ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш. ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ

С.Ж. МАХИМОВА

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУ ПӘНІНЕН СТУДЕНТТЕРДІҢ ӨЗІНДІК ЖҰМЫСТАРДЫ ОРЫНДАУ ҮЛГІЛЕРІ

Әдістемелік нұсқау

Ақтау - 2009

ӘОК: 378 (075,8):51

Махимова С.Ж.

Математикалық талдау пәнінен студенттердің өзіндік жұмыстарды орындау үлгілері. Әдістемелік нұсқау.
Ақтау: КМТжИУ, 2009. – 31 бет.

Бұл әдістемелік нұсқау математика мамандығы бойынша жоғары оқу орындарының бағдарламасына сәйкес жазылған. Мұнда элемантар функциялар теориясының негізгі анықтамалары мен қасиеттерін терең түсіну үшін, таңдалып алынған мысалдар қарастырылған және әрбір тақырыптардың соңында есептер берілген. Сондықтан бұл әдістемелік нұсқауын аралық бақылауға есептер жинағы ретінде пайдалануға болады.

Бұл әдістемелік нұсқау кредиттік жүйе бойынша оқытылатын оқу орындарының студенттеріне арналған.

ПІКІР БЕРУШІЛЕР: ф.-м.ғ.к., КМТжИУ профессоры М.Ш. Тілепиев

Баспадан шығаруға Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті педагогика институтының әдістемелік кеңесі ұсынған.

Кіріспе

Математикалық талдау - кез-келген математикалық пәннің негізі болатын классикалық математиканың бөлігі.

«Математикалық талдау» курсы белгілі білім қорын жеткізіп және оларды қолдануға үйретіп қана қоймай, ол сонымен қатар математиканы оқып-үйрену үшін қажетті студенттердің логикалық ойлауын және математикалық мәдениетін дамытады.

«Математикалық талдау» пәні жалпы ғылыми пән болып табылады – ол студенттерді басқа математикалық пәндерді оқып-үйренуге дайындайды.

Математикалық талдауды табысты меңгеру үшін орта мектеп көлеміндегі элементарлық математиканы, сондай-ақ қатар оқылатын жоғарғы және сызықтық алгебраны, аналитикалық геометрияны білу қажет.

Бұл әдістемелік нұсқау университеттің «Математика», «Физика», «Информатика» мамандықтарында оқитын студенттердің «Математикалық талдау» курсын жеткілікті дәрежеде меңгеруі үшін, есептерді жалпылама шеше алуды үйренуі үшін, жүйелеп оқу принципін кеңінен қолдана отырып, пәнаралық байланысты тиімді пайдалану үшін қажет және олардың кәсіптік біліктілігін жетілдірудің ғылыми ізденістеріне ұмтылуын жетілдіру; стандартты және стандартты емес математикалық есептерді шешу техникасында тәжірибелік біліктіліктерін қалыптастыру, «Математикалық талдау» курсын өту барысында студенттердің тікелей өз бетімен жұмыс жасауға ыңғайландыру, өз бетімен есептерді шығарып, оны талдау дағдыларын қалыптастыру үшін де пайдалы.

1. Тізбектің шегі

Анықтама. Егер алдын ала берілген кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, $n > N$ нөмірлері үшін
$|x_n - a| < \varepsilon$
теңсіздігі орыдалса, онда a саны $\{x_n\}$ тізбегінің шегі деп аталады және былай белгіленеді:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Мысал. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+5}{n+1} = 2;$ болатынын дәлелдейік.

Шешуі. $\dfrac{2n+1}{n+1} - 2 = -\dfrac{1}{n+1}$ айырмасын құрып, осы айырманың абсолют шамасын бағалайық:

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

Осыдан $$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}; \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon)$$

Сонымен алдын ала берілген кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, $n > N$ нөмірі үшін

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon)$$

теңсіздігі орындалады, ендеше 2 саны берілген $\{\dfrac{2n+1}{n+1}\}$ тізбегінің шегі болады.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ болатынын дәлелдейік.

Шешуі. $$x_n - 1 = \frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1}$$

айырмасын құрып, осы айырманың абсолют шамасын бағалайық:

$$\left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

Осыдан $$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}; \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon)$$

Сонымен алдын ала берілген кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, $n > N$ нөмірі үшін

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon)$$

теңсіздігі орындалады, ендеше 1 саны берілген $\{\dfrac{n}{n+1}\}$ тізбегінің шегі болады.

Тізбектің шегі туралы теоремалар.

1. Егер $\{x_n\}$, ,$\{y_n\}$ тізбектері жинақты болса, онда $\{x_n+y_n\}$,$\{x_n\text{-}y\}$ тізбектері де жинақты болады және де

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n,$$

яғни жинақты екі тізбектің қосындысының шегі сол тізбектердің шектерінің қосындысына теңболады.

2. Егер $\{x_n\}$, ,$\{y_n\}$ тізбектері жинақты болса, онда $\{x_n y_n\}$ тізбегі де жинақты болады және де

$$\lim x_n y_n = \lim x_n \lim y_n,$$

яғни жинақты тізбектер көбейтіндісінің шегі олардың шектерінің көбейтісіне тең болады.

Ескерту. Егер барлық $n \in N$ нөмірлері үшін x_n =C болса, онда

$$\lim x_n = \lim C == C,$$

яғни тұрақты санның шегі өзіне тең.

Салдар. Егер $\{x_n\}$ тізбегі жинақты болса, кез келген C саны үшін $\{Cx_n\}$ тізбегі де жинақты болады және де

$$\lim Cx_n = \lim C \lim x_n = C \lim x_n$$

яғни тұрақты көбейткішті шек таңбасының алдына шығаруға болады.

3. Егер $\{x_n\}$, ,$\{y_n\}$ тізбектері жинақты болса, сонымен бірге $\lim y_n \neq 0$ онда $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ тізбегі де жинақты болады және де $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

Мысалдар. Есептеңіз

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{3n^3 - 5}$

Шешуі. $n \to \infty$ жағдайда бөлшектің алымы да, бөлімі де шексіздікке ұмтылады, сондықтан шектер туралы теореманы бірден қолдану мүмкін емес.Сондықтан бұл бөлшектің алымын да, бөлімін де n^3-қа бөліп, содан кейін бөлшектің және қосындының шегі туралы теоремаларды қолданамыз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{3n^3 - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{5}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3 - \frac{5}{n^3})} = \frac{4}{3}.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3 - 3n^2 - 2}{3n^2 - 4}$

Шешуі. $n \to \infty$ жағдайда бөлшектің алымы да, бөлімі де шексіздікке ұмтылады, сондықтан шектер туралы теореманы бірден қолдану мүмкін емес.Сондықтан бұл бөлшектің алымын да, бөлімін де n^3-қа бөліп, содан кейін бөлшектің және қосындының шегі туралы теоремаларды қолданамыз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 3n^2 - 2}{3n^2 - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^3}}{\frac{3}{n} - \frac{4}{n^3}} = \infty.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 5}{3n^3 + 2n + 4}$

Шешуі. $n \to \infty$ жағдайда бөлшектің алымы да, бөлімі де шексіздікке ұмтылады, сондықтан бөлшектің алымын да, бөлімін де n^3-қа бөліп, содан кейін бөлшектің және қосындының шегі туралы теоремаларды қолданамыз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 5}{3n^3 + 2n + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{5}{n^3}}{3 + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3}} = \frac{0}{3} = 0.$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^3}{n^2 + 1} - \frac{3n^2}{3n + 1})$

Шешуі. $n \to \infty$ жағдайда бөлшектің екеуі де шексіздікке ұмтылады, сондықтан шек таңбасының астындағы өрнектерді ортақ бөлімге келтіріп, бөлшектің алымын да, бөлімін де n^3-қа бөліп, содан кейін бөлшектің және қосындының шегі туралы теоремаларды қолданамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(3n+1)-3n^2(n^2+1)}{(n^2+1)(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3n^2}{(n^2+1)(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}}{(1+\frac{1}{n^2})(3+\frac{1}{n})}=$$

$$=\frac{1-0}{(1+0)(3+0)}=\frac{1}{3}.$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$

