ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш.ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ

ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМИ МАМАНДЫҚТАР КАФЕДРАСЫ

М.Ш. ТІЛЕПИЕВ, Б.Т. ҚҰЛЖАҒАРОВА

МАТЕМАТИКА 2
ЕСЕПТЕР МЕН ЖАТТЫҒУЛАР

Оқу құралы

Ақтау қаласы

ӘОЖ 51(075.8)
ББК 22.1я 73
Т93

Пікір берушілер: Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті профессоры, ф.-м.ғ.д. Н.Р. Садыков
Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті доценті, ф-м.ғ.к. Э.Ұ.Уразмагамбетова
Алматы энергетика және байланыс институтының доценті, ф-м.ғ.к. М.Ж.Байсалова

Т93 Тілепиев М.Ш., Құлжағарова Б.Т. Математика 2 Есептер мен жаттығулар Оқу құралы / М.Ш. Тілепиев, Б.Т. Құлжағарова - Ақтау, Ш.Есенов атындағы КМТжИУ, 2010. -186 б.

ISBN 978-601-266-055-7

Бұл оқу құралы Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінде оқитын барлық техникалық мамандықтардың Математика 2 пәнінің бағдарламасына сәйкес жасалған.

Мұнда көп айнымалылы функциялар, қос және үштік интегралдар, кисық сызықты және беттік интегралдар, өрістер теориясы, дифференциалдық теңдеулер, қатарлар теориясы, ықтималдықтар теориясы және математикалық статистиканың негізгі анықтамалары мен қасиеттерін терең түсіну үшін, таңдалып алынған мысалдар қарастырылған және әрбір параграфтың соңында есептер берілген. Сондықтан бұл окулықты есептер жинағы ретінде пайдалануға болады.

Бұл оқу құралы кредиттік жүйе бойынша оқытылатын оқу орындарының студенттеріне арналған.

ӘОЖ 51(075.8)
ББК 22.1я 73

Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің Оқу-әдістемелік Кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылды

ISBN 978-601-266-055-7

Кіріспе

Қазіргі ғылым мен техникада математикалық зерттеулер, модельдер, жобалар өте үлкен роль атқарады. Ол қазіргі ақпараттар жүйесінің дамуына тікелей байланысты, демек математикалық нақты сандар шешімін табуға табысты қолдану мүмкіншілігін кеңейтеді.

Математика фундаменталды пән, одан дәріс беру төменгі жағдайды қарастырады:

а) ойдың логикалық және алгоритмдік дамуын;

ә)негізгі зерттеу әдістерін меңгеру және математикалық есептердің шешімдерін таба білу;

б) математикалық негізгі сандық әдістерін меңгеру және оны компьютерде орындау;

в) математикалық білімді өз бетінше ұғып алуға еңбектену, қолданбалы инженерлік және экономикалық есептерге талдау жүргізу.

Математиканың жалпы курсы дәстүрлі мамандар үшін оқу жоспары бойынша арнайы және жалпы техникалық пәндерді табысты оқытуға маңызды мәні бар инженерлер білімдерінің математикалық фундаментін қалайды.

«Математика 2. Есептер мен жаттығулар» оқулығы, «Математика 2» пәнінің бағдарламасына сәйкес кредиттік жүйеге лайықты етіліп жазылған.

Мұнда көп айнымалылы функциялар, оларды дифференциалдау және интегралдау, дифференциалдық теңдеулер, қатарлар және ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика тақырыптары бойынша теориялық материалдар, сонымен қатар оларды толықтырып, таңдап алынған үлгі-мысалдар шешімдерімен берілген.

1 КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯ

1.1 КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ АНЫҚТАЛУ ОБЛЫСЫ

Егер D облысында бір-бірінен тәуелсіз x,y айнымалыларының мәндер жұбына z айнымалының анықталған бір мәні сәйкес келсе, онда z айнымалы х және у айнымалыларына тәуелді *екі айнымалылы функция* деп аталады және оны

$$z = f(x, y)$$

деп белгілейді.

$z = f(x, y)$ функциясы анықталатын x және y қос мәндерінің (x, y) жиынын осы функцияның *анықталу облысы (аймағы)* деп атайды.

$z = f(x, y)$ функциясының анықталу облысы Oxy жазықтығындағы нүктелер жиыны болады. Дербес жағдайда, бүкіл Oxy жазықтығы не Oxy жазықтығының тұйық сызықтармен шектелген бөлігі немесе осы жазықтықтың бірнеше бөліктерінің жиынтығы болады.

$z = f(x, y)$ функциясының Oxy тік бұрышты координаттар жүйесіндегі геометриялық бейнесі (графигі) осы теңдеумен анықталатын бет болып табылады.

Егер бір-бірінен тәуелсіз $(x_1,x_2,...,x_n)$ айнымалыларының әрбір мәніне u айнымалысының анықталған бір мәні сәйкес келсе, онда u айнымалысы x_1, x_2, ... , x_n айнымалыларына байланысты көп айнымалы функция деп аталады да

$$u = u(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

символдарымен белгіленеді.

1. $z = x^2 + y^2$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция x пен y-тің кез келген мәнінде анықталған, яғни анықталу облысы бүкіл Oxy жазықтығы болып табылады. ▲

2. $z = \ln(2x - y)$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Логарифмдік функция $2x - y > 0$, яғни $y < 2x$ болғанда ғана анықталады. Осыдан функцияның анықталу облысы $2x - y = 0$ түзуінен төмен орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі болып табылады. ▲

3. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Функция нақты мәндерін $x^2 + y^2 - a^2 \geq 0$ немесе $x^2 + y^2 \geq a^2$ болғанда ғана қабылдайды, яғни функцияның анықталу облысы центрі координаттар жүйесінің бас нүктесі, ал радиусы a-ға тең болатын дөңгелектен тыс орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі. ▲

4. $z = \arcsin(y - x)$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция $-1 \leq y - x \leq 1$ теңсіздігі орындалғанда ғана анықталады. Осыдан функцияның анықталу облысы $y = x + 1$ және $y = x - 1$ түзулерінің арасында орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі болады. ▲

Берілген функцияның анықталу облысын табу керек:

5. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$; **Ж:** $x^2+y^2\le a^2$ – центрі $O(0,0)$, ал радиусы a болатын шеңберімен шектелген Oxy жазықтығының бөлігі.

6. $z=\arccos\frac{x}{y^2}$; **Ж:** $y^2=x$ және $y^2=-x$ параболаларының арасында орналасқан, $O(0,0)$ нүктесі тиісті емес Oxy жазықтығының бөлігі.

7. $z=2x+5y$; **Ж:** Бүкіл Oxy жазықтығы.

8. $z=\ln(x+y)$; **Ж:** $y=-x$ түзуінен жоғары орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

9. $z=\sqrt{y-x^2}$; **Ж:** $y=x^2$ параболасынан жоғары орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

10. $z=\ln(xy)$; **Ж:** $xy>0$ -1 және 3 ширектерінде орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

11. $z=x+\dfrac{3}{y-5}$; **Ж:** $y=5$ түзуі тиісті емес Oxy жазықтығының бөлігі.

12. $z=\sqrt{y-x^2}+\sqrt{4-y}$; **Ж:** $y=x^2$ параболасы және $y=4$ түзуімен шектелген Oxy жазықтығының бөлігі.

13. $z=\dfrac{1}{\ln(1-x^2-y^2)}$; **Ж:** $x^2+y^2=1$ шеңберімен шектелген және $O(0,0)$ нүктесі жататын Oxy жазықтығының бөлігі.

14. $z=\sqrt{9-x^2-y}+\sqrt{y-x+3}$. **Ж:** жоғарғы жағынан $y=-x^2+9$ параболасы және төменнен $y=x-3$ түзуімен шектелген Oxy жазықтығының бөлігі.

1.2 КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ТУЫНДЫЛАРЫ МЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДАРЫ

1. Көп айнымалылы функцияның дербес, толық өсімшелері және дербес туындылары. $z=f(x,y)$ функциясымен анықталған бетті қарастырайық. Оны $y=const$ жазықтығымен қияйық. Бұл жазықтықта y - тұрақты, x айнымалысына Δx өсімшесін берейік. Сонда *x айнымалысы бойынша z функциясының $\Delta_x z$ дербес өсімшесі*

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$$

формуласымен анықталады.

Сол сияқты, егер $z=f(x,y)$ функциясы үшін x – тұрақты болып, ал y айнымалысы бойынша Δy өсімшесін алса, онда *y айнымалысы бойынша дербес өсімшесі*

$$\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

формуласымен анықталады.

Егер x және y айнымалылары бойынша Δx және Δy өсімшілерін қабылдаса, онда z функциясының толық өсімшесі

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

формуласымен анықталады.

$z = f(x,y)$ функциясының *x айнымалысы бойынша дербес туындысы* деп

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x^{'}(x,y)$$

шегін айтады.

$z = f(x,y)$ функциясының *y айнымалысы бойынша дербес туындысы* деп

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y^{'}(x,y)$$ шегін айтады.

Дербес туындыны есептеу ережесі: $z = f(x,y)$ функциясының x айнымалысы бойынша дербес туындысын есептеу үшін z функциясының y – тұрақты деп алғандағы x бойынша туындысын есептеу керек, және, керісінше, y бойынша дербес туындысын есептеу үшін z функциясының x – тұрақты деп алғандағы y бойынша туындысын есептейді.

15. $z = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес өсімшілерін және толық өсімшесін табу керек.

Шешуі.

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = [(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)\cdot y + 3y^2 + 4(x+\Delta x) - 5y + 6] -$$
$$-(x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6) = (x+\Delta x)^2 - x^2 - 2y\Delta x + 4\Delta x =$$
$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2y\Delta x - 4\Delta x = (2x - 2y - 4 + \Delta x)\cdot\Delta x;$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \left[x^2 - 2x(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 4x - 5(y+\Delta y) + 6\right] =$$
$$= (x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6) = -2x\Delta y + 3(y+\Delta y)^2 - 3y^2 - 5\Delta y =$$
$$= -2x\Delta y + 6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 - 5\Delta y = (-2x + 6y - 5 + 3\Delta x)\cdot\Delta x;$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = [(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 4(x+\Delta x) -$$
$$-5(y+\Delta y) + 6] - (x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 5y + 6) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y +$$
$$+6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 + 4\Delta x - 5\Delta y = (2x - 2y + 4)\Delta x + (-2x + 6y - 5)\Delta y + (\Delta x)^2 - 2\Delta x\Delta y + 3(\Delta y)^2.$$ ▲

16. $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 5x + 6y + 4$ функцияның дербес туындысын табу керек.

Шешуі: y-ті тұрақты деп алып, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 5$ табамыз.

Осы сияқты, x-ті тұрақты деп алып, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 3x + 6$ табамыз. ▲

17. $z = \arcsin(xy^2) + \frac{x}{y^2}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}}\cdot y^2+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}}+\dfrac{1}{y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}}\cdot 2xy-\frac{2x}{y^3}=\frac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}}-\frac{2x}{y^3}. \quad \blacktriangle$$

18. Үш айнымалылы $u=e^{x^2+y^2+z^2}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=2z\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$. ▲

Берілген функциялардың дербес өсімшелерін табу керек:

19. $z=2x^2+xy+y^2$; **Ж:** $\Delta_x z=(4x+y+2\Delta x)\Delta x$; $\Delta_y z=(x+2y+\Delta y)\Delta y$.

20. $z=x^3-x^2y+y^2$; **Ж:** $\Delta_x z=(x+\Delta x)^3-x^3+2x\Delta x+(\Delta x)^2$; $\Delta_y z=(-x^2+2y+\Delta y)\Delta y$.

21. $z=\dfrac{y+4}{x-7}$; **Ж:** $\Delta_x z=-\dfrac{(y+4)\Delta x}{(x-7)(x+\Delta x-7)}$; $\Delta_y z=\dfrac{\Delta y}{x-7}$.

22. $z=\dfrac{x+5}{y+8}$; **Ж:** $\Delta_x z=\dfrac{\Delta x}{y+8}$; $\Delta_y z=-\dfrac{(x+5)\Delta y}{(y+8)(y+\Delta y+8)}$.

23. $z=\ln\dfrac{y}{x^2}$; **Ж:** $\Delta_x z=-2\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$; $\Delta_y z=\ln\left(1+\dfrac{\Delta y}{y}\right)$.

24. $z=y\sin x$. **Ж:** $\Delta_x z=y(\sin(x+\Delta x)-\sin x)$; $\Delta_y z=\Delta y\sin x$.

Берілген функциялардың дербес туындыларын табу керек:

25. $z=7x^3y-4xy^5$; **Ж:** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=21x^2y-4y^5$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=7x^3-20xy^4$.

26. $z=x^4+5x^2y+7x^2y+7y^2-6x-3y$;

Ж: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3+10x^2y-6$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=5x^2+14y-3$.

27. $z=\dfrac{y+3}{x+7}$; **Ж:** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y+3}{(x+7)^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x+7}$.

28. $z=\dfrac{x}{y-5}$; **Ж:** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y-5}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{(y-5)^2}$.

29. $z=x^2\sin^2 y$; **Ж:** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sin^2 y$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2\sin 2y$.

30. $z=arctg\,\dfrac{x}{y}$; **Ж:** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

31. $z = x^8 y^5 + x^4 y^7$; **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = 8x^7 y^5 + 4x^3 y^7$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^8 y^4 + 7x^4 y^6$.

32. $z = \ln \frac{y^3}{x}$; **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x}$.

33. $z = \sin(x^2 + y^2)$; **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos(x^2 + y^2)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos(x^2 + y^2)$.

34. $z = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$; **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)$.

35. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4}$;

Ж: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y+1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4}}$.

36. $z = e^{xy}$; **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = \text{óå}^{\text{õó}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \text{õå}^{\text{õó}}$.

37. $z = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$; **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} + \frac{y}{2\sqrt{x}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \sqrt{x}$.

38. $z = \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y}$; **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2\text{õ}}{\text{ó}^2} + \frac{1}{\text{ó}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2\text{õ}^2}{\text{ó}^2} - \frac{\text{õ}}{\text{ó}^2}$.

39. $z = \sqrt{x}e^{x/y}$; **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\text{õ}}} + \frac{1}{\text{ó}}\right)\text{å}^{\frac{\text{õ}}{\text{ó}}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sqrt{\text{õ}^3}}{\text{ó}^2}\text{å}^{\frac{\text{õ}}{\text{ó}}}$.

40. $u = \ln\left(x + \frac{y}{2z}\right)$; **Ж:** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2z}{2xz + y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2xz + y}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{y}{z(2xz + y)}$.

41. $u = x^{yz}$; **Ж:** $\frac{\partial u}{\partial x} = yz \cdot x^{yz-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = z \cdot x^{yz}\ln x$; $\frac{\partial u}{\partial z} = y \cdot x^{yz}\ln x$.

42. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$; **Ж:** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x}$.

43. $u = e^{\frac{xy}{z}}$; **Ж:** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z}e^{\frac{xy}{z}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{z}e^{\frac{xy}{z}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}e^{\frac{xy}{z}}$.

44. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ж: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

2. Көп айнымалылы функцияның толық дифференциалы. $z = f(x, y)$ функциясының толық өсімшесі Δz-ті дербес $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ туындылары арқылы

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

түрінде жазуға болады, мұндағы алдыңғы екі қосынды өсімшенің *негізгі бөлігі*, ал кейінгі екі қосынды *қосалқы бөлігі* деп аталады. Δx және Δy

шамаларымен салыстырғанда қосалқы бөлігі жоғары ретті шексіз аз шама болғандықтан $\Delta r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ ұмтылғанда $\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y\to 0$.

Толық өсімшенің негізгі бөлігі *функцияның толық дифференциалы* деп аталып,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

деп белгіленеді. Мұндағы $dx=\Delta x, dy=\Delta y$.

Егер $u=f(x,y,z,...,t)$ көп айнымалылы функциясы берілсе, онда оның толық дифференциалы

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+...+\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

формуласымен анықталады.

$\Delta r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$-ң аз мәнінде дифференцианалданатын $z=f(x,y)$ функциясы үшін төмендегі жуықтап есептеу формуласы қолданылады.

$\Delta z\approx dz$, осыдан, $f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x,y)+dz.$

45. $z=x^2+xy^2+\sin y$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Шешуі. Дербес туындыларын табайық: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y^2,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2xy+\cos y.$

Осыдан $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(2x+y^2)dx+(2xy+\cos y)dy.$ ▲

46. $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$.

Осыдан $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{x^2+y^2+z^2}.$ ▲

47. $\sqrt{4{,}03^2+2{,}98^2}$ санының жуық мәнін табу керек.

Шешуі. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ функциясын қарастырайық.

$x+\Delta x=4{,}03$, осыдан $x=4,\ \Delta x=0{,}03;$

$y+\Delta y=2{,}98$, осыдан $y=3,\ \Delta y=-0{,}02;$

$$z=\sqrt{4^2+3^2}=5,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{4}{5},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{3}{5},$$

$$\sqrt{4{,}03^2+2{,}98^2}\approx z+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=5+\frac{4}{5}\cdot 0{,}03+\frac{3}{5}\cdot(-0{,}02)=5{,}012.$$ ▲

Берілген функциялардың толық дифференциалдарын табу керек:

48. $z=x^2+5xy+6y^2;$ **Ж:** $dz=(2x+5y)dx+(5x+12y)dy.$

49. $z=\dfrac{y-4}{x+5}$; **Ж:** $dz=\dfrac{y-4}{(x+5)^2}dx+\dfrac{1}{x+5}dy.$

50. $z=\ln(xy)$; **Ж:** $dz=\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}.$

51. $z=7x^3y-4xy^5$; **Ж:** $dz=(21x^2y-4y^5)dx+(7x^3-20xy^4)dy.$

52. $z=\dfrac{x-1}{y+2}$; **Ж:** $dz=\dfrac{dx}{y+2}+\dfrac{x-1}{(y+2)^2}dy.$

53. $z=e^{x^2+y^2}$; **Ж:** $dz=(2xdx+2ydy)e^{x^2+y^2}.$

54. $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$; **Ж:** $dz=\dfrac{ydx-xdy}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}.$

55. $z=\sqrt{3x^2+4y^2+2x+y}$; **Ж:** $dz=\dfrac{(6x+2)dx+(8y+1)dy}{2\sqrt{3x^2+4y^2+2x+y}}.$

56. $u=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$; **Ж:** $du=\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{z}{x^2}\right)dx+\left(-\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{z}\right)dy+\left(-\dfrac{y}{z^2}+\dfrac{1}{x}\right)dz.$

57. $z=\sqrt{z}\cdot\sin\dfrac{y}{x}$; **Ж:** $du=-\dfrac{y\sqrt{z}}{x^2}\cos\dfrac{\acute{o}}{\tilde{o}}dx+\dfrac{\sqrt{z}}{x}\cos\dfrac{y}{x}dy+\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\sin\dfrac{y}{x}dz.$

58. $(1{,}02)^{3{,}01}$ санын жуықтап есептеу керек; **Ж:** 1,06.

59. $2{,}03^3\cdot 3{,}98^2$ санын жуықтап есептеу керек; **Ж:** 132,51.

60. $2\cdot e^{0{,}015}+\cos(1{,}55)$ санын есептеу керек; **Ж:** 0,05. Ескерту $\dfrac{\pi}{2}=1{,}57$ деп алу керек.

61. $arctg\,\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$ санын есептеу керек. **Ж:** 0,82.

3. Көп айнымалылы функциялардың жоғары ретті дербес туындылары мен дифференциалдары. $z=f(x,y)$ функциясының *екінші ретті дербес туындысы* деп осы функцияның дербес туындысының дербес туындысын айтады және оны былай белгілейді:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

Осылай үшінші және жоғары ретті дербес туындылары табылады:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f'''_{xxx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=f'''_{xxy}(x,y).$$

және т.с.с.

$z = f(x,y)$ функциясы және оның $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ дербес туындылары D обылысында анықталған және үзіліссіз болса, онда осы облыста "аралас" туындылары тең болады:

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y).$$

$z = f(x,y)$ функциясының *екінші ретті дифференциалы* деп осы функцияның дифференциалының дифференциалын айтады:

$$d^2z = d(dz).$$

Осы сияқты үшінші және жоғары ретті дифференциалдары анықталады:

$$d^3z = d(d^2z),\ldots, d^nz = d(d^{n-1}z).$$

Егер x және y бір-бірінен тәуелсіз айнымалылар, ал $f(x,y)$ функциясының үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда жоғары ретті дифференциалдар

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{dx^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$

....

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

формулаларымен анықталады.

62. $z = x^3 + 5x^2y - 4y^3 - x^2 - 6xy + 3y^2$ функциясының екінші ретті дербес туындыларын және екінші ретті дифференциалын табу керек.

Шешуі. Алдымен дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 10xy - 2x - 6y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 - 12y^2 - 6x + 6y.$$

Енді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6x + 10y - 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -24y + 6,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 10x - 6,$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= (6x + 10y - 2)dx^2 + 2(10x - 6)dxdy + (-24y + 6)dy^2.$$

▲

Берілген функциялардың екінші ретті дербес туындыларын табу керек:

63. $z = 4x^3 - 6xy^2 + 5y^3$; **Ж:** $z''_{xx} = 24x$; $z''_{xy} = -12y$; $z''_{yy} = 30y$.

64. $z = x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4$; **Ж:** $z''_{xx} = 12x^2 + 10y^2$; $z''_{xy} = 20xy$; $z''_{yy} = 10x^2 + 48y^2$.

65. $z = x^4y^7 + x^5y^8$;

Ж: $z''_{xx} = 12x^2y^7 + 20x^3y^8$; $z''_{xy} = 28x^3y^6 + 40x^4y^7$; $z''_{yy} = 42x^4y^5 + 56x^5y^6$.

66. $z = \dfrac{y-2}{x+1}$; **Ж:** $z''_{xx} = \dfrac{2(y-2)}{(x+1)^3}$; $z''_{xy} = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $z''_{yy} = 0$.

67. $z = \sin(x^2 + y^2)$; **Ж:** $z''_{yy} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4y^2\sin(x^2 + y^2)$.

$z''_{xx} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4x^2\sin(x^2 + y^2)$; $z''_{xy} = -4xy\sin(x^2 + y^2)$;

68. $z = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{x}{y}$; **Ж:** $z''_{xx} = \dfrac{2}{y^2}$; $z''_{xy} = -\dfrac{4}{y^3} - \dfrac{1}{y^2}$; $z''_{yy} = \dfrac{6x^2}{y^4} + \dfrac{2x}{y^3}$.

69. $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$; **Ж:** $z''_{xx} = \dfrac{2y}{x^3}$; $z''_{xy} = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}$; $z''_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$.

70. $z = e^{xy}$; **Ж:** $z''_{xx} = y^2e^{xy}$; $z''_{xy} = (1 + xy)e^{xy}$; $z''_{yy} = x^2e^{xy}$.

71. $z = \ln(2x + 5y)$; **Ж:** $z''_{xx} = -\dfrac{4}{(2x+5y)^2}$; $z''_{xy} = -\dfrac{10}{(2x+5y)^2}$; $z''_{yy} = -\dfrac{25}{(2x+5y)^2}$.

72. $z = \ln\dfrac{x}{y}$. **Ж:** $z''_{xx} = -\dfrac{1}{x^2}$; $z''_{xy} = 0$; $z''_{yy} = \dfrac{1}{y^2}$.

Берілген функциялардың екінші ретті дифференциалдарын табу керек:

73. $z = x^3 + 5x^2y + 2y^3 + 7xy^2$;

Ж: $d^2z = (6x + 10y)dx^2 + 2(10x + 14y)dxdy + (12y + 14x)dy^2$.

74. $z = x^4y^7$; **Ж:** $d^2z = 12x^2y^7dx^2 + 56x^3y^6dxdy + 42x^4y^5dy^2$.

75. $z = \cos(3x + 4y)$; **Ж:** $d^2z = -(9dx^2 + 24dxdy + 16dy^2)\cos(3x + 4y)$.

76. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; **Ж:** $d^2z = \dfrac{y^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$.

77. $z = \ln(x^2 + y^2)$ функциясының $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек;

78. Екі рет дифференциалданатын кез келген $z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax)$ функциясының $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек;

79. $u = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ функциясының $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек;

80. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ функциясының $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек.

4. Күрделі функцияны дифференциалдау. Дифференциалданатын $z = F(u,v)$ функциясы берілсін, мұнда $u = u(x,y), v = v(x,y)$. z функциясының *дербес туындылары*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

формулаларымен есептеледі.

Дифференциалданатын $z = f(x,y)$ функциясы берілсін, мұнда $x = x(t), y = y(t)$. Бұл күрделі $z = f(x(t), y(t))$ функциясының t бойынша туындысы

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

формуласымен есептеледі.

Дифференциалданатын $z = f(x,y)$ функциясы берілсін, мұнда $y = y(x)$. Бұл $z = f(x, y(x))$ функциясының x бойынша туындысы

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

формуласымен есептеледі.

81. $z = \cos(u^2 + \sqrt{v})$ функциясының, мұндағы $u = e^{xy}, v = x^2 + y^2$. Дербес туындыларын табу керек.

Шешуі.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot 2u \cdot u'_x - \sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v'_x = -\left(2uye^{xy} + \frac{x}{\sqrt{v}}\right)\sin(u^2 + \sqrt{v}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot 2u \cdot u'_y - \sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v'_y = -\left(2uxe^{xy} + \frac{y}{\sqrt{v}}\right)\sin(u^2 + \sqrt{v}).$$

▲

82. $z = x^2 + \sqrt{y}$ функциясы берілген, мұндағы $x = tgt, \quad y = t^2 + 3t + 5.$ $\frac{dz}{dt}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2x\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2t+3}{2\sqrt{y}} = \frac{2\sin t}{\cos^3 t} + \frac{2t+3}{2\sqrt{t^2+3t+5}}.$ ▲

83. $z = x^3 + \sin(xy^2)$ функциясы берілген, мұндағы $y = \sqrt{x^2+1}$.

$\frac{dz}{dx}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2\cos(xy^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\cos(xy^2)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Осыдан $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 3x^2 + y^2\cos(xy^2) + \frac{2x^2 y\cos(xy^2)}{\sqrt{x^2+1}}.$ ▲

Берілген функциялардың $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларын табу керек:

84. $z = e^{u-2v}$ функциясы берілген, мұндағы $u = \sin x, v = x^3 - y^2$.

Ж: $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{u-2v}(\cos x - 6x^2)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -4ye^{u-2v}$.

85. $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ функциясы берілген, мұндағы $u = x \cdot \sin y$, $v = y \cdot \cos x$.

Ж: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u \sin y - vy \sin x}{\sqrt{u^2 + v^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ux \cos y + v \cos x}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

86. $z = \ln(u^2 + v)$ функциясы берілген, мұндағы $u = y \cdot \arcsin x$, $v = xe^y$.

Ж: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2uy / \sqrt{1 - x^2} + e^y}{u^2 + v}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u \arcsin x + xe^y}{u^2 + v}$.

87. $z = \sin(uv)$ функциясы берілген, мұндағы $u = 2x + 3y$, $v = xy^2$.

Ж: $\frac{\partial z}{\partial x} = (2v + uy^2)\cos(uv)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = (3v + 2uxy)\cos(uv)$.

Берілген функциялардың $\frac{dz}{dt}$ туындысын табу керек:

88. $z = e^{4x-5y}$ функциясы берілген, мұндағы $x = \sin t$, $y = t^3$.

Ж: $\frac{dz}{dt} = (4\cos t - 15t^2)e^{4x-5y}$.

89. $z = x^y$ функциясы берілген, мұндағы $x = arctgt$, $y = t^2 + 1$.

Ж: $\frac{dz}{dt} = \frac{yx^{y-1}}{1 + t^2} + 2tx^y \ln x$.

90. $z = \arccos \frac{x}{y}$ функциясы берілген, мұндағы $x = t^2 + 1$, $y = t^3 + 1$.

Ж: $\frac{dz}{dt} = \frac{3xt^2 - 2yt}{|y| \sqrt{y^2 - x^2}}$.

91. $z = \sqrt{x^2 + y + 5}$ функциясы берілген, мұндағы $x = \ln t$, $y = t^2$.

Ж: $\frac{dz}{dt} = \frac{x + t^2}{t\sqrt{x^2 + y + 5}}$.

Берілген функциялардың $\frac{dz}{dx}$ туындысын табу керек:

92. $z = tg(x^2 - y^2)$ функциясы берілген, мұндағы $y = \sin x$.

