будут отличаться только формой и содержанием исторических сведений.

Самостоятельная работа учащихся выполняет, как правило, функцию закрепления нового материала, совершенствования знаний, умений и навыков учащихся.

Известный методист-математик Г.Г. Левитас пишет: «...Однако закрепление бывает разное: воспроизводящее (репродуктивное), тренировочное и творческое. Воспроизводящее закрепление - это решение учащимися задачи, аналогичной той, которую на их глазах решил другой человек. Варьироваться при этом могут лишь несущественные признаки. Например, если учитель показал, как решается квадратное уравнение (а ученики переписали решение в тетради или просто следили за решением), а затем дал им решить другое квадратное уравнение по этому образцу, то решение второго уравнения - воспроизводящее закрепление материала. Тренировочное закрепление - это решение задач, аналогичных тем, которые ученики уже решили сами. Оно служит для выработки прочных навыков и вполне отвечает своему названию.

Творческое закрепление - это решение задач, с которыми ученики еще не встречались. Оно требует по-новому распорядиться тем багажом, который ими накоплен.

Существенно, что одна и та же задача для одних учеников окажется незнакомой, т.е. процесс ее решения будет для них творческим, а для других явится простой тренировкой.

Пусть, например, нужно найти расстояние между концами двух взаимно перпендикулярных диаметров окружности с радиусом 5 см. Пусть эта задача дана после первоначального закрепления теоремы Пифагора. Один ученик может подумать, что эта задача «не на тему», так как, взглянув на чертеж, не обнаружит, на нем ни одного треугольника, а ведь теорема Пифагора о треугольниках. Для такого ученика решение этой задачи будет связано с преодолением стереотипа, т. е. окажется творчеством. Друг ой же ученик, имеющий опыт решения задач, просто начнет с того, что соединит концы диаметров отрезком. Его опыт подскажет ему, что если нужно найти расстояние между двумя точками, то бывает очень полезно эти точки соединить отрезком. После этой естественной для него операции задача сразу становится «на тему», и ученик быстро доведет ее до конца. Для него это - тренировочное закрепление теоремы Пифагора.

Самостоятельные работы учащихся бывают различными по средствам осуществления. Возникают следующие требования к этому важному этапу урока.

1.Проводить самостоятельную работу фактически по каждому вопросу программы. Всякий раз, когда учитель отказывается от проведения самостоятельной работы по тому или иному вопросу программы, он должен точно знать, почему он так поступает. Нужно помнить, что не бывает обучения без собственной целенаправленной деятельности ученика. Она может, правда, протекать в скрытой форме. Однако как раз по математике такая внутренняя деятельность, не поддержанная внешней, редко бывает успешной.

2.Различать первоначальные этапы закрепления (воспроизводящее и тренировочное) от закрепления творческого. Не приступать к творческому закреплению, если есть сомнение в подготовленности к нему учащихся.

3.Проводить творческое закрепление по вариантам разной трудности, чтобы оно было творческим для каждого и вместе с тем не было ни для кого чрезмерно трудным» [76].

Нам близок подход Левитас Г.Г. к определению функции самостоятельной работы, а также требования к этому важному этапу урока. Нами составлена разноуровневая самостоятельная работа с использованием историко-математического подхода для организации творческого закрепления. Ученик, правильно выполнивший задания первого уровня, приступает к решению задач следующего уровня.

Тема. Натуральные числа

Разноуровневая самостоятельная работа, содержащая историко-математический материал.

I уровень

1. Прочитайте предложение про следующих выдающихся поэтов: Фирдоуси жил в X веке, Навои в XV, Махтумкули в XVIII, Абай в XIX, Токтогул в XX веке.
2. Обозначьте с помощью римских цифр месяцы с января по декабрь.
3. Прочитайте. Кто-то вычислил, что объём знаменитой пирамиды Хеопса в Египте равен 2678257 м^3, отсюда можно вывести, что её вес составляет 7231294 т.
4. Прочитайте. Длину окружности земного меридиана впервые определил греческий учёный Эратосфен, живший в 276-196

годах до н.э. По его вычислениям она равна 39375 км. По современным данным длина земной окружности равна 40850 км.

5. Из приведенных ниже примеров, выясни, можно ли складывать по разрядам числа, заданные римскими цифрами:

1. $\begin{array}{r} IX \\ + \\ VI \\ \hline XV \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} VII \\ + \\ VII \\ \hline XV \end{array}$

6. Из приведенных ниже примеров выясни можно ли вычитать по разрядам числа, заданные римскими цифрами:

1. $\begin{array}{r} XI \\ - \\ VII \\ \hline IV \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} XIX \\ - \\ III \\ \hline XVI \end{array}$

7. Запишите годы с помощью арабских цифр Абу Наср Аль-Фараби, названным вторым Аристотелем, родился в 70 годы IX века и умер в 50 годы X века.

8. Если правильно найдешь частные отделения и расположишь их в порядке возрастания, то прочтешь имя знаменитого математика, астронома и философа Востока, жившего в X-XI веках:

Р 6300:28 И 31108:44
У 6363:21 Б 128:2
И 7344:34 Н 22220:55

9. Сравните числа, записанные римскими цифрами:
1.M и D 2. IV и VI 3. XCVIII и C 4. XXI и IX

II уровень

1. Величайший математик древности Архимед погиб в возрасте 75 лет во время осады Сиракуз в 212 г. до н.э. определить год рождения Архимеда.

2.Заполните таблицы:

а) Запиши арабскими цифрами:

VII	IX	XIX	XXVII	XX	XV	MMC	XL

б) Запиши римскими цифрами:

3	12	28	39	69	101	700	1988

3.Выполните действия:

X-VII	VII-IV	XIII-V
X-VII	XIX-X	XII-VI

4. Выполните деления:

XII:IV	XVIII:IX	XXV:V
X:II	IX:III	XXX:VI

5. Великий учёный средней Азии Абу Райхан Бируни родился в 973 году, а греческий ученый Архимед в 287 г. до н.э. Кто из них родился раньше и на сколько лет?
6. Карл Гаусс (XVIII век) - знаменитый немецкий математик, названный современниками «Королём математики», еще в детстве обнаружил выдающиеся способности. Когда он учился в начальной школе, то быстро выполнил следующую задачу: сложить все натуральные числа от 1 до 100: 1+2+3+...+100.

Попробуйте вычислить сумму всех натуральных чисел от 1 до 100.

7. Дата 5 мая 1955 года может быть записана так: 5.5.55 сколько раз в течении XX столетия встречаются даты, которые можно записать так же с помощью лишь одной цифры?
8. Задача из папируса Ахмеса: «У семи человек по семь кошек, каждая кошка съедает по семь мышей, каждая мышь съедает по семь колосьев, из каждого колоса может вырасти по 7 мер зерна. Как велики числа этого ряда и их сумма?»

III уровень

1. Найдите сумму всех натуральных чисел:

а) от 1 до 120 б) от 1 до 230

Примечание: сумму чисел найдите таким же способом, как находили сумму всех натуральных чисел от 1 до 100 в задаче, предложенной К.Гауссу.

2. По восточному стилю название годов следуют в таком порядке:

1 - мышь, 2 - корова, 3 - барс, 4 - заяц, 5 - дракон, 6- змея. 7 - лошадь, 8 - овца, 9 - обезьяна, 10 - курица, 11 - собака, 12 - свинья. Для того чтобы определить название некоторого года, сначала от порядкового номера вычтем 3 и результат делим на 12. Тогда остаток указывает на порядковый номер названия года. По этому способу определим, как называется свои год рождения и год рождения близких и знакомых.

3. Сможешь ли ты найти ошибку в примере, записанном с помощью римских цифр. Можно переставить только одну палочку.

Сколько способов можно найти?

