УДК 517.949.8

МЕКТЕП МАТЕМАТИКА КУРСЫНДАҒЫ ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ

Махимова С.Ж., Уразмагамбетова Э.Ұ.

В данной работе рассматриваются элементы теории вероятностей в школьном курсе математики.

This article is about elements theory of probability in school course mathematics.

Қазақстан Республикасының дүниежүзілік білім кеңістігіне енуі, қоғам дамуындағы жаңа бағыттар мен нарықтық қарым-қатынас еліміздің болашағы, бүгінгі мектеп оқушыларын оқытуға жаңаша міндеттер қойып отыр. Мұның өзі әр мұғалімге оқу үрдісін қайта қарауды, бұрынғы қалыптасқан әдістер мен технологияларды жаңа өмір талабына сай өзгертілген түрлерімен ұтымды ұйымдастыруды қажет етеді [1].

Қазіргі таңда ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика элементтері кең қолданыс табатын ғылым мен техниканың жаңа салаларының пайда болуы және олардың тез қарқынмен дамуына байланысты математиканың бұл тарауына деген сұраныс күрт артып отыр. Атап айтқанда, олар ақпараттар теориясы, қателер теориясы, физика және басқа жаратылыстану ғылым салаларында, сондай-ақ нарық заманында, күнделікті өмірде де тірек білім ретінде қолданылуда. Сондықтан да ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика элементтері тек қана жоғары немесе арнаулы оқу орындарында ғана емес, жалпы білім беретін орта мектептерде де оқытылуда [2].

1990-жылдардың басында барлық батыс елдерінде мектепте математикадан жаңа бағдарламалар жасалды. Біздің елімізде де жаңа бағдарламаға көшу барысында математикалық білім мазмұнының құрылымы “Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері” желісімен толықтырылды. Оның қажеттілігі қазіргі қоғам талаптарынан туындайды [3].

Бүкіл мектептегі оқу кезеңінде оқушылар өмірдегі болатын әртүрлі жағдайларды, кездейсоқ құбылыстарды талдауға ықтималды – статистикалық әдістемелерді қолдануды үйренеді. Алгебра курсындағы статистикалық берілгендерді топтау және талдау дағдылары физика, химия, биология және т.б. сабақтарда зертханалық жұмыстың мәні мен маңызын терең түсінуге көмектеседі.

Ықтималдық теориясының негізгі мағынасын ашып, ықтималдықтың жиілік теориясының негізін салған –белгілі неміс математигі Р. Мизес (1883-1953). Ол ықтималдық теориясын математика пәні емес, математикалық әдістерде кең қолданатын ғылым қатарына қосты. Р. Мизес: "Әр ықтималдыққа берілген есеп кейбір шынайы процестермен байланысқан", - деп айтқан. Қазіргі ықтималдық теориясының дамуы, әсіресе А.Н. Колмогоровтың еңбегінде, ықтималдық теориясы жоғары математиканың тарауларымен: жиын теориясы, функция теориясы, функционалдық талдау және т.б. нақты математикалық ықтималдықпен тығыз байланысқан [4].

Ықтималдықтар теориясы комбинаторика элементтерімен бірге оқытылады. Себебі, комбинаторика оқушылардың құбылысты стохастикалық табиғатымен қарастыруына, бақылау нәтижелерін, олардың мүмкін комбинацияларын ескере отырып есептеуіне көмектеседі. Бұл қазіргі жағдайда математикалық білім берудегі басты мақсат – оқушылардың логикалық ойлауын дамытуға әсер етеді [5].

Кездейсоқ құбылыстарға математикалық тұрғыдан қарау Паскаль мен Фермаға дейін болған. Демографиялық құбылыстар және адамдарды азық-түлікпен қамтамасыз етуге байланысты кездейсоқ құбылыстардың салыстырмалылық жиілігінің біркелкілік фактілері Ежелгі Қытай мен Римде белгілі болған. Кездейсоқ құбылыстарды нақты әдістердің көмегімен анықтау мүмкіндігін Кордано мен Галилей де қарастырған. Паскаль, Ферма және Гюйгенстен бастап, кездейсоқ оқиға және оның ықтималдығы туралы математикалық ғылым – ықтималдылық теориясының алғашқы ұғымдары қалыптаса бастады.