Ж: $\frac{dz}{dx} = \frac{2x - 2y\cos x}{\cos^2(x^2 - y^2)}$.

93. $z = \arcsin(x^2 + y^2)$ функциясы берілген, мұндағы $y = x^2 + 2x + 5$.

Ж: $\frac{dz}{dx} = \frac{2x + 4xy + 4y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}$.

94. $z = e^{x^2 + \sqrt{y}}$ функциясы берілген, мұндағы $y = \ln x$.

Ж: $\frac{dz}{dx} = e^{x^2 + \sqrt{y}} \left(2x + \frac{1}{2x\sqrt{y}} \right)$.

95. $z=\sqrt{x^3+y^3}$ функциясы берілген, мұндағы $y=e^x$.

Ж: $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{3x^2+3y^2e^x}{2\sqrt{x^3+y^3}}$.

5. Бағыт бойынша туынды. Функция градиенті. $z=f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесінде $\vec{a}=\overrightarrow{MM_1}$ векторының *бағыты бойынша туындысы* деп

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}=\lim_{\left|\overrightarrow{MM_1}\right|\to 0}\frac{f(M_1)-f(M)}{|MM_1|}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta S}$$

шегін айтады, мұндағы $\Delta S=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Егер $f(x,y)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда бағыт бойынша туынды

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы α $-\vec{a}$ векторы мен Ox осінің арасындағы бұрыш.

Үш айнымалылы $u=f(x,y,z)$ функциясының бағыт бойынша туындысы

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ $\vec{a}$ векторының бағыттаушы косинустары.

$z=f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесіндегі *градиенті* деп

$$gradz=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{t}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$$ векторын айтады.

Функция градиенті мен $\vec{a}$ векторы бойынша туындысының арасындағы байланыс

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}=n\rho_{\vec{a}}\,gradz$$ формуласымен анықталады.

Үш айнымалылы $u=f(x,y,z)$ функциясының гардиенті

$$gradz=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$ векторына тең.

96. $z=x^2-y^2$ функциясының $M(1;2)$ нүктесіндегі: а) $grad\ z$, б) $\vec{a}=6\vec{i}+8\vec{j}$ векторының бағыты бойынша $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$ $\quad\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M=2$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$ $\quad\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M=-4$

$$|\vec{a}|=\sqrt{6^2+8^2}=10, \quad \cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=0{,}6 \quad \sin\alpha=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=0{,}8$$

Осыдан $\quad grad z=2\vec{i}-4\vec{j}, \quad \frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=2\cdot 0{,}6-4\cdot 0{,}8=-2. \quad$ ▲

97. $u=x^3y^2z$ функциясының $M(1,-2,3)$ нүктесінде а) $gradu$, б) $\overrightarrow{MN}$ векторының бағыты бойынша туындысын табу керек, мұндағы $N(-1,0,2)$.

Шешуі. $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$ векторы мен бағыттаушы косинустарын табайық.

$$\vec{a}=\{-2;2;-1\}, \quad |\vec{a}|=\sqrt{4+4+1}=3,$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=-\frac{2}{3}, \quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{2}{3}; \quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x^3yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z}=x^3y^2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=36; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=-12; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=4;$$

осыдан $\quad gradu=\{36;-12;4\} \quad \frac{\partial u}{\partial\vec{a}}=36\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-12\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\frac{1}{3}=-30\frac{2}{3}. \quad$ ▲

Берілген функциялардың $M(x,y)$ нүктесіндегі а) градиентін, б) $\vec{a}$ векторының бағыты бойынша туындысын табу керек:

98. $z=x^3+y^3-3xy \quad M(2,1), \quad \vec{a}=\{3,4\};$ **Ж:** $grad\, z=\{9,-3\}, \quad \frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=3.$

99. $z=\sqrt{x^2+y^2} \quad M(5,3), \quad \vec{a}=\{12,5\};$ **Ж:** $grad\, z=\{\frac{5}{4},-\frac{3}{4}\}, \quad \frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=\frac{45}{52}.$

100. $z=\ln(x^2+y^2) \quad M(-3,4), \quad \vec{a}=\{-1,2\};$

Ж: $grad\, z=\{-\frac{6}{25},\frac{8}{25}\}, \quad \frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=\frac{22\sqrt{5}}{125}.$

101. $z=\frac{y^2}{x} \quad M(1,2), \quad \vec{a}=\{-8,6\};$ **Ж:** $grad\, z=\{-4,4\}, \quad \frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=5{,}6.$

102. $u=xyz \quad M(1,2,3), \quad \vec{a}=\{1,-1,1\};$ **Ж:** $grad\, u=\{6,2,2\}, \quad \frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$

103. $u=x^2+y^2+z^2 \quad M(1,1,1), \quad \vec{a}=\{3,2,6\}.$ **Ж:** $grad\, u=\{2,2,2\}, \quad \frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=3\frac{1}{7}.$

6. Айқын емес функциялардың туындысы. $F(x,y)=0$ теңдеуі түрінде берілген айқын емес $y=y(x)$ функциясының туындысы

$$y'=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$$

формуласымен анықталады, мұндағы $F(x, y)$ функциясы x және y айнымалылары бойынша дифференциалданатын, әрі $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ функция.

$F(x, y, z) = 0$ теңдеуі түрінде берілген айқын емес $z = z(x, y)$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x^{'}(x, y, z)}{F_z^{'}(x, y, z)} = -\frac{F_y^{'}(x, y, z)}{F_z^{'}(x, y, z)}$$

формулаларымен анықталады, мұндағы $F(x, y, z)$ функциясы x, y және z айнымалылары бойынша дифференциалданатын, әрі $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ функция.

104. $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6 = 0$ функциясы берілген. $\frac{dy}{dx}$ туындысын табу керек.

Шешуі.

$$F(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y + 4, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 6y + 5,$$

Осыдан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 2y + 4}{2x + 6y + 5}. \qquad \blacktriangle$$

105. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ функциясы берілген. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ туындыларын табу керек.

Шешуі.

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3yz, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3xz, \ \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

Осыдан

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 - 3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{y^2 - xz}{xy - z^2}. \qquad \blacktriangle$$

Айқындалмаған $y = y(x)$ функциясының туындысын табу керек:

106. $x\sin y + y\cos x = 0$; **Ж:** $\frac{dy}{dx} = \frac{y\sin x - \sin y}{x\cos y + \cos x}$.

107. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; **Ж:** $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$.

108. $x^3 + y^3 - 2xy^2 = 1$; **Ж:** $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2y^2}{4xy - 3y^2}$. **109.** $y^2 = 2px$; **Ж:** $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$.

110. $x^2 + y^2 - \sin(xy) = 0$; **Ж:** $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)}$.

111. $\frac{y}{x} + e^{xy} = 0$. **Ж:** $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2 y e^{xy}}{x + x^3 e^{xy}}$.

Айқындалмаған $z = z(x, y)$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес туындыларын табу керек:

112. $x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + z = 0;$ **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+3y}{2z+1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y+3x}{2z+1}$.

113. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + x + 5yz = 0;$ **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+1}{5y+6z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y+5z}{5y+6z}$.

114. $\sqrt{z}\sin xy + x + y = 0;$ **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2zy\cos(xy)+2\sqrt{z}}{\sin(xy)}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xz\cos(xy)+2\sqrt{z}}{\sin(xy)}$.

115. $xyz + \ln(x+y+z) = 0;$ **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz(x+y+z)+1}{xy(x+y+z)+1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz(x+y+z)+1}{xy(x+y+z)+1}$.

116. $x\sin y + y\sin z + z\sin x = 0;$

Ж: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin y + z\cos x}{\sin x + y\cos z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x\cos y + \sin z}{\sin x + y\cos z}$.

117. $e^z - xyz - x - y = 0.$ **Ж:** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1+yz}{e^z - xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1+xz}{e^z - xy}$.

1.3 БЕТКЕ ЖҮРГІЗІЛГЕН ЖАНАМА ЖАЗЫҚТЫҚ ЖӘНЕ НОРМАЛЬ ТҮЗУ

Қарастырылатын σ беті $z = f(x, y)$ теңдеуімен берілсін. Беттің бойынан $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесін алайық. Осы нүктеде $f = (x, y)$ функциясы дифференциалданатын болсын.

Беттің M_0 нүктесі арқылы өтетін барлық қисықтарға жүргізілген жанамалардан тұратын жазықтықты *жанама жазықтық* дейді. Оның теңдеуі

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

M_0 нүктесі арқылы өтетін және жанама жазықтыққа перпендикуляр болатын түзуді *беттің нормалі (тіктемесі)* дейді. Оның теңдеуі

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Егер σ беті $F(x, y, z) = 0$ теңдеуімен берілсе, онда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі жанама жазықтықтың теңдеуі

$$(x - x_0)\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = 0,$$

ал нормалінің теңдеуі

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}}.$$

118. $z=1+x^2+y^2$ функциясының $M_0(1;2;3)$ нүктесіндегі жанама жазықтығының және нормалінің теңдеуін жазу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y,\ M_0(1,2,3)$ нүктесінде

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2,\ \frac{\partial z}{\partial y}=4.$$

Осыдан, жанама жазықтығының теңдеуі: $z-3=2(x-1)+4(y-2)$ немесе $2x+4y-z-7=0,$ ал нормалінің теңдеуі

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-1}.\quad\blacktriangle$$

119. $2x^2+y^2+3z^2-x-4y+5z=0$ функциясының $M_0(2;1;-1)$ нүктесіндегі жанама жазықтығының және нормаль түзуінің теңдеулерін жазу керек.

Шешуі. $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0}=(4x-1)\,|_{M_0}=7;\ \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0}=(2y-4)\,|_{M_0}=-2;\ \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0}=(6z+5)\,|_{M_0}=-1.$

Осыдан жанама жазықтығының теңдеуі:

$$7(x-2)-2(y-1)-(z+1)=0 \text{ немесе } 7x-2y-z-13=0,$$

ал нормаль түзуінің теңдеуі

$$\frac{x-2}{7}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}.\quad\blacktriangle$$

Берілген σ беттердің $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктелеріндегі жанама жазықтықтарының және нормаль түзулерінің теңдеулерін жазу керек:

120. $z=\frac{x^2-y^2}{2},\quad M_0(3,1,4);$ **Ж:** $3x-y-z-4=0;\quad \frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-4}{-1}.$

121. $z=x^2+2xy+3y^2,\ M_0(-1,1,2);$ **Ж:** $4y-z-2=0;\quad \frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{-1}.$

122. $z=2x^2+y^2-4xy,\ M_0(2,1,-3);$

Ж: $4x-6y-z-5=0;\quad \frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z+3}{-1}.$

123. $z=x^2+2y^2+4xy-5y-10,\quad M_0(-7,1,8);$

Ж: $10x+29y+z+38=0;\quad \frac{x+7}{-10}=\frac{y-1}{-29}=\frac{z-8}{-1}.$

124. $3x^2-y^2+z^2+xy+yz=0,\quad M_0(0,2,1);$

Ж: $2x-3y+5z+1=0;\quad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{5}.$

125. $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0,\quad M_0(1,2,-1);$

Ж: $x+11y+5z-18=0;\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}.$

126. $x^2+z^2-5yz+3y=46,\quad M_0(1,2,-3);$

Ж:

$2x+18y-16z-86=0;\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{18}=\frac{z+3}{-16}.$

127. $x^2+y^2-z^2-2xz+2x-z=0,\quad M_0(1,1,1);$

Ж: $2x+2y-5z+1=0;\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-5}.$

1.4 ЕКІ АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ЭКСТРЕМУМЫ

1. Екі айнымалылы функцияның экстремумы. D облысында анықталған $z=f(x,y)$ функциясы берілсін. Осы облыста жататын $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің маңайындағы барлық $M(x,y)$ нүктелерінде $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ $(f(x_0,y_0)<f(x,y))$ теңсіздігі орындалса, онда $z=f(x,y)$ функциясы M_0 нүктесінде максимум (минимум) мәнін қабылдайды. "Максимум" және "минимум" мәндері экстремум мәндері деп аталады.

Үш және одан көп айнымалылы функцияларының экстремумдары да осылайша анықталады.

Кез келген дифференциалданатын екі айнымалылы функция экстремум мәндерін тек оның барлық дербес туындылары нөлге тең болатын нүктелерінде ғана қабылдайды. Мұндай нүктелер *стационарлық (тұрақты) нүктелер* деп аталады. Мысалы, дифференциалданатын $z=f(x,y)$ функциясының стационарлық нүктесі $M_0(x_0,y_0)$

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$$

жүйесін шешу арқылы анықталады. Бұл шарт $z=f(x,y)$ функциясының *экстремумының қажетті шарты* делінеді. Стационарлық нүктелердің барлығы бірдей экстремум нүктелері бола бермейді. Сондықтан олардың әрқайсысы экстремум мәндерін қабылдауының жеткілікті шартын қанағаттандыру керек. $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі $z=f(x,y)$ функциясының стационар нүктесі болсын.

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0)$$

$$\Delta=AC-B^2,$$

деп белгілейік. Егер стационарлық $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде:

а) $\Delta>0$ және $A>0$ болса, онда M_0 - минимум нүктесі,

$\Delta>0$ және $A<0$ болса, онда M_0 - максимум нүктесі;

б) $\Delta<0$ болса, онда M_0 нүктесінде экстремум болмайды;

в) $\Delta=0$ болса, онда M_0 нүктесінде экстремум болуы да, болмауы да мүмкін.

128. $z=2x^2-xy+3y^2-5x+7y$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - y - 5,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 6y + 7$$

болады, осыдан

$$\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ -x + 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің шешімі $x = 1,\ y = -1,\ M(1,-1)$ нүктесіндегі екінші ретті дербес туындылары

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$$

болады. Сонымен

$$\Delta = AC - B^2 = 4 \cdot 6 - (-1)^2 = 23 > 0,\ A > 0.$$

Яғни $M(1,-1)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды және ол

$$z_{\min} = z(M) = -6 \text{ болады.} \ \blacktriangle$$

129. $z = x^3 + y^2 - 3axy$ функциясын экстремумге зерттеу керек $(a > 0)$.

Шешуі.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3ay = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің шешімі: $x_1 = a,\ y_1 = a$ және $x_2 = 0,\ y_2 = 0.$

Екінші ретті дербес туындысын табайық: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3a,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$

$M_1(a,a)$ нүктесінде

$$A = 6a,\ B = -3a,\ C = 6a, \quad \Delta = AC - B^2 = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0,\ A > 0.$$

Яғни $M_1(a,a)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды және ол $z_{\min} = -a^3$ тең болады. $M_2(0,0)$ нүктесінде

$$A = 0,\ B = -3a,\ C = 0,\ \Delta = AC - B^2 = -9a^2 < 0.$$

Яғни $M_2(0,0)$ нүктесінде экстремум жоқ. $\blacktriangle$

Берілген функцияларды экстремумге зерттеу керек:

130. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1;$ **Ж:** $z_{\min} = z(-1;1) = 0.$

131. $z = 4x - 2y - x^2 - y^2;$ **Ж:** $z_{\min} = z(2;-1) = 5.$

132. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1;$ **Ж:** $z_{\min} = z\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{4}{3}.$

133. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10;$ **Ж:** $z_{\min} = z(0;0) = 10.$

134. $z = x^2 - y^2 + 5xy + 6;$ **Ж:** Экстремум жоқ.

135. $z = 3xy - x^2y - xy^2;$ **Ж:** $z_{\min} = z(1;1) = 1.$

2. Шартты экстремум. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері. $z = f(x,y)$ функциясының *шартты экстремумы* деп осы функцияның, x және y айнымалыларының $\varphi(x,y)=0$ теңдеуімен байланысты болған жағдайдағы экстремум мәнін айтады. Мұндағы $\varphi(x,y)=0$ теңдеуі *байланыс теңдеуі* деп аталады.

Шартты экстремумды табу үшін Лагранж функциясы деп аталатын $u(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$ функциясының экстремумын табу жеткілікті, мұндағы λ - анықталмаған тұрақты көбейткіш.

Лагранж функциясының экстремумының бар болуының қажетті шарты:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

Осы үш теңдеуден тұратын жүйеден x, y және λ мәндерін табуға болады.

D тұйық облысында $z = f(x,y)$ функцияның ең үлкен M және ең кіші m мәндерін табу үшін:

а) D облысының ішінде жатқан барлық станционарлық нүктелерді тауып, осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептеу керек (бұл нүктелерде экстремум мәндерінің болуы не болмауын тексерудің қажеті жоқ);

б) D облысының шекарасында функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек;

в) барлық табылған мәндердің ең кішісін (бұл ең кіші мән) және ең үлкенін (бұл ең үлкен мән) таңдап аламыз.

136. $z = x^2 - y^2$ функциясының байланыс теңдеуі $2x - y - 6 = 0$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек.

Шешуі. Лагранж функциясын қарастырайық:

$$u = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y - 6).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y - \lambda = 0, \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

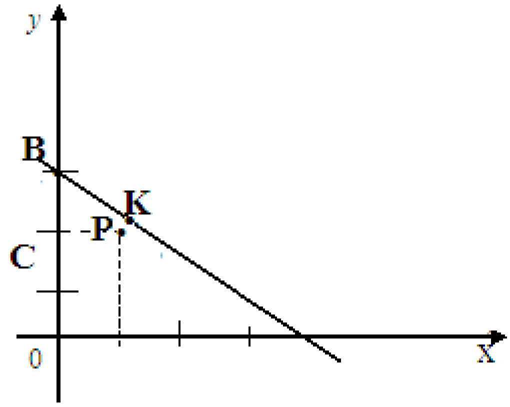
жүйесінен $\lambda = -4, x = 4, y = 2$ мәндері табылады. Осыдан $M(4,2)$ нүктесінде $z = x^2 - y^2$ функциясы шартты максимум мәнін қабылдайды және ол $z_{\max} = 12$ болады. ▲

137. $z = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 10$ функциясының $y = 0, \quad x = 0$ және $3x + 4y = 12$ сызықтарымен шектелген тұйық D облысындағы (аймағындағы) ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Шешуі. Стационар (тұрақты) M нүктесін табайық.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x - y - 4 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

Осы жүйеден $x = 1, y = 2, P(1, 2)$ нүктесі D облысының ішінде жатыр (1.1 Сурет). $z(P) = z(1, 2) = 1.$



1.1 Сурет

Енді берілген функцияны D облысының шекарасында зерттейік. Облыс шекарасы *OA, AB* және *OB* кесінділерінен тұрады:

а) *OA* бөлігінде $y = 0, 0 \le x \le 4,$ осыдан $z = 3x^2 - 4x + 10, z_x' = 6x - 4 = 0,$

$$x = \frac{2}{3} \in [0, 4], \; N(\frac{2}{3}, 0), \; z(N) = 8\frac{2}{3};$$

OA кесіндісінің шеткі нүктелерінде $z(0) = z(0, 0) = 10, \; z(A) = z(4, 0) = 42;$

б) *OB* бөлігінде $x = 0, 0 \le y \le 3,$ осыдан

$$z = 2y^2 - 7y + 10, \; z_y' = 4y - 7, \qquad y = \frac{7}{4} \in [0, 3], \; C(0, \frac{7}{4}), \; z(C) = 4\frac{7}{8};$$

OB кесіндісінің шеткі нүктелерінде $z(0) = 10, \; z(B) = z(0, 3) = 7;$

AB бөлігінде $y = \frac{3}{4}(4 - x), \; 0 \le \text{x} \le 4,$

$$z = 3x^2 - \frac{3}{4}x(4 - x) + \frac{9}{8}(4 - x)^2 - 4x - \frac{21}{4}(4 - x) + 10 \quad \text{немесе}$$

$$z = \frac{39}{8}x^2 - \frac{43}{8}x + 7, \; z_x' = \frac{39}{4}x - \frac{43}{4} = 0, \; x = \frac{43}{39} = 1\frac{4}{39} \in [0,4], \; y = 2\frac{9}{52},$$

$$K(1\frac{4}{39}; 2\frac{9}{52}), \; z(K) = 1\frac{23}{312};$$

AB кесіндісінің шеткі нүктелеріндегі мәндері белгілі.

Табылған $z(P), \; z(N), \; z(K), \; z(C), \; z(0), \; z(A), \; z(B)$ мәндерін салыстыра отырып, z функциясының D облысындағы ең үлкен мәні $M = z(A) = 42,$ ал ең кіші мәні $m = z(P) = 1$ болатындығын анықтаймыз. ▲

138. $z = x^2 + y^2$ функциясының байланыс теңдеуі $3x + 4y = 12$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек;

Ж: $x = \frac{36}{25},\ y = \frac{48}{25},\ \lambda = -\frac{24}{25}$ болғанда $z_{\min} = \frac{144}{25}$.

139. $z = 3x + 4y$ функциясының байланыс теңдеуі $x^2 + y^2 = 25$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек.

Ж: $x = -3,\ y = -4,\ \lambda = \frac{1}{2}$ болғанда $z_{\min} = -25;\ x = 3,\ y = -4,\ \lambda = -\frac{1}{2}$ болғанда $z_{\max} = 25.$

Берілген $z = f(x, y)$ функциясының берілген сызықтармен шектелген D облысында ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек:

140. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 4,\qquad D: x = 0,\ y = 0,\ x + y + 3 = 0;$

Ж: $M = z(-3, 0) = z(0, 3) = 10;\ m = z(-1, -1) = 3.$

141. $z = xy - y^2 + 3x + 4y - 2,\qquad D: x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0;$

Ж: $M = z(0{,}5; 0{,}5) = 1{,}5;\ m = z(0, 0) = -2.$

142. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 5,\qquad D: x = 2,\ y = 0,\ y = x + 2;$

Ж: $M = z(2, 3) = 14;\ m = z(1, 0) = 4.$

143. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 4,\qquad D: x = -3,\ y = 0,\ x + y + 1 = 0;$

Ж: $M = z(-3, 2) = 10;\ m = z(-2, 0) = 1.$

144. $z = 0{,}5x^2 - xy + 8,\qquad D: 8 = 0,\ y = 2x^2;$

Ж: $M = z(-2, 8) = 26;\ m = z(2, 8) = -6.$

145. $z = 2x^2 + 3y^2 + 6,\qquad D: y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2},\ \mathrm{y} = 0.$

Ж: $M = z(0, 3) = 33;\ m = z(0, 0) = 6.$

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

2.1 БІРІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

1. Дифференциалдық теңдеулер туралы түсінік. Тәуелсіз айнымалы, ізделінді функция және оның туындыларын байланыстыратын теңдеу *дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

Егер ізделінді функция тек бір ғана айнымалыдан тәуелді болса, онда дифференциалдық теңдеу *қарапайым* деп аталады.

Біз тек қарапайым дифференциалдық теңдеулерді қарастырамыз.

Теңдеудің құрамындағы ең жоғарғы туындының реті дифференциалдық теңдеудің *реті* деп аталады.

Дифференциалдық теңдеудің *шешімі* немесе *интегралы* деп теңдеуге қойғанда оны тура теңдікке айналдыратын кез келген $y = f(x)$ функциясын айтады.

Дифференциалдық теңдеудің шешімін анықтау дифференциалдық теңдеуді *интегралдау* делінеді.

Егер дифференциалдық теңдеудің шешімі, саны теңдеудің ретіне сәйкес келетін тәуелсіз кез келген тұрақтылардан тұрса, онда ол берілген теңдеудің *жалпы шешімі* деп аталады.

Мысалы, y= φ (x,C_1, C_2,..., C_n) - n-ші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімі. Мұндағы C_1, C_2,..., C_n тұрақтыларының орнына мәндер қойып дара шешімдер алуға болады.

n-ші ретті дифференциалдық теңдеудің

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

- бастапқы деп аталатын шарттарды қанағаттандыратын дара шешімін табу *Коши есебі* деп аталады.

Берілген бастапқы n шартта $x = x_0$ аргументтің берілген мәніне сәйкес y функциясының және оның $y\,'$, $y\,''$,..., $y^{\,n-1}$ туындыларының мәні беріледі. Сол шарттардың көмегімен $C_1, C_2, ..., C_n$ тұрақтылардың сәйкес мәндері анықталады.

146. Келесі дифференциалдық теңдеулердің ретін анықтау керек:

$y''+5xy'-x^2y^3= 0$, $d^3y/dx^3–xy^2\, dy/dx =7$, $y'+5xy = \cos x$.

Шешуі. $y''+5xy'-x^2y^3= 0$ – екінші ретті,

$d^3y/dx^3–xy^2\, dy/dx =7$ - үшінші ретті,

$y'+5xy = \cos x$ – бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. ▲

147. y=sinx функциясы y″+y=0 теңдеуінің шешімі бола ма?

Шешуі. Берілген теңдеудегі y белгілі, демек y″-ті анықтайық:

$$y' = \cos x, \quad y''= - \sin x$$

Егер y″, y-ті теңдікке қойсақ: -sinx + sinx =0, яғни 0=0 теңдігіне келдік, демек y= sinx функциясы берілген теңдіктің шешімі болады. ▲

148. $y= x^2(1+Ce^{1/x})$ функциясы берілген, мұндағы C – кез келген тұрақты сан. y функциясы $x^2y'+(1-2x)y= x^2$ - бірінші ретті дифференциалдық теңдеуінің шешімі болатынын анықтау керек.

Шешуі. Ол үшін берілген функцияның бірінші ретті туындысын табайық:

$$y'= 2x (1+C e^{1/x}) +x^2 (0+C e^{1/x}(- 1/x^2))=2x(1+C e^{1/x})-Ce^{1/x}$$

y пен y′-ті берілген теңдіктің сол жақ бөлігіне қойсақ:

$$x^2(2x(1+Ce^{1/x})-Ce^{1/x})+(1-2x)x^2(1+Ce^{1/x}) = 2x^3+2x^3Ce^{1/x}-Cx^2e^{1/x}+x^2+Cx^2e^{1/x}-2x^3-2Cx^3e^{1/x} = x^2$$

$x^2=x^2$ тепе-теңдігіне келеміз, яғни берілген функция дифференциалдық теңдеудің шешімі. ▲

149. $y = \frac{C_1}{x} + C_2$ функциясы $xy'' +2y' =0$- екінші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімі болатынын анықтау керек.

Шешуі. y', y'' - терді тауып теңдікке қоялық:

$$y' = -\frac{C_1}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2C_1x}{x^4} = \frac{2C_1}{x^3}$$

$$x\frac{2C_1}{x^3} - \frac{2C_1}{x^2} = 0 \Rightarrow 0 = 0,$$

яғни теңдеуді қанағаттандырады.

Жалпы шешімдегі C_1, C_2 тұрақтыларға мәндер беріп, дара шешімдер алуға болады:

$C_1=1$, $C_2=0$ болғанда $y = \frac{1}{x}$,

$C_1= -3$, $C_2 =5$ болғанда $y = -\frac{3}{x} + 5$,

$C_1=0$, $C_2=-1$ болғанда $y = -1$ функциялары берілген дифференциалдық теңдеудің дара шешімдері болады. ▲

Берілген дифференциалдық теңдеулердің шешімі болатын у функциясын табу керек, мұндағы C, C_1, C_2, C_3 - кез келген тұрақты сандар:

150. $y' = \cos^2 x$.

A) $y = tgx + C$;

B) $y = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$;

C) $y = \frac{1}{2}\sin x + C$;

D) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$;

E) $y = 2Cosx + c$;

151. $y' = \sin^3 x$.

A) $y = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$;

B) $y = \frac{1}{2}\sin^3 x + C$;

C) $y = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$;

D) $y = \sin^3 \frac{x}{3} - \sin x + C$;

E) $y = \frac{1}{3}\sin 3x + C$;

152. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

A) $cx = e^{\frac{y}{x}}$;

B) $\ln cx = \frac{y}{x}$;

C) $\ln cx = -e^{\frac{y}{x}}$;

D) $\ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$;

E) $y = e^{\frac{y}{x}} + c$;

153. $xy' = y\ln\frac{x}{y}$.

A) $y = e^{Cx+1}$;

B) $y = e^{Cx}$;

C) $y = e^{Cx} + 1$;

D) $y = xe^{Cx}$;

E) $y = xe^{\frac{C}{x}-1}$;

154. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

A) $cx = e^{\frac{y}{x}}$;

159. $y''' + 9y' = 0$

A) $y = c_1Cos3x + c_2Sin3x + c_3$;

B) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + c_3$;

B) $\ln cx = \frac{y}{x}$;

C) $\ln cx = -e^{\frac{y}{x}}$;

D) $\ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$;

E) $y = e^{\frac{y}{x}} + c$;

155. $xy^{|} = y\ln\frac{x}{y}$.