Шешуі. Бұл жерде бөлшектің алымында қосынды тұрғанмен қосындының шегі туралы теореманы қолдана алмаймыз, өйткені қосылғыштардың саны *n*-ге байланысты өсіп отырады.Сондықтан алдымен түрлендіріп аламыз. Алымындағы қосынды айырмасы *d=1* болатын арифметикалық прогрессияның мүшелерінің қосындысына тең, яғни

$\dfrac{(1+n)n}{2}$ -ге тең, олай болса

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+1}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}$

Шешуі. Бұл бөлшектің алымында да, бөлімінде де шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның (n+1) мүшелерінің қосындысы тұр.
Бізге белгілі мына формула бойынша

$S_n=\dfrac{u_1}{1-q}$, мұндағы $q-$ еселігі, ал u_1- бірінші мүше, қосындының орнына қоямыз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}.$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$

Шешуі. $n \to \infty$ жағдайда бөлшектің алымы да, бөлімі де шексіздікке ұмтылады, сондықтан бөлшектің алымын да, бөлімін де n^2-қа бөліп, содан кейін бөлшектің және қосындының шегі туралы теоремаларды қолданамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{3}.$$

Тексеру сұрақтары.

1. Сандық тізбек деген не?
2. Сандық тізбектің берілу тәсілдері қандай?
3. Сандық тізбектің қандай сипаттамалары бар?(шектелген, шектелмеген, монотонды, т.с.с.)
4. Тізбек шегінің анықтамасы.
5.Жинақты тізбек деген не?
6. Тізбек шегі туралы теоремалар.

Өз бетімен орындауға тапсырмалар:

1. Тізбектің шегі анықтамасын пайдаланып, дәлелдеңіз:

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0;$

1.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}=2;$

1.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n}=1;$

1.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=1;$

1.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2;$

1.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n+1}=2;$

1.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n}=2;$

1.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2;$

1.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}=1;$

1.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{n+1}=1;$

2. Есептеңіз:

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}$

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n+1}{3n^2};$

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1};$

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n\ \ +1};$

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1};$

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^2-3}{n^2+1};$

2.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3}{3n^2+1};$

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-3}{n^2+1};$

2.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3}{3n+1};$

2.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{5n^3+1};$

3. Есептеңіз:

3.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}};$

3.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 2^n}{3^n-2};$

3.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{5^n-2};$

3.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 2^n}{5^n-2};$

3.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2};$

3.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2};$

3.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 2^n}{2^n-3};$

3.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n}{3^n-2};$

3.9. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n});$

3.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^{n+1}}{3^n+2^n}.$

2. Бір айнымалының функциясы

Әртүрлі сан мәндерді қабылдайтын шаманы айнымалы шама деп атайды. Сан мәндері өзгермейтін шаманы тұрақты шама деп атайды. Айнымалы шамаларды x,y,z,… деп, ал тұрақты шамаларды a,b,c,.., деп белгілейміз.

Айнымалы шаманың қабылдайтын барлық сан мәндерінің жиынын оның өзгеру облысы деп атаймыз.

Анықтама. Егер x айнымалысының қандай да бір облыстан алынған әрбір мәніне келесі бір айнымалы y – тің белгілі бір мәні белгілі бір заңдылықпен сәйкес келіп отырса, онда y айнымалысы x айнымалысының функциясы деп аталады. Символды түрде функцияны былай белгілейміз: y=f(x), y= $\varphi(x)$,т.с.с.

Функцияның берілу тәсілдері: аналитикалық, таблицалық, графиктік.

Анықтама. y айнымалысының y=f(x) заңдылығы бойынша мағынасы болатын x- тің қабылдайтын мәндерінің жиынын осы функцияның анықталу облысы деп атаймыз.

Мысалы.

1. $f(x)=\sqrt{7x+2}$ берілген. Осы функцияның

а) Анықталу облысы $D(f)$-ті табу керек;

б) $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$ мәндерін табу керек;

в) тақ немесе жұптығын тексеру керек.

Шешуі.

а) Түбірдің көрсеткіші жұп болғандықтан $7x+2\geq 0$ болады. Бұл арадан $x\geq -\frac{2}{7}$.

Сондықтан $D(f)=\left[-\frac{2}{7};+\infty\right)$.

б) $f(0)=\sqrt{2};\ f(1)=3;\ f(-1)$ анықталмаған, өйткені $x=-1$ функцияның анықталу облысына кірмейді.

в) $f(-x)=\sqrt{7(-x)+2}=\sqrt{2-7x}$, яғни берілген функция тақ та емес, жұп та емес.

2. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$ берілген. Осы функцияның

а) Анықталу облысы $D(f)$-ті табу керек;

б) $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$ мәндерін табу керек;

в) тақ немесе жұптығын тексеру керек.

Шешуі. а) Функция бөлшек түрінде берілгендіктен, оның бөлімі $x^2-9\neq 0$болуы керек. Осы арадан $x\neq\pm 3$ екені шығады. Ендеше анықталу облысы $D(f)$- $(-\infty;-3)\cup(-3;+3)\cup(3;\infty)$.

б) $f(0)=\dfrac{0}{0-9}=0$; $f(1)=\dfrac{1}{1-9}=-\dfrac{1}{8}$; $f(-1)=\dfrac{-1}{1-9}=\dfrac{1}{8}$

в) $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-9}=-\dfrac{x}{x^2-9}=-f(x)$.

Ендеше берілген функция – тақ функция.

Мына түрдегі функцияны қарастырайық *y=f(u)*, *u=*φ *(x)*. Сонда *y* айнымалысы да *x* - тің функциясы болады. Бұл функция күрделі функция деп аталады. Оны былай белгілейді:

$$Y=f(\varphi(x)).$$

мұндағы u аралық аргумент деп аталады.Мысалы, егер $y=2^u$, ал $u=cosx$, онда мынадай күрделі функция шығады $y=2^{cosx}$.
Күрделі функцияның анықтамасын пайдаланып, элементар функцияның анықтамасын берейік.

Анықтама. Элементар функция дегеніміз - негізгі элементар функциялардан арифметиканың төрт амалы (қосу,алу,көбейту,бөлу) және функциядан функция алу арқылы құрылған бір формула түрінде берілген функция.
Элементар функцияның мысалдары

$$y=\lg(1+\sin^2 x); \quad y=3^{\arcsin x^2}; \quad y=\frac{x^3+x+1}{x^2-2x+3}.$$

Мысалдар. Берілген функцияларды элементар функциялардың тізбегіне жіктеу керек.

а) $y=\arccos(8x-1)$

Шешуі. Аралық аргументті енгіземіз, яғни $u=8x-1$, сондықтан берілген функция мынадай элементар функциялардың тізбегіне жіктеледі:

$$\begin{cases} y=\arccos u; \\ u=8x-1 \end{cases}$$

б) $y=\ln\cos(x+7)$

Шешуі. Аралық аргументті енгіземіз, яғни $u=x+7; \quad v=\cos u$, сондықтан берілген функция мынадай элементар функциялардың тізбегіне жіктеледі:

$$\begin{cases} y=\ln v; \\ v=\cos u; \\ u=x+7 \end{cases}$$

Тексеру сұрақтары.

1. Функцияның анықтамасы.
2. Берілу тәсілдері.
3. Функцияның анықталу облысы, өзгеру облысы деген не?
4. Функцияның қарапайым қасиеттері.
5. Негізгі элементар функцияларға қандай функциялар кіреді?
6. Күрделі функция деген не?
7. Қандай функцияның кері функциясы бар болады?
8. Айқын, айқын емес функциялар анықтамалары.

Өз бетімен орындауға тапсырмалар.

1. $f(x)$ функциясы берілген. Осы функцияның

а) Анықталу облысы $D(f)$-ті табу керек;

б) $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$ мәндерін табу керек;

в) тақ немесе жұптығын тексеру керек.