X+III=XI   XI-II-VII   VI-IV=IX   VI-IV=XI

4. Одного аксакала в год лошади спросили, сколько ему лет. Он ответил: «Я родился в год барса, и я прожил 6 циклов по нашему летоисчислению». Определите возраст аксакала.

Пояснение: Число ноль ставим в год лошади, а затем число, соответствующее году барса, умножим на 6 циклов (12х6) и сложим их.

5. По расчетам великого астронома Востока Улугбека (1394-1449 гг.) в году 365 дней 6 часов 9 минут 51 секунд. Округлив число дней в году до целого числа, определите количество дней в високосном году (високосный год встречается через каждые четыре года).

Историческая справка: Мухаммед Тарагай Улугбек (1394-1449 гг.) - правитель Самарканда, внук Тамерлана, один из образованных людей своего времени, выстроил в Самарканде знаменитую обсерваторию, оборудованную по последнему слову техники.

6. Дана старинная русская задача:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

Решите задачу устно.

7. Задача Алькуина: «Собака гонится за кроликом, находящимся в 150 футах от неё. Она делает прыжок в 9 футов каждый раз, когда кролик прыгает на 7 футов. Сколько прыжков должна сделать собака, чтобы догнать кролика?»

Традиционные уроки повторения могут стать средством активизации творческой деятельности учащихся. В процессе повторения подбираются задачи, не входящие в стабильный учебник, с помощью которых можно показать разнообразное применение одной и той же теоремы.

Интересные задачи на разнообразное применение теоремы Виета при организации уроков повторения курса алгебры предлагает учитель математики М.Н. Зенина [77] (г. Мурманск):

Несколько слов об организации повторения. Перед тем как предложить учащимся задачи, нужно повторить в классе формулировку теоремы Виета. Лучше всего сделать это в стихах. Ученики XI класса с таким же удовольствием слушают знаменитое стихотворение о теореме Виета, с каким они декламировали его еще в VII классе.

По праву достойна в стихах быть воспета
О свойствах корней теорема Виета.
Что лучше, скажи, постоянства такого:
Умножишь ты корни - и дробь уж готова?
В числителе **c**, в знаменателе **a**.
А сумма корней тоже дроби равна.
Хоть с минусом дробь, что за беда!
В числителе **b**, в знаменателе **a**.

Желательно вызвать к доске одного ученика и предложить ему записать символами то, что сказано стихами. Только после того, как теорема повторена в словесной форме и записана символически, класс приступает к решению задач.

Первые четыре из них позволяют повторить теорему уже при непосредственном применении и попутно вспомнить основные формулы сокращенного умножения. В задании 5 теорема сначала совсем не ожидается. Тем интересней оказывается встреча с ней в далекой от нее теме «Логарифмы». В следующей задаче теорема Виета оказывается уже меньшей неожиданностью, но представление корней уравнения в виде значений тригонометрических функций придает новые краски всему повторению. Задача 7 привлекает тем, что приводит к двум различным прогрессиям. Вообще в ряде заданий учащимся надо быть внимательными, чтобы не потерять второй ответ. Заключают коллекцию задания, в которых требуется решить системы уравнений. Здесь также теорема Виета прячется то за свойствами степеней, то за особенностями квадратных трехчленов [78,79,80].

Задания:

1. Не решая уравнения x^2-3x-10=0, вычислите сумму кубов его корней.

Решение. Пусть x_1 и x_2 - корни данного уравнения. Выполним преобразования суммы кубов и подставим диктуемые теоремой Виета значения суммы и произведения корней:

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=3((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=3*(9+30=117)$$

2. Корни уравнения ***x^2-bx-b=0*** таковы, что $x_1^3+x_2^3+x_1^3*x_2^3=75$ Найдите b.

Решение. По теореме Виета ***x_1+x_2=b,*** ***x_1*x_2=-b.***
По условию

$$x_1^3+x_2^3+x_1^3*x_2^3=(x_1+x_2)-3x_1*x_2*(x_1+x_2)+x_1^3*x_2^3=75$$

т.е. ***b^3+3b^2 -b^3=75.*** Значит, b=±5.

3. Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $3x^2+14x-14=0$. Установите, больше или меньше 1 значение дроби:

$$\frac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2}{4x_1x_2^2+4x_1^2x_2}$$

Решение. Данное в условии выражение легко привести к виду

$$\frac{3(x_1+x_2)^2-x_1x_2}{4x_1x_2(x_2+x_1)}=\frac{3(-14/3)^2-(14/3)}{4(-14/3)^2}=\frac{(14/3)(14-1)}{4(14/3)^2}=\frac{13*3}{14*4}\prec 1$$

4. При каком значении параметра а корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+3x+a=0$ удовлетворяют неравенству $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+a\succ 0$

Решение. Если уравнение имеет корни, -то, значит **9 - 4a≥0**. Отсюда **a≤9/4**. Из данного в условии соотношения для x_1 x_2, а имеем:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+ax_1x_2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+ax_1x_2}{x_1x_2}=\frac{9-2a+a^2}{a}$$

Неравенство a^2 -2a + 9 > 0 верно при любом а. Значит, $a\in(0;9/4]$

4.Вычислите без помощи таблиц Ig2 и Ig5, зная, что lg2*lg5=0,2104.

Решение. По свойству логарифмов lgl0=lg2+lg5=l, по условию lg2*lg5=0,2104. Значит, если уравнение x^2-x+0,2104=0 имеет корни x_1 и x_2, то x_1=lg2, x_2=lg5. Решая составленное уравнение, находим: x_1=0,6995, x_2=0,3050.

6. Чему равна сумма углов α и β, если tgα и tgβ являются корнями уравнения $6x^2$-5x+1=0?

Решение. Воспользуемся формулой тангенса суммы

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha*tg\beta}=\frac{5/6}{1-(1/6)}=1$$

$$\alpha+\beta=45^\circ+180^\circ\kappa,\kappa\in Z$$

7. Сумма десяти первых членов арифметической прогрессии равна 140, а произведение a_2 на a_9 равно 147. Найдите прогрессию.

Решение. Составим систему в соответствии с условием задачи:

$$\begin{cases}(a_1+a_{10})*10=280,\\ a_2*a_9=147.\end{cases}\qquad(1)$$

По свойству арифметической прогрессии $a_1+a_{10}=a_2+a_9$.

Тогда систему (1) перепишем иначе:

$$\begin{cases}a_2+a_9=28,\\ a_2*a_9=147.\end{cases}$$

Теперь можно воспользоваться теоремой Виета и составить уравнение x^2-28x+147=0, которое имеет два корня: x_1=21, x_2=7. Если предположить, что a_2=21, a_9=7, то получится убывающая арифметическая прогрессия 23, 21, 19, ... Если же считать, что a_2=7, a_9=21, то придем к возрастающей арифметической прогрессии 5, 7,....

8. Длины катетов некоторого прямоугольного треугольника являются корнями уравнения, найдите радиус r окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение. Пусть **S** - площадь данного треугольника, а **P** - его периметр. По условию 2S=x_1 *$x_{2,}$

$$P = x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 3 + \sqrt{(x_1 + x_2) - 2x_1x_2} = 3 + \sqrt{9-2} = 3 + \sqrt{7}$$

Воспользуемся равенством 2S=Pr, отсюда

$$r = 2S / P = x_1 * x_2 / \left(3 + \sqrt{7}\right) = 1/\left(3 + \sqrt{7}\right) = \left(3 - \sqrt{7}\right)/2$$

9. Решите систему

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим уравнение z^2-5z+4=0. Его корни z_1=4, z_2=l. Если 2^x=4, 2^y=1, то получаем первое решение (2; 0). Если 2^x1, 2^y=4, то имеем второе решение (0; 2).