A) $y = e^{Cx+1}$;

B) $y = e^{Cx}$;

C) $y = e^{Cx} + 1$;

D) $y = xe^{Cx}$;

E) $y = xe^{\frac{C}{x}-1}$;

156. $y^{|||} = 60x^2$

A) $y = 5x^4 + c_1x + c_2$;

B) $y = 120x + c_1x^2 + c_2$;

C) $y = 30x + c_1$;

D) $y = x^5 + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$;

E) $y = -30x + c_1$;

157. $y^{||} - 4y = 0$

A) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$;

B) $y = c_1e^{x} + c_2e^{-2x}$;

C) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$;

D) $y = -ce^{3x}$;

E) $y = ce^{3x}$;

158. $y^{||} + y = 0$.

A) $y = c_1Sinx + c_2Sinx$;

B) $y = c_1Cosx + c_2Cosx$;

C) $y = c_1Cosx - c_2Cosx$;

D) $y = c_1Cosx + c_2Sinx$;

E) $y = cSinx$;

C) $y = c_1Cosx + c_2Sinx + c_3$;

D) $y = e^x + x^2$;

E) $y = e^x - x^2$;

160. $2y^{||} + 5y^{|} + 2y = 0$

A) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{\frac{1}{2}x}$;

B) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-\frac{1}{2}x}$;

C) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$;

D) $y = c_1e^{\frac{1}{2}x} + c_2e^{-2x}$;

E) $y = -ce^{2x}$;

161. $y^{||} = 2$

A) $y = 2x^2 + c_1$;

B) $y = x^2 + c_1x + c_2$;

C) $y = \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$;

D) $y = 2x^2 + c_1x + c_2$;

E) $y = -2x^2 + c$;

162. $y^{||} + 4y = 5e^x$

A) $y = e^x + c_1Cos2x + c_2Sin2x$;

B) $y = e^x + c_1Cosx + c_2Sin2x$;

C) $y = e^x + c_1Cosx + c_2Sinx$;

D) $y = Cosx + c_1Sin2x + c_2e^x$;

E) $y = -e^x - Cosx$;

163. $y^{//}+y=0$

A) $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$;

B) $y = c_1\cos x + c_2\sin x$;

C) $y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$;

D) $y = c_1e^x + c_2\cos x$;

E) $y = -c_1e^x - c_2Cosx$;

2. 1-ші ретті дифференциалдық теңдеулер. *Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу* деп $F(x, y, y') = 0$ түріндегі теңдеуді айтады.

а) Егер бұл теңдік y' арқылы шешілсе, яғни $y' = f(x, y)$ түрінде жазылса, онда соңғы теңдеу *туындысы арқылы шешілген дифференциалдық теңдеу* делінеді.

б) $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ - бұл *дифференциалдар арқылы берілген бірінші ретті дифференциалдық теңдеу* делінеді.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің *жалпы шешімі* деп кез-келген бір тұрақты C–дан тәуелді және келесі шарттарды қанағаттандыратын $y = \varphi(x, C)$ функциясын айтады:

1) ол С тұрақтының кез келген мәнінде дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады;

2) бастапқы шарт $x=x_0$ болғанда $y=y_0$ қандай болмаса да $y = \varphi(x, C_0)$ функциясы берілген бастапқы шартты қанағаттандыратындай $C=C_0$ мәнін табуға болады ;

Дифференциалдық теңдеудің $y = \varphi(x, C)$ жалпы шешіміндегі c тұрақтысына $C = C_0$ мәнін берсеk, онда $y = \varphi(x, C_0)$ - теңдеудің *дара шешімі* деп аталады.

в) $M(x)dx + N(y)dy = 0$ - *айнымалысы ажыратылған теңдеу* делінеді, $\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$ - функциясы оның жалпы интегралы болады.

г) $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ - түріндегі теңдеу *айнымалысы ажыратылатын теңдеу* деп аталады.

Бұл теңдеуді шешу үшін оның екі жағын да $M_2(x)N_1(y)$ көбейтіндісіне бөлеміз. Сөйтіп, айнымалысы ажыратылған теңдеу алуға болады:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

164. $xdx + ydy = 0$ теңдеуін интегралдау керек.

Шешуі. Берілген теңдеуді интегралдаймыз: $\int xdx + \int ydy = c$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

- берілген теңдеудің жалпы интегралы. ▲

165. $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$ теңдеудің интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{ydy}{1+y^2} = 0$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = \ln c$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = \ln C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| = \ln C$$
$$\ln\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) = 2\ln C$$
$$\ln\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) = \ln C^2$$
$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) = C^2$$
\- жалпы интеграл. ▲

166. $y' = -\frac{y}{x}$ дифференциалдық теңдеудің жалпы және дара шешімдерін табу керек.

Шешуі. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} + \ln C$,

$$\ln y = -\ln x + \ln C$$
$$\ln y = \ln\frac{C}{x}, \quad y = \frac{C}{x}$$

\- берілген теңдеудің жалпы шешімі. $x_0 = 2,\ \ y_0 = 1$ болғандағы теңдеудің дара шешімін табатын болсақ: $1 = \frac{C}{2} \Rightarrow C = 2$. Олай болса, $y = \frac{2}{x}$ - берілген теңдеудің дара шешімі. ▲

Теңдеулердің түрін анықтап, жалпы интегралын немесе жалпы шешімін және бастапқы шарт берілгендері үшін оны қанағаттандыратын дара шешімін табу керек:

167. $xyy'=1-x^2$ **Ж:** $x^2+y^2=\ln Cx^2$

168. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$ **Ж:** $\sqrt{1-y^2}$ =arcsinx+C

169. y' tqx-y=a **Ж:** y=Csinx-a

170. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ **Ж:** $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$

171. $xy'+y=y^2$ **Ж:** Cx=(y-1)/y

172. $e^{-s}(1+ds/dt)=1$ **Ж:** $e^{t}=C(1-e^{-s})$

173. $y'=10^{x+y}$ **Ж:** $10^{x}+10^{-y}=C$

174. $y'+\sin(x+y)/2=\sin(x-y)/2$ **Ж:** $\ln\left|tq\, y/4\right|=C-2\sin(x/2)$

175. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}; \quad y|_{x=0} = 1$ **Ж:** y=(1+x)/(1-x)

176. $\sin y\cos x dx = \cos y \sin x dx; \quad y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$ **Ж:** $cosx = \sqrt{2}\cos y$

3. 1-ші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер. *f(x, y)* функциясы өзінің x және y аргументтеріне қатысты *n-өлшемді біртекті* делінеді, егер кез келген t параметрдің (нөлден өзге) мәні үшін келесі тепе-теңдік орындалатын болса:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

Егер $y' = f(x,y)$ түріндегі дифференциалдық теңдеудің оң жағы *f(x, y)* функциясы өзінің x және y аргументтеріне қатысты нөлдік өлшемді біртекті функция болса, онда теңдеу *біртекті* делінеді.

$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ түріндегі теңдеу *біртекті дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

Мұндай теңдеуді шешу үшін $\frac{y}{x} = u$ алмастыруын жасап айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеулерге келтіреміз.

$$\frac{y}{x} = u \;\Rightarrow\; y = ux \;\Rightarrow\; y' = u'x + u \;\Rightarrow$$

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Интегралды таба отырып, u функциясының орнына x және y арқылы өрнектелген мәнін алмастырып, біртекті теңдеудің жалпы шешімін аламыз.

177. Функция біртекті бола ма $f(x,y) = x^3 + 3x^2 y$?

Шешуі. $f(tx,ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3 (x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x,y)$

Сонымен f(x, y) функциясы 3-ші ретті біртекті болады. ▲

178. $y' = \frac{y}{x} - 1$ - біртекті дифференциалдық теңдеуді шеш.

Шешуі.

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = u - 1 \Rightarrow u'x = -1 \Rightarrow xdu = -dx \Rightarrow$$

$$\int du = -\int \frac{dx}{x} + \ln c \Rightarrow u = -\ln x + \ln c \Rightarrow u = \ln\frac{c}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \ln\frac{c}{x} \Rightarrow y = x\ln\frac{c}{x}$$. ▲

179. $y' = -\frac{x+y}{x}$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

$$y' = -\frac{x+y}{x} \Rightarrow y' = -1 - \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = -1 - u \Rightarrow u'x = -1 - 2u \Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx} = -1 - 2u \Rightarrow xdu = (-1 - 2u)dx \Rightarrow \frac{du}{1+2u} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{du}{1+2u} = -\int \frac{dx}{x} + \ln c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|1+2u| = -\ln x + \ln C \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|1+2u| = \ln\frac{C}{x} \Rightarrow$$

$$\ln|1+2u| = 2\ln\frac{C}{x} \Rightarrow \ln|1+2u| = \ln\frac{C^2}{x^2} \Rightarrow 1 + 2u = \frac{c}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2u = \frac{c}{x^2} - 1 \Rightarrow u = \frac{c - x^2}{2x^2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{c - x^2}{2x^2} \Rightarrow y = \frac{c - x^2}{2x};$$ ▲

180. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Бұл біртекті теңдеу болғандықтан $\dfrac{y}{x}=u$ алмастыруын жасаймыз. Сонда

$$y=ux \;\Rightarrow\; y'=u'x+u \;\Rightarrow$$

$$u+xu'=e^{4}+u \;\Rightarrow\; xx'=e^{4} \Rightarrow \frac{xdu}{dx}=e^{-4} \;\Rightarrow\; \frac{du}{e^{4}}=\frac{dx}{x} \;\Rightarrow$$

$$\int e^{-4}du=\int\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; -e^{-4}+\ln c=\ln x \;\Rightarrow\; \ln c-\ln x=e^{-4} \;\Rightarrow$$

$$\ln\frac{c}{x}=e^{-4} \;\Rightarrow\; u=-\ln\ln\frac{c}{x} \;\Rightarrow\; y=-x\ln\ln\frac{c}{x};$$

▲

4. Біртектіге келтірілетін дифференциалдық теңдеулер. Мұндай теңдеулерге $y'=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ түріндегі теңдеулер жатады.

I. Егер анықтауыш

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0,$$

онда $x=u+\alpha;$ $y=v+\beta;$ алмастыруын енгіземіз, мұндағы α және β сандары:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$$

жүйесінің шешімдері.

II. Егер анықтауыш

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0,$$

онда $ax+by=t.$ алмастыруын жасаймыз.

181. $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0.$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $(x-2y+3)\dfrac{dy}{dx}=-2x-y+1;$ $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x-y+1}{x-2y+3};$

Анықтауышты есептейік:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0 .$$

Нөлге тең емес болғандықтан келесі жүйені шешеміз:

$$\begin{cases} -2x-y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=1-2x \\ x-2+4x+3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=-1/5 \\ y=7/5 \end{cases};$$

Ендеше алмастыруымыз $x=u-1/5;$ $y=v+7/5;$ түрінде болады, оны алғашқы теңдеуге қоямыз:

$$(u-1/5-2v-14/5+3)dv+(2u-2/5+v+7/5-1)du=0;$$

$$(u-2v)dv+(2u+v)du=0;$$
$$\frac{dv}{du}=\frac{2u+v}{2v-u}=\frac{2+v/u}{2v/u-1};$$
Айнымалыларды алмастырайық:
$$\frac{v}{u}=t;\quad v=ut;\quad v'=t'u+t;$$
Жоғарғы теңдеуге қойсақ:
$$t'u+t=\frac{2+t}{2t-1}$$
Айнымалыларды ажыратайық:
$$\frac{dt}{du}u=\frac{2+t}{2t-1}-t=\frac{2+t-2t^2+t}{2t-1}=\frac{2(1+t-t^2)}{2t-1};$$
$$\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}dt;\qquad \int\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2};$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right|=\ln|u|+\ln C_1$$
$$\ln\left|1+t-t^2\right|=-2\ln|C_1u|$$
$$\ln\left|1+t-t^2\right|=\ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|;\quad 1+t-t^2=\frac{C_2}{u^2};$$
Енді алғашқы функция y және айнымалы x-ке ораламыз:
$$t=\frac{v}{u}=\frac{y-7/5}{x+1/5}=\frac{5y-7}{5x+1};\quad u=x+1/5;$$
$$1+\frac{5y-7}{5x+1}-\left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2=\frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$
$$(5x+1)^2+(5y-7)(5x+1)-(5y-7)^2=25C_2$$
$$25x^2+10x+1+25xy+5y-35x-7-25y^2+70y-49=25C_2$$
$$25x^2-25x+25xy+75y-25y^2=25C_2+49-1+7$$
$$x^2-x+xy+3y-y^2=C_2+\frac{55}{25}=C;$$
Сонымен, $x^2-x+xy+3y-y^2=C$ өрнегі берілген теңдеудің жалпы интегралы болып табылады. ▲

182: $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0.$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі: $2(x+y)\frac{dy}{dx}=-3x-3y+1;\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-3x-3y+1}{2x+2y}=-\frac{3x+3y-1}{2x+2y};$

Анықтауышты есептейік: $\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-6+6=0;$

Ендеше $3x+3y=t.$ алмастыруын жасаймыз.
$$\frac{dy}{dx}=\frac{t'}{3}-1;$$
Бұл өрнекті алғашқы теңдеуге қоямыз:
$$\frac{t'}{3}-1=-\frac{3(t-1)}{2t};\quad 2t(t'-3)=-9t+9;\quad 2tt'=6t-9t+9;\quad 2tt'=-3t+9;$$

Айнамалыларды ажыратайық: $\frac{2t}{-3t+9}dt = dx; \qquad \frac{t}{t-3}dt = -\frac{3}{2}dx;$

$$\int\left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt = -\frac{3}{2}\int dx;$$

$$t + 3\ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Енді алғашқы функция y және айнымалы x-ке ораламыз:

$$2x + 2y + 2\ln|3(x+y-1)| = -x + C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln 3 + 2\ln|x+y-1| = C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln|x+y-1| = C;$$

Сөйтіп, берілген теңдеудің жалпы интегралын таптық. ▲

Теңдеулердің түрін анықтап, жалпы шешімін (интегралын) және дара шешімін табу керек:

183. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ **Ж:** $\frac{y-2x}{y+x} = Cx^3$

184. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$; $y|_{x=0}=1$ **Ж:** $y^2 - x^2 = y^3$

185. $y^2 + x^2 y' = xy\, y'$ **Ж:** $y = C_1 \cdot e^{y/x}$

186. xdy-ydx=ydy , y(-1)=1 **Ж:** $x = -y(1 + \ln|y|)$

187. $y' = y/x + \sqrt{\frac{y}{x}}$ **Ж:** $x = C_1\, e^{2\sqrt{y/x}}$

188. $2x^2 y' = x^2 + y^2$; $y|_{x=1}=0$ **Ж:** $y = x - \frac{x}{1+\ln\sqrt{|x|}}$

189. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ **Ж:** $x^2+y^2=Cy$

190. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$, $y|_{x=0}=1$ **Ж:** $x^2=0$ және $x^2=4-4y$

191. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$ **Ж:** $y=xe^{1+Cx}$

192. $(3y^2+3xy+x^2)dx=(x^2+2xy)dy$; $y|_{x=1}=0$ **Ж:** $(x+y)^2=x^3e^{1-x/(x+y)}$

5. Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер. Бернулли теңдеулері. $y' + P(x)y = Q(x)$, түріндегі дифференциалдық теңдеу y және оның y' туындысына қатысты *сызықтық* деп аталады, ал егер оң жағы *Q(x)* нөлге тең болса, онда *сызықтық біртекті*, нөлге тең болмаса, онда *сызықтық біртекті емес* дифференциалдық теңдеу делінеді, мұндағы $P(x), Q(x)$ - x-тен тәуелді берілген үзіліссіз функциялар.

I. Сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеуді шешуді қарастырайық :

$$y' + P(x)y = 0.$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

- сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі.

II. Сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеуді $y' + P(x)y = Q(x)$ шешудің *тұрақтыны вариациялау (Лагранж) әдісін* қарастырайық. Ол үшін біртекті теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$y' + P(x)y = 0$$

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Енді жалпы шешімдегі тұрақты С-ны х-тің функциясы деп қарастырамыз. Сонда:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} + C_1(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot(-P(x));$$

Алынған өрнекті берілген теңдеуге қоямыз:

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

C_1(х)-ді табамыз:

$$dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

$$C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C;$$

Берілген теңдеуге қоя отырып:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін аламыз.

Кейде біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеуді шешу үшін $y = uv$ алмастыруын *(Бернулли әдісін)* қолданамыз, яғни шешімді белгісіз екі функцияның көбейтіндісі түрінде іздейміз. Мұнда, туындыны $y' = u'v + uv'$ өрнегімен алмастырамыз.

$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ түріндегі дифференциалдық теңдеу *Бернулли теңдеуі* деп аталады, мұндағы $P(x), Q(x)$ - берілген үзіліссіз функциялар, n≠0, n≠1

Бернулли теңдеуінің сызықтық теңдеуден айырмашылығы оң жақ бөлігінде у-тің белгілі бір дәрежесі бар, шешілуі сызықтық теңдеулердегідей жүргізіледі. Шешімін табу үшін теңдеудің екі жағында y^n-ге бөлеміз:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)y}{y^n} = y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \qquad (2.1).$$

Алмастыру жасаймыз: $z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}y'$

Шыққан мәнді (2.1) теңдікке қоямыз:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$$

- бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу.

Шыққан теңдеуді шеше отырып z-ті табамыз, z-тің табылған мәнін жасаған алмастыруымызға қойып, Бернулли теңдеуінің шешімін табамыз.

193. $y' = (tgx)y + \cos x$ - сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеуді шешу керек.

Шешуі:

$$y' = (tgx)y + \cos x \;\Rightarrow\; y' - (tgx)y = \cos x \;\Rightarrow\; y' - (tgx)y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} - (tgx)y = 0 \;\Rightarrow$$

$$dy = tgx \cdot ydx \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = tgxdx \;\Rightarrow\; \ln y = -\ln(\cos x) + \ln C \;\Rightarrow\; y = \frac{C}{cosx}$$

Мұндағы, $C = C(x)$ - деп ұйғарамыз.

$$\Rightarrow\; y' = \frac{1}{\cos x}\frac{dC(x)}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}C$$

$$\frac{1}{\cos x}\frac{dC}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}C = tgx \cdot \frac{C}{\cos x} + \cos x \;\Rightarrow\; \frac{dC}{dx} + tgx \cdot C = tgx \cdot C + \cos^2 x \;\Rightarrow\; \frac{dC}{dx} = \cos^2 x \;\Rightarrow$$

$$C(x) = \int \cos^2 xdx \;\Rightarrow\; \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$ болғандықтан

$$C(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1$$

$$y = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1)\frac{1}{\cos x}$$ - жалпы шешім. ▲

194: $y' + 2y = e^{-x}$ сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеуді шешу керек.

Шешуі: $y' + 2y = 0$ біртекті дифференциалдық теңдеуді шешейік.

$$\frac{dy}{dx} = -2y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = -2dx \;\Rightarrow\; \ln y = -2x + \ln c$$

$$\ln y = \ln e^{-2x} + \ln c \;\Rightarrow\; y = Ce^{-2x}$$

$$y' = -2Ce^{-2x} + e^{-2x}C'$$

$$-2Ce^{-2x} + e^{-2x}C' + 2Ce^{-2x} = e^{-x}$$

$$e^{-2x}C' = e^{-x} \;\Rightarrow\; C' = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}} = e^{x} \;\Rightarrow\; dd = e^{x}dx \;\Rightarrow\; \int dC = \int e^{x}dx \;\Rightarrow\; C = e^{x} + C_1$$

$$y = e^{-2x}(e^{x} + C_1) = e^{-x} + e^{-2x}C_1;$$ ▲

195. $y' + 2\frac{y}{x} = x^3$ - сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі:

$$y' + 2\frac{y}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}$$

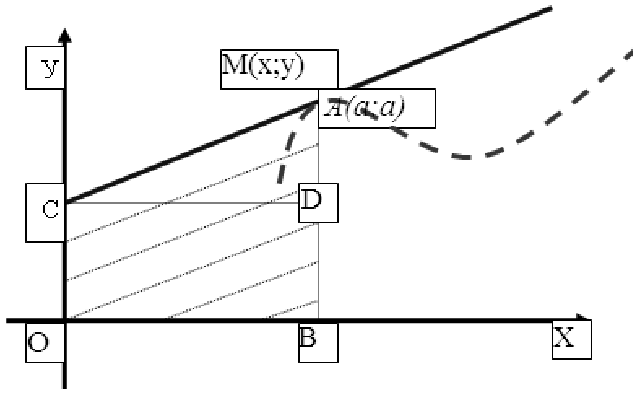
$$\ln y = -2\ln x + \ln C \Rightarrow y = \frac{C}{x^2};$$ мұндағы $c = z(x)$ делік.

$$y' = \frac{z'x^2 - 2zx}{x^4}$$

$$\frac{z'x^2 - 2zx}{x^4} + 2\frac{z}{x^3} = x^3 \Rightarrow z'x^2 - 2zx + 2zx = x^7 \Rightarrow z' = x^5 \Rightarrow dz = x^5 dx$$

$z = \frac{x^6}{6} + C_1$, $\quad y = (\frac{x^6}{6} + c_1)\frac{1}{x^2} \Rightarrow y = \frac{x^4}{6} + \frac{c_1}{x^2}$ - сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі. ▲

196. A(a;a) нүктесі арқылы өтетін y=y(x) қисығы үшін келесі қасиет орындалсын: егер қисықтың кез келген M(x;y) нүктесінде Oy осін C нүктесінде қиятындай жанама жүргізсе, онда OCMB трапециясының ауданы тұрақты және a^2-қа тең (2 Сурет). Аталған қисықтың теңдеуін жазу керек.



2 Сурет

Шешуі**:** $S_{трап} = \frac{1}{2}OB(MB + OC)$ екені белгілі, мұндағы MB=y; OB=x;

OC=BM-DM=BM-CDtgDCM=y-xy′ болғандықтан, трапеция ауданының формуласынан:

$$a^2 = \frac{1}{2}x(y+y-xy') \quad \text{немесе} \quad y' - \frac{2}{x}y = -\frac{2a^2}{x^2}$$

- сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеу аламыз.

Оның шешімін Бернулли әдісімен табайық, яғни $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ алмастыруын жасайық. Теңдеуге апарып қойсақ:

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = -\frac{2a^2}{x^2} \Rightarrow (u' - \frac{2}{x}u)v + uv' = -\frac{2a^2}{x^2}$$

1) $u' - \frac{2}{x}u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln u = 2\ln x \Rightarrow u = x^2$

2) $uv' = -\frac{2a^2}{x^2} \Rightarrow v' = -\frac{2a^2}{x^4} \Rightarrow v = \frac{2a^2}{3x^3} + C$

3) $y = uv = x^2(\frac{2a^2}{3x^3} + C)$ - сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі, $y(a)=a$ болғандықтан:

$a = a^2(\frac{2a^2}{3a^3} + C) \Rightarrow C = \frac{1}{3a} \Rightarrow y = \frac{2a^2}{3x} + \frac{x^2}{3a}$ - ізделінді қисықтың теңдеуі. ▲

197. $y' + 2y = e^x y^2$ - Бернулли теңдеуін шешу керек.

Шешуі:

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y^2} + \frac{2y}{y^2} = e^x \quad \Rightarrow \quad y'y^{-2} + 2y^{-1} = e^x \quad \Rightarrow z = y^{-1} \quad \Rightarrow \quad z' = -y^{-2}y'$$

$$\Rightarrow -z' + 2z = e^x$$

Алынған сызықтық дифференциалдық теңдеуді шешу үшін тұрақтыны вариациялау әдісін қолданамыз.

$-z' + 2z = e^x$ немесе $z' - 2z = -e^x$

$z' - 2z = 0$ -біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеу.

$$\frac{dz}{dx} = 2z \quad \Rightarrow \quad dd = 2zdx \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = 2dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2\int dx \quad \Rightarrow \quad \ln z = 2x + \ln c \quad \Rightarrow \quad \ln z = \ln e^{2x} + \ln c \quad \Rightarrow \quad \ln z = \ln e^x c \quad \Rightarrow \quad z = ce^{2x}$$

Енді тұрақты с-ны қандайда бір х-қа тәуелді функция деп аламыз, яғни

$$c = t(x) \quad \Rightarrow \quad z = te^{2x} = z' = \left(te^{2x}\right)' = t'e^{2x} + 2te^{2x} \quad \Rightarrow \quad z' - 2z = -e^x \quad \Rightarrow$$

$$t'e^{2x} + 2te^{2x} = -e^x \quad \Rightarrow \quad t'e^{2x} = -e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx}e^{2x} = -e \quad \Rightarrow \quad e^{2x}dt = -t^x dx \quad \Rightarrow$$

$$dt = -\frac{e^x}{e^{2x}}dx \quad \Rightarrow \quad dd = -e^{-x}dx \quad \Rightarrow \quad \int dt = -\int e^{-xdx} \quad \Rightarrow \quad t = e^{-x} + C_1$$

$$z = \left(e^{-x} + c_1\right)e^{2x} = e^x + C_1e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y^{-1} = e^x + C_1e^{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = e^x + C_1e^{2x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{e^x + C_1e^{2x}}$$

- Бернулли теңдеуінің жалпы шешімі. ▲

6. Толық дифференциалды теңдеулер. Егер $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ теңдеуі $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ шартын қанағаттандырса, яғни теңдеудің сол жағы қайсыбір $u(x,y)$ функциясының дифференциалы болса, онда ол *толық дифференциалды теңдеу* деп аталады.

Егер $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ теңдеудің сол жағы қайсыбір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы емес болса, яғни

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

онда теңдеудің барлық мүшесін оған көбейткенде толық дифференциалды теңдеуге айналатындай, $\mu\,(x,y)$ функциясынын табуға болады. Сондағы алынған теңдеудің шешімі бастапқы берілген теңдеудің шешімімен бірдей болады. Бұл $\mu(x,y)$ функциясы *интегралдаушы көбейткіш* деп аталады.

1) $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ функциясы тек х-тен тәуелді болса, оны М(х) деп белгілесек, онда интегралдаушы көбейткіш $\mu = e^{\int M(x)dx}$ функциясы болады.

2) $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ функциясы тек у-тен тәуелді болса, оны М(у) деп белгілесек, онда интегралдаушы көбейткіш $\mu = e^{-\int M(y)dy}$ функциясы түрінде алынады.

198. $(\ln y - 2x)dx + \left(\dfrac{x}{y} - 2y\right)dy = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табу керек.

Шешуі: Мұнда $P(x,y) = \ln y - 2x,\ Q(x,y) = \dfrac{x}{y} - 2y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\ln y - 2x)'_y = \frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{x}{y} - 2y\right)'_x = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

яғни толық дифференциалды теңдеу болады $\Rightarrow$

$$u(x,y) = \int(\ln y - 2x)dx + \varphi(y) = x\ln y - x^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x\ln y - x^2 + \varphi(y)\right)'_x = \ln y - 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x\ln y - x^2 + \varphi(y)\right)'_y$$

Толық дифференциал

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

екені белгілі. Сондықтан

$$(\ln y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy = du$$

$$\frac{x}{y} + \varphi'(y) = \frac{x}{y} - 2y \Rightarrow \varphi'(y) = -2y \Rightarrow \varphi(y) = -2\int ydy \Rightarrow \varphi(y) = -\cancel{2}\frac{y^2}{\cancel{2}} + c = -y^2 + c.$$

Олай болса, $u(x,y) = x\ln y - x^2 - y^2 + c$ немесе $-x\ln y + x^2 + y^2 = c$ - жалпы интеграл. ▲

199. $ydx - xdy + \ln xdx = 0$ теңдеуінің жалпы интегралын табу керек.