XX ғасырдың екінші жартысынан бастап құбылыстардың сандық өлшемдері әртүрлі процестердің, атап айтсақ, өндірісті математикалық модельдеу мен ғылыми шығармашылықтың алғашқы шарты болды. "Оқиға туралы ғылым" көптеген мамандық иелерінің: инженерлер, экономистер, дәрігерлер және басқа да саладағы мамандардың ортасына енді.

Белгілі бір тәжірибенің нәтижесінде пайда болатын немесе пайда болмайтын құбылыстардың бәрін оқиға деп атаймыз. Мысалға, майыспаған және біртекті металдан жасалған, геометриялық дұрыс (дөңгелек) пішінді теңгені жоғары қарай лақтырайық. Нәтижесінде: теңге жерге “елтаңба” жағы жоғары қарап түседі(1 оқиға), немесе “цифр” жағы жоғары қарап түседі (2 оқиға).

Мынадай қорытынды жасаймыз:

а) оқиғалар – кездейсоқ оқиға, себебі тәжірибе жасамас бұрын осы екі оқиғаның қайсысы пайда болатыны белгісіз.

ә) үйлесімсіз оқиғалар, біреуінің пайда болуы екіншісін болдырмайды: тек екеуінің біреуі ғана пайда болуы керек- теңге жерге не “елтаңба” бар жағы жоғары қарап, немесе ”цифр” бар жағы жоғары қарап түседі.

б) 1 оқиға мен 2 оқиға бірден-бір мүмкін нәтижелер: осы екі нәтиженің біреуі ғана пайда болады, басқа үшінші нәтиже жоқ.

в) 1 оқиға мен 2 оқиғалардың пайда болу мүмкіндіктері бірдей: теңгенің цифры бар жағының үстіне қарап түсу мүмкіндігі, елтаңба бар жағының үстіне қарап түсу мүмкіндігінен артығырақ, немесе керісінше деп ешнәрсе айта алмаймыз.

Мынадай анықтамалар беруге болады:

1. Белгілі бір шарттардың орындалуына байланысты пайда болуы да, болмауы да мүмкін оқиға кездейсоқ оқиға деп аталады.
2. Біреуінің пайда болуы басқаларын пайда болдырмайтын оқиғаларды өзара үйлесімсіз оқиғалар деп атайды.
3. Тәжірибенің нәтижесінде кемінде біреуі пайда болатын оқиғаларды мүмкін болатын оқиғалар деп атайды.
4. Пайда болу мүмкіндіктері бірдей оқиғаларды тең мүмкіндікті оқиғалар деп атайды.
5. Тәжірибе нәтижесінде міндетті түрде пайда болатын оқиға ақиқат оқиға деп, ал тіпті пайда болмайтын оқиға мүмкін емес оқиға деп аталады.

Күнделікті өмірде қандай да бір оқиғаны бағалау нәтижесінде, дәл, нақты мағынасына мән берместен, «ықтималдық» ұғымын жиі қолданамыз. Мысалы, бүгін мүмкін кешігермін; ол мүмкін бос емес шығар; жиналыстың болмауы мүмкін секілді және т.с.с.

Сонымен, ықтималдық дегеніміз –белгілі бір анықталған жағдайда қандай да бір кездейсоқ оқиғаның пайда болу дәрежесінің сандық сипаттамасы.

А оқиғасының ықтималдығы деп осы оқиғаның пайда болуына қолайлы жағдайлар саны m –нің тәжірибенің барлық кездейсоқ, мүмкін болатын, тең мүмкіндікті және бірден-бір мүмкіндікті, бірімен-бірі үйлесімсіз нәтижелерінің жалпы n санына қатынасын айтады, яғни

$$P(A)=m/n.$$

Мысалы, «50 пайыз ықтималдықпен», «$\frac{1}{2}$ ықтималдықпен», «немесе 100-дің 50 жағдайы», «50-де 50», «екіден бір мүмкіндік» деген сөз тіркестерін толық түсініп, жайбарақат қабылдаймыз. Тиынды лақтырмай-ақ, елтаңба жағы мен цифрдың түсу мүмкіндігі бірдей, ал оқиға нәтижесі $\frac{1}{2}$ санына тең екеніне келісеміз. Мысалы, егер тиынды лақтыра отырып, әрбір лақтырудан кейін, айталық, 800 рет лақтырылғаннан кейінгі нәтижені тіркеген кезде, елтаңба жағы 402 рет түскен болса, онда түсудің салыстырмалы жиілігін $\frac{402}{800} = 0{,}50025$ аламыз. Әрине, ол дәл $\frac{1}{2}$ емес, бірақ оған өте жақын. Егер әрі қарай лақтыру (сынақ) санын көбейтсек, онда 402 санына жақынырақ санды алуға болар еді.