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(x+1)(3x+5y) = 144, \\ x^2 + 4x + 5y = 24. \end{cases}$$

Решение. Данную систему приведем к виду

$$\begin{cases} \left(x^2 + x\right)(3x+5y) = 144, \\ \left(x^2 + x\right) + (3x+5y) = 24. \end{cases}$$

Введем обозначения x^2+x=t_1 3x+5y=t_2 Тогда t_1 и t_2 равны корням уравнения t_2 - 24t +144 = 0, которое имеет два равных корня 12 и 12. Значит, выполняется система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + x = 12, \\ 3x + 5y = 12. \end{cases}$$

а исходная система имеет два решения (3;0,6),(- 4;4,8).

Тесты по истории математики

Тест№1

1. Период создания математики переменных величин
   A) 18 в.
   B) 17 в.
   C) 14 в.
   D) первая половина 15 в.
   E) вторая половина 16 в.

2. Период элементарной математики
   A) с 3-4 в. до 9 в.до н.э.
   B) с 3-5 в. до 16 в.
   C) с 6 по 8 н.э.
   D) с 3 по 10 н.э.
   E) 12 век н.э.

3. Математическое наследие Вавилона
   A) клинопись
   B) иероглифы
   C) латинская письменность
   D) орхонская письменность
   E) арабская письменность

4. Сколько задач собрано в папирусе Ринда
   A) 18
   B) 25
   C) 85
   D) 76
   E) 81

5. Великий мыслитель, ученик Сократа
   A) Аристотель
   B) Демокрит
   C) Фалес
   D) Платон
   E) Анаксимандр

6. Создатель школы-лицея в Афинах
   A) Аристотель
   B) Демокрит
   C) Фалес
   D) Платон
   E) Анаксимандр

7. Основатель Академии в Древней Греции
   A) Аристотель
   B) Демокрит
   C) Фалес
   D) Платон
   E) Анаксимандр
8. Труды каких ученых оказали значительное влияние на возрождение и подъем науки Европы
   A) арабских ученых
   B) русских писателей
   C) греческих мыслителей
   D) испанских ученых
   E) английских монахов

9. В каком году вышла «Книга Абака» или «Арифметика» Леонардо Пизанского
   A) 1200 г.
   B) 1201 г.
   C) 1140 г.
   D) 1202 г.
   E) 1160 г.

10. Основатель новой алгебры символов эпохи Возрождения
   A) Ф.Виет
   B) Н.Шюке
   C) Штидель
   D) Кардано
   E) Н.Орем

11. Годы жизни Пифагора
   A) 570-500 гг. до н.э.
   B) 560-500 гг. до н.э.
   C) 540-490 гг. до н.э.
   D) 560-512 гг. до н.э.
   E) 540-495 гг. до н.э.

12. В переводе с греческого термин «математика» означает
   A) наука, знания
   B) число, задача
   C) чтение, письмо
   D) искусство
   E) известность, почет

13. Методологические основы истории математики
A) дуализм
B) механика
C) динамика
D) диалектический материализм
E) кибернетика

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0.0577216$ это :
A) постоянная Л.Эйлера
B) постоянная Больцмана
C) теорема Пифагора
D) последовательность Коши
E) значение П

15. Формула Герона
A) $S=\frac{1}{2}ab$
B) $a^2+b^2=c^2$
C) $S=ab$
D) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $p=\frac{a+b+c}{2}$
E) $y'=\frac{dy}{dx}$

16. Кто автор книги «Начала»
A) Лаплас
B) Пифагор
C) Евклид
D) И.Ньютон
E) Т.Байес

17. Происхождение терминов «синус» , «косинус»связано с
A) с математикой Индии
B) с математикой Китая
C) с математикой Греции
D) с Арабской математикой
E) с математикой Европы

18. Научная теория, возникшая в 18 веке в результате исследовании Л.Эйлера и Лагранжа
A) метод дифференцирования
B) теория чисел
C) теория вероятностей

D) теория уравнений
E) теория оптики

19. Что означает термин «инфинит»
A) предел
B) бесконечность
C) равенство
D) число
E) неравенство

20. Знаменитый труд Лопиталя опубликованный в 1696 году
A) «Анализ бесконечно малых»
B) «Правило Лопиталя»
C) «Метод флюкций»
D) «О геометрии»
E) «Экстремумы функций»

21. В каком году введен термин «Комбинаторика»
A) 1662 г.
B) 1664 г.
C) 1666 г.
D) 1665 г.
E) 1663 г.

22. Известный итальянский математик
A) Б.Кавальери
B) Г.Галилей
C) Д.Грегори
D) Лейбниц
E) Г.Вильгельм

23. Ученый исследовавший свойство шара, цилиндра, круга и т.д.
A) Архимед
B) Евклид
C) Евдокс
D) Аполлоний
E) Птолемей

24. В истории математики ученый, написавший бесценный труд « Коническое сечение»
A) Архимед
B) Евклид
C) Евдокс
D) Аполлоний
E) Птолемей

25. В каком веке возникли арифмометр и логарифмическая линейка
   A) 15 в.
   B) 17 в.
   C) 14 в.
   D) 13 в.
   E) 12 в.

26. Где родился великий мыслитель, энциклопедист Рене Декарт
   A) во Франции
   B) в Греции
   C) в Вавилоне
   D) в Средней Азии
   E) в Германии

27. Кто ввел в науку термин «логарифм»
   A) Р.Декарт
   B) Г.Бригс
   C) Ф.Энгельс
   D) Д.Непер
   E) Бернулли

28. Кто в 18 веке опубликовал труды по теории вероятности
   A) Р.Декарт
   B) Г.Бригс
   C) Ф.Энгельс
   D) Д.Непер
   E) Бернулли

29. Ученый первый создавший тригонометрические таблицы
   A) Птолемей
   B) Гиппарх
   C) Евклид
   D) Эратосфен
   E) Диофант

30. Автор трудов «Максимум и минимум», «О кривых линиях»
   A) Евклид
   B) Аристотель
   C) Л.Эйлер
   D) Лаплас
   E) Т.Байес

Тест №2

1. Знаменитый немецкий математик 18-19 в. , названный современниками «королем математики»
   A) Евклид
   B) Аристотель
   C) Ал-Коши
   D) Леонардо да Винчи
   E) К.Гаусс
2. Голландский математик , инженер С.Стивен ввел в употребление
   A) десятичные дроби
   B) обыкновенные дроби
   C) иррациональные дроби
   D) смешанные числа
   E) целые числа

3. «Пусть сюда не входит тот, кто не знает геометрию» - было написно у входа в Академию
   A) Евклида
   B) Платона
   C) Ал-Коши
   D) Леонардо да Винчи
   E) К.Гаусса

4. Задача-шутка Пифагора.
   Половина учеников изучает математику, четверть музыку, седьмая часть пребывает в молчании, кроме того есть три девочки. Сколько учеников посещают школу Пифагора.
   A) 28
   B) 27
   C) 25
   D) 22
   E) 20
5. «Хантенгри» казахской математики
   A) О.А.Жаутыков
   B) Леонардо да Винчи
   C) К.Гаусс
   D) Р.Декарт
   E) Пифагор
6. Великий писатель, автор первого казахского учебника по арифметике
   A) А.Пушкин
   B) С.Есенин
   C) Пифагор
   D) М.Дулатов
   E) Сократ

7. Великий филосов, математик, которого высоко ценил Платон, называя умом Академии
   A) Аристотель
   B) К.Гаусс
   C) Н.Лобачевский
   D) Л.Магницкий
   E) Ф. Виет
8. «Платон мой друг, но истина дороже»,- сказал великий ученый
   A) Аристотель
   B) К.Гаусс
   C) Н.Лобачевский
   D) Л.Магницкий
   E) Ф. Виет
9. Историческая задача. Послан человек с Москвы на Вологду и велено ему в хождении своем совершатии на всякий день по 40 верст, потом другий человек и другий (на следующий) день послан вслед его и велено ему идти на день 45 верст и ведательно есть коликий день постигнет (догонит) второй первого?
   A) 8 дней
   B) 7 дней
   C) 6 дней
   D) 5 дней
   E) 4 дней