Шешуі: $(y + \ln x)dx - xdy = 0$, мұндағы $P(x, y) = y + \ln x$, $Q(x, y) = -x$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (y + \ln x)'_y = 1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = (-x)'_x = -1 \quad \text{, яғни } \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{1+1}{-x}=-\frac{2}{x}$$

тек x-тен тәуелді, демек интегралдаушы көбейткішті $\mu = e^{\int M(x)dx}$ өрнегімен табамыз:

$$\mu(x)=e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2}(y+lnx)dx-\frac{1}{x^2}xdy=0 \ \Rightarrow$$

Сонымен $\frac{1}{x^2}(y + lnx)dx - \frac{1}{x}dy = 0$ теңдеуін алдық, мұндағы $P(x, y)= \frac{1}{x^2}(y + lnx)$, $Q(x, y)= -\frac{1}{x}$. Енді дербес туындыларын тексерейік:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x^2}\ln x\right)'_y=\frac{1}{x^2}; \text{ ал}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(-\frac{1}{x}\right)'_x=\frac{1}{x^2}, \quad \text{яғни} \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$u(x,y)=\int\left(\frac{y}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)dx+\varphi(y)=-\frac{y}{x}+\int\frac{\ln x}{x^2}dx+\varphi(y)=\left|\begin{array}{l} u=\ln x, \\ du=\frac{dx}{x} \\ dv=\frac{dx}{x^2} \\ v=-\frac{1}{x}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{y}{x}-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+\varphi(y)=-\frac{y}{x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+\varphi(y) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(-\frac{y}{x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+\varphi(y)\right)'_y=-\frac{1}{x}+\varphi'(y)=Q_1(x;y)$$

$$-\frac{1}{x}+\varphi'(y)=-\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y)=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y)=C_1$$

Сонымен, $\quad u(x;y)=-\frac{y}{x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C_1=C_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x}+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}=C$

y+lnx+1=Cx - ізделінді жалпы шешім. ▲

Берілген теңдеулер түрлерін анықтап, олардың шешуін екі әдіспен де көрсету керек:

200. $\left(\frac{y^2+\sin 2x}{y}+1\right)dx-\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}-x\right)dy=0$ **Ж:** $x(1+y)+\frac{\sin^2 x}{y}=C$

201. $(2x + ye^{xy})dx + (1+ xe^{xy})dy = 0$ **Ж:** $x^2 + y + e^{xy} = C$

202. $\sin(x+y)\,dx+x\cos(x+y)(dx+dy)=0$ **Ж:** $x\sin(x + y)= C$

203. $\frac{y}{x}dx +(y^3 + \ln x)dy = 0$ **Ж:** $4y\ln x + y^4 = C$

204. $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx - \sqrt{x^2-y}\,dy = 0$ **Ж:** $x^2 + 2/3\,(x^2 - y)^{3/2}= C$

205. $3x^2(1+\ln y)dx=(2y-x^3/y)dy$ **Ж:** $x^3 + x^3\ln y - y^2 = C$

206. $(2x^2y^2+7)dx+2x^3ydy=0$ **Ж:** $x^3y^2+7x=C$

207. 13) $(e^y+ye^x+3)dx=(2-xe^y-e^x)dy$ **Ж:** $xe^y+ye^x+3x-2y=C$

208. $(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y})dx=\frac{x^2+y^2}{xy^2}dy$ **Ж:** $x^3y+x^2-y^2=Cxy$

209. $\frac{xdy}{x^2+y^2}=(\frac{y}{x^2+y^2}-1)dx$ **Ж:** $x+arctg\,\frac{y}{x}=C$

210. $(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy=0$ **Ж:** $x^4-x^2y^2+y^4=C$

211. $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$ **Ж:** $xe^y-y^2=C$

212. $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0$ **Ж:** $x^y=C$

Теңдеулердің әуелі интегралдаушы көбейткішін тауып, кейін жалпы шешімін табу керек:

213. $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0$ **Ж:** $\mu=\frac{1}{x^4};\quad y^2=Cx^3+x^2$

214. $(\sin x+e^y)dx+\cos x\,dy=0$ **Ж:** $\mu=e^{-y};\quad e^{-y}\cos x=C+x$

215. $(x\sin y+y)dx+(x^2\cos y+x\ln x)dy=0$ **Ж:** $\mu=\frac{1}{x};\quad x\sin y+y\ln x=C$

216. $(x^2-y)dx+xdy=0$ **Ж:** $\mu=\frac{1}{x^2};\quad x+\frac{y}{x}=C$

217. $2xtgydx+(x^2-\sin y)dy=0$ **Ж:** $\mu=\cos y;\quad x^2\sin y+\frac{1}{2}\cos 2y=C$

218. $\frac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0$ **Ж:** $\frac{y^2}{2}+\frac{\ln x}{y}=C$

219. $(1+xy)dx-xdy=0$ **Ж:** $x^2+\frac{2x}{y}=C$

220. $(e^{2x}-y^2)dx+ydy=0$ **Ж:** $\mu=e^{-2x};\quad y^2=(C-2x)e^{2x}$

221. $(1+3x^2\sin y)dx-xctgydy=0$ **Ж:** $\mu=\frac{1}{\sin y};\quad \frac{x}{\sin y}+x^3=C$

222. $y^2dx+(yx-1)dy=0$ **Ж:** $\mu=\frac{1}{y};\quad xx-\ln y=C$

223. $(x^2+y)dx-xdy=0$ **Ж:** $\mu=\frac{1}{x^2};\quad x-\frac{y}{x}=C$

224. $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$ **Ж:** $(x^2+y^2)e^x=C$

225. $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$ **Ж:** $(x\sin y+y\cos y-\sin y)e^x=C$

2.2 ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

1. Кейбір реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер.

$F(x,y,y',y'',...y(n))=0$ *n-ші ретті* дифференциалдық теңдеу, ал $y^{(n)}=f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$ - бас туындыға қатысты шешілген теңдеу деп аталады.

n-ші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімдерін тек кейбір жағдайларда ғана анықтауға болады. Бұл теңдеуді мынадай үш жағдайда қарастырайық:

I. $y^{(n)} = f(x)$, яғни $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ – қатыспаған жағдай.
Жалпы шешімі бұл теңдеуді n рет интегралдау арқылы алынады:
$y^{(n-1)} = \int f(x)dx = f_1(x) + C_1$,
$y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + C_1)dx = f_2(x) + C_1 x + C_2$,
$y^{n-3} = \int (f_2(x) + C_1 x + C_2)dx = f_3(x) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$,
…………………………………………………...
$y = f_n(x) + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_{n-1}x + C_n$

226. $y^{IV} = \cos 2x$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі: Теңдеудің екі бөлігін dx-ке көбейтіп интегралдайық:

$$y''' = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C_1$$

Сол әрекетті қайталап:

$$y'' = \int\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C_1\right)dx + C_2 = \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \int\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C_1 x + C_2\right)dx = \frac{x^3}{12} - \frac{\sin 2x}{16} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y = \int\left(\frac{x^3}{12} - \frac{\sin 2x}{16} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3\right)dx = \frac{x^4}{48} + \frac{\cos 2x}{32} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Жауабы: $y = \frac{x^4}{48} + \frac{\cos 2x}{32} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$ ізделінді жалпы шешім. ▲

Берілген теңдеулердің жалпы шешімдерін табу керек:

227. $y''' = e^{2x}$ **Ж:** $y = \frac{e^{2x}}{8} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

228. $y'' = x\sin x$ **Ж:** $y = C_1 x + C_2 - \sin x - 2\cos x$

229. $y'' = 3x^2$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ **Ж:** $4y = x^4 + 4x + 8$

230. $y'' = x + \sin x$ **Ж:** $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$

231. $y'' = \ln x$ **Ж:** $y = \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{2}{3}) + C_1 x + C_2$

232. $y''' = 1/x$ **Ж:** $y = x^2 \ln\sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

233. $y''' = \cos 2x$ **Ж:** $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

234. $y'' = 2/x^3$ **Ж:** $y = \frac{1}{x} + C_1 x + C_2$

235. $y'' = arctgx$ **Ж:** $y = \frac{arctgx}{2}(x^2 - 1) - \frac{x}{2}\ln(1 + x^2) + C_1 x + C_2$

236. $y'' = 3e^{x/2} + \cos 3x$ **Ж:** $y = 12e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{9}\cos 3x + C_1 x + C_2$

II. $F(x, y^{(\kappa)}, y^{(\kappa+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$, яғни у-қатыспаған жағдай
$y^{(\kappa)} = z$ - ауыстыруы арқылы теңдеудің ретін төмендетуге болады.
$y^{(\kappa+1)} = z'$
$y^{(\kappa+2)} = z''$
....
$y^{(n)} = z^{(n-\kappa)}$

237. $y'' = y' + x$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі : $y' = z(x)$, $y'' = z'$ ауыстыруын енгізсек: $z' - z = x$ - сызықтық теңдеу аламыз. Бұл теңдеуді шешу үшін $z = uv$, $z' = u'v + uv'$ белгіленуін пайдаланатынбыз, яғни осы берілгенді сызықтық теңдеуге қоямыз:

$$u' v + u v' - u v = x$$
$$u' v + u(v' - v) = x$$

1) $v' - v = 0 \ \Rightarrow \ v' = v$

$\int \frac{dv}{v} = dx \ \Rightarrow \ \ln v = x \Rightarrow \ v = e^x$

2) $u'v = x \ \Rightarrow \ u'e^x = x \ \Rightarrow \ d \ = xe^{-x}dx \ \Rightarrow \ u = \int xe^{-x}dx + C_1 = \begin{vmatrix} U = x \\ dU = dx \\ dV = e^{-x}dx \\ V = -e^{-x} \end{vmatrix} =$

$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx + C_1 = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1$

Демек, $z = uv$ болғандықтан, әрі $z = y'$ екенін ескерсек:

$$y' = (-xe^{-x} - e^{-x} + C_1)e^x = ((-x-1)e^{-x} + C_1)e^x = -x - 1 + C_1 e^x$$

у-ті табу үшін екі бөлігін де интегралдау қажет:

$$y = \int(-x - 1 + C_1 e^x)dx = -x^2/2 - x + C_1 e^x + C_2$$

Жауабы: $y = -x^2/2 - x + C_1 e^x + C_2$. ▲

Берілген теңдеулердің жалпы шешімдерін табу керек:

238. $xy'' = y'$ **Ж:** $y = C_1x^2 + C_2$

239. $y'' = y'/x + x$ **Ж:** $y = \frac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2$

240. $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$ **Ж:** $y = (1+C_1^2)\ln|x + C_1| - C_1x + C_2$

241. $xy'' = y'\ln(y'/x)$ **Ж:** $y = (C_1x - C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2$

III. $f(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, яғни х- қатыспаған жағдай

$y' = z$ алмастыруын енгіземіз, мұндағы $z = z(y)$. Келесі туындылардың табылу реті:

$$y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz:dy}{dx:dy}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z'\cdot y'=z'\cdot z$$

$$y'''=z''z^2+(z')^2z, \quad \text{т.с.с. жалғасады.}$$

242. $(y')^2+2yy''=0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: $y'=z$, $y''=z'z$ алмастыруын берілген теңдікке қойсақ:

$$z^2+2yz'z=0 \quad\Rightarrow\quad 2yz\frac{dz}{dy}=-z^2 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{z}=-\frac{dy}{2y} \;\Rightarrow\; \ln z=-\frac{1}{2}\ln y+\ln C_1$$

$$\Rightarrow \quad z=C_1y^{-\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad y'=C_1y^{-\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad y^{\frac{1}{2}}dy=C_1dx\ \ x\Rightarrow \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=C_1x+C_2=C_1(x+c_2)$$

$$\Rightarrow \qquad y=(\frac{2}{3}C_1)^{\frac{2}{3}}(x+c_2)^{\frac{2}{3}}=C(x+c_2)^{\frac{2}{3}}$$

- ізделінді жалпы шешім. ▲

Берілген теңдеулердің жалпы шешімдерін табу керек:

243. $y''=\frac{1}{x}$ **Ж:** $y=x\ln|x|+C_1x+C_2$

244. $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0$ **Ж:** $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$

245. $y''=\frac{1}{4\sqrt{y}}$ **Ж:** $x=\frac{4}{3}(y-2C_1)\sqrt{y+C_1}+C_2$

246. $xy''+y'=0$ **Ж:** $y=C_1+C_2\ln x$

247. $x^2y''+xy'=1$ **Ж:** $y=\frac{1}{2}\ln^2x+C_1\ln x+C_2$

248. $yy''+(y')^2=0$ **Ж:** $y=\pm\sqrt{C_1x+C_2}$

249. $yy''=(y')^2$ **Ж:** $y=C_1e^{C_2x}$

250. $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)(y')^2=0$ **Ж:** $(x+C_2)\ln y=x+C_1$

251. $2yy''-3(y')^2=4y^2$ **Ж:** $y\cos^2(x+C_1)=C_2$

2. Жоғарғы ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер. у функциясы және оның $y', y'', \dots, y^{(n)}$ туындыларына қатысты сызықты $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y+p_n(x)=f(x)$ түріндегі теңдеу біртекті емес *n-ші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу* деп аталынады.

Мұнда егер *f(x)*=0 болса, сызықтық *біртекті* дифференциалды теңдеу деп, ал егер $f(x)\neq 0$ болса, онда сызықтық *біртекті емес* деп, егер барлық $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n$ коэффициенттері – тұрақты сандар болса, онда жоғарғы ретті *тұрақты кооэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеу* деп аталады

Мұнда функцияның тәуелді және тәуелсіздігі ұғымдарына тоқтала кеткен жөн.

$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ функциялар тізбегін $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ сандар тізбегіне қоссақ $\sum_{i=1}^{n}\alpha_iy_i$ функциялар тізбегінің сызықтық комбинациясы алынады.

$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ функциялары өзара *сызықты тәуелді* делінеді, егер олардың сызықтық комбинациясы нөлге тең: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$ болатындай бәрі бір мезгілде 0-ге тең болмайтын $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ сандары табылатын болса, керісінше жағдайда *сызықты тәуелсіз* делінеді.

Басқаша айтқанда, тізбектің функциясын басқалары арқылы сызықты өрнектеуге болады.

Функцияның сызықты тәуелді, тәуелсіздігін анықтауда Вронскиан деп аталатын анықтауыш қарастырылады.

$$W(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$ -Вронский анықтауышы (Вронскиан).

(а,в) аралығында (n-1)-ші туындыларымен бірге үзіліссіз n функцияның *сызықты тәуелсіздігі* үшін сол функциялардың Вронский анықтауышы (Вронскиан) *(а,в)* –ның кез келген нүктесінде нөлден өзге болуы жеткілікті, яғни

$$W(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Егер n-ретті сызықты біртекті теңдеудің n шешімдер жинағы *(а,в)* аралығында анықталған және сызықты тәуелсіз болса, онда олар теңдеудің *фундаментальді шешімдер жүйесі* деп аталады.

Сызықтық біртекті дифференциалды теңдеудің шешімі:

1)Егер y_1 функциясы теңдеудің шешімі болса, онда Cy_1 функциясы да шешімі болады, мұндағы С – кез келген тұрақты сан.

2) Егер y_1 және y_2 функциялары теңдеудің шешімі болса, онда y_1+y_2 функциясы да шешімі болады.

252. $y_1 = Sin^2 x$, $y_2 = Cos^2 x$, $y_3 = a^2$ - сызықты тәуелді функциялар екенін көрсету керек.

Шешуі. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -\frac{1}{a^2}$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = \sin^2 x + \cos^2 x - \frac{1}{a^2} \cdot a^2 = 1 - 1 = 0 . \quad \blacktriangle$$

253. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$ функциясы $y''-2y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімі болатынын көрсетіңіз.

Шешуі: $y_1=C_1e^{3x}$, $y=C_2e^{-3x} \Rightarrow y'_1=3C_1e^{3x}$, $y'_2=-3C_2e^{-3x}$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3-3=-6 \neq 0 \quad ,$$

ендеше берілген функция теңдеудің жалпы шешімі. ▲

3. Жоғарғы ретті тұрақты коэффиценті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеулер. Коэффиценттері тұрақты сан болатын теңдеулерді қарастырайық:

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ түрінде берілген дифференциалдық теңдеудің шешімін табу үшін сәйкес

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

сипаттамалық (характеристикалық) деп аталатын теңдеу құрастырамыз. Бұл сипаттамалық теңдеудің n түбірі бар. Сипаттамалық теңдеудің шешімдеріне қатысты дифференциалдық теңдеудің келесі шешімдері алынады:

1) Егер $k_1, k_2, \ldots k_n$ – сипаттамалық теңдеу түбірлері нақты, әртүрлі сандар болса, онда біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = C_1 e^{k_k x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x} \qquad (2.2)$$

2) Егер $k_1, k_2, \ldots k_n$ – сипаттамалық теңдеу түбірлері нақты, әрі k_1 түбірі m-еселі болса: $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = k$, онда (2.2) біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}) + C_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

3) Егер сипаттамалық теңдеу түбірлері ішінде $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ комплекс (кешенді) түбірлер жұбы бар болса, онда (2.2) формуласының екі мүшесі келесі қосылғыштармен алмастырылады:

$$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

4) Егер $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ комплекс түбірлер жұбы m-еселі болса, онда (2.2) формуласының m-мүшелер жұбы келесі қосылғыштармен алмастырылады:

$$e^{\alpha x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x + (C_{m+1} + C_{m+2} x + C_{m+3} x^2 + \ldots + C_{2m} x^{m-1}) \sin \beta x$$

254. $y^{IV} + 10y' + 9y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$, $y''(0)=-9$, $y''(0)=-27$ - Коши есебін шешу керек.

Шешуі*:* $k^4 + 10k^2 + 9 = 0$. Егер $k^2 = a$ деп белгілесек, онда $k^4 = a^2$ $\Rightarrow$ $a^2 + 10a + 9 = 0$

$$D = 100 - 4 * 9 = 64, \qquad a_{1,2} = \frac{-10 \pm 8}{2} = \begin{cases} -9 \\ -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k^2 = a = \begin{cases} -9 \\ -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = -9 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm 3i = 0 \pm 3i \ \Rightarrow \ \alpha = 0, \ \beta = 3$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm i = 0 \pm i \ \Rightarrow \ \alpha = 0, \ \beta = 1$$

$$y = e^{0x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{0x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

- берілген төртінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі. Енді бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дара шешімін табайық.

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x - C_3 \sin x + C_4 \cos x$$

$$y'' = -9C_1 \cos 3x - 9C_2 \sin 3x - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

$$y''' = 27C_1 \sin 3x - 27C_2 \cos 3x + C_3 \sin x - C_4 \cos x$$

Бастапқы шарттарды қолданамыз:

$1=C_1+C_3$	$C_4=0$
$3=3C_2+C_4$	$C_3=0$
$-9=-9C_1-C_3$	$C_1=1$
$-27=-27C_2-C_4$	$C_2=1$

Жауабы: y=cos3x+sin3x- дара шешімі. ▲

4. Екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеулер. $a_0 y' + a_1 y' + a_2 y = 0$ түріндегі теңдеу II ретті коэффициенттері тұрақты біртекті сызықты теңдеу деп аталады.

$a_0, a_1, a_2 -$ коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеудің шешімін табу үшін алдымен $a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ сипаттамалық (квадраттық болады) теңдеуін шешу керек. 3 жағдайға байланысты теңдеудің шешімі былайша анықталады:

2.1 Кесте

Квадраттық теңдеудің түбірлері	Дара шешімі	Жалпы шешім
1) k_1, k_2 - нақты әртүрлі түбірлер	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2) $k_1 = k_2$ - нақты бірдей түбірлер	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_1 x}$	$e^{k_1 x}(C_1 + xC_2)$
3) $\alpha \pm \beta i$ түбірлер комплекс сандар	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

255. $2y'' + 5y' + 2y = 0$ теңдеуін интегралдау керек.

Шешуі.

$$2y'' + 5y' + 2y = 0 \Rightarrow 2r^2 + 5r + 2 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9$$

$$r_1 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$r_2 = \frac{-5-3}{4} = -2$$

$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-2x}$, мұндағы $y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}; y_2 = e^{-2x}$. ▲

256. $y'' + 6y' + 13y = 0$ теңдеуін интегралдау керек.

Шешуі.

$$y'' + 6y' + 13y = 0$$
$$r^2 + 6r + 13 = 0 \Rightarrow D = 6^2 - 4\times 11\times 13 = -16 \Rightarrow -3 + 2i$$
$$r_1 = \frac{-6+4i}{2} = \frac{2(-3+2i)}{2} = -3 + 2i$$
$$r_2 = \frac{-6-4i}{2} = \frac{2(-3-2i)}{2} = -3 - 2i$$
$$y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

▲

Берілген теңдеулердің жалпы шешімін табу керек.

257. $y'' + y' - 2y = 0$ **Ж:** $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$

258. $y'' - 9y = 0$ **Ж:** $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$

259. $y'' - 4y' = 0$ **Ж:** $y = C_1 e^{4x} + C_2$

260. $y'' - 2y' - y = 0$ **Ж:** $y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$

261. $3y'' - 2y' - 8y = 0$ **Ж:** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$

262. $y'' + y = 0$ **Ж:** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

263. $y'' + 6y' + 13y = 0$ **Ж:** $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

264. $4y'' - 8y' + 5y = 0$ **Ж:** $y = e^{x}(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2})$

265. $y'' - 2y' + y = 0$ **Ж:** $y = e^{x}(C_1 + C_2 x)$

266. $\frac{4d^2x}{dt} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$ **Ж:** $x = (C_1 + C_2 t)\, e^{2,5t}$

267. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y|_{x=0} = 6$, $y'|_{x=0} = 10$ **Ж:** $y = 4e^{x} + 2e^{3x}$

268. $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 15$ **Ж:** $y = 3e^{-2x}\sin 5x$

269. $4y'' + 4y' + y = 0$, $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 0$ **Ж:** $y = e^{-x/2}(2 + x)$

5. Жоғарғы ретті тұрақты коэффициентті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеулер. $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$. түріндегі теңдеу *n-ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$ -сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі оған сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі мен біртекті емес теңдеудің дербес шешімдерінің қосындысынан тұрады.

$$y = \bar{y} + y^*,$$

мұндағы у - сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің *жалпы шешімі*, $\bar{y}$ - біртекті теңдеудің *жалпы шешімі* (оны табуды алдыңғы тақырыпта қарастырғанбыз), y^* - сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің *дара шешімі*, оны біртекті емес теңдеудің оң жағы f(x) функциясына ұқсас анықтаймыз. Ол қалай болатындығы төмендегі кестеде көрсетілген:

2.2 Кесте

f(x)	Сипаттамалық теңдеудің түбірлері	Дара шешімнің түрі
1) $e^{ax} P_n(x)$, мұндағы $P_n(x)$ – n-дәрежелі берілген көпмүше	a саны – сипаттама теңдеудің түбірі емес	$y^* = e^{ax} P^*_n(x)$
	a саны – сипаттама теңдеудің r-еселі түбірі	$y^* = x^r e^{ax} P^*_n(x)$
2) $e^{ax}[P_n(x)\cos bx+$ $+Q_m(x)\sin bx]$	$a \pm bi$ сандар жұбы – сипаттама теңдеудің түбірі емес	$y^* = e^{ax}[P^*_k(x)\cos bx+Q^*_k(x)\sin bx]$, мұндағы $k = \max(m,n)$
	$a \pm bi$ сандар жұбы – сипаттама теңдеудің r-еселі түбірі	$y^* = x^r e^{ax}[P^*_k(x)\cos bx+Q^*_k(x)\sin bx]$, мұндағы $k = \max(m,n)$

270. $y^{IV} + 8y''+16y = \cos x$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: $y = \bar{y} + y^*$

1) $\bar{y}$ =?

$$k^4+8k^2+16=0, \quad (k^2+4)^2=0 \;\Rightarrow\; k^2=-4 \;\Rightarrow\; k_{1,2}=\pm 2i, \; k_{3,4}=\pm 2i$$

$$k_1=2i \;\Rightarrow y_1=\cos 2x, \quad k_2=-2i \;\Rightarrow\; y_2=\sin 2x,$$

$$k_3=2i \;\Rightarrow\; y_3=x\cos 2x, \quad k_4=-2i \;\Rightarrow\; y_4=x\sin 2x$$

$$\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+C_4y_4=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+xC_3\cos 2x+xC_4\sin 2x$$

2) y^*=?

$f(x) = \cos x \;\Rightarrow\; a \pm bi = 0 \pm 1i = i \neq k_1, k_2, ,k_3 ,k_4$

$y^* = A\cos x+B\sin x \;\Rightarrow\; (y^*)' = -A\sin x+B\cos x \;\Rightarrow$

$(y^*)'' = -A\cos x-B\sin x \Rightarrow (y^*)''' = A\sin x-B\cos x \;\Rightarrow\; (y^*)^{iv} = A\cos x+B\sin x$

Осы табылған туындыларды бастапқы берілген теңдікке қоямыз:

$A\cos x+B\sin x+8(-A\cos x-B\sin x)+16(A\cos x+B\sin x)=\cos x$

$$\begin{array}{r|l} \cos x & A-8A+16A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{9} \\ \sin x & B-8B+16B=0 \Rightarrow B=0 \end{array}$$

А мен В мәндерін y^*-ны анықтау өрнегіне қоямыз:

$$y^* = \frac{1}{9}\cos x$$

Демек, $y = \bar{y} + y^* = (C_1+xC_3)\cos 2x + (C_2+xC_4)\sin 2x + \frac{1}{9}\cos x$. ▲

271. $y'' + y = x - \sin 2x$. теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin 2x)$.

1) $k^2+1=0; \quad k_{1,2}=\pm i;$

2) $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$ түрінде іздейміз, мұндағы:

$$\alpha=0, \quad r=0, Q(x)=Ax+B; \;\Rightarrow\; y_1=Ax+B;$$

$$y_1' = A; \qquad y_1'' = 0;$$
$$Ax + B = x; \quad A = 1; \quad B = 0;$$

Сонымен, $y_1 = x;$

3) $f_2(x)$ функциясын келесі түрде іздеулік: $y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$.

$$\Rightarrow P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -1; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 2; \quad r = 0;$$

Сонымен, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$

$$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$$
$$y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x;$$
$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$
$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$A = 0; \quad B = \frac{1}{3};$ болғандықтан $y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x;$

Ізделінді дара шешім :

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x;$$

Ал біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x; \qquad \blacktriangle$$

272. $y'' - 2y' + y = 3e^x$. теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: 1) $k^2 - 2k + 1 - 0; \qquad k_1 = k_2 = 1;$

$$\Rightarrow \quad y = C_1e^x + C_2xe^x.$$

2) Біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дара шешімі:

$$y = x^r e^{\alpha x}Q(x)$$
$$\alpha = 1; \quad r = 2; \quad Q(x) = C;$$
$$y = Cx^2e^x.$$

Анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданамыз.

$$y' = 2Cxe^x + Cx^2e^x; \qquad y'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2e^x.$$

Теңдеуге қоямыз:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2e^x + Cx^2e^x = 3e^x.$$
$$2C = 3; \qquad C = \frac{3}{2}.$$

Дара шешім: $y = \frac{3}{2}x^2e^x.$

Біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{3}{2}x^2e^x. \qquad \blacktriangle$$

273. $y''' - y' = x^2 - 1$. теңдеуінің жалпы шешімін тау керек.