1.1. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$;

1.2. $f(x)=\dfrac{x+1}{4x^2-1}$;

1.3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$;

1.6. $f(x)=\log_5(-x+5)$;

1.7. $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$;

1.8 . $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$;

1.4. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$;

1.5. $f(x)=\sqrt{x^2-16}$;

1.9. $f(x)=\lg(x^2-4)$;

1.10. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

2. Берілген функцияларды элементар функциялардың тізбегіне жіктеу керек.

2.1. $y=(7x+1)^{11}$

2.2. $y=\sqrt{9x^2+1}$

2.3. $y=\sqrt[3]{x-2}$

2.4. $y=\arcsin 3^x$

2.5. $y=arctg(5x-1)$

2.6. $y=(7x+12)^{10}$

2.7. $y=(7x+1)^{\frac{2}{3}}$

2.8. $y=\arcsin 2^{x-1}$

2.9. $y=\sqrt[3]{x-2}$

2.10. $y=\sqrt[3]{3x+1}$

3. Негізгі элементар функциялар тізбегін бір күрделі функция түрінде жазыңыз.

3.1. $\begin{cases} y=arctgu; \\ u=\sqrt{v}; \\ v=x+1 \end{cases}$

3.2 . $\begin{cases} y=e^u; \\ u=\sqrt{v}; \\ v=\sin x. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} y=\sqrt{u}; \\ u=ctgv; \\ v=\dfrac{x}{2} \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} y=\sqrt[3]{u}; \\ u=\sin v; \\ v=e^x \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} y=\arcsin u; \\ u=\sqrt[3]{v}; \\ vx-1 \end{cases}$

3.6 . $\begin{cases} y=\sqrt[5]{u} \\ u=\sin v \\ v=2x+4 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} y=arcctgu \\ u=\sqrt{v+1} \\ v=2x \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} y=\arccos u \\ u=\sqrt{v} \\ v=2x \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} y=arcctgu \\ u=\sqrt{v+1} \\ v=2x \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} y=arctgu; \\ u=\sqrt{v}; \\ v=x^4+1 \end{cases}$

3. Функцияның шегі.

f(x) фунциясы *x=a* нүктесінің маңайында анықталған болсын.

Анықтама 1. Егер *a* санына жинақты кез келген $\{x_n\}$ тізбегі, мұның әрбір элементі

$x_n \neq a$, үшін *f(x)* функциясы мәндерінің сәйкес $\{f(x_n)\}$ тізбегі А санына жинақты болса, онда А санын *f(x)* функциясының *x*-ң *a*-ға ұмтылғандағы шегі деп атаймыз.Оны былай белгілейміз:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$

Анықтама 2. Егер кез келген оң ε санына сәйкес $\delta>0$ саны табылып, $|x-a|<\delta$ шартын қанағаттандыратын барлық *x* үшін $|f(x)-A|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда *A* санын *f(x)* функциясының *x* –тің *a*-ға ұмтылғандағы шегі деп атаймыз. Былай белгілейміз: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$

Осы екі анықтама мәндес, содықтан қолайлы болған тұста қай-қайсысын да болса қолдана беруге болады. Мұның біріншісі функция шегінің Гейне бойынша, ал екіншісі Коши бойынша анықтамасы деп аталады.

Мысалдар. 1. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ функциясының $x\to 3$ --да шегінің 6-ға тең екенін дәлелдейік.

Шешуі. Бұл функция $x\neq 3$ мәндерінің бәрінде анықталған.
Кез келген оң ε санына сәйкес δ >*0* саны табылып, мына теңсіздік

$$\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|\prec\varepsilon \qquad (1)$$

орындалатынын дәлелдейміз, мұнда $|x-3|\prec\delta$. Ал бұл теңсіздік мына теңсіздікке эквивалентті.

$$\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|\prec\varepsilon;\quad |x-3|\prec\varepsilon \qquad (2)$$

Сонымен кез келген оң ε санына сәйкес (1) теңсіздік орындалуы үшін, (2)теңсіздік орындалуы керек. Ал бұл дегеніміз берілген функцияның шегі $x\to 3$ жағдайда 6-ға тең болады деген сөз.
Егер $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)$ және $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)$ шектері бар болса, онда мына теңдіктер орындалады:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\pm f_2(x))=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)\pm\lim\limits_{x\to a}f_2(x)$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)f_2(x))=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)\lim\limits_{x\to a}f_2(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)/f_2(x))=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)/\lim\limits_{x\to a}f_2(x);\ \lim\limits_{x\to a}f_2(x)\neq 0$

Мысалдар қарастырайық.

1. Мына функцияның $y=x^3+3x^2+2,\quad x\to 2$ шегін табайық.

Шешуі. $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+3x^2+2)=\lim\limits_{x\to 2}x^3+3\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}2=22$

2. Есептеу керек $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+5}$

Шешуі. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}.$

3. Есептеу керек $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

Шешуі. Бұл шек 0/0 түріндегі анықталмағандықты береді.Оны ашу үшін бөлшектің алымын да, бөлімін де алымы мен бөліміндегі өрнектің түйіндесіне көбейтеміз.

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}=\frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

x^2 – қа қысқартамыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{8}{2}=4.$$

4. Есептеу керек $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+5x+1}{6x^2+x+10}$

Шешуі . Бұл -- ∞ /∞ түріндегі анықталмағандық . Оны ашу үшін бөлшектің алымын да , бөлімін де x^{2}– қа бөлеміз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+5x+1}{6x^2+x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

5. Есептеу керек $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+6}{3x^2+4x+2}$

Шешуі. Бөлшектің алымын да , бөлімін де x^{2}– қа бөлеміз:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+6}{3x^2+4x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{0}{3}=0.$$

6. Есептеу керек $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3+x^2+1}{x^2-x+2}$

Шешуі. Бөлшектің алымын да , бөлімін де x^{3}– қа бөлеміз:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+x^2+1}{x^2-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{5}{0}=\infty$$

Егер $f(x)$ функциясының шегі $x\to a$ - да $x<a$ бола отырып A_1 санына ұмтылса, онда A_1 санын функцияның сол жақ шегі деп атаймыз, былай белгілейміз

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=A_1$$

Ал мына түрдегі шекті оң жақ шегі деп атаймыз

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=A_2$$

Сонымен $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A_1$ болуы үшін $A_1=A_2=A$ болуы қажетті және жеткілікті.

Анықтама. Егер кез келген оң ε санына сәйкес $\Delta>0$ саны табылып, барлық $x>\Delta$ үшін $|f(x)-A|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатын болса, онда A санын $f(x)$ функциясының $x\to\infty$ - ғы шегі деп атаймыз.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

Тамаша шектер. Берілген $y=\dfrac{\sin x}{x}$ функция $x=0$ нүктесінде $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық болады.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

түріндегі шек бірінші тамаша шек деп аталады,ал

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

немесе $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

екінші тамаша шек деп аталады.

Бұл $\left|1^{\infty}\right|$ түріндегі анықталмағандықты шешу үшін қолданылатын формула.

$y=\log_a x$ функциясында $a=e$ болса, онда $y=\ln x$ - натурал логарифм деп аталады.

$\lg x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}=\lg e\cdot\ln x$, $\lg\ e=M$ - ауысу модулі.

Сонда $\lg x=M\ln x$, $\ln x=\dfrac{1}{M}\lg x$, $\dfrac{1}{M}\approx 2{,}302585$.

Тексеру сұрақтары

1. Функция шегінің анықтамасы.
2. Функция шегі туралы теоремелар.
3. Тамаша шектер туралы.
4. Функцияның оң жақ, сол жақ шегі деген не?

Өз бетімен орындауға тапсырмалар.

1.Шектерді есептеу керек.