10. Первый классик математики стран ислама представитель Багдадской Академии «Дома мудрости»
    A) Ал-Хорезми
    B) Пифагор
    C) Евклид
    D) К.Гаусс
    E) И. Ньютон

11. Труд Л.Ф.Магницкого
    A) «Арифметика»
    B) «Математика»
    C) «Геометрия»
    D) «Основы Алгебры»
    E) «Сведения из геометрии и тригонометрии»
12. Автор первого русского печатного учебника написанного на славянском языке
    A) Ф.А.Головин
    B) Л.Ф.Магницкий
    C) С.И.Шохор-Троцкий
    D) М.В.Ломоносов
    E) Р.Декарт

13. Задача из «Арифметики» Л.Ф.Магницкого. Некий человек нанял работника на год, обещав дать ему 12 рублей и кафтан, но тот, проработав 7 месяцев восхотел уйти, и попросил достойной платы с кафтаном. Он же (хозяин) дал ему по достоицу расчет 5 рублей и кафтан, и видательно есть, коликой цены оный кафтан был.
    A) 4руб. 80к.
    B) 4руб. 70к.
    C) 4руб. 50к.
    D) 4руб.
    E) 3руб.50к.

14. «Если я увидел больше других, то только потому, что я стоял на плечах гигантов»,-писал великий ученый
    A) Архимед
    B) Аполлоний
    C) И.Ньютон
    D) Р.Декарт
    E) Н.Лобачевский
15. «Арифметика- царица математики»,-сказал немецкий математик
    A) К.Гаусс
    B) Архимед
    C) Евклид
    D) Омар Хаям
    E) Брахмагупта

16. Ученый названный Аристотелем Востока
    A) Аль-Фараби
    B) И.Ньютон
    C) Л.Магницкий
    D) Пифагор
    E) Евклид
17. Самаркандский ученый, создавший полную теорию десятичных дробей
    A) Аль Коши
    B) Пифагор
    C) Г.Лейбниц
    D) Ариабхата
    E) Ф.Виет

18. Математики какой страны, считая положительные числа имуществом, а отрицательные числа долгом, применяли к ним арифметические действия.
    A) Греции
    B) Китая
    C) России
    D) Индии
    E) Германии

19. «Для царей нет особого пути в геометрии»,- царю Птолемею ответил
    A) Аль-Фараби
    B) Евклид
    C) Ф.Виет
    D) К.Гаусс
    E) Омар Хаям
20. Ученый в 18 веке систематизировавший теорию тригонометрических функций
    A) Архимед
    B) Пифагор
    C) Аристотель
    D) Н.Лобачевский
    E) Л.Эйлер

21. В переводе с какого языка термин «стереометрия» означает «пространство» , «измеряю»
    A) латинского
    B) греческого
    C) китайского
    D) индийского
    E) немецкого

22. Какова высота пирамиды Хеопса?
    A) 147
    B) 130
    C) 115
    D) 140
    E) 120

23. Ученый какой страны описали приемы решения системы линейных уравнений
    A) Индии
    B) Греции
    C) Китая
    D) Ближнего Востока
    E) Средней Азии

24. Автор теоремы, выражающей зависимость коэффициентов и корней квадратного уравнения
    A) В.Виет
    B) Архимед
    C) Еквлид
    D) Аль- Фараби
    E) К.Гаусс

25. Какой немецкий математик в 1692 году ввел термин «функция»
A) Аристотель
B) Пифагор
C) Г.Лейбниц
D) Аль Хорезми
E) Аль Беруни

26. Назовите период математики, связанный с открытием Ньютоном и Лейбницем дифференциальных и интегральных вычислений
A) период математики переменных величин
B) элементарной математики
C) зарождение математики
D) современной математики
E) математики постоянных величин

27. Математический трактат Древнего Китая
A) «Вычислительная техника»
B) «Математика в 9 книгах»
C) «Измерение плоскости»
D) «Деление по ступеням»
E) «Линейные уравнения»

28. Именем какого выдающегося математика астронома Индии назван первый индийский спутник Земли, запущенный 1975году?
A) Архимед
B) Аль Бируни
C) Аль Фараби
D) Пифагор
E) Ариабхатта

29. Кого называют «отцом» современной буквенной алгебры?
A) Аль Хорезми
B) Ф.Виет
C) Архимед
D) Евклид
E) Пифагор

30. Автор первого в истории математики трактата по алгебре
A) Аль Хорезми
B) Ф.Виет
C) Архимед
D) Евклид
E) Пифагор

Ответы на тесты №1, №2

Номер вопроса	Номер темы	Номер подтемы	Курс	Семестр	Уровень сложности	Правильный ответ
1	1	1	3	5	1	A
2	5	5	3	5	1	B
3	4	4	3	5	1	A
4	2	2	3	5	1	C
5	7	7	3	5	1	D
6	7	7	3	5	1	C
7	7	7	3	5	1	A
8	2	2	3	5	1	A
9	1	1	3	5	2	D
10	3	3	3	5	2	A
11	6	6	3	5	2	A
12	7	7	3	5	2	A
13	6	6	3	5	1	D
14	6	6	3	5	1	A
15	5	5	3	5	1	D
16	5	5	3	5	1	C
17	5	5	3	5	2	A
18	7	7	3	5	2	B
19	6	6	3	5	2	B
20	6	6	3	5	2	A
21	5	5	3	5	2	C
22	6	6	3	5	2	A
23	11	11	3	5	2	A
24	7	7	3	5	2	D
25	5	5	3	5	3	B
26	7	7	3	5	3	A
27	12	12	3	5	1	D
28	12	12	3	5	2	E
29	12	12	3	5	3	A
30	5	5	3	5	3	C
1	5	5	3	5	2	E
2	5	5	3	5	2	A
3	5	5	3	5	2	B
4	5	5	3	5	2	A
5	5	5	3	5	2	A
6	8	8	3	5	2	D
7	8	8	3	5	2	A
8	8	8	3	5	2	A
9	8	8	3	5	1	A
10	8	8	3	5	1	A
11	8	8	3	5	1	A
12	8	8	3	5	1	B
13	8	8	3	5	2	A
14	8	8	3	5	2	C
15	8	8	3	5	2	A
16	10	10	3	5	2	A
17	10	10	3	5	2	A
18	10	10	3	5	3	D
19	5	5	3	5	2	B
20	5	5	3	5	3	E
21	12	12	3	5	2	B
22	12	12	3	5	1	A
23	12	12	3	5	1	C
24	12	12	3	5	1	D
25	11	11	3	5	2	C
26	11	11	3	5	2	A
27	11	11	3	5	2	B
28	11	11	3	5	2	E
29	7	7	3	5	2	A
30	7	7	3	5	2	A

Глава 6. Гуманизация высшего педагогико-математического образования.

1. Совершенствование профессиональной подготовки учителя математики в педагогическом университете.

Социально-политические перемены, происходящие в современной действительности, неизбежно влекут за собой модернизацию существующей системы образования. Происходит развитие содержания и структуры образования, кардинально изменяются его концептуальные основы и т. д. Кроме того, в связи с подписанием Казахстаном Болонских соглашений на первый план выступает идея многоуровневости высшего профессионального образования, которая предполагает подготовку студентов в рамках бакалавриата, специалитета и магистратуры. Развитие непрерывного многоуровневого высшего образования связано с изменением его парадигмы, утверждения личностно-ориентированного, гуманистического подходов к образованию.