Шешуі: 1) $k^3 - k = 0; \quad k(k^2 - 1) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = -1;$

Біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

2) Біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дара шешімі: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

$$\alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Туындыларын тауып теңдеуге қоямыз:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C; \quad y'' = 6Ax + 2B; \quad y''' = 6A;$$

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 - 1;$$

$$-3A = 1; \quad -2B = 0; \quad 6A - C = -1;$$

$$A = -\frac{1}{3}; \quad B = 0; \quad C = -1;$$

Сөйтіп біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - x. \quad ▲$$

Берілген теңдеулердің жалпы шешімін табу керек:

274. $2y'' + y' - y = 2e^x$ **Ж:** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/2} + e^x$

275. $y'' + a^2 y = e^x$ **Ж:** $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{e^x}{a^2+1}$

276. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$ **Ж:** $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x \frac{5\sin x + 7\cos x}{74}}$

277. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$ **Ж:** $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$

278. $y'' - 2y' + 2y = 2x$ **Ж:** $y = e^{x((c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x) - 1}$

279. $y'' + 4y' - 5y = 1$ **Ж:** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - 0{,}2$

280. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$ **Ж:** $y = e^x(C_1 + C_2 x - \ln\sqrt{x^2+1} + x \operatorname{arctg} x)$

Берілген теңдеулердің жалпы шешімдерін анықтау керек:

281. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, мұнда $f(x)$ келесі функциялар түрінде берілген:

$f(x)$:	**Ж:** $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + y^*$, мұндағы y^* тең:
а) $10e^{-x}$	а) $\frac{5}{3} e^{-x}$
ә) $3e^{2x}$	ә) $3xe^{2x}$
б) $2\sin x$	б) $\frac{5}{3}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$
в) $2x^3 - 30$	в) $x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}$
г) $2e^x \cos \frac{x}{2}$	г) $-8/5 + e^x(\cos x/2 + 2\sin x/2)$
д) $x - e^{-2x} + 1$	д) $\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{12}e^{-2x}$
е) $e^x(3 - 4x)$	е) $e^x(2x^2 + x)$

ж) $3x + 5\sin 2x$ — ж) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(9+3\cos 2x-\sin 2x)$

з) $2e^{x} - e^{-2x}$ — з) $-2xe^{x}-\frac{1}{12}e^{-2x}$

и) $\sin x \sin 2x$ — и) $\frac{1}{20}\cos x-\frac{3}{20}\sin x+\frac{7}{260}\cos 3x+\frac{9}{260}\sin 3x$

к) shx — к) $-\frac{1}{12}e^{-x}-\frac{1}{2}xe^{x}$

282. $2y''+5y' = f(x)$, мұнда $f(x)$ келесі функциялар түрінде берілген:

$f(x)$:	**Ж:** $y = C_1 + C_2 e^{-5/2\, x} + y^*$, мұнда y^* тең:
а) $5x^2 - 2x - 1$	а) $\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{7}{25}x$
ә) e^{x}	ә) $\frac{1}{7}e^{x}$
б) $29\cos x$	б) $5\sin x - 2\cos x$
в) $\cos^2 x$	в) $\frac{1}{10}x+\frac{5}{104}\sin 2x-\frac{1}{41}\cos 2x$
г) $0{,}1e^{-2,5x} - 25\sin 2{,}5x$	г) $\cos 2{,}5x+\sin 2{,}5x-0{,}02xe^{-2,5x}$
д) $29x\sin x$	д) $(-2x-\frac{16}{29})\cos x-(2x-\frac{185}{29})\sin x$
е) $100x \cdot e^{-x} \cdot \cos x$	е) $e^{-x}[(10x+18)\sin x - (20x+1)\cos x]$
ж) $3\,\mathrm{ch}\frac{5}{2}x$	ж) $\frac{3}{10}(\frac{1}{5}e^{\frac{5}{2}x}-xe^{\frac{5}{2}x})$

6. Жоғарғы ретті тұрақты коэффициентті біртекті емес теңдеулерді шешудің Лагранж әдісі. Сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу үшін практикада *Лагранж (тұрақтыны вариациялау) әдісі* қолдану ыңғайлы.

Алдымен берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімін табу керек. Алдында қарастырылғандай ол мына түрде жазылады:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i;$$

Содан соң, C_i коэффициенттерін x-тің функциялары деп есептеп, біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табу керек:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i;$$

$C_i(x)$ функцияларын табу үшін келесі жүйені шешу керек:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

283. $y'' + y = x - \sin 2x.$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі: 1) Әуелі $y'' + y = 0.$ біртекті теңдеуді шешеміз.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = i; \quad k_2 = -i.$$

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

$$y = A\cos x + B\sin x;$$

2) Біртекті емес теңдеудің шешімі келесі түрде болады:

$$y = A(x)\cos x + B(x)\sin x;$$

Теңдеулер жүйесін құрастырамыз:

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$$

Жүйені шешейік:

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -A'(x)\sin x - A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ B'(x) = \cos x(x - \sin 2x) \end{cases}$$

$A'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$ өрнегінен *A(x)* функциясын табамыз.

$$A(x) = \int (2\sin^2 x\cos x - x\sin x)dx = 2\int \sin^2 x\cos x dx - \int x\sin x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x - \int x\sin x dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \sin x dx, \\ du = dx; & v = -\cos x \end{Bmatrix} = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int \cos x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1.$$

Енді *B(x)* функциясын табайық.

$$B(x) = \int x\cos x dx - 2\int \cos^2 x\sin x dx = \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \cos x dx, \\ du = dx; & v = \sin x; \end{Bmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx + \frac{2}{3}\cos^3 x =$$

$$= \frac{2}{3}\cos^3 x + x\sin x + \cos x + C_2.$$

Табылған мәндерді біртекті емес теңдеудің шешімінің формуласына қоямыз:

$$y = \frac{2}{3}\sin^3 x\cos x + x\cos^2 x - \sin x\cos x + C_1\cos x + \frac{2}{3}\sin x\cos^3 x + x\sin^2 x + \sin x\cos x + C_2\sin x =$$

$$= \frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) + x(\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Жауабы: $y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$ ▲

Сөйтіп, біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін дара шешімін таппастан жаздық.

Берілген теңдеулердің жалпы шешімін табу керек:

284. $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$ **Ж:** $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{2x}-x-4$.

285. $y'''-3y'+2y=e^{-x}(4x^2+4x-10)$ **Ж:** $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-2x}+(x^2+x-1)e^{-x}$

286. $y^{IV}+8y''+16y=\cos x$ **Ж:** $y=(c_1+c_2x)\cos 2x+(c_3+c_4x)\sin 2x+1/9\cos x$

287. $y^{IV}+2\alpha^2y''+\alpha^4y=\cos\alpha x$ **Ж:** $y=(c_1+c_2x)\cos\alpha x+(c_3+c_4x)\sin\alpha x-x^2\cos\alpha x/8\alpha^2$

288. $y^V+y'''=x^2-1$ **Ж:** $y=1/60x^5-1/2\,x^3+c_1x^2+c_2x+c_3+c_4\cos x+c_5\sin x$

289. $y^{IV}-y=xe^x+\cos x$ **Ж:** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\sin x+c_4\cos x+x^2-3x/8*e^x-1/4\,x\sin x$

290. $y^{IV}-2y''+y=8(e^x+e^{-x})+4(\sin x+\cos x)$

Ж: $y=(c_1+c_2x+x^2)e^x+(c_3+c_4x+x^2)e^{-x}+\sin x+\cos x$

291. $y'''+2y''+y'+2e^{-2x}=0$; $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=1$, $y''|_{x=0}=1$ **Ж:** $y=4-3e^{-x}+e^{-2x}$

292. $y'''-y'=3(2-x)$; $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=y''|_{x=0}=1$ **Ж:** $y=e^x+x^3$

293. Эйлер теңдеуін шеш: $x^3y'''+xy'-y=0$ **Ж:** $y=x(c_1+c_2\ln|x|+c_3\ln^2|x|)$

2.3 ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі. Төменде берілген теңдеулер жүйесі:

$$\begin{cases} F_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')=0\\ F_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')=0\end{cases}$$

бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі деп аталады, мұндағы x-тәуелсіз айнымалы, $y_1, y_2,\dots,y_n$ – ізделінді функциялар.

Егер жүйе ізделінді функциялардың туындылары арқылы шешілген болса, яғни :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n)\\ \frac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n)\end{cases}$$

онда *нормальдық жүйе* деп аталады.

Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің *жалпы шешімі* деп теңдеулер жүйесін теңбе-теңдікке айналдыратын

$$y_1=\varphi_1(x,C_1,C_2,\dots,C_n),\ y_2=\varphi_2(x,C_1,C_2,\dots,C_n),\ \dots\ y_n=\varphi_n(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$$

функциялар жиынтығын айтады.

2. Тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырғанда 3 теңдеуден тұратын (n=3) жүйемен шектелейік. Төменде айтылғандардың барлығы кез келген ретті жүйе үшін де орындалады.

Тұрақты коэффициентті нормальдық дифференциалдық теңдеулер жүйесі *сызықтық біртекті* делінеді, егер оны келесі түрде жазу мүмкін болса:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases}$$

Жүйе шешімдері: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$ түрінде ізделінеді. Келесі анықтауышты есептейміз:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0$$

Анықтауышты есептеу нәтижесінде k-ға қатысты үшінші дәрежелі теңдеу аламыз. Бұл теңдеу *сипаттамалық (характеристикалық) теңдеу* деп аталады және оның k_1 , k_2, , k_3. үш түбірі болады. Оның әрқайсысына берілген жүйенің нөлден өзге шешімі сәйкес келеді:

$$\begin{aligned} &y_1 = \alpha_1 e^{k_1x}, \quad &z_1 = \beta_1 e^{k_1x}, \quad &u_1 = \gamma_1 e^{k_1x}, \\ &y_2 = \alpha_2 e^{k_2x}, \quad &z_2 = \beta_2 e^{k_2x}, \quad &u_2 = \gamma_2 e^{k_2x}, \\ &y_3 = \alpha_3 e^{k_3x}, \quad &z_3 = \beta_3 e^{k_3x}, \quad &u_3 = \gamma_3 e^{k_3x}. \end{aligned}$$

Бұл шешімдердің сызықтық комбинациясы берілген сызықтық біртекті жүйенің шешімі болады:

$$\begin{aligned} y &= C_1\alpha_1 e^{k_1x} + C_2\alpha_2 e^{k_2x} + C_3\alpha_3 e^{k_3x}; \\ z &= C_1\beta_1 e^{k_1x} + C_2\beta_2 e^{k_2x} + C_3\beta_3 e^{k_3x}; \\ u &= C_1\gamma_1 e^{k_1x} + C_2\gamma_2 e^{k_2x} + C_3\gamma_3 e^{k_3x}. \end{aligned}$$

294. Жүйенің шешімін табу керек:

$$\begin{cases} y' = z + w \\ z' = 3y + w \\ w' = 3y + z \end{cases}$$

Шешуі. Сипаттамалық теңдеу құрастырайық:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0; \qquad -k\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-k(k^2-1)+3k+3+3+3k=0; \qquad k^3-7k-6=0; \qquad k_1=-1; \quad k_2=-2; \quad k_3=3;$$

1) $k = -1.$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 3\alpha+\beta+\gamma=0; \qquad \alpha=0; \quad \beta=-\gamma; \\ 3\alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

Егер $\gamma = 1$ десек, онда бұл жағдайда шешімдер: $y_1=0; \quad z_1=-e^{-x}; \quad w_1=e^{-x};$

2) $k_2 = -2.$

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 3\alpha+2\beta+\gamma=0; \qquad \alpha=-\gamma; \quad \beta=\gamma; \\ 3\alpha+\beta+2\gamma=0 \end{cases}$$

Егер $\gamma = 1$ десек, онда: $y_2=-e^{-2x}; \quad z_2=e^{-2x}; \quad w_2=e^{-2x};$

3) $k_3 = 3.$

$$\begin{cases} -3\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 3\alpha-3\beta+\gamma=0\ ; \quad \alpha=\dfrac{2}{3}\gamma; \quad \beta=\gamma; \\ 3\alpha+\beta-3\gamma=0 \end{cases}$$

Егер $\gamma = 3$ десек, онда: $y_3=2e^{3x}; \quad z_3=3e^{3x}; \quad w_3=3e^{3x};$

Жалпы шешім:

$$\begin{cases} y=-C_2e^{-2x}+2C_3e^{3x} \\ z=-C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+3C_3e^{3x} \\ w=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+3C_3e^{3x} \end{cases} . \quad ▲$$

295. Жүйенің жалпы шешімін табу керек:

$$\begin{cases} x'=5x+2y \\ y'=2x+2y \end{cases}$$

Шешуі. Сипаттамалық теңдеу құрастырайық:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix}=0; \qquad (5-k)(2-k)-4=0; \qquad 10-5k-2k+k^2-4=0;$$

$$k^2-7k+6=0; \qquad k_1=1; \qquad k_2=6;$$

Теңдеулер жүйесін шешейік:

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha+a_{12}\beta=0 \\ a_{21}\alpha+(a_{22}-k)\beta=0 \end{cases}$$

k_1 үшін:

$$\begin{cases} (5-1)\alpha_1+2\beta_1=0 \\ 2\alpha_1+(2-1)\beta_1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\alpha_1+2\beta_1=0 \\ 2\alpha_1+\beta_1=0 \end{cases}$$

$\alpha_1=1$ делік (кез келген мән қоюға болады), сонда: $\beta_1=-2.$

k_2 үшін :

$$\begin{cases} (5-6)\alpha_2+2\beta_2=0 \\ 2\alpha_2+(2-6)\beta_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1\alpha_2+2\beta_2=0 \\ 2\alpha_2-4\beta_2=0 \end{cases}$$

$\alpha_2 = 2$ делік (кез келген мән қоюға болады), сонда: $\beta_2 = 1.$ Жүйенің жалпы шешімі:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases} . \quad ▲$$

Бұл мысалды **басқа тәсілмен** шығаруға болады:

Шешуі. Бірінші теңдеуді дифференциалдаймыз: $x'' = 5x' + 2y';$

Бұл өрнекке екінші теңдеудегі туындыны $y' = 2x + 2y$ қоямыз.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Оған бірінші теңдеуден y тауып қоямыз:

$$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$$
$$x'' - 7x' + 6x = 0$$
$$k_1 = 6; \qquad k_2 = 1$$
$$x = Ae^t + Be^{6t}; \qquad x' = Ae^t + 6Be^{6t};$$
$$2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t};$$
$$y = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t};$$

$A = C_1; \quad \frac{1}{2}B = C_2$ деп белгілей отырып, жүйе шешімін аламыз:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases} \quad ▲$$

296. Жүйенің жалпы шешімін табу керек:

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}$$

Шешуі. Бұл жүйе жоғарыда қаралған жүйеден басқа текті, себебі *біртекті емес* (теңдеуде x-тәуелсіз аргумент бар). Шешу үшін бірінші теңдеуді x бойынша дифференциалдаймыз: $y'' = y' + z'.$

Екінші теңдеудегі z' алмастырсақ, онда: $y'' = y' + y + z + x$.

Бірінші теңдеуден z –ті тауып осыған қойсақ, онда: $y'' = 2y' + x.$

Енді алынған екінші ретті дифференциалдық теңдеуді шешейік:

$$y'' - 2y' = x; \qquad y'' - 2y' = 0; \qquad k^2 - 2k = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2.$$

Біртекті теңдеудің жалпы шешімі: $y = C_1 + C_2 e^{2x}.$

Енді біртекті емес теңдеудің дара шешімін табайық:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x); \quad \alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax + B;$$
$$y = Ax^2 + Bx; \quad y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A;$$
$$2A - 4Ax - 2B = x; \qquad A = -\frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4};$$

Біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1).$$

Алынған нәтижені жүйенің бірінші теңдеуіне қоямыз:

$$z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1). \quad \blacktriangle$$

Теңдеулер жүйесінің (сипаттамалық теңдеулерін құру арқылы) жалпы шешімін табу керек.

297. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 7x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 6x_1 + 4x_2; \end{cases}$ **Ж:** $\begin{array}{l} x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{10t}, \\ x_2 = -2C_1 e^t + C_2 e^{10t}. \end{array}$

298. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 12y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + 12y + 3z; \end{cases}$ **Ж:** $\begin{array}{l} x = 2C_1 e^t + 7C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}, \\ y \;\; = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ z \;\; = -2C_1 e^t - 8C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t}. \end{array}$

299. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2; \end{cases}$ **Ж:** $x_1 = e^{4t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \quad x_2 = e^{4t}(-C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t).$

300. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2; \end{cases}$ **Ж:** $\begin{array}{l} x_1 = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t, \\ x_2 = C_1 e^t + C_2 \sin t - C_3 \cos t, \\ x_3 = C_2(\cos t + \sin t) + C_3(\sin t - \cos t). \end{array}$

301. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 5x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2; \end{cases}$ **Ж:** $x_1 = e^{4t}(C_1 t + C_2), \quad x_2 = e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1)$

302. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -ax_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -ax_1; \end{cases}$ **Ж:** $x_1 = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at}, \;\; \tilde{o}_2 = -C_1 e^{at} + C_2 e^{-at}$

303. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + 8x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2; \end{cases}$ **Ж:** $x_1 = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}, \;\; \tilde{o}_2 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$

304. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3; \end{cases}$ **Ж:** $\begin{array}{l} x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}, \\ x_2 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-2t}, \\ x_3 = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}. \end{array}$

305. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 - x_2; \end{cases}$ **Ж:** $\begin{aligned} x_1 &= C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}, \\ x_2 &= C_1e^t - 3C_3e^{-t}, \\ x_3 &= C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}. \end{aligned}$

306. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 12x_1 - 5x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2; \end{cases}$ **Ж:** $\begin{aligned} x_1 &= e^{12t}(C_1\cos 5t + C_2\sin 5t), \\ x_2 &= e^{12t}(-C_1\sin 5t + C_2\cos 5t). \end{aligned}$

Дифференциалдық теңдеулер жүйесін белгісіздерді біртіндеп жою әдісі бойынша шешу керек:

307. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 3$ **Ж:** $x = 2e^{3t} - e^t, \quad y = 2e^{3t} + e^t$

308. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y + t; \end{cases}$ **Ж:** $x = C_1 + C_2e^{7t} - \dfrac{3}{49}t(7t+2), \quad y = -\dfrac{2}{3}C_1 + \dfrac{1}{2}C_2e^{7t} + \dfrac{1}{49}(14t^2 - 3t - 1)$

309. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^{3t} - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2e^{3t} - x; \end{cases}$ **Ж:** $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + \dfrac{1}{8}e^{3t}, \quad y = -C_1e^t + C_2e^{-t} + \dfrac{5}{8}e^{3t}$

310. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = e^x - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = e^{-x} + y; \end{cases}$ **Ж:** $\begin{aligned} y &= C_1\cos x + C_2\sin x + shx, \\ z &= C_1\sin x - C_2\cos x + shx \end{aligned}$

311. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0$ **Ж:** $\begin{aligned} x &= \dfrac{1}{4}(3e^t + 5e^{-t}) + \dfrac{1}{2}te^t - 1, \\ y &= \dfrac{5}{4}(e^t - e^{-t}) + \dfrac{1}{2}te^t - 1 \end{aligned}$

312. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{x+y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x+y}; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 4$ **Ж:** $x = \dfrac{1}{3}t + 2, \quad y = \dfrac{2}{3}t + 4$

313. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2\sin t; \end{cases}$ **Ж:**

$x = (C_1 + C_2 t)e^t + \dfrac{1}{2}\cos t,$

$y \quad = [C_2(1-t) - C_1]e^t - 2\cos t - \dfrac{1}{2}\sin t$

314. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 2(x+y), \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y; \end{cases}$ **Ж:** $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, \quad y = 3C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}$

315. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2x}{t} + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + \dfrac{2x}{t} - 1; \end{cases}$ **Ж:** $x = \dfrac{t}{3} + \dfrac{C_2}{t^2}, \quad y = C_1 e^t - \dfrac{t}{3} - \dfrac{2C_2}{t^3}$

316. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = xy + y^2; \end{cases}$ **Ж:** $x = -[(1+C_1)t + C_2]^{-1}, \quad y = -C_1[(1+C_1)t + C_2]^{-1}$

3 ҚОС ИНТЕГРАЛ

3.1 ТІК БҰРЫШТЫ КООРДИНАТТАР ЖҮЙЕСІНДЕГІ ҚОС ИНТЕГРАЛДАР

Oxy жазықтығының жабық D облысында анықталған $f(x,y)$ функциясы берілсін. D облысын кез келген жолмен n жай облыстарға бөлейік. Осы жай (қарапайым) облыстардың аудандарын $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ деп, ал сәйкес диаметрлерін $d_1, d_2, ..., d_n$ арқылы белгілейік, мұндағы облыс диаметрі деп осы облыста жатқан кез келген екі нүктесінің ара қашықтықтарының ең үлкенін айтады. Әрбір жай облыстан кез келген бір $M_1(x_1, y_1),\ i = 1, ..., n$ нүктеден таңдап алып, осы нүктелердегі анықталатын функциялардың мәндерін сәйкес $\Delta S_1,\ i = 1, ..., n$ аудандарына көбейтіп қолдансақ

$$f(x_1, y_1)\cdot \Delta S_1 + f(x_2, y_2)\cdot \Delta S_2 + ... + f(x_n, y_n)\cdot \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot \Delta S_i.$$

Осы қосынды $f(x,y)$ функцияның D облысындағы *интегралдық қосындысы* деп аталады.

Егер интегралдық қосындының $\max d_i \to 0$ шегі бар және ол шек D облысын n жай облыстарға қалай бөлгенімізге де, әрбір жай облыстан M_1 нүктелерін қалай алғанымызға да байланысты болмаса, одна осы шек $f(x,y)$

функциясының D облысындағы *қос интегралы* деп аталады да былай белгіленеді:

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x,y)\cdot \Delta S_i.$$

Егер D облысында $f(x,y) > 0$ болса, онда $\iint_D f(x,y)dS$ екі еселі интегралы жоғарыдан $z = f(x,y)$ бетімен, бүйір жағынан D облысының шекарасы арқылы өтетін Oz осіне параллель болатын цилиндр бетімен, төменнен Oxy жазықтығымен шектелген цилиндрлік дененің көлеміне тең болады.

Екі еселі интегралдың негізгі қасиеттері:

1. $\iint_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]dS = \iint_D f_1(x,y)dS \pm \iint_D f_2(x,y)dS.$

2. $\iint_D C\cdot f(x,y)dS = C\iint_D f(x,y)dS,$ мұндағы C – тұрақты сан.

3. Егер D облысын D_1 және D_2 облыстарына бөлсек, онда
$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_{D_1} f(x,y)dS + \iint_{D_2} f(x,y)dS.$$

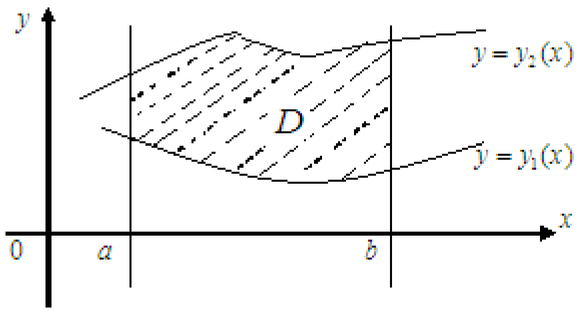
4. Егер D облысында $f(x,y) \ge g(x,y)$ болса, онда $\iint_D f(x,y)dS \ge \iint_D f(x,y)dS.$

5. Екі еселі интегралды бағалау. Егер $m \le f(x,y) \le M$ болса, онда $m\cdot S \le \iint_D f(x,y)dS \le M\cdot S,$ мұндағы S – D облысының ауданы, ал m мен M сәйкесінше $f(x,y)$ функциясының осы облыстағы ең кіші және ең үлкен мәндері.

Екі еселі интегралды есептеу.

Интегралдау облысы берілу пішіні (тұрпаты) бойынша екі түрге бөлінеді:

а) D облысы $x = a$ мен $x = b$ $(a < b)$ түзулерімен $y = y_1(x)$ және $y = y_2(x)$ $(x \in [a,b]$ жатқанда $y_1(x) \le y_2(x))$ үзіліссіз қисық сызықтармен шектелсін, әрі Oy осіне параллель жүргізілген түзулер осы қисықтардың әрқайсысын тек бір нүктеде қисын (3.1 Сурет).



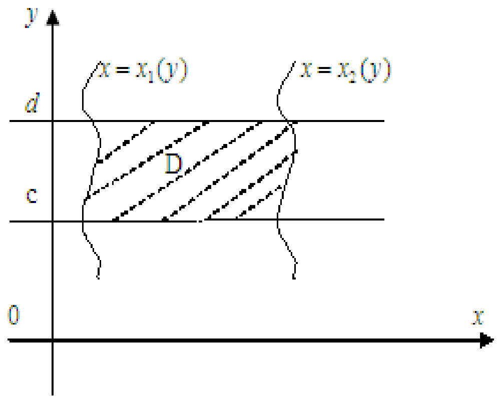
3.1 Сурет

Осындай облыс үшін екі еселі интеграл келесі формуламен есептелінеді:

$$\iint_D f(x,y)dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

мұнда алдымен ішкі $\int\limits_{y_2(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ интегралы есептелінеді, бұл жағдайда x айнымалысы тұрақты деп саналады.

б) D облысы $y=c$ мен $y=d$ $(c<d)$ түзулерімен $x=x_1(y)$ пен $x=x_2(y)$ $(y\in[c,d]$ жатқанда $x_1(y)\le x_2(y))$ үзіліссіз қисық сызықтарымен шектелсін, әрі Ox осіне параллель жүргізілген түзулер осы қисықтардың әрқайсысын тек бір нүктеде қисын (3.2 Сурет).



3.2 Сурет

Осындай облыс үшін қос интеграл келесі формуламен есептелінеді:

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

мұнда алдымен ішкі $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ интегралы есептелінеді, бұл жағдайда y айнымалысы тұрақты деп саналады.

Берілген формулалардың оң жақтары *қос интегралдар* деп аталады.

317. $\iint\limits_D \frac{y^3}{1+x^2}dxdy$ интегралын есептеу керек, мұнда D облысы тіктөртбұрыш: $-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 3.$

Шешуі. $\iint\limits_D \frac{y^3}{1+x^2}dxdy = \int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_0^3 y^3dy = arctg\ x\Big|_{-1}^{1}\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_0^3 = \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{81}{4} = \frac{81}{8}\pi.$ ▲

318. $\iint\limits_D (x+y)^2dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы квадрат: $-2\le x\le 2,\ -2\le y\le 2.$

Шешуі. $\iint\limits_D (x+y)^2dxdy = \int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-2}^{2}(x+y)^2dy = \frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{2}(x+y)^2\Big|_{-2}^{2}dx =$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{2}[(x+2)^3-(x-2)^3]dx = \frac{1}{12}[(x+2)^4-(x-2)^4] = 42\frac{2}{3}. \quad ▲$$

319. $\int\limits_1^3 dx\int\limits_{x^3}^{x}(x-y)dy$ интегралын есептеу керек.

Шешуі.

$$\int\limits_1^3 dx\int\limits_{x^3}^{x}(x-y)dy=\int\limits_1^3\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^3}^{y=x}dx=\int\limits_1^3\left(x^2-\frac{x^2}{2}-x^4+\frac{x^6}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{14}\right)\Bigg|_1^3=112\frac{8}{105}.$$

▲

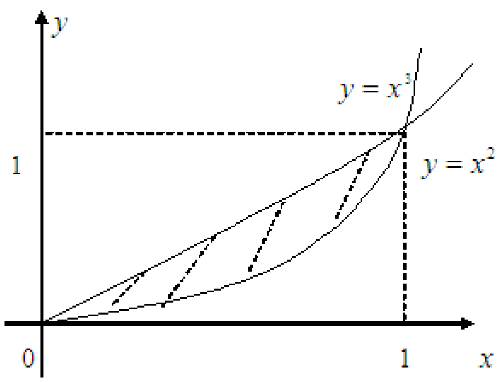
320. $\iint\limits_D(2-x-y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=x^2,\ y=x^3(x\geq 0)$ параболаларымен шектелген.

Шешуі. D облысын сызайық. $y=x^2$ және $y=x^3$ параболаларының қиылысу нүктелері $O(0,0)$ және $A(1,1)$ болады (3.3 Сурет).

$0\leq x\leq 1, x^3\leq y\leq x^2$ болғандықтан

$$\iint\limits_D(2-x-y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2}(2-x-y)dy=\int\limits_0^1\left(2y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x^3}^{y=x^2}dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2x^2-x^3-\frac{x^4}{2}-2x^3+x^4+\frac{x^6}{2}\right)=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{14}x^7\right)\Big|_0^1=\frac{37}{420}.$$



3.3 Сурет

Енді осы интегралдың интегралдау ретін өзгертейік. Алдымен x бойынша одан кейін y бойынша интегралдайық. $x_1=\sqrt{y}\leq x\leq x_2=\sqrt[3]{y},\ 0\leq y\leq 1$ болғандықтан

$$\iint\limits_D(2-x-y)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}(2-x-y)dx=\int\limits_0^1\left(2x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Big|_{x=\sqrt{y}}^{x=\sqrt[3]{y}}dy=\int\limits_0^1\left(2\sqrt[3]{y}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{y^4}-\right.$$

$$-2\sqrt{y}+\frac{1}{2}y+\sqrt{y^3}\Big)dy=\left(\frac{3}{2}y^{4/3}-\frac{3}{10}y^{5/3}-\frac{3}{7}y^{7/3}-\frac{4}{3}y^{3/2}+\frac{1}{4}y^2+\frac{2}{5}y^{5/2}\right)\Big|_0^1=\frac{37}{420}.\ \blacktriangle$$

321. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=x^2$ параболасымен $y=6-x,\ y=1,\ y=0$ түзулерімен шектелген.