1.1. а) $\lim\limits_{x\to1}(3x^2-\dfrac{1}{x}+x^5)$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{4x^2-2x+5}{x^2+7x})$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{x}$

1.2. а) $\lim\limits_{x\to2}(4x^3+2x+7)$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{4x^3+5}{x^2+3x})$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x^3-1}{x+2}$

1.3. а) $\lim\limits_{x\to1}(3x^3-\dfrac{2}{x}+x^2)$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{4x^3-2x-2}{x^3+x+3})$; в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x+1}{3x^2+2}$

1.4. а) $\lim\limits_{x\to2}(x^3+2x-1)$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{2x^3-6}{x^2+x+2})$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-1}{x+2}$

1.5. а) $\lim\limits_{x\to2}(\dfrac{4}{x}+3x+5)$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{4x^3-5x+2}{x^2+3})$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-1}{x+2}$

1.6. а) $\lim\limits_{x\to2}(4x^3+2x^2+1)$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{4x+5}{x^2+3x-3})$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x^3-8}{x+3}$

1.7. а) $\lim\limits_{x\to-2}(4x^3+x+7)$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{4x^3+8}{x^2+3x-2})$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{x^2-11}{x+1}$

1.8. а) $\lim\limits_{x\to3}(\dfrac{2}{x}+2x^2+2)$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{3x^3+5x-2}{x^2+3})$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{x^3-1}{x-4}$

1.9. а) $\lim\limits_{x\to1}(x^3+\dfrac{x}{2}+4)$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{x^3+5x-6}{x^2+3x-5})$; в) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{4}}\dfrac{x\ \ -1}{x+2}$

1.10. а) $\lim\limits_{x\to2}(\dfrac{4}{x^2}+2x)$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{9x^3+5x-2}{x^2+3x+9})$; в) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{x^3-x}{x+1}$

2. Шектерді есептеу керек.

2.1. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-2x}{x^2-x}$

2.2. а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-x^2+x+6}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x\ \ -1}{3x^2-x-2}$

2.3. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-1}$

2.4. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$

2.5. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$

2.6. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^3+1}$ б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$

2.7. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$ б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-16}$

2.8. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$ б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-16}$

2.9. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-36}$

2.10. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-10x+25}$

3. Шектерді есептеу керек.

3.1. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-25}{x^2-10x+25}$

3.2. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-36}$

3.3. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$ б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-16}$

3.4. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$ б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-16}$

3.5. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^3+1}$ б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$

3.6. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$

3.7. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-1}$

3.8 а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$

3.9 а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-x^2+x+6}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$

3.10 а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-25}{x^2-10x+25}$.

4. Шектерді есептеңіз.

4.1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$

4.2. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$

4.3. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$ б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$

4.4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+6x+5}$

4.5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$

4.6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{1+x}}$

4.7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+7}}{\sqrt{7x}}$

4.8. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{3+x}-\sqrt{5+3x}}$

4.9. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+8}}{x^2+6x+9}$

4.10. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$

Мысалдар.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=1\cdot 5=5.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 5x}{x}}{\dfrac{\sin 3x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}=\dfrac{1\cdot 5}{1\cdot 3}=\dfrac{5}{3}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 3x}$

Шешуі. Бұл шекті есептеу үшін бізге тригонометриядан белгілі мына формуланы қолданамыз:

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Сонда осы формула бойынша бөлшектің алымын да, бөлімін де түрлендіреміз.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{2\sin^2\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin^2\frac{3x}{2}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin 2x}{2x})^2\cdot 4}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2\cdot\frac{9}{4}}=\frac{4}{\frac{9}{4}}=\frac{16}{9}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{2x}$

Шешуі. Бұл шекті есептеу үшін мынадай алмастыру жасаймыз:

$$\arcsin 5x=y;\quad 5x=\sin y;\quad x=\frac{1}{5}\sin y;\quad x\to 0;\, y\to 0$$

Олай болса,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{2x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{2\cdot\frac{1}{5}\sin y}=\frac{5}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\frac{5}{2}\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}}=\frac{5}{2}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\,6x}{3x}$

Шешуі. Айнымалыны алмастырамыз

$$arctg\,6x = y; \quad 6x = tgy; \quad x=\frac{1}{6}tgy; \quad x\to 0; y\to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,6x}{3x} =$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{3\cdot\frac{1}{6}tgy} = 2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{tgy} = 2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\sin y}{\cos y}} = 2\lim_{y\to 0}\frac{y\cos y}{\sin y} = 2\lim_{y\to 0}\cos y\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 2\cdot 1\cdot 1 = 2.$$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x+3}$

Шешуі. Бұл шекті есептеу үшін, алдымен негіздері бірдей дәрежелердің қасиетін қолданамыз, сонан соң көбейтіндінің шектерін табамыз және екінші тамаша шекті қолданамыз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)^{3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3\cdot 2}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{3} = e^{6}\cdot 1 = e^{6}.$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+(-\frac{3}{x})\right)^{(-\frac{x}{3})\,(-3)\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{3}{x}\right)^{1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+(-\frac{3}{x})\right)^{(-\frac{x}{3})(-6)}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right) = e^{-6}.$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+9}{x-1}\right)^{x+2}$

Шешуі. Бұл шекті есептеу үшін, алдымен жақша ішіндегі өрнекке 1-ді қосып, 1-ді алып тастаймыз, содан кейін мынадай амалдарды жасаймыз.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+9}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+9}{x-1}-1\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+9-x+1}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x-1}\right)^{x+2}$$

Осы арада мынадай алмастыру жасауға болады.

$$\frac{10}{x-1}=y; \quad x-1=\frac{10}{y}; \quad x=1+\frac{10}{y} \quad x\to\infty; y\to 0.$$

Орнына қоямыз

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+9}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{10}{y}+1+2} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{10}{y}}\cdot\lim_{y\to 0}(1+y)^{3} = \lim_{y\to 0}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{10}\cdot 1 = e^{10}$$

9. Шекті есептеңіз.

Шешуі.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{2-x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2}{x+3}-1\right)^{2-x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2-x-3}{x+3}\right)^{2-x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x+3}\right)^{2-x} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x+3}\right)^{2}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x+3}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x+3}\right)^{-x}$$

Алмастыру жасаймыз:

$$\frac{-5}{x+3}=y; \quad x+3=-\frac{5}{y}; \quad x=-\frac{5}{y}-3; \quad x\to\infty; y\to 0$$

Орнына қоямыз

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+9}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x+3}\right)^{-x} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{5}{y}+3} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{5}{y}}\lim_{y\to 0}(1+y)^{3} = e^{5}.$$

10. $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{1}{3-3x}}$

Шешуі.

$$\lim_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{1}{3-3x}}=\lim_{x\to 1}(1+7-6x-1)^{\frac{1}{3-3x}}=\lim_{x\to 1}(1+6-6x)^{\frac{1}{3-3x}}$$

Алмастыру жасаймыз:

$$6-6x=y;\quad 6(1-x)=y;\quad 1-x=\frac{y}{6};\quad x\to 1;\, y\to 0$$

$$\lim_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{1}{3-3x}}=\lim_{x\to 1}(1+6(1-x))^{\frac{1}{3(1-x)}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}}=e^2$$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)[\ln(x-3)-\ln x]$

Шешуі. Бұл жерде алдымен логарифмдердің айырмасының және дәреженің логарифмінің қасиетін қолданамыз:

$$\lim_{x\to\infty}(2x+1)[\ln(x-3)-\ln x]=\lim_{x\to\aleph}\ln(\frac{x-3}{x})^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\ln(1-\frac{3}{x})^{2x+1}=\ln\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})^{2x+1}=$$

$$=\ln\Big(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x}\right)^{2x}\cdot\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})^{1}\Big)=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x}\right)^{\frac{x}{-3}(-3)\cdot 2}=\ln e^{-6}=-6$$

Тамаша шектерді қолданып, есептеңіз

1а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}$

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{\frac{3x}{2}}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x^2}$

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{2x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2}$

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{3x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{5x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{tg2x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x}\right)^{-x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{2x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{2x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}$

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{5x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{-x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^{2x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{1-\cos 4x}$

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{2x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^{x-1}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos x}$

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{4x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{2x-1}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 5x}$

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{arctg4x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{\frac{x}{3}+2}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^{x-2}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{3x^2}$

4. Функцияның нүктедегі және аралықтағы үзіліссіздігі

$y = f(x)$ функциясы берілсін. $x_0 \in X$ - анықталу облысы болсын.