Особенную актуальность приобретает модернизация системы высшего педагогического образования, которая требует поиска новых организационно-методических средств и технологий повышения качества подготовки специалистов. Цель высшего педагогического образования – подготовка специалистов нового типа, обладающих фундаментальными научными знаниями, педагогическими умениями, исследовательскими навыками. Необходимы новые подходы к профессиональной подготовке и формированию личности будущих педагогов – бакалавров, специалистов и магистров образования в рамках преимущественно университетской системы высшего педагогического образования.

Современная стратегия развития высшего педагогического образования определяет его как гуманитарное образование, которое должно обеспечивать готовность выпускника к трансляции культуры на основе межсубъектного обмена ценностями, знаниями, способами деятельности, опытом самореализации и др.

Выбор такой стратегии обусловлен тем, что в основу современного образования положен принцип гуманизации, предполагающий создание такой образовательной системы, которая отвечает гуманистическим ценностям и идеалам. Одним из важнейших средств реализации этого принципа в содержательном аспекте является гуманитаризация, задающая системе образования ориентиры не только на формирование знаний и опыта интеллектуальной деятельности, но и на приобщение к культурным и духовным ценностям. Таким образом, основная цель профессионального образования значительно расширяется: помимо адаптации к социуму через профессию человек должен вписаться и в пространство культуры, освоить ее смыслы и ценности.

Широта образования должна достигаться в первую очередь за счет объединения гуманитарного и естественнонаучного знания, следствием чего является интеграция профессиональной и общекультурной подготовки в единстве с развитием личностных качеств будущих специалистов, возвращение образованию общекультурного контекста.

Являясь взаимодополняющими составляющими генетически единого процесса антропо - и социогенеза, образование и культура в ходе истории дифференцировались как содержательно, так и организационно, что привело к их поляризации и расслоению единого культурно-образовательного пространства. Это обусловило разделение их функций: образование стало отвечать за интеллектуальную сферу, а культура за духовные ценности. В результате в содержании, методах и формах образования произошел разрыв с единым культурным полем, традициями мировой и отечественной культуры. Понятие «образованный человек» становится синонимом понятия «информированный человек» и расходится с понятием «культурный человек». Поэтому основой новой образовательной парадигмы, отмечается в работах Е.В. Бондаревской, А.П. Валицкой, Т.С. Поляковой, В.А. Тестова, Л.Я. Хоронько и др., должна стать социокультурная точка зрения на образование.

Понимание образования «как функции культуры», что предполагает соответствующий подход к определению целей, содержания и методов обучения. Особенно актуальна эта проблема в системе математического образования в силу изначально присущего ему технократизма, преимущественно научного контекста.

Сложившаяся система профессиональной подготовки должна быть реформирована в соответствии с новыми потребностями, в основе которых лежит противоречие между общекультурным контекстом современного университетского образования и научным контекстом подготовки учителя математики в рамках традиционной системы. Это привело к возникновению проблемы введения высшего педагогико-математического образования в контекст культуры, воспитания учителя математики как человека не только математической, но общей культуры.

Значительный вклад в разрешение указанного противоречия вносит инициированная Поляковой Т.С. историко-методическая подготовка учителя математики, которую она рассматривает в качестве одного из новых видов его профессиональной подготовки [81]. Содержательной основой ее является система знаний по истории школьного математического образования с органически включенными в нее элементами истории методики преподавания математики как научной дисциплины. Аксиологической же основой является система ценностей, связанных с математическим образованием в его историческом развитии.

Предложенная трёхмодульная модель историко-методической подготовки учителя математики научно обоснована и органично встроена в систему многоуровневого университетского педагогико-математического образования. Она выполняет важнейшие интеграционные функции и выступает в качестве средства гуманитаризации педагогико-математического образования, значимого фактора развития образно ассоциативного мышления и одного их механизмов реализации личностно ориентированного воспитания будущих учителей математики, которое во многом обеспечивает поликультурное их развитие;

ПоляковаТ.С. считает, что историко-методическая подготовка учителя математики, с одной стороны, фундаментализирует его профессионально-педагогическую подготовку в ее методическом аспекте, с другой стороны, являясь исторической, следовательно, гуманитарной по своей сути, активно гуманитаризирует ее.

Автор предлагает свою точку зрения на категориальное и сущностное содержание понятий гуманизации и гуманитаризаци, Выделяет в качестве принципа *принцип гуманизации*. Гуманитаризация образования при этом является одним из средств реализации этого принципа и проявляется в двух основных формах 1)*экстенсивная* заключается во введении новых гуманитарных предметов и увеличении числа часов на традиционные; 2)*интенсивная* предполагает содержательные и технологические изменения внутри негуманитарных дисциплин, вычленение и актуализацию их гуманитарного потенциала. Первую форму называет *"гуманитаризацией в целом*" и считаем ее наиболее уместной внутри гуманитарной области, вне которой она приобретает агрессивные черты тотального навязывания гуманитарных предметов. Вторую называют *"гуманитаризацией в частном*", она является наиболее естественным и эффективным средством функционирования идеи гуманитаризации в негуманитарной области. "Гуманитаризация в целом" в этой сфере должна принимать преимущественно вариативные формы.

В *общем образовании* должен соблюдаться *паритет* в гуманитарной и естественно-математической областях. Здесь уместны и взаимообусловлены как "гуманитаризация в частном" естественно-математической области, так и "математизация и информатизация в частном" гуманитарной области. В профессиональном образовании приоритеты остаются за областями, являющимися его основой.

Принцип *гуманизации*

↓

Гуманитаризация содержания образования как* средство *реализации принципа гуманизации

↓

Формы *проявления гуманитаризации содержания образования*

↓ ↓

Гуманитаризация "в целом" ***Гуманитаризация "в частном"***

↓ ↓ ↓

Профессиональное образование ***Общее образование***

Введение в учебный процесс в качестве инвариантного курса истории отечественного школьного математического образования, являющегося ядром ядром историко-методической подготовки учителя математики по мнению автора ранее никогда не читавшегося в высших педагогических учебных заведениях реализует идею гуманитаризации “в целом”, что удовлетворяет всем требованиям к эффективному функционированию на первый взгляд экстенсивной формы гуманитаризации. С другой стороны, сам курс истории отечественного школьного математического образования должен максимально использовать гуманитарный потенциал, заключающийся в его связях с другими гуманитарными (кроме истории) сферами науки и культуры, что во многом предопределяется интересами и культурологическим потенциалом лектора.

Изучением проблемы использования гуманитарного потенциала математики в математическом образовании занимаются такие исследователи, как И.Ю. Жмурова, А.Г. Мордкович, Е.А. Перминов, Т.С. Полякова, Г.И. Саранцев, В.А. Тестов и др.

Проблемы прикладной направленности математики освещены в исследованиях В.И. Арнольда, М.И. Башмакова, Н.Я. Виленкина, Г.Д. Глейзера, Б.В. Гнеденко, А.В. Дорофеевой, А.Н. Колмогорова, Л.Д. Кудрявцева, А.Г. Мордковича, С.Г. Никольского, А.А. Столяра, Л.М. Фридмана, А.Я. Хинчина и др.

Историзация математического образования, в том числе и специальной подготовки учителя математики в педвузе, рассматривалась в исследованиях В.В. Бобынина, С.В. Белобородовой, Н.Я. Виленкина, Г.И. Глейзера, Б.В. Гнеденко, И.Я. Депмана, А.В. Дорофеевой, К.А. Малыгина, И.А. Михайловой, Т.С. Поляковой, М.В. Потоцкого, Ю.В. Романова, К.А. Рыбникова, В.Д. Чистякова, А.П. Юшкевича и др.