Табиғатта, қоғамда, ғылым мен техникада, өндіріс орындарында, күнделікті өмірде әр түрлі әдістермен шешілетін, шешімі көп есептер жиі кездеседі. Осындай есептерді «Комбинаторика» деп аталатын алгебра бөлімі қарастырады. Комбинаториканың қарапайым бөлімдері орналастырулар, алмастырулар және терулер деп аталады.

n элементтен алынған m–нен құралған орналастырулар деп берілген n элементтерден әр топта m элемент $(m < n)$болатын, топтарының бір-бірінен өзгешелігі ең болмағанда элементтерінің біреуінің өзгешелігінде және элементтерінің алыну реттерінде болатын комбинациялар (қосылыстар) топтарын айтады.

Орналастырулардың белгіленуі: A_n^m, мұндағы m, n–натурал сандар, n - берілген элементтер саны, m - әрбір топқа кіретін элементтер саны және $m < n.$

Жалпы, n элементтен алынған m-нен құралған орналастырулар топтарының саны келесі формуламен есептеледі:

$$A_n^m = m(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1),$$

мұндағы $m < n,\ m,n \in N.$

n элементтен жасалған алмастырулар деп n элементтен n-нен жасалған орналастыруларды айтады.

Алмастырулардың белгіленуі P_n, мұнда n–берілген элементтер саны. Демек, алмастырулардың топтарының бір-бірінен айырмашылығы тек элементтерінің орналасу реттерінде ғана. n элементтерден жасалған алмастыруларды P_n-деп белгілейді. Енді топтарының санын табу формуласын анықтайық. Ол үшін орналастырудың формуласындағы m–нің орнына n–ді қойсақ, сонда

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1)) = n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1 =$$
$$= 1\cdot 2\cdot 3...(n-1)(n-2)\cdot n = n!$$

n элементтен m–нен құралған терулер деп берілген n элементтерден әр топтан m элемент (m<n) болатын топтарының бір-бірінен өзгешелігі ең болмағанда элементтерінің біреуінің өзгешелігінде болып келген (комбинациялар) қосылыстар топтарын атаймыз.

Белгілеуі: C_n^m, мұндағы m, n – натурал сандар, n – берілген элементтер саны, m- әрбір топқа кіретін элементтер саны және m<n.

Терулердің жалпы саны мына формуламен есептелінеді

$$C_n^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ньютон биномы мына формуламен

$$(x+a)^n = x^n + n\cdot a\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^2\cdot x^{n-1} + ... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}a^k\cdot x^{n-k} + ... + a^n$$

немесе

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k\cdot x^{n-k}.$$

анықталады.

А және В оқиғалары үйлесімсіз болсын. А оқиғасының орындалу ықтималдығын Р(А), ал В оқиғасының пайда болуын Р(В) деп белгілейік. Егер екі оқиғаның біреуінің пайда болуы екіншісінің пайда болу ықтималдығын өзгертпесе, ондай екі оқиғаны тәуелсіз оқиғалар деп атайды.

Егер екі оқиғаның біреуінің пайда болуы екіншісінің пайда болу ықтималдығын өзгертетін болса, ондай екі оқиғаны тәуелді оқиғалар деп атайды.

Екі немесе бірнеше үйлесімсіз оқиғалардың қосындысының ықтималдығы олардың ықтималдықтарының қосындысына тең болады.

$$P(A+B+...+D) = P(A)+P(B)+...+P(D)$$

Егер *A* және *B* үйлесімді оқиғалар болса, онда

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

1-мысал. Жәшікте ақ, қызыл, көк түсті шарлар бар. Ақ шардың алыну ықтималдығы $\frac{7}{12}$, қызыл шардың алыну ықтималдығы $\frac{1}{12}$, ал көк шардың алыну ықтималдығы $\frac{1}{3}$. Алынған шардың қызыл болмауының ықтималдығы қандай.

$$P(A)+P(C)=\frac{7}{12}+\frac{1}{3}=\frac{11}{12}.$$

А оқиғасының В оқиғасы пайда болғандағы есептелген ықтималдығын А оқиғасының шартты ықтималдығы деп айтады және $P_B(A)$ деп белгілейді.