Анықтама

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз функция деп аталады.

$x_0 = \lim_{x \to x_0} x$ болғандықтан $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x)$, яғни үзіліссіз функция үшін шекке көшкенде "$\lim$" символы мен функция сипаттамасы "f" символының орындарын алмастырып жаза беруге болады.

Егер (1) теңдікте $f(x_0)$ санын теңдіктің сол жағына көшіріп және одан шек алатын болсақ, сонымен бірге $x \to x_0$ және $x - x_0 \to 0$ шарттарының мәндестігін ескерсек, онда

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [\, f(x) - f(x_0)] = 0 \qquad (2)$$

$x - x_0$ айырмасын аргумент өсімшесі деп атап, $x - x_0 = \Delta x$ деп белгілейік. Сонда $x = x_0 + \Delta x$, ал $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$- функцияның x_0 нүктесіндегі сәйкес өсімшесі.

Сонда (2) теңдік мына түрде жазылады:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0 .$$

Бұдан нүктедегі үзіліссіз функция үшін аргументтің ақырсыз кішкене өсімшесіне функцияның сол нүктеде ақырсыз кішкене өсімшесі сәйкес келетіндігі шығады.

Бірінші анықтама мынадай үш шарттың орындалуымен мәндес деп саналады:

а) x_0 нүктесі өзінің қандай да бір маңайымен қоса X анықталу облысына тиісті болады;

ә) x_0 нүктесінде функцияның бір жақты шектері бар болады және олар өзара тең, яғни

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

б) функциясының бір жақты шектері оның осы x_0 нүктесіндегі мәніне

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

тең болады.

Анықтама. Егер

$$\lim_{\delta \to \delta_0 - 0} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right)$$

теңдігі орындалса, онда f функциясы x_0 нүктесінде сол (оң) жақты үзіліссіз функция деп аталады.

Анықтама. Егер f функциясы қандай да бір аралықтың әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол сол аралықта үзіліссіз функция деп аталады.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін оған тәуелді $\delta > 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесінде f функциясы үзіліссіз деп аталады (символдар арқылы $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad x_0$ нүктесінде f - үзіліссіз).

Теорема. Егер $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы нүктеде мына функциялар да $f_1(x)\pm f_2(x), f_1(x)\cdot f_2(x), \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}, f_2(x)\neq 0$ үзіліссіз болады.

Теорема. Егер $u=u(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінде үзіліссіз болып, ал $f(M)$ функциясы $u_0=u(x_0)$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f\left[u\,(x)\right]$ күрделі функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болады.

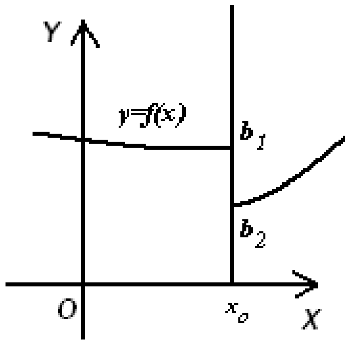
Теорема. Кез келген элементар функция анықталу облысының әрбір нүктесінде үзіліссіз болады.

5. Үзіліс нүктелері және оларды классификациялау

Анықтама. Функцияның үзіліссіздік қасиеті орындалмайтын нүктелері осы функцияның үзіліс нүктелері деп аталады.

Функцияның әрбір үзіліс нүктесінде оның үзіліссіздігінің кемінде бір шарты бұзылады. Осы шарттардың бірі болмаса бірі орындалмауына қарай үзіліс нүктелері былайша классификацияға бөлінеді:

а) бірінші текті үзіліс**.** Егер x_0 нүктесінде f функциясының сол жақты және оң жақты шектері бар болып, бірақ олар бір-біріне тең болмаса, немесе олар бір-біріне тең, бірақ олар x_0 нүктесіндегі функцияның мәніне тең емес, немесе $f(x_0)$ анықталмаған болса, онда x_0 нүктесі f функциясының бірінші текті үзіліс нүктесі деп аталады.

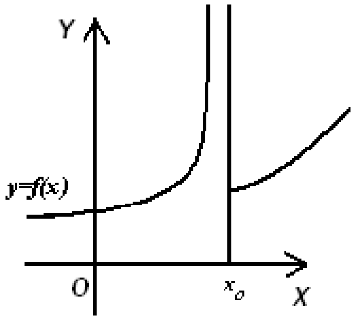


1- сурет

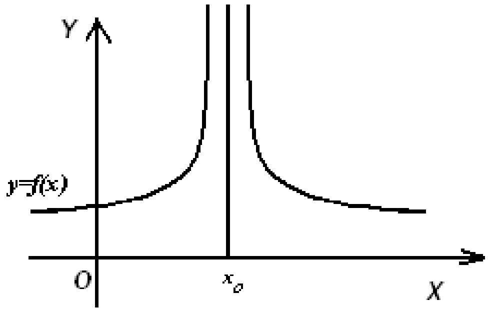
$f(x_0-0)=в_1,\;\; f(x_0+0)=в_2,\;\; f(x_0+0)-f(x_0-0)=в_2-в_1<\infty.$

$в_1\neq в_2$ x_0 нүктесінде 1- ші текті үзіліс;

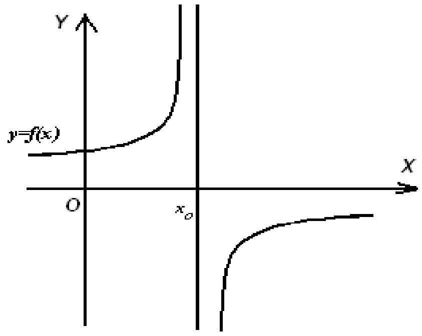
ә) екінші текті үзіліс. Егер x_0 нүктесінде алынған f функциясының бір жақты шектерінің кемінде бірі шексіз болып, не тіпті ол болмаса, онда сол x_0 нүктесі f функциясының екінші текті үзіліс нүктесі деп аталады.



2 - сурет



3-сурет



4-сурет

Анықтама. Егер f функциясы бүкіл $[a,в]$ кесіндісінде анықталған болып және де кесіндінің, мүмкін бірінші текті үзіліс болатын саны шектеулі нүктелерден басқа барлық ішкі нүктелерінде үзіліссіз болса, мұнымен қоса a нүктесінде оң жақты үзіліссіз, ал $в$ нүктесінде сол жақты үзіліссіз болса, онда f функциясы $[a,в]$ кесіндісінде үздікті үзіліссіз функция деп аталады.

Мысалдар. 1. $f(x)=9^{\frac{4}{x+6}}$; 2. $f(x)=\dfrac{8}{x-3}$ функциялары берілген.

1. Функциялардың үзіліс нүктелерін табу керек.
2. Функциялардың үзіліс нүктелерінің сол және оң жақ шектерін табу керек
3. Үзіліс нүктелеріне сипаттама беру керек.

Шешуі.

Элементар функциялардың үзіліс нүктелері тек олардың анықталмаған нүктелерінде ғана болады, егер бұл нүктелердің аймағында функциялар анықталған болса. Элементар емес функциялардың үзіліс нүктелері олардың анықталған да, анықталмаған да олыстарында жата береді.

1. $f(x)=9^{\frac{4}{x+6}}$ функциясы үшін $x=-6$ нүктеі берілген функцияның анықталу облысына кірмейді, әрі осы нүктенің аймағында функция анықталған болғандықтан $x=-6$ үзіліс нүктесі болады.

Енді сол жақ, оң жақ шектерін табайық.

$$f(-6-0)=\lim_{x\to-6-0}9^{\frac{4}{x+6}}=\left|9^{\frac{4}{-0}}=9^{-\infty}\right|=0;$$

$$f(-6+0)=\lim_{x\to-6+0}9^{\frac{4}{x+6}}=\left|9^{\frac{4}{+0}}=9^{+\infty}\right|=\infty.$$

Енді үзіліс нүктесіне сипаттама берейік.

$f(-6+0)=\infty.$ болғандықтан, $x=-6$ нүктесі 2- текті үзіліс нүктесі болады.