Хотя методика обучения различным математическим дисциплинам нашла своё отражение в работах В.И. Арнольда, Р.М. Асланова, О.С. Викторовой, В.И. Игошина, Л.Д. Кудрявцева, Г.Л. Луканкина, А.Г. Мордковича, А.Х. Назиева, М.В. Потоцкого, И.С. Сафуанова, А.А. Столяра, Г.Г. Хамова, Л.В.Шкериной и др.. Вопросы методики обучения математическому анализу освещаются в немногих диссертационных исследованиях. Так, О.С. Викторова рассматривает методику предупреждения затруднений студентов педвуза в овладении математическим анализом, а Р.М. Асланов – методическую систему обучения дифференциальным уравнениям в педвузе.

Анализ литературы по проблеме позволяет сделать вывод о том, что реализация общекультурного потенциала математической дисциплины в профессиональной подготовке будущих учителей практически не разработан, отсутствует система обучения, использующая общекультурный потенциал математических дисциплин, в частности, математического анализа.

Е.В. Белик [82] исследует актуальную проблему реализации общекультурного потенциала математического анализа в процессе подготовки бакалавров математического образования.

Рассматривает возможность реализации общекультурного потенциала математического анализа, который имеет высокую степень абстракции, собственную специфику и методы, оригинальную символику и терминологию. Изучая его, студент педвуза зачастую испытывает большие затруднения в преломлении абстрактных моделей в плоскость реальных процессов и явлений, в создании мотивационной сферы для будущей профессии. С другой стороны, математический анализ имеет большой общекультурный потенциал для осознания будущим учителем сущности математики, её прикладной направленности, воспитательного значения.

На основе выделенных подходов к отбору содержания, анализа программ по математическому анализу, школьных программ по алгебре и началам анализа, а также курса истории математики в педвузе разработана следующая структура курса по выбору «Историко-методологические проблемы основ математического анализа», являющегося основным компонентом системы.

1. Методологические основы математического анализа.
2. Историко-методологический обзор развития математического анализа.
3. Историко-методологические основы теории пределов.
4. Историко-методологические основы дифференциального исчисления.
5. Историко-методологические основы интегрального исчисления.

При подборе материала для различных форм занятий руководствовались тем, что в их содержании должны быть представлены следующие основные смысловые линии.

1.Математическая, содержащая основные понятия, идеи и методы рассматриваемых разделов математического анализа.

2.Методологическая, включающая вопросы методологии математического анализа и теории математического познания.

3. Методическая, включающая вопросы методики изучения указанных тем в школьном курсе алгебры и начал анализа и в вузе, анализ литературы для составления личной библиотеки, формирование копилки дидактических материалов, знакомство с педагогическими идеями и преподавательской деятельностью выдающихся отечественных математиков.

4. Общекультурная линия представляет собой вопросы, в которых система знаний математического анализа рассматривается через призму ценностей культуры: господствующего мировоззрения и ведущей ориентации эпохи; нацеленностью научного сообщества на эмпирические или теоретические методы обоснования, способы развития и изложения полученной информации и т.п., раскрываются общекультурные смыслы математики.

5. Практическая линия представлена сферой приложения математического анализа; задачами из различных областей знания, решающимися методом моделирования; банком задач, наглядно демонстрирующих смысл рассматриваемых понятий, идей, методов.

6. Персоналистическая линия определяется личностью учёного, его индивидуальными качествами и системой мировоззрения.

7. Исследовательская линия включает вопросы, ориентирующие на самостоятельное освоение материала, повышающие творческую активность и интерес к предмету.

С одной стороны, университетский уровень образования, прежде всего, характеризуется фундаментальностью получаемых знаний. При этом существенной особенностью современного знания является органичное сочетание процесса дифференциации наук с их интеграцией. Поэтому интеграция наук, научных знаний должна находить свое отражение в образовании.

Жмурова И.Ю. рассматривает актуальная проблему поиска средств повышения эффективности профессиональной подготовки бакалавров физико-математического образования в условиях многоуровневого университетского образования.

Это - интеграционные связи дискретной математики как средство повышения эффективности профессиональной подготовки бакалавров физико-математического образования [83].

Разработанный курс «Дискретная математика в приложениях и задачах», являясь фундаментальным средством реализации интеграционных связей дискретной математики, может быть использован в процессе обучения в высшей школе. Он состоит из следующих разделов:

1. Дискретная математика
2. Отечественные ученые, занимавшиеся дискретной математикой
3. Теория множеств
4. Математическая логика
5. Отечественные ученые, занимавшиеся математической логикой
6. Комбинаторика
7. Теория графов

Изучение вариативного курса "Дискретная математика в приложениях и задачах" характеризуется осуществлением его интерцикловых, интерблоковых и перспективных интердисциплинарных связей; использованием информационных технологий; подготовкой будущего учителя к ведению в школе факультативных занятий и разработке элективных курсов. Для этого все разделы курса по выбору построены таким образом, что соответствующие школьные факультативные или элективные курсы органически войдут в него начальной составной частью.

Современное образование, в том числе и высшее педагогико-математическое, опирается на ряд принципов, одним из которых является принцип историзма. Его роль существенно возрастает в условиях перехода общества в постиндустриальную или информационную стадию развития, когда назрела необходимость разработки новой парадигмы образования, в которой ведущая роль принадлежит организационным, деятельностным и информационным технологиям.

Ю. Романов исследует актуальную проблему совершенствования специальной подготовки учителя математики в педвузе [84].

Одним из перспективных решений этой проблемы является историзация специальной подготовки учителя математики в педвузе, под которой автор понимает процесс все более глубокого и полного проникновения в эту подготовку принципа историзма. Это предполагает внедрение системы историко-математических знаний, которая не только обеспечивает историко-математическую компетентность учителя математики, но и создает условия для развития его способностей; в случае ее личностной ориентации система историко-математических знаний оказывает эмоциональное воздействие на личность будущего учителя математики и становится компонентом его ценностных отношений. Понятие «историзация специальной подготовки учителя математики» сформулировано выше. Ю. Романовым введено также понятие историко-математической компетентности учителя математики. Под которым понимает свойство его личности: 1) выражающееся в наличии глубоких и прочных знаний в области истории и методологии математики; 2) включающее реконструкцию исторических фактов и приведение их в систему; 3) создающее условия для формирования обобщенных умений и навыков, опирающихся на опыт прошлого, и встраивания его в личный опыт.

Ю. Романов при разработке программы курса истории избранных разделов высшей геометрии, как элективного курса в педагогическом университете выделяет в качестве основных следующие разделы: 1. Методологические проблемы геометрии 2.История аксиоматического метода 3. История развития векторного исчисления 4. История аналитической геометрии 5. История проективной и начертательной геометрии 6. История дифференциальной геометрии.

В результате проведённого исследования Г.К.Кожабаев говорит о потребности в пересмотре содержания методической подготовки будущего учителя математики. Профессиональную подготовку учителя математики Г.К.Кожабаев рассматривает в аспекте совершенствования профессионально-методической подготовки будущего учителя математики[85]. В своём исследовании автор рассмотрел научно-методические основы реализации воспитательно-развивающих функции школьного курса математики и подготовка к ней будущего учителя. Г.К.Кожабаев разработал программы спецкурсов: «Вопросы воспитания в процессе обучения математике», «История математики», «История методики обучения математики», «Методика введения разъяснения и применения математической терминологии и символики» и др., В содержание и реализацию которых вошли требования к знаниям и навыкам будущего учителя математики. Эти спецкурсы рекомендованы как элективные курсы для педагогического Вуза.

Проведённый анализ исследований по совершенствованию профессиональной подготовки учителей математики позволяет сделать вывод: внедрение апробированных и предложенных рекомендаций в практику обучения в Вузе позволит повысить уровень методической подготовки будущего учителя математики, что повлечёт за собой повышение качества обучения математики в школе.