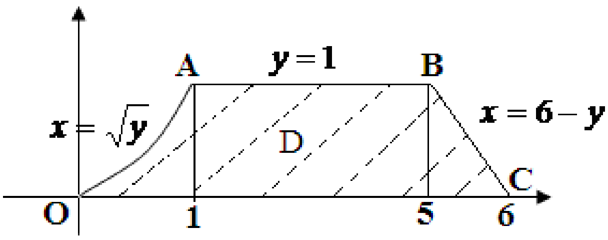
Шешуі. D облысын құрайық (3.4 Сурет).

Қиылысу нүктелері $O(0,0),\ A(1,1),\ B(5,1),\ C(6,0)$ болады. Алдымен x бойынша, одан кейін y бойынша интегралдайық.

$0\le y\le 1,\ \sqrt{y}\le x\le 6-y$ болғандықтан

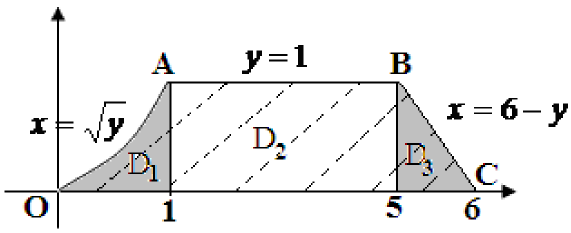
$$\iiint\limits_D (x^2+y^2)dS=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{6-y}(x^2+y^2)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3+xy^2\right)\Big|_{x=\sqrt{y}}^{x=6-y}dy=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}(6-y)^3+(6-y)y-\frac{1}{3}\sqrt{y^3}-y^2\sqrt{y}\right]dy=\left(\frac{-(y-6)^4}{12}+2y^3-\frac{y^4}{4}-\frac{2}{15}y^{5/2}-\frac{2}{7}y^{7/2}\right)\Big|_0^1=57\frac{26}{105}.$$



3.4 Сурет

Енді интегралдау ретін өзгертейік. Алдымен y бойынша, содан кейін x бойынша интегралдайық (3.5 Сурет).



3.5 Сурет

Бұл жағдайда D облысы үш D_1, D_2, D_3 облыстарына бөлінеді:

$$D_1:\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le x^2,$$
$$D_2:\ 1\le x\le 5,\ \ 0\le y\le 1,$$
$$D_3:\ 5\le x\le 6,\ \ 0\le y\le 6-x.$$

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dS=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dS+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)dS+\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)dS,$$

$$\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dS=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}(x^2+y^2)dy=\int\limits_0^1\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{y=0}^{y=x^2}dx=\int\limits_0^1\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{21}\right)\Big|_0^1=\frac{26}{105},$$

$$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)dS=\int\limits_1^5 dx\int\limits_0^1(x^2+y^2)dy=\int\limits_1^5\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{y=0}^{y=1}dx=\int\limits_1^5\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\right)\Big|_1^5=42\frac{2}{3},$$

$$\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)dS=\int\limits_5^6 dx\int\limits_0^{6-x}(x^2+y^2)dy=\int\limits_5^6\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{y=0}^{y=6-x}dx=$$

$$=\int\limits_5^6\left[x^2(6-x)+\frac{(6-x)^3}{3}\right]dx=\int\limits_5^6\left[6x^2-x^4-\frac{(x-6)^3}{3}\right]dx=\left(2x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{(x-6)^4}{12}\right)\Big|_5^6=14\frac{1}{3}.$$

Сонымен $\iint\limits_D(x^2+y^2)dS=\frac{26}{105}+42\frac{2}{3}+14\frac{1}{3}=57\frac{26}{105}$. ▲

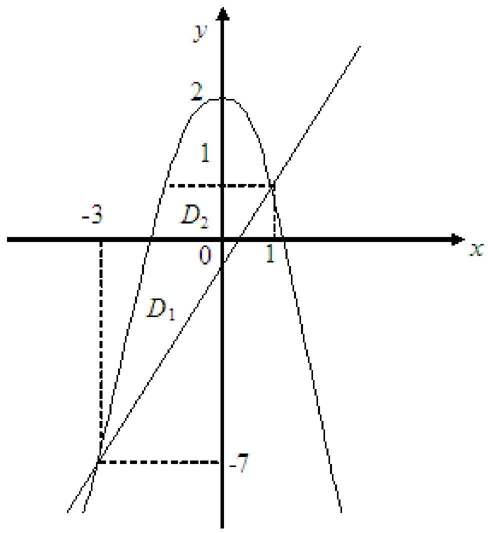
322. $f(x,y)=xy^2$ функциясының D облысындағы орта мәнін табу керек, мұндағы D облысы: $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$.

Шешуі. $S=2$,

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D xy^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^1 y^2dy=\frac{1}{3}.$$ ▲

323. $\int\limits_{-3}^{1}dx\int\limits_{2x-1}^{2-x^2}f(x,y)dy$ интегралының интегралдау ретін өзгерту керек.

Шешуі. D облысы $x=-3,\ x=1,\ y=2x-1,\ y=2-x^2$ сызықтарымен шектелген. Интегралдау ретін өзгерту үшін D облысын $y=1$ түзуімен D_1 және D_2 облыстарына бөлеміз (3.6 Сурет):



3.6 Сурет

D_1 облысы сол жағынан $x=-\sqrt{2-y}$ параболасымен, ал оң жағынан $x=\frac{1}{2}(y+1)$ түзуімен шектелген, яғни $-\sqrt{2-y}\le x\le\frac{1}{2}(y+1),\ -7\le y\le 1$.

D_2 облысы оң және сол жағынан $x = \pm\sqrt{2-y}$ параболасымен шектелген, яғни $-\sqrt{2-y} \le x \le \sqrt{2-y},\ 1 \le y \le 2.$

Сонымен $\int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx.$ ▲

Берілген қос интегралдарды есептеу керек:

324. $\iint\limits_D x\ln y dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D тіктөртбұрыш: $0 \le x \le 4,\ 1 \le y \le e.$ **Ж:** 8.

325. $\iint\limits_D x^2 \sin y dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D тіктөртбұрыш: $2 \le x \le 5,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}.$ **Ж:** 39.

326. $\iint\limits_D (1+y)\sqrt{x}\, dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D тіктөртбұрыш: $0 \le x \le 4,\ -1 \le y \le 2.$ **Ж:** 24.

327. $\iint\limits_D (x+3\sqrt{y})dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D квадрат: $-1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 4.$ **Ж:** 45.

328. $\iint\limits_D (x+2y)^2 x dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D тіктөртбұрыш: $1 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 2.$ **Ж:** 304.

329. $\iint\limits_D (\cos^2 x + \sin^2 y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D квадрат: $0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}.$ **Ж:** $\frac{\pi^2}{16}.$

330. $\iint\limits_D (x + xy^2 + 5)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D квадрат: $-1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3.$ **Ж:** 168.

331. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (x+y)dy$ интегралын есептеу керек. **Ж:** 3,35.

332. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} y^4 dy$ интегралын есептеу керек. **Ж:** $7\frac{11}{35}.$

333. $\int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^{3\cos x} y \sin x dy$ интегралын есептеу керек. **Ж:** 1,5.

334. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y = 2 - x^2,\ y = 2x - 1$ сызықтарымен шектелген. **Ж:** $4\frac{4}{15}.$

335. $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y = x^2$ және $y^2 = x$ параболаларымен шектелген. **Ж:** $\frac{33}{140}.$

336. $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=0,\ y=x,\ y=\dfrac{\pi}{2}-x$ түзулерімен шектелген. **Ж:** 0,5.

337. $\iint\limits_D (x-2xy+3y^2)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=0,\ y=x^2,\ x=2$ сызықтарымен шектелген. **Ж:** $11\dfrac{13}{21}$.

338. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $x=0,\ y=x^2,\ y=9$ сызықтарымен шектелген. **Ж:** 214,65.

339. $\iint\limits_D (x^2+2y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=3-x^2,\ y=2x$ сызықтарымен шектелген. **Ж:** $10\dfrac{2}{3}$.

340. $\iint\limits_D (2x-y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y^2=x,\ x+y=2$ сызықтарымен шектелген. **Ж:** -16,65.

Қос интегралдардың интегралдау реттерін өзгерту керек:

341. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy;$ **Ж:**

$\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^4 f(x,y)dx + \int\limits_3^5 dy \int\limits_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx.$

342. $\int\limits_1^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy;$ **Ж:** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_1^4 f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y^2}^4 f(x,y)dx.$

343. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2+1} f(x,y)dy;$ **Ж:**

$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\sqrt{y-1}}^1 f(x,y)dx.$

344. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy;$ **Ж:** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$

345. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 f(x,y)dy;$ **Ж:** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx.$

346. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{x^2+2} f(x,y)dy;$ **Ж:**

$\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\sqrt{y-2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_{\sqrt{y-2}}^2 f(x,y)dx.$

347. $\int_0^1 dx\int_1^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy;$ **Ж:** $\int_1^2 dy\int_{\sqrt{y}}^{y} f(x,y)dx.$

348. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy;$ **Ж:** $\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$

3.2 ҚОС ИНТЕГРАЛДА АЙНЫМАЛЫЛАРДЫ АЛМАСТЫРУ

1. Қос интегралда айнымалыларды алмастыру. Қос интегралда x, y координатасынан, $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ формуласының көмегімен, u, v координатасына көшу

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{D'} F(u,v)\cdot |I|\, dudv$$

формуласымен жүзеге асады, мұндағы $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v));$

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} - якобиан,$$

ал $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ өзара бірмәнді, D облысында үзіліссіз, әрі осы облыста үзіліссіз бірінші ретті дербес туындылары бар функциялар.

2. Полярлық координаттар жүйесіндегі қос интегралдар. Қос интегралда тік бұрышты x, y координаттарынан, $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ формулаларының көмегімен, r, φ *полярлық координаталарына* көшу

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot |I|\, drd\varphi$$

формуласымен жүзеге асады. Мұндағы

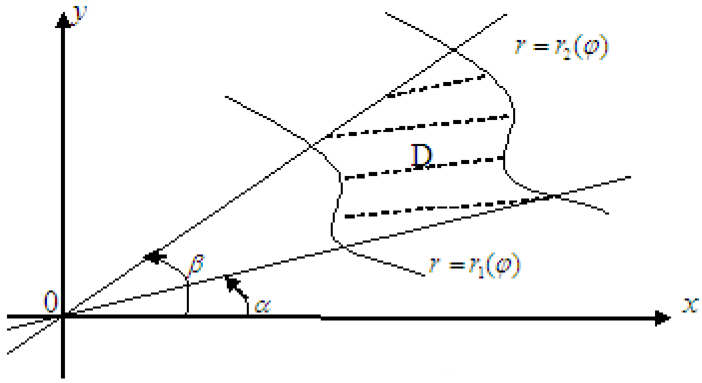
$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

болады.

Егер интегралдау D облысы $\varphi = \alpha$ және $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ сәулелерімен, $r = r_1(\varphi)$ және $r_2 = r(\varphi)$ ($\varphi \in [\alpha, \beta]$ жатқанда $r_2(\varphi) \ge r_1(\varphi)$ болса) қисық сызықтармен шектелсе, онда қос интеграл

$$\iint\limits_D F(r,\varphi)\cdot rdrd\varphi=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}F(r,\varphi)\cdot rdr$$

формуласымен есептелінеді (3.7 Сурет).



3.7 Сурет

349. Полярлық координаталар жүйесіне көшу арқылы $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $x^2+y^2=ax$ шеңберімен шектелген $(a>0)$.

Шешуі. D облысы радиусы $\frac{a}{2}$ тең, центрі $O\left(\frac{a}{2},0\right)$ болатын дөңгелек болғандықтан полярлық координаталарға көшеміз. $x^2+y^2=ax$ шеңбері полярлық координаттар жүйесінде $r=a\cdot\cos\varphi$ формуласы арқылы анықталады. $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le r\le a\cos\varphi$ болғандықтан

$$\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,d\varphi dr=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\cdot\frac{d(a^2-r^2)}{-2}=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(a^2-r^2)^{3/2}\Big|_{r=0}^{r=a\cos\varphi}d\varphi=-\frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(a^3\sin^3\varphi-a^3\right)d\varphi=-\frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi-\cos\varphi-\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{3}\pi a^3.\ \blacktriangle$$

350. $\iint\limits_D\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9}$, $x^2+y^2=\pi^2$ шеңберлерімен шектелген.

Шешуі. D облысы радиустары $\frac{\pi}{3}$-ке және π-ге тең, ал центрлері координаттар жүйесінің бас нүктесі болатын екі шеңбердің арасындағы сақина болғандықтан полярлық координаттарға көшеміз. Бұл шеңберлер полярлық координаттар жүйесінде $r=\frac{\pi}{3}$ және $r=\pi$ формулалары арқылы анықталады. Сондықтан $0\le\varphi\le2\pi$, $\frac{\pi}{3}\le r\le\pi$ болғандықтан

$$\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint_D \sin r\, drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi} \sin r\, dr = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos r)\Big|_{\pi/3}^{\pi} = 3\pi. \blacktriangle$$

351. $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсімен шектелген.

Шешуі. $x = a\cdot\rho\cos\theta, y = b\cdot\rho\sin\theta$ деп алсақ, онда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсінің полярлық координаттар жүйесіндегі теңдеуі $\rho=1$.

Якобиан $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} = ab\cdot\rho,$ ал $0\le\rho\le1,\ 0\le\varphi\le2\pi$ болғандықтан

$$\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = ab\iint_D \sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\, d\rho\, d\theta = ab\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho =$$
$$= -\frac{ab}{3}\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{3/2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \frac{ab}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi ab}{3}. \quad \blacktriangle$$

352. $\iint_D (y+ax)(y-bx)\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=-ax+C_1,\ \ y=-ax+C_2,\ \ y=bx+C_3,\ \ y=bx+C_4\ \ (C_1<C_2<C_3<C_4,\ a>0, b>0)$ түзулермен шектелген.

Шешуі. $y+ax=u,\ y-bx=v$ немесе $x=\frac{u-v}{a+b},\ y=\frac{av+bu}{a+b}$ деп алсақ, онда

$C_1\le u\le C_2,\ C_3\le v\le C_4,$ ал якобиан $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & -\frac{1}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b}$ болады.

Сонымен

$$\iint_D (y+ax)(y-bx)dxdy = \iint_{D'} u\cdot v\cdot\left|\frac{1}{a+b}\right|dudv = \frac{1}{|a+b|}\int_{C_1}^{C_2} udu\int_{C_3}^{C_4} vdv = \frac{(C_2^2-C_1^2)(C_4^2-C_3^2)}{4|a+b|}.$$

$\blacktriangle$

Полярлық координаттарға көшу арқылы қос интегралды есептеу керек:

353. $\iint_D (x^2+y^2)dxdy,$ мұндағы D облысы $x^2+y^2=2ax$ шеңберімен шектелген. **Ж:** $1{,}5\,\pi\, a^4$.

354. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, мұндағы D облысы $x^2+y^2\le a^2$ дөңгелегінің бірінші ширегі. **Ж:** $0{,}5\pi a.$

355. $\iint\limits_D \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ мұндағы D облысы $x^2+y^2=1$ және $x^2+y^2=e^2$ шеңберлерімен шектелген. **Ж:** $4\pi.$

356. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{x^2+y^2+a^2}$, мұндағы D облысы $y=\sqrt{a^2-x^2}$ жарты шеңберімен, OX осімен шектелген $(y\ge 0)$. **Ж:** $0{,}5\pi\ln 2.$

357. $\iint\limits_D x^2y\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D облысы $y=ax$ пен $y=bx\,(0<a<b)$ және $yx=p$ мен $xy=q\,(0<p<q)$ гиперболасымен шектелген.

Ж: $\dfrac{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{5\sqrt{ab}}\left(\sqrt{q^5}-\sqrt{p^5}\right).$ Ескерту. $\dfrac{y}{x}=u,\ xy=v.$

3.3 ҚОС ИНТЕГРАЛДЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

1. Жазық фигуралардың аудандарын есептеу. D облысымен шектелген жазық фигураның ауданы

$$S=\iint\limits_D dxdy$$

формуласымен анықталады.

Егер D облысы $a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)$ теңсіздіктерімен шектелсе, онда

$$S=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy.$$

Егер D облысы полярлық координаттар жүйесінде $\alpha\le\varphi\le\beta,\ r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi)$ теңсіздіктермен шектелсе, онда

$$S=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}rdr.$$

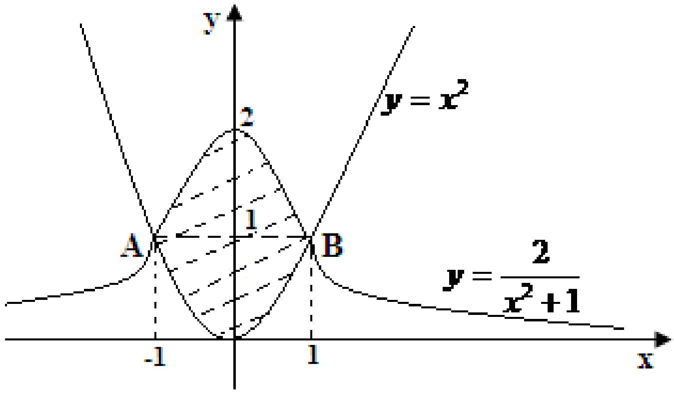
358. $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ және $y=x^2$ сызықтармен шектелген жазық фигураның ауданын табу керек.

Шешуі. Берілген сызықтардың қиылысу нүктелерін табамыз

$$\frac{2}{x^2+1}=x^2,\ x=\pm 1$$

Олар $A(-1;1)$ және $B(1;1)$ нүктелері (3.8 Сурет). Сонымен $-1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \dfrac{2}{x^2+1}$ болғандықтан

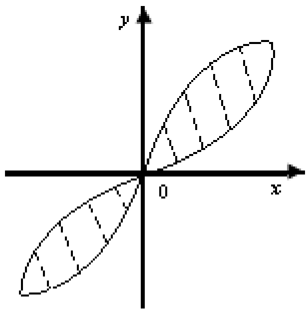
$$S = \iint_D dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{\frac{2}{x^2+1}} dy = \int_{-1}^{1} y \Big|_{x^2}^{\frac{2}{x^2+1}} dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{x^2+1} - x^2\right)dx = 2arctgx \Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \pi - \frac{2}{3}. \ ▲$$



3.8 Сурет

359. Полярлық координаттар жүйесіне көшу арқылы $(x^2+y^2)^3 = 2a^2xy^3$ қисық сызығымен шектелген жазық фигураның ауданын табу керек $(a>0)$.

Шешуі. $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ формулалары арқылы полярлық координаттар жүйесіне көшсек $r^6 = 2a^2r^4\sin^3\varphi\cos\varphi$ немесе $r = a\sqrt{2\sin^3\varphi\cos\varphi} = a\,|\sin\varphi|\cdot\sqrt{\sin 2\varphi}$, мұндағы $\sin 2\varphi \ge 0$ болғандықтан $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Яғни φ 0-ден $\frac{\pi}{2}$–ке дейін өзгеретіндегі фигураның ауданы берілген фигураның ауданының жартысына тең болады (3.9 Сурет).



3.9 Сурет

Сонымен

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\sin^3\varphi\cos\varphi}} r\cdot dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \Big|_0^{a\sqrt{2\sin^3\varphi\cos\varphi}} d\varphi = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cdot\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2}a^2\sin^4\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}. ▲$$

Берілген сызықтармен шектелген жазық фигуралардың аудандарын табу керек.

360. $x = 4y - y^2, x + y = 6.$ **Ж:** $\frac{1}{6}.$

361. $x = y^2,\ y = x^2.$ **Ж:** $\frac{1}{3}.$

362. $\acute{o}^2 = 10\tilde{o} + 25,\ \acute{o}^2 = 9 - 6\tilde{o}.$ **Ж:** $\frac{16\sqrt{15}}{3}.$

363. $\acute{o}^2 = 4\grave{a}\tilde{o},\ \tilde{o} + \acute{o} = 3\grave{a},\ \acute{o} \geq 0\ (\grave{a} > 0).$ **Ж:** $\frac{10a^2}{3}.$

364. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс). **Ж:** $\pi\, a\, b.$

365. $r = a(1 + \cos\varphi),\ r = a\cos\varphi\ \ (a > 0).$ **Ж:** $1{,}25\pi\, a^2.$

366. $(x^2 + y^2) = 2a^2xy.$ **Ж:** $a^2.$

367. $(x^2 + y^2) = a^2(x^2 + 4y^2).$ **Ж:** $2{,}5\pi\, a^2.$

368. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2).$ **Ж:** $a^2.$

369. $(x^2 + y^2)^2 = a(3x^2 - y^2).$ **Ж:** $\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right)a^2.$

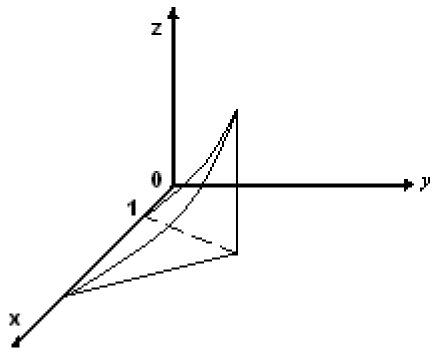
2. Денелердің көлемдерін есептеу. Жоғарыдан $z = f(x, y)$ бетімен, төменнен $z = 0$ жазықтығымен, бүйір жағынан D облысының шекарасы арқылы өтетін OZ осіне параллель болатын цилиндр бетімен шектелген дененің көлемі

$$V = \iint_D f(x, y)\, dxdy$$

формуласымен есептеледі.

370. $z = \frac{1}{3}y^2$ бетімен, $z = 0$, $5x - 2y - 5 = 0,\ \ 5x + 3y - 30 = 0$ жазықтықтарымен шектелген дененің көлемін табу керек.

Шешуі. Берілген дене жоғарыдан $z = \frac{1}{3}y^2$ бетімен, төменнен $z = 0$ жазықтығымен, ал бүйір жағынан $5x - 2y - 5 = 0$ және $5x + 3y - 30 = 0$ жазықтықтарымен шектелген (3.10 Сурет).

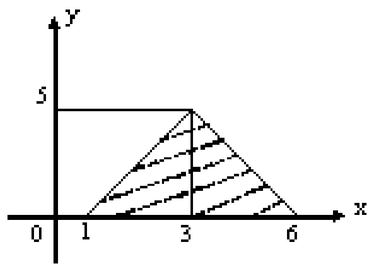


3.10 Сурет

Сондықтан $V = \iint_D \frac{1}{3} y^2\, dxdy$, ал интегралдау D облысы $0{,}4y + 1 \le x \le 6 - 0{,}6y,\quad 0 \le y \le 5$ теңсіздіктерімен шектелген (3.11 Сурет). Сонымен

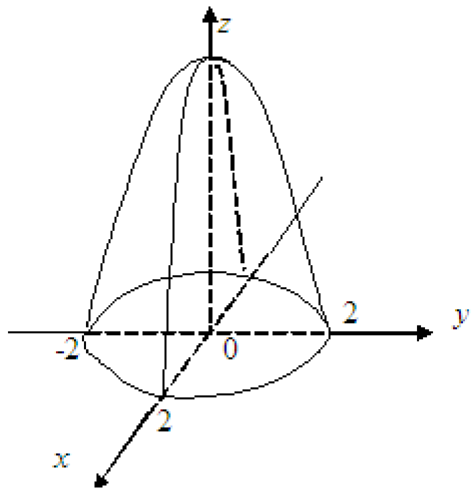
$$V = \frac{1}{3}\iint_d y^2 dxdy = \frac{1}{3}\int_0^5 dy \int_{0,4y+1}^{6-0,6y} y^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^5 y^2 \cdot x \Big|_{x=0,4y+1}^{x=6-0,6y} dy = \frac{1}{3}\int_0^5 y^2 (5-y) dy =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Bigg|_0^5 = 17\frac{13}{36}. \quad \blacktriangle$$



3.11 Сурет

371. $z = 4 - x^2 - y^2$ параболоиды және $z = 0$ жазықтығымен шектелген дененің көлемін табу керек (3.12 Сурет).



3.12 Сурет

Шешуі. Жоғарыдан $z=4-x^2-y^2$ параболоидымен, төменнен $z=0$ жазықтығымен шектелген дененің көлемі

$$V=\iint_D (4-x^2-y^2)\,dxdy.$$

Интегралымен анықталады, мұндағы D облысы $x^2+y^2=4$ шеңберімен шектелген. Бұл жағдайда $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$ формулаларының көмегімен полярлық координаттар жүйесіне көшеміз. $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le 2$ болғандықтан

$$V=\iint_D (4-r^2)\cdot r\,drd\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(4-r^2)\cdot r\,dr=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(2r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^2=2\pi\cdot(8-4)=8\pi.\ \blacktriangle$$

Берілген беттермен шектелген денелердің көлемдерін табу керек:

372. $z=3x,\ \ z=0,\ \ y=1+x^2,\ \ y=5$ (бірінші октантта орналасқан). **Ж:** 12.

373. $z=0,\ \ z=x^2,\ \ x+y=2,\ \ y=0.$ **Ж:** $1\frac{1}{3}$.

374. $z=0,\ \ z=2y,\ \ y=3x,\ \ x=2.$ **Ж:** 24.

375. $z=0,\ \ z=1-x^2-y^2,\ \ y=x,\ \ y=x\sqrt{3}$ (бірінші октантта орналасқан). **Ж:** $\frac{\pi}{48}$.

376. $z=0, z=x, y=\sqrt{4-y^2}.$ **Ж:** $5\frac{1}{3}$.

3. Беттің ауданын есептеу. Егер бет $z=f(x,y)$ теңдеуімен берілсе, онда оның ауданы

$$\sigma=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

формуласымен анықталады, мұндағы D облысы берілген беттің Oxy жазықтығындағы проекциясы.

Егер бет $x=x(y,z)$ теңдеуімен берілсе, онда оның ауданы

$$\sigma=\iint_{D_1}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz$$

формуласымен анықталады, мұндағы D_1 облысы берілген беттің Oyz жазықтығындағы проекциясы.

Егер бет $y=y(x,z)$ теңдеуімен берілсе, онда оның ауданы

$$\sigma=\iint_{D_2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz$$

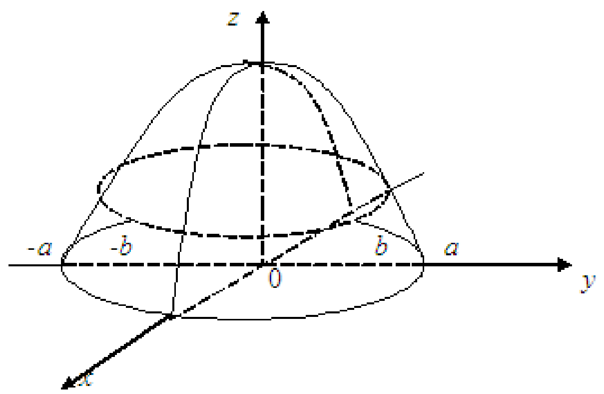
формуласымен анықталады, мұндағы D_2 облысы берілген беттің Oxz жазықтығындағы проекциясы.

377. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ сферасының $x^2+y^2=b^2$ цилиндрінің ішіндегі бөлігінің бетінің ауданын табу керек $(a>b)$ (3.13 Сурет).

Шешуі. Сфера теңдеуінен

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$



3.13 Сурет

Интегралдау облысы $x^2+y^2\le b^2$ дөңгелегі болады. Осыдан

$$\sigma=\iint\limits_D\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Полярлық координаттар жүйесіне көшсек, онда дөңгелектің теңдеуі $r\le b$ болғандықтан

$$\sigma=a\iint\limits_D\frac{r\,drd\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}=a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^b\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=-a\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^b=$$

$$=-2\pi a\left(\sqrt{a^2-b^2}-a\right)=2\pi a\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right).\ \blacktriangle$$

378. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ конусының $x^2+y^2=a^2$ цилиндрінің ішіндегі бөлігінің бетінің ауданын табу керек. **Ж:** $\pi a^2\sqrt{2}.$

379. $y=1-x^2-z^2$ параболоидының $x^2+z^2=1$ цилиндрімен қиғандағы бөлігінің бетінің ауданын табу керек. **Ж:** $\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi.$

380. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ жазықтығының координат жазықтықтарымен шектелген бөлігінің ауданын табу керек. **Ж:** $\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{2}$.

381. $x^2+y^2=4$ цилиндрін $z=0,\ z=y$ жазықтықтарымен қиғандағы бөлігінің ауданын табу керек $(z>0)$. **Ж:** $2\pi\sqrt{2}$.