2. $f(x)=\dfrac{8}{x-3}$ функциясы үшін $x=3$ нүктеі берілген функцияның анықталу облысына кірмейді, әрі осы нүктенің аймағында функция анықталмаған болғандықтан $x=3$ үзіліс нүктесі болады.

Енді сол жақ, оң жақ шектерін табайық.

$$f(3-0)=\lim_{x\to3-0}\frac{8}{x-3}=\left|\frac{8}{-0}\right|=-\infty;$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to3+0}\frac{8}{x-3}=\left|\frac{8}{+0}\right|=+\infty.$$

Енді үзіліс нүктесіне сипаттама берейік.

$f(3+0)=\infty$. $f(3-0)=-\infty$ болғандықтан, $x=3$ нүктесі 2- текті үзіліс нүктесі болады.

Тексеру сұрақтары.

1. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасы.
2. Нүктедегі үзіліссіздіктің қандай шарттары бар?
3. Функцияның нүктедегі сол жақты, оң жақты үзіліссіздігінің анықтамасы.
4. Нүктедегі үзіліссіз функциялардың қандай қасиеттері бар?
5. Аралықтағы үзіліссіз функцияның анықтамасы.
6. Үзіліс нүктелерінің қандай сипаттамалары бар?
7. 1-текті,2-текті үзіліс нүктелері қалай анықталады?

Өз бетімен орындауға тапсырмалар.

1. Берілген функциялардың үзіліс нүктелерін табу керек.
2. Функциялардың үзіліс нүктелерінің сол және оң жақ шектерін табу керек
3. Үзіліс нүктелеріне сипаттама беру керек.

1. а) $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}$ б) $g(x)=\dfrac{2}{7-x}$

2. а) $f(x)=6^{\frac{2}{x+3}}$ б) $g(x)=\dfrac{-2}{2-x}$

3. а) $f(x)=3^{\frac{2}{x-3}}$ б) $g(x)=\dfrac{5}{x-5}$

4. а) $f(x)=5^{\frac{1}{x+4}}$ б) $g(x)=\dfrac{5}{7+x}$

5. а) $f(x)=2^{\frac{5}{x+2}}$ б) $g(x)=\dfrac{2}{8-x}$

6. а) $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}$ б) $g(x)=\dfrac{7}{6-x}$

7. а) $f(x)=2^{\frac{2}{3-x}}$ б) $g(x)=\dfrac{4}{2+x}$

8. а) $f(x)=3^{\frac{1}{3-x}}$ б) $g(x)=\dfrac{9}{6-x}$

9. а) $f(x)=4^{\frac{2}{x+6}}$ б) $g(x)=\dfrac{2}{6-x}$

10. а) $f(x)=7^{\frac{1}{x-3}}$ б) $g(x)=\dfrac{6}{9-x}$

2. Функциялар берілген. Функцияның үзіліссіздігін тексере отырып, графигін тұрғызу керек.

1. а) $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<1; \\ x^2+2, & -1\le x<1; \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0; \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2; \\ -x+4, & x>2. \end{cases}$

2. а) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x\le 1; \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ -(x-1)^2, & 0<x<2; \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$

3. а) $f(x)=\begin{cases}-2(x+1), & x\le 1;\\ (x+1)^3, -1<x<0;\\ x, & x\ge 0.\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ x^2, 0<x\le 2;\\ x+1, & x>2.\end{cases}$

4. а) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1;\\ 2x, 1<x\le 3;\\ x+2, & x>3.\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x-3, & x<0;\\ x+1, 0\le x<4;\\ x+3, & x\ge 4.\end{cases}$

5. а) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0;\\ 0, 0<x\le 2;\\ x-2, & x>2.\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}2x^2, & x\le 0;\\ x, & 0<x\le 1;\\ x+2, & x>1.\end{cases}$

6. а) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0;\\ x, & 0<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0;\\ x^2-1, 0<x\le 2;\\ -x, & x\ge 1.\end{cases}$

7. а) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le \pi/2;\\ 0, \pi/2<x<\pi;\\ 2, & x\ge \pi.\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 0;\\ x^2, 0<x<2;\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$

8. а) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0;\\ x^2+1, 0\le x<2;\\ x+1, & x\ge 2.\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0;\\ 1, 0<x\le 2;\\ x^2-2, & x>2.\end{cases}$

9. а) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0;\\ \sin x, & 0<x<\pi;\\ 3, & x\ge \pi.\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<-1;\\ x^2+1, -1\le x\le 2;\\ 2x, & x>2.\end{cases}$

10. а) $f(x)=\begin{cases}3x+4, & x\le -1;\\ x^2-2, -1<x<2;\\ x, & x\ge 2.\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1;\\ (x-2)^2, & 1<x\le 3;\\ -x+6, & x>3.\end{cases}$

6. Функция туындысы

Анықтама. $y=f(x)$ функциясы $(a,в)$ интервалында анықталған болсын. Осы интервалдан $x_0+\Delta x$ нүктесі шықпайтындай етіп, x_0 аргументіне $\Delta x\ne 0$ өсімшесін берейік. Сонда $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі сәйкес өсімшесі

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

болады.

Анықтама. $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы деп Δx нөлге ұмтылғанда функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының шегін айтады. $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысын $f'(x_0)$ немесе $y'(x_0)$ деп белгілейді

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Егер $y=f(x)$ функциясының $(a,в)$ интервалдың әрбір x нүктесінде туындысы бар болса, онда ол туынды x аргументінің функциясы болып табылады және оны

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

деп белгілейді.

Туынды табу амалы функцияны дифференциалдау деп аталады. Сонымен, функция туындысын табу үшін:

а) аргумент x-ке Δx өсімшесін береді;

б) осыған сәйкес Δy функция өсімшесін табады;

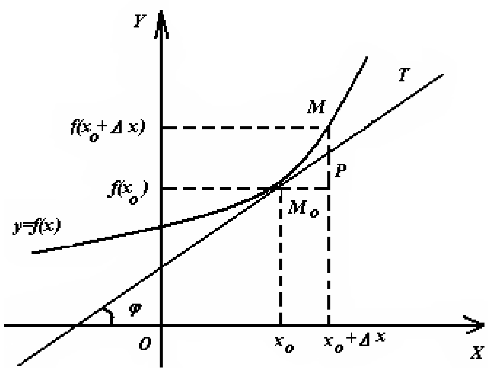
б) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынасын табады;

в) осы қатынастың $\Delta x \to 0$ шегін табады.

Туындының геометриялық және механикалық мағынасы

а) туындының геометриялық мағынасы. Алдымен қисық сызыққа жүргізілген жанаманың анықтамасын келтірейік.

$(a,в)$ интервалында анықталған және үзіліссіз $y=f(x)$ функциясының графигін қарастырайық.



$(a,в)$ $x_0 \in (a,в)$, Δx- өсімше.

$$M_0(x_0\, f(x_0)),\ M(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$$

Анықтама. $y=f(x)$ қисығына M_0 нүктесінде жүргізілген жанама деп графиктің M нүктесі оның M_0 нүктесіне ұмтылғандағы $(\Delta x \to 0)$ қиюшысының шектік орны (егер ол бар болса) M_0T түзуін атайды.

Егер $f'(x_0)$ туындысы бар болса, онда $y=f(x)$ қисығы графигінің $M_0(x_0, f(x_0))$ нүктесінде M_0T жанамасын жүргізуге болады. Сонда $\Delta x \to 0$ жағдайда

$$M_0M \to M_0T \Rightarrow \varphi \to \varphi_0 \Rightarrow tg\,\varphi \to tg\,\varphi_0,$$

мұндағы φ мен φ_0 сәйкесінше OX өсімен (M_0M) қиюшысы және (M_0T) жанамасы жасайтын бұрыштар.

$$tg\,\varphi=\frac{MP}{M_0P},\qquad MP=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x_0),\qquad M_0P=\Delta x.$$

$$\Delta x \to 0\ tg\,\varphi=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.\qquad \varphi \to \varphi_0 \text{ болғандықтан}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} tg\,\varphi=tg\lim_{\Delta x\to 0}\varphi=tg\,\varphi_0=k$$

$y=f(x)$ функциясының (x_0,y_0) нүктесіндегі жанамасының теңдеуі

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

болады, мұндағы $y_0=y(x_0)$.