Список использованных источников

1. Дорофеева А.В. Страницы истории на уроках математики Львов журнал «Квантор» 1991.
2. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. М., Просвещение 1968, 432 с.
3. Закон Республики Казахстан "Об образовании", - Алматы: Издательский дом «Дастан», 2000.
4. Столяр А.А. Методы обучения математике – Минск Высшая школа 1976.
5. Л.М. Фридман. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. М., 1983 - 160 с.
6. Гнеденко Б.В. Очерки по истории математики в России М., 1946.
7. Программа по математикедля V-VI средней общеобразовательной школы//Математике в школе – 1985 - №6
8. Кожабаев К.Г. О воспитательной направленности обучения математике в школе. Книга для учителя. – М.: Просвещение 1988.
9. Э.Т. Белл. Творцы математики. Предшественники современной математики. Под. ред. С.Н. Киро. М., 1979 г.
10. Сабалаков А. Математика тарихынан Алматы 1966.
11. Кубесов А. Математическое наследие Аль-Фараби. Алматы. Наука 1974 г.
12. Хрестоматия по истории математики /Под. ред. Юшкевича А.П.М., 1975-1976 Т. 1-2.
13. М.У. Искаков. Математика мен математиктер жайындағы әңгімелер. Екінші кітап. Алматы: Мектеп баспасы, 1972.
14. Сойер У.У. Прелюдия к математике М., 1972.
15. М.У. Искаков. Математика мен математиктер жайындағы әңгімелер. Үшінші кітап. Алматы: Мектеп баспасы, 1973.
16. Ван де Варден Б.А. Пробуждающаяся наука математики древнего Египта, Вавилона, Греции /Пер. с голл. И.Н. Веселовского М., 1959, 209 с.
17. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики – М.: Наука 1978.
18. Медяник А.И. Учителю о школьном курсе геометрии – М.: Просвещение 1984.
19. Александров А.Д. Понятие вектора в физике и геометрии /Математика в школе – 1985 № 5
20. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Просвещение1957.
21. Бескин Н.М. Стереометрия – М., Учпедгиз 1960.
22. Гончаренко Б.Г. Задачи и вопросы по стереометрии – М.: Просвещение 1981.
23. С.Х. Сираждинов. Матвиевская Г.П. Ал – Хорезми – выдающийся математик и астроном средневековья. М., 1983 - 117 с.
24. Кипнис И.М. Задачи на составление уравнений и неравенств.
25. Оре О. Приглашение в теорию чисел М.: Наука 1980.
26. Кордемский Б.А. Математическая смекалка 2 изд. М., 1955 260-295 с.
27. Колягин Ю.М., Луканкин Г.А. Основные понятия совершенного

школьного курса математики – М.: Просвещение 1974.
28. Гришвальд Л.Я. История открытия логарифмов. Харьков 1952 12 с.
29. Колмогоров А.Н. Ньютон и современное математическое мышление – В сб. Московский университет – памяти И. Ньютона. М.: 1946.
30. Рыбников К.А. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т-1-3. М., 1970 - 1972.
31. Жаутыков О.А. «Орыс математикасыны» атақты ғалымдары. Қазақ мемлекеттік баспасы. Алматы 1956.
32. Юшкевич А.П. История математики с древнейших времен до начала 19 столетия. Т-1-3. М., Наука 1970 - 1972.
33. Пичурин А.Ф. За страницами учебника алгебры. М.: Просвещение 1987.
34. Сираждиков С.Х., Матвиевская Г.П. Абу Райхан Беруни и его математические труды. М., 1976.
35. Кубесов А. Әл-Фараби. Алматы: Казахстан 1971 – 172 б.
36. Государственные образовательные стандарты среднего образования Республики Казахстан. РИК КАО имени И. Алтынсарина, 1998.
37. Концепция содержания образования общеобразовательной школы Республики Казахстан.// Учитель Казахстана, №7. 1993, с 2.
38. Г.И. Саранцев. Гуманизация математического образования. В кн. Проблемы гуманизации математического образования в школе и в вузе. Тезисы докладов научной межрегиональной конференции. Саранск. Февраль, 1995.
39. В.А. Гусев, В.Н. Фрундин. О новых подходах к построению курса геометрии основной школы. В кн. Проблемы гуманизации математического образования в школе и в вузе. Тезисы докладов научной межрегиональной конференции. Саранск. Февраль, 1995.
40. М.И. Зайкин. Аспекты гуманизации методической системы обучения математике. В кн. Проблемы гуманизации математического образования в школе и в вузе. Тезисы докладов научной межрегиональной конференции. Саранск. Февраль, 1995.
41. И.К. Андронов, Г.С. Сабиров. О математических рукописях ученых XI-XIII вв. Средней Азии, хранящихся в библиотеке проф. Андронова //Вопросы истории и методики элементарной математики. Вып. II учен. Зап. Душанбинского гос. пед. Института. Т.47. - Душанбе, 1965. с. 5-13.
42. Г.И. Глейзер. История математики в школе. IV-VI классы. М.: Просвещение, 1981 -279 с.
43. И.Я. Депман. История математики в школе. IX-X классы. М.: Просвещение, 1983 - 267 с.
44. О.А. Жаутыков. Математиканы даму тарихы: Ерте заманнан XVII ғасырға дейін. Алматы: Мектеп, 1967 - 331 б.
45. Ю.А. Закарин. Абель, Галуа, Лобачевский, Эйнштейн: Математика ғалымдарының өмірі мен ғылыми еңбектері. Алматы: Қазақстан, 19868 - 196 б.
46. М.У. Искаков. Ғылым және соқыр сенімдер. Әңгімелер. Алматы: Қазақстан, 1965 - 171 б.

47. А. Кубесов. Математика тарихы. Алматы: Қазақ университеті, 1993-240 б.
48. Б.П. Есипов. Организация и воспитание коллектива школьников в свете учения А.С. Макаренко. /Всесоюзное общество по распространению политических и научных знаний/. М.: Знание, 1956- 22 с.
49. И.Я. Лернер. Познавательные задачи в обучении истории. М., 1968-173 с.
50. В.Н. Молодший. Элементы истории математики в школе. М., 1953-134 с.
51. К. Нурсултанов. Очерк истории математических знаний в Казахстане и вопросы использования ее материалов в педагогическом процессе. Диссертация на соискание уч. ст. канд. пед. наук. Алматы, 1975-189 с.
52. З. Атаджанова. Содержание и методы решения геометрических задач в трудах среднеазиатских ученых IX-XV вв. и пути их изучения в восьмилетней школе. Автореферат, диссертация на соискание уч. ст. канд. пед. наук. Ташкент, 1975 - 23 с.
53. С.Х. Сираждинов, А. Ахмедов. Из биографии Ибн Сина //Математика и астрономия в трудах Ибн Сины, его современников и последователей. Ташкент, 1981. с. 3-16.
54. М.У. Искаков. Математика мен математиктер жайындағы әңгімелер. Бірінші кітап. Алматы: Мектеп баспасы, 1971.
55. Аристотель. Метафизика. М. - Л., 1934 - 316 с.
56. Л.М. Фридман. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. М., 1983 - 160 с.
57. К. Нияткабылов. Полюбил бы я ... интеграл. //Аргументы и факты - Казахстан, № 24 (108), июнь, 1995 - с.4.
58. Концепция становления исторического сознания в Республике Казахстан //Казахстанская правда, № 121 - 30.06.1995.
59. М.И. Махмутов. Теория и практика проблемного обучения. Казань, 1972.
60. Х.М. Рахымбекова. Историко-научные основания гуманизации образования - Алматы, «Ғылым», 1996 - 107 с.
61. Б.В. Гнеденко. Математика в современном мире и математическое образование. М.: Просвещение, 1991.
62. М. Дулатов. Шығармалар. Алматы, «Жазушы», 1991 - 384 б.
63. Медеу Сарсекеев. Сатпаев. Алматы, «Өнер», 1989 - 450 б.
64. Кәкімбек Салықов. «Боладысы да бөлекше той». Журнал «Ақиқат», № 2, 1999.
65. Ақжан Машанов. Әл Фараби және Абай. Алматы, «Қазақстан», 1994 -192 б.
66. Г.К. Нур. История математики. РИК КАО им. И. Алтынсарина. Алматы, 2001.
67. Г.Қ. Нур. Математика тарихы. Алматы, «Ғылым» Ғылыми-баспа орталығы, 2002.
68. Мұхтар Шаханов. Махабатты қоргау. Алматы, «Жалын», 1982.
69. Т.И. Шамова. Активизация учения школьников. М,, Педагогика, 1982-208 с.
70. Д. Пойа. Математическое открытие. М., Наука, 1976.
71. А.Я. Хинчин. Три жемчужины теории чисел. М., Наука, 1979-64 с.