382. $z^2=2xy$ бетін $y=1, x=4, z=0$ жазықтықтарымен қиғандағы бөлігінің ауданын табу керек. **Ж:** $\frac{20\sqrt{3}}{2}$.

4. Қос интегралдың механикада қолдануы. Oxy жазықтығында аумағы D облысы, ал тығыздығы $\gamma=\gamma(x,y)$ болатын пластинаның *массасы:*

$$m=\iint_D \gamma(x,y)dxdy.$$

Ox және *Oy* осьтеріне қарағандағы *статикалық моменттері:*

$$M_x=\iint_D y\gamma(x,y)dxdy, \qquad M_y=\iint_D x\gamma(x,y)dxdy$$

формулаларымен анықталады.

Пластинаның *ауырлық центрінің координаттары* $x_c=\frac{M_y}{m}, y_c=\frac{M_x}{m}$ формулаларымен анықталады.

Ox, *Oy* осьтеріне және координата бас нүктесіне қарағандағы *инерция моменттері*

$$I_x=\iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy,\ I_y=\iint_D x^2\gamma(x,y)dxdy, \qquad I_0=\iint_D \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)dxdy=I_x+I_y$$

формулаларымен анықталады.

Ескерту: Біртекті пластина үшін $\gamma=const$, сондықтан $\gamma=1$ деп алуға болады.

383. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсін $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ түзуімен қиғанда пайда болатын сегменттің ауырлық центрін табу керек $(\gamma=1)$ (3.14 Сурет).

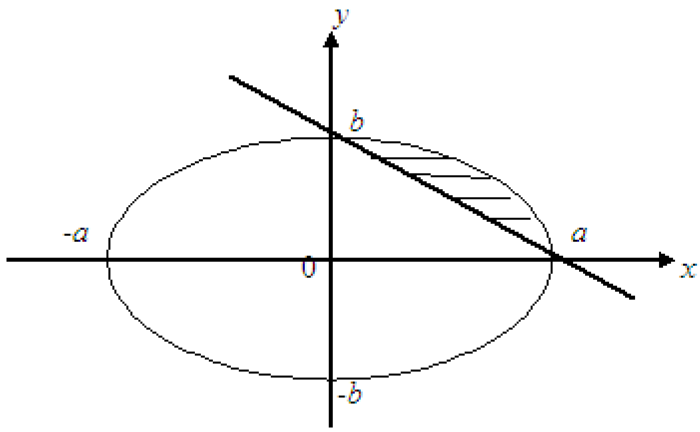
Шешуі. $$M=\iint_D dxdy=\int_0^a dx\int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy=\frac{b}{a}\int_0^a\left[\sqrt{a^2-x^2}-a+x\right]dx=$$

$$=\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a}-ax+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^a=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

$$M_x=\iint_D ydxdy=\int_0^a dx\int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy=\int_0^a \frac{y^2}{2}\Bigg|_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx=\frac{1}{2}\int_0^a\left[\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)-\frac{b^2}{a^2}\cdot(a-x)^2\right]dx=$$

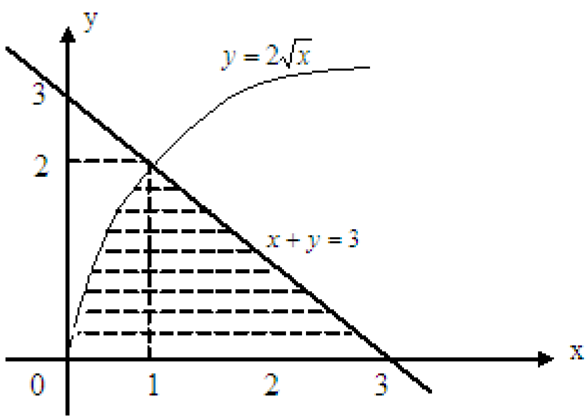
$$=\frac{b^2}{2a^2}\int_0^a\left(2ax-2x^2\right)dx=\frac{b^2}{2a^2}\left(ax^2-\frac{3}{2}x^3\right)\Bigg|_0^a=\frac{ab^2}{6}.$$

$$M_y=\iint_D xdxdy=\int_0^b dy\int_{\frac{a}{b}(b-x)}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}} xdx=\frac{a^2b}{6}.\ \blacktriangle$$



3.14 Сурет

384. $y=2\sqrt{x},\ x+y=3,\ y=0$ сызықтарымен шектелген пластинаның *Ox, Oy* остеріне, координаттар жүйесінің бас нүктесіне қарағанда инерция моменттерін табу керек $(\gamma=1)$ (3.15 Сурет).



3.15 Сурет

Шешуі.

$$I_x=\iint_D y^2dxdy=\int_0^2 y^2dy\int_{\frac{1}{2}y^2}^{3-y}dx=\int_0^2 y^2\cdot x\Big|_{x=\frac{1}{2}y^2}^{x=3-y}dy=\int_0^2\left[y^2(3-y)-\frac{1}{2}y^4\right]dy=\left(y^3-\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{20}y^5\right)\Bigg|_0^2=2,4.$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2dxdy=\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^{2\sqrt{x}}dy+\int\limits_1^3 x^2dx\int\limits_0^{3-x}dy=\int\limits_0^1 x^2y\Big|_{y=0}^{y=2\sqrt{x}}dx+\int\limits_1^3 x^2y\Big|_{y=0}^{y=3-x}dx=$$

$$=2\int\limits_0^1 x^2\sqrt{x}dx+\int\limits_1^3 x^2(3-x)dx=\frac{4x^{3,5}}{7}\Big|_0^1+\left(x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^3=6\frac{4}{7}.$$

$$I_o=I_x+I_y=2{,}4+6\frac{4}{7}=8\frac{34}{35}.\quad \blacktriangle$$

385. Тығыздығы $\gamma(x,y,z)=x$ тең $x+y=3$, $\mathrm{x}=0$, $y=0$ түзулерімен шектелген үшбұрышты түрде берілген пластинаның массасын, статикалық моменттерін, ауырлық центрін табу керек.

Ж: $M=4{,}5;\ M_x=3\frac{3}{8};\ M_y=6\frac{3}{4};\ x_c=1{,}5;\ y_c=0{,}75.$

386. $y^2=4x+4,\ y^2=-2x+4$ параболаларымен шектелген біртекті пішіннің ауырлық центрін табу керек. **Ж:** 0,4.

387. $y^2=x,\ y^2=0{,}5x,\ \mathrm{y}=1,\ y=2$ сызықтарымен шектелген біртекті пішіннің ауырлық центрін табу керек. **Ж:** $x_c=3\frac{69}{70};\ y_c=1\frac{17}{28}.$

388. $y^2=2px$ параболасымен және $x=2p$ түзуінің қиылысынан пайда болған біртекті пішіннің ауырлық центрін табу керек. **Ж:** $x_c=1{,}2p;\ y_c=0.$

389. $y=\sqrt{a^2-x^2}$ шеңберімен және $y=0$ түзуімен шектелген біртекті пішіннің ауырлық центрін табу керек. **Ж:** $x_c=0;\ y_c=\frac{4}{3\pi}.$

390. $r=a(1+\cos\varphi)$ кардиоидасымен шектелген біртекті пішіннің ауырлық центрін табу керек. **Ж:** $x_c=\frac{5a}{6};\ y_c=0.$

391. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ x=0,\ y=0$ түзулерімен шектелген біртекті пішіннің Ox, Oy осьтеріне және координаттар жүйесінің бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін есептеу керек. **Ж:** $I_x=\frac{ab^3}{12};I_y=\frac{a^3b}{12};I_0=\frac{ab(a^2+b^2)}{12}.$

392. $x^2+y^2=R^2,\ x^2+y^2=r^2\ (R>r)$ шеңберімен шектелген біртекті сақинаның Ox, Oy осьтеріне және координаттар жүйесінің бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін есептеу керек.

Ж: $I_x=I_y=\frac{\pi}{64}\left(R^4-r^4\right);I_0=\frac{\pi}{32}\left(R^4-r^4\right).$

393. $y = 4 - x^2$ параболасымен, $y = 0$ түзуімен шектелген біртекті пішіннің Ox, Oy остеріне және координаттар жүйесінің бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін есептеу керек. **Ж:** $I_x = \frac{4096}{105}; I_y = \frac{128}{15}; I_0 = \frac{1664}{35}$.

394. $r = a(1 + \cos\varphi)$ кардиоидасының Ox, Oy осьтеріне және координаттар жүйесінің бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін есептеу керек.

Ж: $I_x = \frac{21\pi a^4}{32}; I_y = \frac{49\pi a^4}{32}; I_0 = \frac{35\pi a^4}{32}$.

4 ҮШТІК ИНТЕГРАЛДАР

1. Тік бұрышты координаттар жүйесіндегі үштік интегралдар. $Oxyz$ кеңістігіндегі тұйық V облыста анықталған $f(x, y, z)$ функциясы берілсін. Үш өлшемді V облысын кез келген жолмен n қарапайым облыстарға бөлейік. Осы қарапайым облыстардың көлемдерін $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$, ал оларға сәйкес диаметрлерін $d_1, d_2, ..., d_n$ арқылы белгілейік, мұндағы облыстардың *диаметрі* деп осы облыстың шекарасындағы (бетіндегі) екі нүктенің ара қашықтықтарының ең үлкенін айтады.

Әрбір қарапайым облыстардан кез келген бір $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктеден таңдап алып, осы нүктелердегі берілген функциялардың мәндерін сәйкес ΔV_1 көлемдеріне көбейтіп қоссақ $\sum_{i=1}^{n} f(x_1, y_1, z_1)\Delta V_1$ өрнегі шығады. Осы қосынды $f(x, y, z)$ функциясының V облысындағы *интегралдық қосындысы* деп аталады.

Егер осы интегралдық қосындысының $\max d_1 \to 0$ шегі бар және ол шек үш өлшемді облыстың n қарапайым облыстарға қалай бөлгенінен де, әрбір қарапайым облыстардан M_1 нүктесінің қалай алғанынанда тәуелсіз болса, онда осы шек $f(x, y, z)$ функциясының V облысындағы *үштік интегралы* деп аталады да былай белгіленеді:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV = \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

Егер үш өлшемді V облысында $f(x, y, z) > 0$ болса, онда $\iiint_V f(x, y, z)\, dV$ үштік интегралы тығыздығы $\gamma = f(x, y, z)$ болатын V денесінің *массасына* тең болады (үштік интегралдың физикалық мағынасы).

Үштік интегралдың негізгі қасиеттері қос интегралдың негізгі қасиеттері сияқты болады.

Интегралдау V облысы $a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x),\ z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)$ теңсіздіктерімен анықталсын, мұндағы $y_1(x),\ y_2(x),\ z_1(x, y),\ z_2(x, y) -$ үзіліссіз функциялар. Осы V облысында $f(x, y, z)$ функциясының үштік интегралы

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

формуласымен анықталады.

395. $\iiint_V \frac{y^2 \cos z}{1+x^2} dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le \pi/2$ теңсіздіктерімен анықталады.

Шешуі. $\iiint_V \frac{y^2 \cos z}{1+x^2} dxdydz = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} \int_0^3 y^2 dy \int_0^{\pi/2} \cos z dz = arctgx \Big|_{-1}^{1} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^3 \cdot \sin z \Big|_0^{\pi/2} = \frac{81\pi}{8}.$ ▲

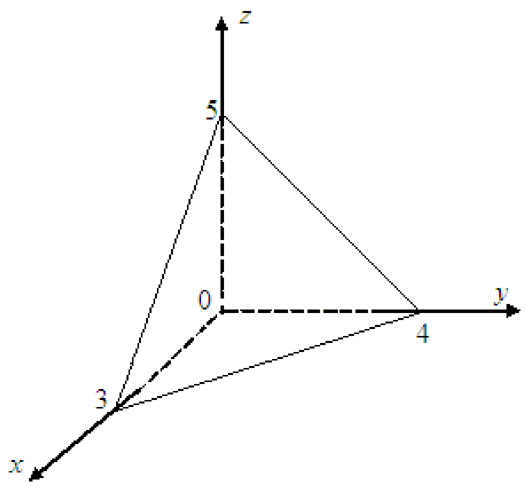
396. $\iiint_V (x+y+z)^2 dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 3$ теңсіздіктерімен анықталады.

Шешуі. $\iiint_V (x+y+z))^2 dxdydz = \int_0^3 dx \int_0^3 dy \int_0^3 (x+y+z)^3 dz = \frac{1}{4}\int_0^3 dx \int_0^3 (x+y+z)^4 \Big|_{z=0}^{z=3} dy =$

$$= \frac{1}{4}\int_0^3 dx \int_0^3 \left[(x+y+3)^4 - (x+y)^4\right] dy = \frac{1}{20}\int_0^3 \left[(x+y+3)^5 - (x+y)^5\right] \Big|_{y=0}^{y=3} dx =$$

$$= \frac{1}{20}\int_0^3 \left[(x+6)^5 - (x+3)^5 + x^5\right] dx = \frac{1}{120}\left[(x+6)^6 - (x+3)^6 + x^6\right]\Big|_0^3 = \frac{3^8}{2}.$$ ▲

397. $\iiint_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\right)^4}$ интегралын есептеу керек, мұндағы үш өлшемді V денесі координаттар жазықтықтары және $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ жазықтығымен шектелген (4.1 Сурет).



4.1 Сурет

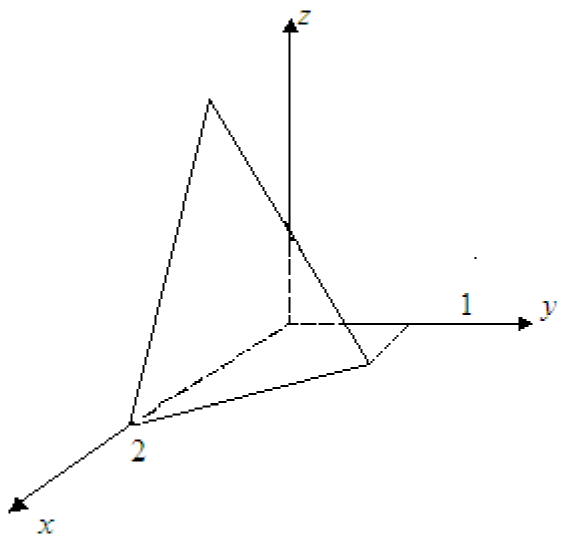
Шешуі. V денесі жоғарыдан $z=5\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)$, ал төменнен $z=0$ жазықтығымен шектелген. V денесінің Oxy жазықтығындағы проекциясы $x=0,\ y=0,\ y=4\left(1-\frac{x}{3}\right)$ түзулерімен шектелген үшбұрыш. Сонымен

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\right)^4}=\int_0^3 dx\int_0^{4(1-\frac{x}{3})}dy\int_0^{5(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\right)^{-4}dz=$$

$$=-\frac{5}{3}\int_0^3 dx\int_0^{4(1-\frac{x}{3})}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\right)^{-3}\Bigg|_0^{z=5(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})}dy=-\frac{5}{3}\int_0^3 dx\int_0^{4(1-\frac{x}{3})}\left[\frac{1}{8}-\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^{-3}\right]dy=$$

$$=-\frac{5}{3}\int_0^3\left[\frac{y}{8}+2\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^{-2}\right]\Bigg|_{y=0}^{y=4(1-\frac{x}{3})}dx=-\frac{5}{3}\int_0^3\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{2}-2\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-2}\right]dx=$$

$$=-\frac{5}{3}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{6}\right)+\frac{1}{2}x+6\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}\right]\Bigg|_0^3=\frac{5}{4}.\ \blacktriangle$$



4.2 Сурет

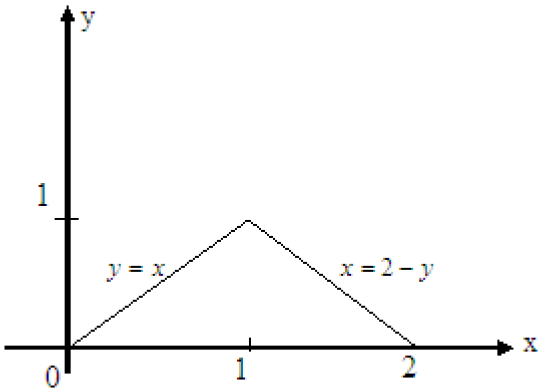
398. $\iiint\limits_V\left(x^2+3y^2\right)dV$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $y=x,\ y=2-x,\ y=0,\ z=0,\ z=2x$ жазықтықтарымен шектелген (4.2 Сурет).

Шешуі. V денесі жоғарыдан $z=2x$, төменнен $z=0$ жазықтығымен шектелген. V денесінің Oxy жазықтығындағы проекциясы $y=0,\ y=x,\ x=2-y$ түзулерімен шектелген, яғни $0\le y\le 1, y\le x\le 2-y, 0\le z\le 2x$ (4.3 Сурет).

Сонымен $\iiint\limits_V \left(x^2+3y^2\right)dV = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} dx \int\limits_0^{2x} \left(x^2+3y^2\right)dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} \left(x^2+3x^2\right)\cdot z \Big|_{z=0}^{z=2x} dx =$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} \left(x^2+3x^2\right)\cdot 2xdx = = 2\int\limits_0^1 \left[\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2y^2}{2}\right]\Bigg|_{x=y}^{x=2-y} dy = 2\int\limits_0^1 \left[\frac{(2-y)^4}{4}+\frac{3}{2}y^2(2-y)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{y^4}{4}-\frac{3}{2}y^4\right]dy = 2\left[-\frac{(2-y)^5}{5}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{4y^3}{3}-y^4+\frac{y^5}{5}\right)-\frac{7}{20}y^5\right]\Bigg|_0^1 = 4. \ \blacktriangle$$



4.3 Сурет

399. $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c$ теңсіздіктерімен анықталған. **Ж:** $\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{3}$.

400. $\iiint\limits_V \left(x-2y+z^3\right)dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2, 0 \le z \le 1$ теңсіздіктерімен анықталған. **Ж:** -2,25.

401. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $0 \le x \le 0{,}5$, $x \le y \le 2x, 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$ теңсіздіктерімен анықталған. **Ж:** $\frac{7}{192}$.

402. $\iiint\limits_V x^2 yz\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z-2=0$ жазықтықтарымен шектелген. **Ж:** $\frac{16}{315}$.

403. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $z^2 = x^2+y^2$ конустық бетімен және $z=2$ жазықтықтарымен шектелген. **Ж:** 4π.

2. Үштік интегралда айнымалыларды алмастыру. Үштік интегралда x, y, z координаталарынан $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w)$ формулаларының көмегімен u,v,w координатасына көшу

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_V F(u,v,w)\cdot |J|\,dudvdw$$

формуласымен жүзеге асады, мұндағы

$$F(u,v,w) = f(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)),$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} - якобиан,$$

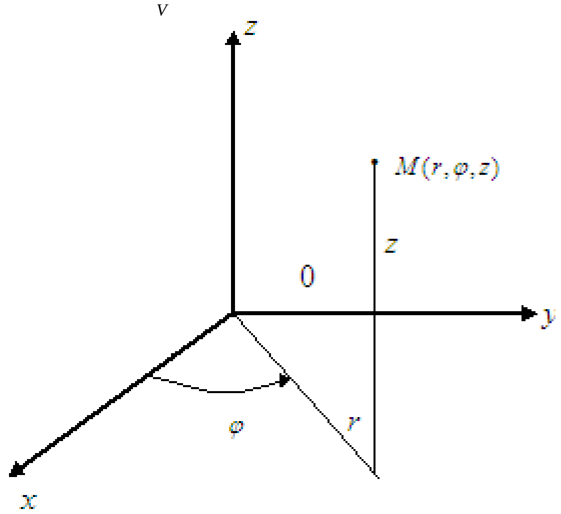
ал $x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$- үш өлшемді V аймағында үзіліссіз, әрі үзіліссіз бірінші ретті дербес туындылары бар функциялар.

Дербес жағдайда x, y, z тікбұрышты координаттардан

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$
$$(0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le \infty,\ -\infty < z < \infty)$$

формулаларының көмегімен r, φ, z цилиндрлік координаттарға көшкенде якобиан $J = r$ болады (4.4 Сурет). Сондықтан

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz.$$



4.4 Сурет

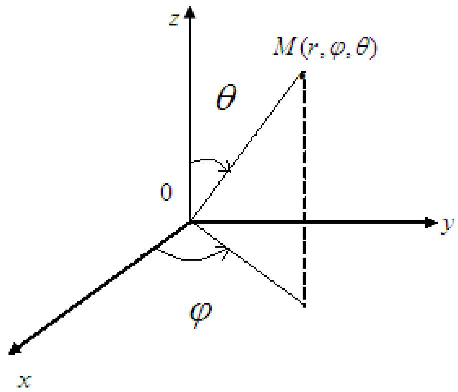
Ал x,y,z тікбұрышты координаттардан

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$(0 \le r \le \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < \theta < \pi)$$

формулаларының көмегімен r,φ,θ сфералық координаттарға көшкенде якобиан $J = r^2 \sin\theta$ болады (4.5 Сурет). Сондықтан

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$



4.5 Сурет

404. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V облысы $x^2+y^2=2x$ цилиндрімен және $y=0,\ z=0,\ z=a$ жазықтықтарымен шектелген.

Шешуі. Цилиндрлік координаталарға көшейік. Бұл жағдайда $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\cos\varphi$ немесе $r = 2\cos\varphi;\ 0 \le r \le 2\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le z \le a.$ Сондықтан

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_V z\cdot r\cdot r\ \,dr\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_0^a z\,dz =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} r^3 \Big|_{r=0}^{r=a\cos\varphi} d\varphi = \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi) = \frac{4}{3}a^2\left(\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{8}{9}a^2.\ \blacktriangle$$

405. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы үш өлшемді V облысы $x^2+y^2+z^2=R^2$ шарымен шектелген.

Шешуі. Сфералық координаттар жүйесіне көшейік. Бұл жағдайда $r=R,$ $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi;\ 0\le r\le R,\ J=r^2\sin\theta.$ Сондықтан

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\iiint\limits_V r\cdot r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R}r^3\sin\theta d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{R}r^3 d\theta==\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^{R}=\pi R^4.\ \blacktriangle$$

406. $\iiint\limits_V \dfrac{z\,dx\,dy\,dz}{1+x^2+y^2}$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $x^2+y^2=a^2$ цилиндрімен және $z=0,\ z=h$ жазықтықтарымен шектелген.

Ж: $0{,}5\pi h^2\ln(1+a^2).$

407. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $x^2+y^2=R^2$ цилиндрімен, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ конусымен және $z=0$ жазықтығымен шектелген. **Ж:** $0{,}5\pi R^4.$

408. $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $x^2+y^2=1$ цилиндрімен және $z=0,\ z=1$ жазықтықтарымен шектелген. **Ж:** $1{,}5\pi.$

409. $\iiint\limits_V \sqrt{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V – шар: $x^2+y^2+z^2\le 1.$ **Ж:** $\frac{8}{9}\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)$

410. $\iiint\limits_V x^2dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V – шар: $x^2+y^2+z^2\le a^2.$ **Ж:** $\frac{4}{15}\pi a^3.$

411. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы V денесі $x^2+y^2+z^2=1$ сферасыен және $x=0,\ y=0,\ z=0$ жазықтықтарымен шектелген.

Ж: $\frac{1}{48}.$

3. Үштік интегралдың механикада қолданылуы. V денесінің көлемі

$$V=\iiint\limits_V dxdydz$$

формуласымен есептеледі.

Тығыздығы $\gamma = \gamma(x,y,z)$ болатын V денесінің массасы

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz\,,$$

ал $Oyz,\ Oxz,\ Oxy$ жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттері сәйкесінше

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz,\ M_{xz} = \iiint\limits_V y\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz,\ M_{xy} = \iiint\limits_V z\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz,$$

формуласымен есептелінеді. Біртекті дене үшін $\gamma = const.$

Дененің ауырлық центрінің координаттары

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m},\quad y_0 = \frac{M_{xz}}{m},\quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$$

формулаларымен анықталады.

$Ox,\ Oy, Oz$ осьтеріне және O нүктесіне қарағандағы инерция моменттері (екпіндік қарымдары) сәйкес

$$\begin{cases} I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\,\gamma(x,y,z)\,dxdydz, \\ I_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)\,\gamma(x,y,z)\,dxdydz, \\ I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\,\gamma(x,y,z)\,dxdydz, \\ I_0 = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,\gamma(x,y,z)\,dxdydz = \frac{1}{2}\left(I_x+I_y+I_z\right), \end{cases}$$

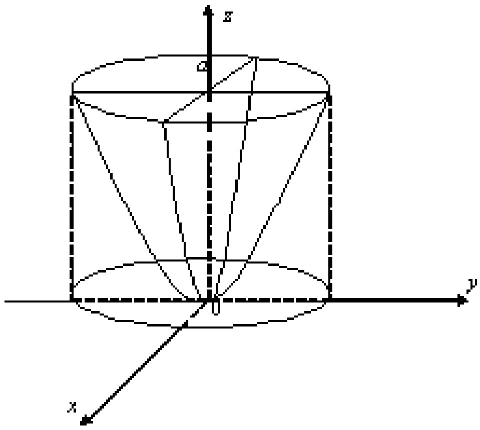
формулаларымен есептеледі.

412. $az = x^2 + y^2$ параболоидымен және $z = a$ жазықтығымен шектелген дененің көлемін табу керек.

Шешуі. Берілген дене жоғарыдан $z = a$ жазықтығымен, ал төменнен $z = \frac{1}{a}(x^2+y^2)$ параболоидымен шектелген. Оның Oxy жазықтығындағы проекциясы $x^2+y^2 \le a^2$ теңсіздігімен анықталатын дөңгелек. Бұл жағдайда цилиндрлік координаттарға көшсек параболоидтың $z = \frac{1}{a}r^2$ болады. Осыдан

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V^1} rdrd\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a rdr \int\limits_{\frac{1}{a}r^2}^a dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r\left(a - \frac{1}{a}r^2\right)dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{ar^2}{2} - \frac{r^4}{4a} \right) \Bigg|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{4} \varphi \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{2}. \quad \blacktriangle$$



4.6 Сурет

413. Тығыздығы тұрақты $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ жарты шарының ауырлық центрінің координаттарын табу керек.

Шешуі. Жарты шар симметриялы дене болғандықтан $x_0 = 0,\ y_0 = 0.$ Дене жоғарыдан $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ бетімен, төменнен $z = 0$ жазықтығымен шектелген, ал оның Oxy жазықтығындағы проекциясы $x^2 + y^2 \le a^2$ дөңгелегі болады.

Сфералық координаттарға көшсек, онда $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le a$ болады. Осыдан

$$m = \gamma \iiint_V dxdydz = \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^a r^2 dr = \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \frac{a^3}{3} d\theta =$$

$$= \frac{a^3 \gamma}{3} \varphi \Bigg|_0^{2\pi} \cdot (-\cos\theta) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2\pi a^3 \gamma}{3}.$$

$$M_{xy} = \gamma \iiint_V z\, dx\, dy\, dz = \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{\gamma a^4}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{a^4 \gamma}{8} \varphi \Bigg|_0^{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4 \gamma}{4}.$$

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{3}{8} a. \quad \blacktriangle$$

414. $z^2 = x^2 + y^2$ конустық бетімен $z = a$ жазықтығымен шектелген, дененің координаттық осьтеріне және бас нүктеге қарағандағы инерция моменттерін табу керек $(\gamma = 1)$.

Шешуі. Дене жоғарыдан $z = a$ жазықтығымен, төменнен $z^2 = x^2 + y^2$ конустық бетімен шектелген. Оның Oxy жазықтығындағы проекциясы $x^2 + y^2 \le a^2$ дөңгелегі болады.

Инерция моменттерін цилиндрлік координаттарға көшу арқылы есептейміз.