Егер осы жанамаға (x_0,y_0) нүктесінде перпендикуляр жүргізсек, онда осы түзуді нормаль түзу деп атайды және оның теңдеуі

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

болады.

б) туындының механикалық мағынасы

$S = f(t)$ функциясының M материалдық нүктесінің түзу бойымен қозғалысының заңдылығын өрнектейтін болсақ, яғни S жолы t уақыт аралығындағы O нүктесінен M нүктесіне дейінгі жүрген жол.

$[t, t+\Delta t]$ аралығында жүрген жолы $\Delta S = f(t+\Delta t) - f(t)$ болса,

онда осы аралықтағы орташа жылдамдығы $V_{op} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$,

ал t уақыт аралығындағы лездік жылдамдығы $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f'(t)$.

Дифференциалдаудың негізгі ережелері

Егер $u = u(x),\ v = v(x)$ функцияларының x нүктесінде шенелген туындылары бар болса,онда

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$
$$(u \cdot v)' = u'v + uv',$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

дербес жағдайда $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2}$,

мұндағы $c = const$.

Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын функция болса, онда сол нүктеде функция үзіліссіз болады.

Егер $u = u(x)$ функциясының x нүктесінде туындысы бар және $y = F(u)$ функциясының сәйкес u нүктесінде туындысы бар болса, онда $y = F(u(x))$ күрделі функциясының x нүктесіндегі туындысы бар және ол

$$[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$$

формуламен анықталады.

Дербес жағдайда $u = kx + b,\ y = f(kx+b)$ болса, онда $y' = kF'(u)$ болады.

Егер $y = f(x)$ функциясының x нүктесінде нөлге тең емес $y' = f'(x) \neq 0$ туындысы бар болса, онда сол x-ке сәйкес $y_0 = f(x_0)$ нүктесінде оған кері $x = \varphi(y)$ функциясының туындысы бар болады және ол

$$x'_y = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

тең болады.

Негізгі элементар функциялардың туындылары

1. $c' = 0$	8. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	15. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
2. $x' = 1$	9. $(a^x)' = a^x \ell na$	16. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$	10. $(e^x)' = e^x$	17. $(sh\,x)' = ch\,x$

4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 11. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ell na}$ 18. $(ch\,x)' = sh\,x$

5. $(\sin x)' = \cos x$ 12. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 19. $(th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x}$

6. $(\cos x)' = -\sin x$ 13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 20. $(cth\,x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

7. $(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ 14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Логарифмдік туынды

а) $y = f(x) > 0$ функциясы берілсін. Бұл функцияның екі жағын да логарифмдеп, соңынан туынды аламыз.

$$\ln y = \ln f(x) \Rightarrow (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = f'(x) = f(x)\left[\ln f(x)\right]';$$

ә) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функциясы берілсін. Осы теңдіктің екі жағын да логарифмдесек, онда $\ln y = x \ln a$ теңдігін аламыз. Екі жағын да дифференциалдасақ

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a \Rightarrow y' = y \ln a \Rightarrow y' = a^x \ln a$$

көрсеткіштік функция туындысы шығады;

б) $F(x) = \left[U(x)\right]^{V(x)}$, $U(x) > 0$ функциясынан туынды алайық. Берілген функцияның екі жағын да логарифмдейік.

$$\ln F(x) = V(x) \cdot \ln U(x) \Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = V'(x) \cdot \ln U(x) + V(x) \cdot \frac{U'(x)}{U(x)}.$$

Сонда

$$\left(\left[U(x)\right]^{V(x)}\right)' = \left[U(x)\right]^{V(x)} \cdot \left[V'(x) \cdot \ln U(x) + V(x) \cdot \frac{U'(x)}{U(x)}\right].$$

Ескерту: $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$ туындысын логарифмдік туынды дейді, мұндағы $y = y(x)$.

Айқын емес және параметрлік түрде берілген функция туындылары

Егер y пен x айнымалылары арасындағы тәуелділік $F(x,y) = 0$ теңдеуімен айқын емес түрде берілсе, онда y'_x туындысын табу үшін теңдеудің екі жағын, y - ті x - тің функциясы деп алып, дифференциалдау керек. Содан соң шыққан теңдеуден y'_x туындысын табу керек.

Егер $F(x,y) = x^2 + y^2 = 4$ болса, онда оның туындысы:

$$2x + 2y\,y' = 0, \quad \text{осыдан} \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

y - тің x - ке тәуелділігі t параметрі арқылы $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [a, в] \end{cases}$

түрінде берілсін және $\varphi(t), \psi(t)$ функцияларының туындылары бар болсын.

Егер $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ туындылары бар және $\varphi(t)\neq 0$ болса, онда $y=f(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданады және $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, $x'_t\neq 0$ теңдігі орындалады.

Мысал. Берілген функциялардың туындыларын табу керек.

1. $y=\sin x^2$, $\qquad y'=\cos x^2\cdot\left(x^2\right)'=2x\cos x^2.$

2. $y=\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{100}$, $\qquad y'=100\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{99}\cdot\left(x+\dfrac{2}{x}\right)'=100\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{99}\cdot\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right).$

3. $y=\ln^3(x+3)$, $\qquad y'=3\cdot\ln^2(x+3)\cdot(\ln(x+3))'=\dfrac{3\ln^2(x+3)}{x+3}.$

4.
$$y=\frac{1}{2}tg^2x+\ln\cos x,\qquad y'=\frac{1}{2}\cdot 2tgx\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos x}(-\sin x)=\frac{tgx}{\cos^2 x}-tgx=$$
$$gx\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)=tgx\left(\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)=tgx\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=tg^3x.$$

5. $y=7^{x^2+2x}$, $\qquad y'=7^{x^2+2x}\ln 7\cdot(2x+2)=2(x+1)\cdot 7^{x^2+2x}\cdot\ln 7.$

6.
$$y=arctg\frac{2x}{1-x^2},\qquad y'=\frac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{\dfrac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)-(-2x)2x}{(1-x^2)^2}=$$
$$=\frac{2-2x^2+4x^2}{1+2x^2+x^4}=\frac{2+2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}.$$

7. $y=\sqrt{a^2-x^2}+a\cdot\arcsin\dfrac{x}{a}$,

Шешуі. Күрделі функцияның туындысының ережесі бойынша:
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(a^2-x^2)'+a\frac{1}{\sqrt{1-(\dfrac{x}{a})^2}}\left(\frac{x}{a}\right)'=-\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}+a\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}=$$
$$=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)(a+x)}}=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

8. $y^3-3y+2ax=0$, $\quad y'=?$

Шешуі. Бұл –айқын емес функция. Мұндай функцияны дифференциалдау ережесі бойынша, y –тің x- ке тәуелді екенін ескеріп, дифференциалдаймыз да, шыққан теңдеуді былай шешеміз:
$$3y^2y'-3y'+2a=0,\quad y'(3y^2-3)=-2a,\quad y'=-\frac{2a}{3(y^2-1)}.$$

9. $y=\cos(x+y)$, $\quad y'=?$

Шешуі. Айқындалмаған функцияны дифференциалдау ережесі бойынша былай табамыз:
$$y'=-\sin(x+y)(x+y)',\quad y'=-\sin(x+y)(1+y'),\quad y'=-\sin(x+y)-y'\sin(x+y),$$
$$y'(1+\sin(x+y))=-\sin(x+y),\quad y'=\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}.$$

10. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = ?$

Шешуі. Бұл - параметрлік түрде берілген функция.Мұндай функцияны дифференциалдау ережесі бойынша:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}};$$

Ендеше $\dfrac{dx}{dt} = (a\cos t)' = -a\sin t, \quad \dfrac{dy}{dt} = (b\sin t)' = b\cos t.$

Орындарына қоямыз: $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a}ctgt.$

11. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = ?$

Шешуі. $\quad \dfrac{dx}{dt} = (a\cos^3 t)' = -3a\cos^2 t\sin t, \quad \dfrac{dy}{dt} = (b\sin^3 t)' = 3b\sin^2 t\cos t.$

Орындарына қоямыз: $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\dfrac{b}{a}tgt.$

12. $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ қисығына M(3;2) нүктесінде жүргізілген жанама мен нормальдің теңдеуін жазу керек.