2-мысал. Жәшікте 4 қызыл және 6 ақ шар бар. Жәшіктен бір қызыл шар алынғаннан кейін ақ шардың алыну ықтималдығын табу керек.

Шешуі: А – қызыл шар алынуы

В – ақ шар алынуы

$$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5} \qquad P_A(B)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Егер *А* және *В* тәуелді оқиғалар болса, онда

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

мұнда $P_A(B)$ және $P_B(A)$ - шартты ықтималдықтар.

Егер *А* және *В* тәуелсіз оқиғалар болса, онда

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

3-мысал. «МАТЕМАТИКА» деген сөзді құрайтын әріптер жеке парақ қағаздарға жазылып, олар араластырылған. Осы араластырылған парақтардың ішінен қарамай-ақ үш парақ алғанда олардағы әріптер «КИТ» деген сөздің құралу ықтималдығын табу керек.

$$P(КИТ)=P(К)\cdot P_К(И)\cdot P_{КИ}(Т)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{360}$$

Оқиғаның кемінде бір рет пайда болуынынң ықтималдығы.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A}_1,\overline{A}_2,\ldots,\overline{A}_n)=1-q_1q_2\ldots q_n$$

Жеке жағдайда, егер $A_1, A_2,\ldots, A_n$ оқиғаларының пайда болуының ықтималдықтары бірдей болса, яғни

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p$$

онда

$$P(A) = 1 - q^n.$$

4-мысал. Екі мерген атыс алаңында атыс жүргізуде. Бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы – 0,7, екіншісінікі – 0,8 ге тең. Егер екеуі де бір-бірден атыс жасаса, ең болмағанда біреуінің нысанаға дәл тигізетіндігінің ықтималдығы қандай?

Шешуі: *A* – бірінші мерген нысанаға дәл тигізді. *B* – бірінші мерген нысанаға дәл тигізді. Бұл екі оқиға үйлесімді, себебі екі мерген де нысанаға дәл тигізуі мүмкін. Сондықтан үйлесімді оқиғалардың қосындыларының ықтималдығы туралы теореманы пайдаланып:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

$$P(A+B) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94$$

екенін табамыз.

Осы мысалды ең болмағанда бір оқиғаның пайда болуы (оқиға D) туралы теореманы пайдаланып та шығаруға болады. Сонда

$$P(D) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 = 0,94.$$

Мектепте ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистиканы оқыту жағдайын жүйелі түрде бақылау, білім алуға деген қызығушылық тек оқыту материалымен ғана емес, сонымен бірге оқыту процесі арқылы пайда болады.

Оқушыларды ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарымен таныстыру қоршаған ортаны тану және осы ортаның ғылыми дәлелденген бейнесін құру үшін қажет. Математиканың кез-келген бөлімін оқып-үйренудің нәтижесі оқушылардың ақыл-ойының дамуынан көрінеді, өйткені бұл белгілі бір ұғымдармен байланысты логикалық ойлау дағдысын қалыптастырады.

Ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистиканың теориялық негізін есеп түрінде меңгеру оқушылардың ойын белсендіреді, икемділік, тереңдік, жүйелік және тағы басқа қажетті қасиеттерді де қалыптастырады. Ықтималдықтар теориясы оқушылардың ойын дамытуда маңызды рөл атқарады, оның қорытындылары күнделікті өмірде, ғылымда, техникада және т.б. қолданылады.

Әдебиеттер:

1. “Білім” ғылыми-педагогикалық журнал. -Алматы №6, 2009.
2. “Математика-Физика” ғылыми-әдістемелік журнал. №4, 2005.
3. «Педагогикалық кеңес» республикалық ғылыми-әдістемелік журнал, №4. 2009.
4. “Математика-Физика” ғылыми-әдістемелік журнал, №3, 2003.
5. “Математика-Физика” ғылыми-әдістемелік журнал, №5, 2006.
6. Б.С.Жаңбырбаев, Ү.Б.Жаңбырбаева «Ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика» Алматы, 2006.
7. Қазешев А.Қ. Ықтималдықтар теориясы бойынша есептер шығару, Алматы: Ғылым, 1991, 106 б.