72. Энциклопедический словарь юного математика. Сост. А.П. Савин. М., Педагогика, 1985 - 352 с.
73. В.В. Фирсов. Дифференциация обучения на основе обязательных результатов обучения. М., Просвещение, 1994.
74. А.А. Окунев. Подготовка к уроку. Журнал «Математика в школе», N1, 1991.
75. Л.С. Выготский. Развитие высших психических функций. М., Педагогика, 1980.
76. Г.Г. Левитас. О дидактических требованиях к уроку математики. Журнал «Математика в школе», N3, 1983.
77. М.И. Зенина. Эта разноликая теорема Виета. Журнал «Математика в школе», № 2-3, 1992.
78. В. Литцман. Веселое и занимательное о фигурах и числах. М., 1963.
79. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во ВТУЗы. /Под ред. М.И. Сканави. М., 1980.
80. С.Н. Садыхов, В.В. Попов. Развитие творческой активности учащихся в процессе решения заданий с использованием теоремы Виета. //Вопросы обоснования содержания школьного математического образования.
81. Полякова Т.С. Историко-методическая подготовка учителей математики в педагогическом университете. Автореф. … док. пед. наук.- Санкт-Петербург, 1998г.- 58с.
82. Белик Е.В. Теория и методика реализации общекультурного потенциала математического анализа в процессе подготовки бакалавров физико-математического образования Автореф. … кан. пед. наук.- Ростов – на – Дону,- 2007г.- 23с.
83. Жмурова И.Ю. Интеграционные связи дискретной математики как средство повышения эффективности профессиональной подготовки бакалавров физико-математического образования. Автореф. … кан. пед. наук.- Ростов – на – Дону,- 2005 г.-24с.
84. Романов Ю.В. Теория и методика историзации геометрической подготовки учителя математики в педагогическом вузе. Автореф. … кан. пед. наук.- Ростов – на – Дону,- 2002 г.- 25с.
85. Кожабаев К.Г. Научно-методические основы реализации воспитательно-развивающих функций школьного курса математики и полготовка к ней будущего учителя. Автореф. … док. пед. наук.- Алматы , 2006г.- 45с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.. 3
Глава 1. Принцип историзма в обучении математики........................4
1.1. О роли истории науки в развитии математики............................4
1.2. Творчество в области истории математики 5
1.3. Использование истории математики в процессе преподавания ..7
1.4. Классики математики..10
Глава 2. История развития фундаментальных наук
1. Арифметика..12
1.1. История арифметики 12
1.2. Системы счисления..13
1.3. Письменная нумерация. Цифры 15
1.4. О происхождении дробей. Обыкновенные дроби 16
1.5. Десятичные дроби 17
1.6. Процент...18
1.7. Возникновение отрицательных чисел...19
1.8. Пропорции 21
2. Геометрия 22
2.1. Из истории геометрии..22
2.2. Аксиоматическое построение геометрии.....................................24
2.3. Геометрические фигуры...26
2.4. Параллельные прямые..26
2.5. Треугольники..27
2.6. Равнобедренный треугольник..27
2.7. Признаки равенства треугольников 27
2.8. Прямоугольный треугольник...28
2.9. Сумма углов треугольника 29
2.10. Метрические соотношения в треугольнике. Замечательные точки и линии треугольника. Геометрия треугольника....................29
2.11. Теорема Пифагора..30
2.12. Формула Герона. Площадь треугольника 32
2.13. Теорема косинусов и теорема синусов 32
2.14. Параллелограмм..33
2.15. Трапеция 33
2.16. Вычисление площадей..34
2.17. Окружность и круг 34
2.18. Векторы...35
2.19. Подобие...36
2.20. Вписанные и описанные многоугольники 37
2.21. Из истории тригонометрии 37
2.22. Тригонометрические функции...38
2.23. Графики тригонометрических функции.....................................40
2.24. Измерение углов и дуг 40
2.25. Тригонометрические таблицы 41

2.26. Начальные сведения по стереометрии 41
2.27. Измерение объемов 42
2.28. Конус. Цилиндр 42
2.29. Сфера. Шар 43
3. Алгебра 43
3.1. Становление алгебры 43
3.2. Уравнения 44
3.3. Системы линейных уравнений 45
3.4. Квадратные уравнения 47
3.5. Многочлены 48
3.6. Арифметические и геометрические последовательности. Числовая последовательность 49
3.7. Прогрессии. Сведения из истории 50
3.8. Арифметическая прогрессия 51
3.9. Геометрическая прогрессия 54
3.10. Степень с натуральным показателем 55
3.11. Степень с рациональным показателем 56
3.12. Функция 56
3.13. Степенная функция и ее график 57
3.14. Показательная функция 58
3.15. Логарифм 58
3.16. Логарифмическая функция 59
4. Математический анализ 59
4.1. Математические знаки 61
Глава 3. Пути формирования математической науки 64
1. Великие периоды истории атематики 64
2. Математика в Европе 66
2.1. Древняя Греция 66
2.2. Эллинистическая и Римская эпоха 66
2.3. Средневековая Европа 67
2.4. Эпоха Возрождения 68
2.5. Математизация науки в XVII в 68
3. Математики Европы 69
3.1. Античные математики. 69
3.2. Математики Средневековья 74
3.3. Математики эпохи Возрождения 75
3.4. Математики XVII-XVIII вв. 76
4. Математика в Китае и Индии 81
4.1. Математика Древнего Китая 81
4.2. Математика Индии 83
4.3. Ариабхата - выдающийся математик Индии. 85
5.Математика на арабском Востоке и в Средней Азии 85
5.1. Багдадская научная школа 85
5.2. Арабская арифметика 88
5.3. Алгебра - самостоятельная наука 88

5.4. Геометрия в трудах арабских математиков 899
5.5. Тригонометрия - отдельная область математики 90
6. Математики Востока... 91
Глава 4. Проблемы гуманизации образования при изучении математики на основе использования исторических материалов 100
1.1. Гуманизация математического образования 100
1.2. Изучение истории науки как средство гуманизации математического образования 103
Глава 5. Методические рекомендации по использованию истории математики в общеобразовательной школе 110
1.1. Пути реализации принципа историзма в обучении математике в Общеобразовательных школах 110
1.2. Принципы использования элементов истории математики ближнего Востока, Средней Азии и Казахстана в обучении математике в школах центрально-азиатских республик 114
1.3. Использование историко-математических сведений для активизации познавательной деятельности учащихся 121
1.4. Дифференция обучения школьников - одно из условий 131
реализации гуманизации образования.. 131
1. 5. Организация самостоятельной работы учащихся на основе использования историко-математических материалов 140
Тестs по истории математики
Глава 6. Гуманизация высшего педагогико - математического образования.
1. Совершенствование профессиональной подготовки учителя математики в педагогическом университете.
.... 158
Список использованных источников... 170
Содержание 174