Шешуі. $y = f(x)$ қисығының (x_0, y_0) нүктесіндегі жанамасының теңдеуі

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

болады, мұндағы $y_0 = y(x_0)$.

Нормаль түзудің теңдеуі $\quad y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$

$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x - 1, \quad f'(3) = 27 - 18 - 1 = 8,$

Орындарына қоямыз: $y - 2 = 8(x - 3), \quad y = 8x - 22$ - бұл жанаманың теңдеуі, ал

нормальдің теңдеуі $\quad y - 2 = -\dfrac{1}{8}(x - 3), \quad x + 8y - 19 = 0.$

13. $y = x^{\sin x}, \quad y' = ?$

Бұл – күрделі көрсеткіштік функция, мұндай функцияны дифференциалдау үшін алдымен оны логарифмдейміз, содан кейін теңдіктің екі жағынан да туынды аламыз, мұндағы $y = y(x)$ - х-ке тәуелді функция.

$$\ln y = \ln x^{\sin x}, \quad \ln y = \sin x\cdot\ln x, \quad \frac{1}{y}y' = \cos x\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot\sin x,$$

$$y' = y(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}), \quad y' = x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x + \frac{\sin x}{x})$$

14. $y = x^{\frac{1}{x}}, \quad y' = ?$

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}}, \quad \ln y = \frac{1}{x}\cdot\ln x, \quad \frac{1}{y}y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot\ln x}{x^2}, \quad \frac{1}{y}y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad y' = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$$

15. $f(x) = e^{-x}\cdot\cos 3x, \quad f'(0) = ?$

$$f'(x) = -e^{-x}\cos 3x - 3\sin 3x \cdot e^{-x} = -e^{-x}(\cos 3x + 3\sin 3x).$$
$$f'(0) = -e^{0}(\cos 0 + 3\sin 0) = -1.$$

Тексеру сұрақтары.

1. Функция туындысының анықтамасы.
2. Туындының қандай геометриялық және механикалық мағыналары бар?
3. Қисыққа жүргізілген жанама мен нормальдің анықтамалары және теңдеулері қандай?
4. Дифференциалдау ережелері қандай?
5. Негізгі элементар функциялардың туындылары.
6. Айқын емес функциялардың туындылары қалай табылады?
7. Логарифмдік туынды деген не?

Өз бетімен орындауға тапсырмалар.

1. Берілген функциялардың туындыларын табу керек.

1.а) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$; б) $y = 3ctg\,\frac{1}{x}$; в) $y = x^{x^x}$; г) $tg\,\frac{y}{x} = 5x$, д) $\begin{cases} x = 3\sin t, \\ y = 2\cos t. \end{cases}$

2. а) $y = \ln(\sin(2x+1))$; б) $y = \frac{4\sin x}{\cos^2 x}$; в) $y = x^{x^2}$; г) $y + x - arctgx = 0$; д) $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t \end{cases}.$

3. а) $y = \arcsin\sqrt{1-2x}$; б) $y = \frac{1}{tg^2 2x}$; в) $y = x^{\ln x}$; г) $y = x\sin(y-x)$; д) $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos 2t \end{cases}.$

4. а) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; б) $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$; в) $y = x^{\ln 2x}$; г) $y + x = \sin(y-x)$; д) $\begin{cases} x = \sin(2t+1), \\ y = \cos(2t+1) \end{cases}.$

5. а) $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$; в) $y = x^{\sin 2x}$; г) $y\sin x = \cos(y-x)$; д) $\begin{cases} x = \sin^2 2t, \\ y = \cos^2 2t \end{cases}.$

6. а) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y = \frac{x\ln x}{x-1}$; в) $y = (arctgx)^x$; г) $\frac{y}{x} = e^{xy}$; д) $\begin{cases} x = \sin^3 2t, \\ y = \cos^3 2t \end{cases}.$

7. а) $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $y = \frac{x^2\ln x}{x+2}$; в) $y = (arctgx)^{\ln x}$; г) $\frac{y}{x} = \sin xy$; д) $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t \end{cases}.$

8. а) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{5x+1}}$; б) $y = 3^{arctgx^3}$; в) $y = x^{-tg 2x}$; г) $y^2 x = e^{\frac{y}{x}}$; д) $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$

9. а) $y = \frac{3-2x}{\sqrt{x^2+3x+1}}$; б) $y = \frac{1}{2}tg^2 x + \ln\cos x$; в) $y = (x+x^2)^x$; г) $xy = e^{\frac{y}{x}}$; д) $\begin{cases} x = \ln 2t, \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$

10. а) $y = \frac{3-2x}{\sqrt{x^2+3}}$; б) $y = tg^2 x + \frac{1}{2}\ln\cos x$; в) $y = x^x$; г) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; $\begin{cases} x = \ln^2 2t, \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

2. Берілген есептерді шығару керек.
1. Нүктенің қозғалыс заңы: $s = 2t^2 + 3t + 5$, мұндағы қашықтық s сантиметрмен, ал уақыт t-секундпен берілген. t=5 болғандағы жылдамдық неге тең?
2. Нүктенің қозғалыс заңы: $s = 2t^2 + 3t + 5$, мұндағы қашықтық s сантиметрмен, ал уақыт t-секундпен берілген. t=2 болғандағы жылдамдық неге тең?
3. $y = 0{,}1x^3$ қисығына абсциссасы $x = 2$ нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті неге тең?
4. $y = \sqrt{x}$ қисығына абсциссасы $x = 4$ нүктесінде жүргізілген жанаманың және нормальдің теңдеулерін жазыңыз.
5. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ қисығына (-2;5) нүктесінде жүргізілген жанаманың және нормальдің теңдеулерін жазыңыз.
6. $y = tg2x$ қисығын координата басында жүргізілген жанаманың және нормальдің теңдеулерін жазыңыз.
7. Қозғалыс заңдылығы $x = 3t - t^3$ теңдеуімен берілген. t=1 болғандағы жылдамдық неге тең?
8. $y = x^2 - 7x + 3$ қисығына (0;3) нүктесінде жүргізілген жанаманың және нормальдің теңдеулерін жазыңыз.
9. $y = x^2 - 7x + 3$ қисығына (1;-3) нүктесінде жүргізілген жанаманың және нормальдің теңдеулерін жазыңыз.
10. $y = x^2 - 7x + 3$ қисығына (-1;11) нүктесінде жүргізілген жанаманың және нормальдің теңдеулерін жазыңыз.

Әдебиеттер тізімі

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.:Наука, 1980.
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – М.:Высшая школа, 1980.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнении по математическому анализу. – М; Наука, 1980.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике./ Под ред. А.П. Рябушко.- Минск.: Вышейшая школа, 1989.
5. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – Москва: Наука, 1996.-736 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчесления. – Москва: Наука, 1995.
7. Берман Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа. – Москва: Наука, 1985.-384 с.
8. Кручкович Г.И., Гутарина Н.И., Дюбюк П.Е. и другие. – Москва: Высшая школа, 1973.-576 с.
9. Хасеинов К.А. Каноны математики. – Алматы: Атамұра, 2003.

Мазмұны

Светлана Жұмағазықызы Махимова

Математикалық талдау пәніненстуденттердің өзіндік жұмыстарды орындау үлгілері.

Әдістемелік құрал.

Пішімі 60х84 1/12
Көлемі 31 бет 2,6 шартты баспа табағы
Таралымы 200 дана.
Ш.Есенов атындағы КМТжИУ
Редакциялық - баспа бөлімінде басылды.
Ақтау қаласы, 27 ш/а.