$0 \le \varphi \le 2\pi, \; 0 \le r \le a, \; r \le z \le a$

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \int\limits_r^a (r^2\sin^2\varphi + z^2)dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r\left(r^2 z\sin^2\varphi + \frac{1}{3}z^3\right)\Bigg|_{z=r}^{z=a} dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(ar^3\sin^2\varphi + \frac{1}{3}a^3 r - r^4\sin^2\varphi - \frac{1}{3}r^4\right)dr = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}ar^4\sin^2\varphi + \frac{1}{6}a^3r^2 - \frac{1}{5}r^5\sin^2\varphi - \frac{1}{15}r^5\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}a^5\sin^2\varphi + \frac{1}{6}a^5 - \frac{1}{5}a^5\sin^2\varphi - \frac{1}{15}a^5\right)d\varphi = a^5\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{20}\sin^2\varphi + \frac{1}{10}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^5}{40}\int\limits_0^{2\pi}(5-\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{\pi a^5}{4}.$$

$$I_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \int\limits_r^a (r^2\cos^2\varphi + z^2)dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r\left(r^2 z\cos^2\varphi + \frac{1}{3}z^3\right)\Bigg|_{z=r}^{z=a} dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(ar^3\cos^2\varphi + \frac{1}{3}a^3 r - r^4\cos^2\varphi - \frac{1}{3}r^4\right)dr = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}ar^4\cos^2\varphi + \frac{1}{6}a^3r^2 - \frac{1}{5}r^5\cos^2\varphi - \frac{1}{15}r^5\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}a^5\cos^2\varphi + \frac{1}{6}a^5 - \frac{1}{5}a^5\cos^2\varphi - \frac{1}{15}a^5\right)d\varphi = a^5\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{20}\cos^2\varphi + t_0\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^5}{40}\int\limits_0^{2\pi}(5+\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{\pi a^5}{4}.$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^3 dr \int\limits_r^a dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^3\cdot z \Bigg|_{z=r}^{z=a} dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a (ar^3 - r^4)dr =$$

$$= \varphi\Bigg|_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}a\,r^4 - \frac{1}{5}r^5\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a} = \frac{\pi a^5}{10}.$$

$$I_o = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right) = \frac{3}{10}\pi a^5. \quad \blacktriangle$$

415. $x^2+y^2=2y, \; z=\frac{9}{4}+x^2, \; z=0$ беттерімен шектелген дененің көлемін табу керек. **Ж:** $2{,}5\pi.$

416. $z=\frac{1}{3}y^2, \; z=0, \; 5x-2y-5=0, \; 5x+3y-30=0$ беттерімен шектелген дененің көлемін табу керек. **Ж:** $17\frac{13}{36}.$

417. $x=0, \; z=0, \; y=1, \; y=3, \; x+2z=3$ жазықтықтарымен шектелген дененің көлемін табу керек. **Ж:** 4,5.

418. $y=\sqrt{x}, \; y=2\sqrt{x}, \; x+z=6, \; z=0$ беттерімен шектелген дененің көлемін табу керек. **Ж:** $\frac{48\sqrt{6}}{5}.$

419. $x^2+y^2=2ax,\ z=k_1x,\ z=k_2x\ (k_1<k_2)$ беттерімен шектелген дененің көлемін табу керек. **Ж:** $\pi a^2(k_2-k_1).$

420. Тығыздығы $\gamma(x,y,z)=x+y+z$ функциясымен анықталған $0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c$ параллелипипедінің массасын табу керек.

Ж: $0{,}5\,abc\,(a+b+c).$

421. $x+y+z=a,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ жазықтықтарымен шектелген, тығыздығы $\gamma(x,y,z)=x$ болатын пирамиданың массасын табу керек. **Ж:** $\frac{a^4}{24}.$

422. $x^2+y^2=az$ параболоидымен және $z=a$ жазықтығымен шектелген біртекті дененің ауырлық центрін табу керек. **Ж:** $C\,(0;0;\frac{2}{3}a).$

423. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ жазықтығымен шектелген біртекті дененің ауырлық центрін табу керек. **Ж:** $C\left(\frac{a}{4};\frac{b}{4};\frac{c}{4}\right).$

424. $z=\frac{1}{2}(3-x),\ z=0,\ x=0,\ y=1,\ y=3$ жазықтықтарымен шектелген дененің ауырлық центрін табу керек $(\gamma=1).$ **Ж:** $C\,(1;2;0{,}5).$

425. Біртекті $x^2+y^2+z^2\le a^2$ шарының координаттық остеріне және оның бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін (екпіндік қарымдарын) есептеу керек $(\gamma=1).$ **Ж:**
$I_x=I_y=I_z=\frac{8}{15}\pi R^5;\ I_o=0{,}8\pi R^5.$

426. $x+y+z=a,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ жазықтықтарымен шектелген дененің координаттық осьтеріне және оның бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін есептеу керек $(\gamma=1).$ **Ж:** $I_x=I_y=I_z=\frac{a^5}{30};\ I_o=\frac{a^5}{20}.$

427. $x^2+y^2=a^2$ цилиндрімен $z=0$ және $z=h$ жазықтықтарымен шектелген дененің координаттық осьтеріне және оның бас нүктесіне қарағандағы инерция моменттерін (екпіндік қарымдарын) есептеу керек $(\gamma=1).$

Ж:

$$I_x=I_y=\frac{\pi a^2h\,(3a^2+4h)}{12};I_z=\frac{\pi a^4h}{2};I_o=\frac{\pi a^2h\,(3a^2+2h^2)}{6}.$$

5 ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ ЖӘНЕ БЕТТІК ИНТЕГРАЛДАР

5.1 ДОҒА ҰЗЫНДЫҒЫ ЖӘНЕ КООРДИНАТТАР БОЙЫНША ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДАР

1. Доға ұзындығы бойынша қисық сызықты интегралдар (І текті қисық сызықты интегралдар). $f(x,y)$ функциясы AB доғасының нүктелерінде анықталған және үзіліссіз болсын.

AB доғасын кез келген жолмен $A = A_0, A_1, A_2, ..., A_n = B$ нүктелерімен n элементар доғаларға бөлейік. $\Delta S_i - A_{i-1}A_i$ доғасының ұзындығы болсын. Әр элементар доғадан кез келген бір $M_i(x_i, y_i)$ нүктеден таңдап алып, $f(x_i, y_i)$ функциясының мәндерін сәйкес ΔS_i аудандарына көбейтейік $(i = 1,2,...,n)$. $f(x,y)$ функциясы үшін AB *доға ұзындығы бойынша интегралдық қосынды* деп

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$$

қосындысын айтады.

Доға ұзындығы бойынша (не І текті) қисық сызықты интеграл деп интегралдық қосындының $\max \Delta S_i \to 0$ -дағы шегін айтады.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$$

мұндағы dS – доға дифференциалы.

а) Егер AB қисығы $y = \varphi(x) \quad (a \le x \le b)$ формуласымен берілсе, онда І текті қисық сызықты интеграл

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \cdot \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx$$

формуласымен есептеледі.

ә) Егер AB қисығы $x = x(t),\ y = y(t)$ параметрлік теңдеумен берілсе $(\alpha \le t \le \beta)$, онда

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \int_a^b f(x(t), y(x)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Кеңістікте үш айнымалылы $f(x,y,z)$ функциясының І текті қисық сызықты интегралы берілсін. Егер кеңістіктегі қисық $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \quad (\alpha \le t \le \beta)$ теңдеуімен берілсе, онда

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dS = \int_a^b f(x(t), y(x), z(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Егер $f(x,y) > 0$ болса, онда $\int\limits_{AB} f(x,y)dS$ - І текті қисық сызықты интегралы тығыздығы $f(x,y)$ болатын AB қисығының массасына тең болады (физикалық мағынасы).

Егер $f(x,y)\geq 0$ болса, онда $\int\limits_{AB} f(x,y)dS$ - I текті қисық сызықты интегралы жасаушылары Oz осіне параллель болатын, жоғарыдан $z=f(x,y)$ қисығымен, төменнен Oxy жазықтығымен шектелген цилиндрлік беттің ауданына тең болады (геометриялық мағынасы).

I текті қисық сызықты интегралдың негізгі қасиеттері:

1^0. I текті қисық сызықты интеграл интегралдау жолының бағытына тәуелсіз болады, яғни

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \int\limits_{BA} f(x,y)dS.$$

2^0. $\int\limits_{AB}[f_1(x,y)\pm f_2(x,y)]dS = \int\limits_{AB} f_1(x,y)dS \pm \int\limits_{AB} f_2(x,y)dS.$

3^0. $\int\limits_{AB} k\cdot f(x,y)dS = k\cdot \int\limits_{BA} f(x,y)dS.$

4^0. Егер C нүктесі AB қисығында жатса, онда

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \int\limits_{AC} f(x,y)dS + \int\limits_{CB} f(x,y)dS.$$

428. $\int\limits_{AB} f(x-y)dS$ интегралын есептеу керек, мұндағы AB – түзуінің $A(0,0)$ нүктесінен $B(4,3)$ нүктесіне дейінгі бөлігі.

Шешуі. AB түзуінің теңдеуі $y=\frac{3}{4}x$ болады. $y'=\frac{3}{4}$.

Осыдан $\int\limits_{AB} f(x-y)dS = \int\limits_0^4 \left(x-\frac{3}{4}x\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \frac{5}{16}\int\limits_0^4 xdx = \frac{5}{32}x^2\Big|_0^4 = \frac{5}{2}.$ ▲

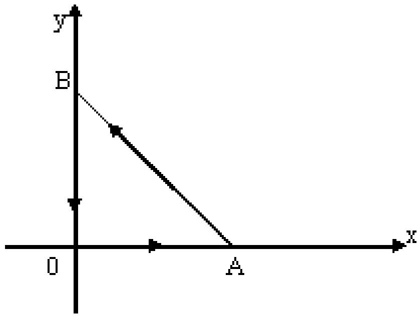
429. $\int\limits_{AB}\frac{ydS}{\sqrt{x}}$ интегралын есепте, егер $AB - y^2=\frac{4}{9}x^3$ доғасы, $A(3;2\sqrt{3}),\ B(8;32\sqrt{2}/3).$

Шешуі. $y=\frac{2}{3}x^{3/2},\quad y'=x^{1/2}$ $\quad \int\limits_{AB}\frac{ydS}{\sqrt{x}} = \int\limits_3^8 \frac{\frac{2}{3}x^{3/2}}{x^{1/2}}\cdot\sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}\int\limits_3^8 x\sqrt{1+x}dx =$

$$=\left|\begin{array}{lll}\sqrt{1+x}=t & x=t^2-1 & \\ dx=2+dt & x=3 & t=2 \\ & x=8 & t=3\end{array}\right| = \frac{2}{3}\int\limits_2^3 (t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt = \frac{4}{3}\int\limits_2^3 (t^4-t^2)dt = \frac{4}{3}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 = \frac{2152}{45}. \quad ▲$$

430. $\oint\limits_L (2x+y)dS$ интегралын есепте, мұндағы $L-ABC$ үшбұрышының контуры $A(1;0),\ B(0;1),\ O(0;0).$

Шешуі.



AB теңдеуі: $y = 1 - x,\ y' = 1,\ dS = \sqrt{2}dx,\ 0 \le x \le 1.$

OB теңдеуі: $x = 0,\ dS = dy,\ 0 \le y \le 1.$

OA теңдеуі: $y = 0,\ dS = dx,\ 0 \le x \le 1.$

$$\oint_L (2x+y)dS = \int_{AB}(2x+y)dS + \int_{BO}(2x+y)dS + \int_{OA}(2x+y)dS =$$

$$= \int_0^1 (x+1)\cdot\sqrt{2}dx + \int_0^1 ydy + 2\int_0^1 xdx = \sqrt{2}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 +$$

$$+ x^2\Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{2}+1\right). \qquad \blacktriangle$$

431. $\int\limits_{OA}\frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ интегралын есептеу керек, мұндағы OA – түзуінің $O(0;0)$ нүктесі мен $A(1;2)$ нүктесінің арасындағы бөлігі. **Ж:** $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}.$

432. $\int\limits_{AB}\frac{ydS}{\sqrt{x}}$ интегралын есептеу керек, мұндағы AB: $y^2 = \frac{4}{9}x^3$ теңдеуімен берілген жарты кубтық параболаның доғасы, $A(3;2\sqrt{3})$ нүктесінен $B\left(8;\ \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$ нүктесіне дейін. **Ж:** $\frac{2152}{45}.$

433. $\int\limits_{AB} y^2 dS$ интегралын есептеу керек, мұндағы AB - $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ шеңбердің бөлігі. **Ж:** $\frac{\pi a^3}{4}.$

434. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dS$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x^2+y^2 = ay,\ (a>0)$ шеңбердің контуры. **Ж:** $2a^2.$

435. $\int\limits_L \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ винттік сызығының бірінші айналымы.

Ж: $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}arctg\frac{2\pi\cdot b}{a}.$

436. $\int\limits_L xydS$ интегралын есептеу керек, мұндағы $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ шеңберінің бөлігі. **Ж:** $\frac{a^3}{2}.$

437. $\int\limits_{AB}\frac{dS}{x-y}$ интегралын есептеу керек, мұндағы AB: $y=\frac{x-4}{2}$ түзуінің $A(0;-2)$ нүктесінен $B(4;0)$ нүктесіне дейінгі бөлігі. **Ж:** $\sqrt{5}\ln 2.$

2. Координаттар бойынша қисық сызықты интегралдар (II текті қисық сызықты интегралдар). $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары АВ доғасының нүктелерінде үзіліссіз болсын.

$P(x,y),\ Q(x,y)$ функциялары үшін *координаттар бойынша интегралдық қосынды* деп

$$\sum_{i=1}^{n}\left[P(x_i,y_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i)\Delta y_i\right]$$

қосындысын айтады.

Координаттар бойынша (не II текті*) қисық сызықты интеграл* деп интегралдық қосындының $\max\Delta x_i\to 0$ және $\max\Delta y_i\to 0$ -дағы шегін айтады:

$$\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(x_i,y_i)\Delta x_i+\lim_{\max\Delta y_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(x_i,y_i)\Delta y_i\ .$$

II текті қисық сызықты интеграл $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\cdot\vec{i}+Q(x,y)\cdot\vec{j}$ - айнымалы күштің АВ қисық сызықты жолмен жүрген жұмысы болады (механикалық мағынасы).

II текті қисық сызықты интегралдың негізгі қасиеттері:

1. II текті қисық сызықты интеграл интегралдау жолының бағытын ауыстырғанда таңбасын қарама-қарсыға өзгертеді, яғни

$$\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int\limits_{BA}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\ .$$

2. $\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{AB}P(x,y)dx+\int\limits_{AB}Q(x,y)dy\ .$

(Қалған қасиеттері I текті қисық сызықты интегралдың қасиеттеріне ұқсас болады).

а) Егер АВ қисығы $y=\varphi(x),\ \ (a\le x\le b)$ формуласымен берілсе, онда II текті қисық сызықты интеграл

$$\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{a}^{в}\left[P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\right]\cdot dx\ .$$

ә) Егер АВ қисығы $x=x(t),\ y=y(t)$ параметрлік теңдеумен берілсе, онда $(\alpha\le t\le\beta)$.

$$\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P(x(t),y(t))\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\right]dt.$$

Кеңістікте үш айнымалылы $P(x,y,z);\ Q(x,y,z);\ R(x,y,z)$ функцияларының ІІ текті қисық сызықты интегралы берілсін. Егер кеңістіктегі қисық $x=x(t);\ y=y(t),\ z=z(t),\ (\alpha\le t\le\beta)$ теңдеуімен берілсе, онда

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left[P\{x(t),y(t),z(t)\}\cdot x'(t)+Q\{x(t),y(t),z(t)\}\cdot y'(t)+R\{x(t),y(t),z(t)\}\cdot z'(t)\right]\cdot dt.$$

Тұйық сызық бойынша ІІ текті қисық сызықты интегралы $\oint_L Pdx+Qdy$ берілсе, онда интегралдау жолы сағат тіліне қарама-қарсы бағытта алынады (оң бағыт деп саналады).

438. $\int_{AB}(x^2-y^2)dx+xydy$ интегралын есептеу керек, мұндағы $A(1;1)$ нүктесінен $B(3;4)$ нүктесіне дейінгі түзудің бөлігі.

Шешуі. АВ түзуінің теңдеуі

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{4-1}\ \text{немесе}\ y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\ \text{болады.}\ y'=\frac{3}{2};\quad dy=\frac{3}{2}dx,\quad \text{осыдан}$$

$$\int_{AB}(x^2-y^2)dx+xydy=\int_1^3\left[x^2-\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)^2+x\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\right]dx=$$

$$=\int_1^3\left(x^2-\frac{9}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}x^2-\frac{3}{4}x\right)dx=\int_1^3\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{4}x\right)\Bigg|_1^3=\frac{26}{3}+3-\frac{1}{2}=\frac{67}{6}.\qquad\blacktriangle$$

439. $\int_{AB}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы АВ: $y=x^2$ параболасының доғасы, $A(-1;1)$ нүктесінен $B(1;1)$ нүктесіне дейін.

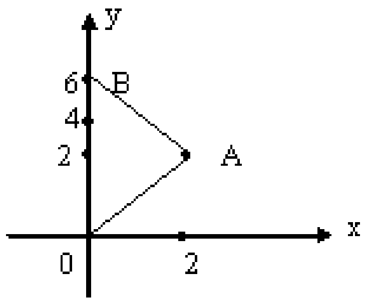
Шешуі. $y=x^2,\ dy=2xdx$

$$\int_{AB}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int_{-1}^{1}\left[(x^2-2x\cdot x^2)+(x^4-2x\cdot x^2)\cdot 2x\right]dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2-2x^3+2x^5-4x^4)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{4}{5}x^5\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{14}{15}.\qquad\blacktriangle$$

440. $\oint_L 2xdy-3ydx$ интегралын есептеу керек, мұндағы L контуры сағат тіліне қарсы бағыттағы ΔOAB: $O(0;0),\ A(2;2),\ B(6;0)$.

Шешуі. Интегралдау контурын үшке бөлеміз.



$$\oint_L = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}$$

OA аралығында x 0-ден 2-ге дейін өзгереді. $y = x,\ dy = dx.$

$$\int_{OA} 2xdy - 3ydx = \int_0^2 (2x - 3x)dx = -\int_0^2 xdx = -\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = -2.$$

AB аралығында x 2-ден 0-ге дейін өзгереді, $y = 6 - 2x,\ dy = -2dx.$

$$\int_{AB} 2xdy - 3ydx = \int_2^0 [2x \cdot (-2) - 3 \cdot (6 - 2x)]dx = \int_2^0 (-4x - 18 + 6x)dx =$$

$$= \int_2^0 (2x - 18)dx = \left(x^2 - 18x\right)\Big|_2^0 = 32.$$

BO аралығында y 6-дан 0-ге дейін өзгереді. $x = 0,\ dx = 0$

$$\int_{BO} 2xdy - 3ydx = 0\,.$$

Сонымен,

$$\oint_L 2xdx - 3ydx = -2 + 32 = 30\cdot$$ ▲

441. $\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$ интегралын есептеу керек , мұндағы

$$x = t + 1, y = 2t + 1, z = 3t + 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

Шешуі. $dx = dt,\ \ dy = 2dt,\ \ dz = 3dt$

$$\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz = \int_0^1 [(t + 1) + (2t + 1)\cdot 2 + (t + 1 + 2t + 1 - 1)\cdot 3]dt = \int_0^1 (14t + 6)dt = 13.$$ ▲

442. $\int_{OA} 2xydx - x^2dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы OA түзуінің O(0;0) нүктесінен A(2;1) нүктесіне дейінгі бөлігі. **Ж:** 4/3.

443. $\int_{AB} \cos ydx - \sin xdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы AB түзуінің A(2;-2) нүктесінен B(-2; 2) нүктесіне дейінгі бөлігі. **Ж:** $-2\sin 2$.

444. $\int_L (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: OAB-сынық сызығы, $O(0;0),\ \ A(2;0),\ B(4;\ 2).$ **Ж:** $\frac{136}{3}$.

445. $\int_L ydx - (y + x)^2 dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L – сағат тіліне қарсы бағыттағы Ox осінен жоғары орналасқан $y = 2x - x^2$ параболасының бөлігі. **Ж:** 4.

446. $\oint_L (x + y)dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x = 0,\ y = 0,$ $x = 1,\ y = 1$ түзулерінен құралған тіктөртбұрыш контуры. **Ж:** 1.

447. $\int\limits_L \frac{dy}{x}-\frac{dx}{y}$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x=2\cos t,\ y=2\sin t$ шеңберінің бірінші ширегі (сағат тіліне қарсы бағыт бойынша). **Ж:** π.

448. $\oint\limits_L x^2ydx+x^2dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $y^2=x,\ y=x^2$ параболаларымен шектелген контур (сағат тіліне қарсы бағыт бойынша). **Ж:** $\frac{6}{35}$.

449. $\int\limits_{OA} xydx+yzdy+zxdx$ интегралын есептеу керек, мұндағы OA: $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=1$ шеңберінің бірінші ширегі (сағат тіліне қарсы бағыт бойынша). **Ж:** $\frac{1}{6}$.

450. $\oint\limits_L x^2ydy-xy^2dx$ интегралын есептеу керек, егер $x=\sqrt{\cos t},\ y=\sqrt{\sin t},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$. **Ж:** $\frac{\pi}{4}$.

3. II текті қисық сызықты интегралдың интегралдау жолына тәуелсіздігі. Функцияны оның толық дифференциалы арқылы табу. $P(x;y),\ Q(x;y)$ функциялары және олардың бірінші ретті дербес туындылары D облысында және осы облыста толығымен жататын C қисық сызығында үзіліссіз болсын.

$\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ интегралы интегралдау жолына тәуелсіз болуы үшін $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ шартының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Осы шарт орындалғанда D облысында жатқан кез келген L тұйық контуры бойынша алынған қисық сызықты интеграл нөлге тең болады, яғни

$$\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\,.$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ шарты орындалғанда $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ интеграл астындағы өрнек қандай да бір $U=U(x;y)$ функциясының толық дифференциалына тең болады, яғни

$$dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$U(x;y)$ функциясы (алғашқы функциясы)

$$U(x;y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C \text{ немесе } U(x;y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$$

формуласымен табылады, мұндағы x_0, y_0 – кез келген тұрақты сан, ал $\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ интегралы, мұндағы $A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2)$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_1)dx + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2,y)dy$$

формуласымен есептеледі.

451. $\int_{(1;2)}^{(4;3)} (x^2 + 5y)dx + (5x + y^3)dy$ интегралын есептеу керек.

Шешуі.

$$P(x,y) = x^2 + 5y \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 5$$

$$Q(x,y) = 5x + y^3 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 5$$

осыдан $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$.

Онда $$\int_{(1;2)}^{(4;3)} (x^2 + 5y)dx + (5x + y^3)dy = \int_1^4 (x^2 + 5\cdot 2)dx + \int_2^3 (5\cdot 4 + y^3)dy =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + 10x\right)\Bigg|_1^4 + \left(20y + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_2^3 = 87\frac{1}{4}. \quad \blacktriangle$$

452. $dU = [y + \sin x]dx + (x + 1 - \cos y)dy$ болса, $U(x;y)$ алғашқы функциясын табу керек.

Шешуі. $P = y + \sin x \quad Q = x + 1 - \cos y \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \quad x_0 = 0,\ y_0 = 0$ деп аламыз. Сонда

$$U(x,y) = \int_0^x (y + \sin x)dx + \int_0^y (1 - \cos y)dy = (xy - \cos x)\Big|_0^x + (y - \sin y)\Big|_0^y + C =$$

$$= xy - \cos x + 1 + y + \sin y + C. \qquad \blacktriangle$$

453. $\int_{(1;1)}^{(2;3)} (x + 3y)dx + (3x + y)dy$ интегралын есептеу керек. **Ж:** 20,5.

454. $\int_{(0;0)}^{(\pi;\pi)} (x + y)dx - (x - y)dy$ интегралын есептеу керек. **Ж:** π^2.

455. $\int (2x + 3xy^2 + 2y)dx + (2x + 3x^2 y) + 2y)dy$ интегралын есептеу керек.

Ж: 198.

$U(x,y)$– алғашқы функциясын оның толық дифференциалы арқылы табу керек.

456. $dU = (1 - e^{x-y} + \cos x)dx + (e^{x-y} + \cos y)dy.$ **Ж:** $U = x - e^{x-y} + \sin x + \sin y + C.$

457. $dU = (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2 y + 3)dy.$ **Ж:** $U = \frac{1}{3}(x^2 + y^2) - x^2 y^2 + 3x + 3y + C.$

458. $dU = (shx + chy)dx + (xshy + 1)dy.$ **Ж:** $U = chx + xchy + y + C.$

459. $dU = \left(4x^3y^3 - 3y^2 + 8\right)dx + \left(3x^4y^2 - 6xy - 1\right)dy.$ **Ж:** $U = 8x + x^4y^3 - 3xy^2 - y + C.$

4. Грин формуласы. Егер $P(x;y)$, $Q(x;y)$ функциялары және $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ дербес туындылары D облысында және оның L шекарасында үзіліссіз болса, онда

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

болады және оны *Грин формуласы* дейді, әрі мұнда L контуры бойынша бағыт D облысы сол жақта болатындай етіп таңдап алынады.

460. Грин формуласының көмегімен $I = \oint_L \left(2x^2 + 2y^2\right)dx + \left(x^2 + 2xy + y^2\right)dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L – төбелері $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$ болатын тұйық үшбұрыш контуры.

Шешуі. $P(x,y) = 2x^2 + 2y^2$, $Q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 2y - 4y = 2x - 2y.$$

Сонда $I = \iint_D (2x - 2y)dxdy$, мұндағы D облысы - ΔABC.

AB түзуінің теңдеуі $y = x$.

BC түзуінің теңдеуі $y = 4 - x$.

$$I = \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (2x - 2y)dy = \int_1^2 \left(2xy - y^2\right)\Big|_x^{4-x} dx = \int_1^2 \left[2x(4-x) - (4-x)^2 - 2x^2 + x^2\right]dx =$$

$$= \int_1^2 \left(16x - 4x^2 - 16\right)dx = \left(8x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 16x\right)\Big|_1^2 = -\frac{4}{3}. \qquad \blacktriangle$$

461. Грин формуласының көмегімен $I = \oint_L -x^2ydx + xy^2dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x^2 + y^2 = a^2$ шеңбері.

Шешуі. $P(x,y) = -x^2y$, $Q(x,y) = xy^2$. Сонда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2$.

Осыдан

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy.$$

Полярлық координаттар жүйесіне көшеміз: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{1}{4}a^4 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}\pi a^4. \qquad \blacktriangle$$

462. Грин формуласының көмегімен $I = \oint_L \left[x + \ln(x^2 + y^2)\right]dx + y\ln\left(x^2 + y^2\right)dy$

D облысының L шекарасы бойынша қисық сызықты интегралын қос интегралға түрлендіру керек. **Ж:** $\iint\limits_D \frac{2y(x-1)}{x^2+y^2}dxdy.$

463. Грин формуласының көмегімен $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dx + y\left[xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy$ интегралын есептеу керек, мұндағы L: $x=1,\ x=4,\ \ y=0,\ y=2$ -тіктөртбұрыш контуры.

Ж: 8.

5. Ауданды есептеу. Тұйық L сызығымен шектелген фигураның ауданы

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$$

формуласымен есептеледі. Мұнда интегралдау L контуры бойынша бағыт D облысы сол жақта болатындай етіп таңдап алынады.

464. $x=a\cos^3 t,\cdot\ \ y=a\sin^3 t$ астроидымен шектелген фигураның ауданын табу керек.

Шешуі.

$$dx=-3a\sin t\cos^2 t$$

$$dy=3a\sin^2 t\cos t,\qquad 0\le t\le 2\pi.$$

Осыдан, $S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\oint\limits_0^{2\pi}\left(a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos^2 t\right)dt=$

$$=\frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{3}{8}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt=\frac{3a^2}{16}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3\pi a^2}{8}.\ \blacktriangle$$

465. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ эллипсімен шектелген фигураның ауданын табу керек. **Ж:** πab.

466. $y^2=x,\ y=x^2$ параболаларымен шектелген фигураның ауданын табу керек. **Ж:** $\frac{1}{3}$.

467. $\begin{matrix} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\sin t-\sin 2t)\end{matrix}$ кардиоидамен шектелген фигураның ауданын табу керек. **Ж:** $6\pi a^2$.

5.2 БЕТТІК ИНТЕГРАЛДАР

1. Бет ауданы бойынша беттік интегралдар (I текті беттік интегралдар). $U=f(x,y,z)$ үзіліссіз функциясы болсын және $z=\varphi(x,y)$ формуласымен σ беті берілсін. *Бет ауданы бойынша беттік интеграл (не I текті беттік интеграл)* деп

$$\lim_{\max diam\Delta\sigma_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta\sigma_k=\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma$$

мұндағы $\Delta\sigma_k$ - σ бетінің k-ші элементінің ауданы, (x_k, y_k, z_k) нүктесі осы элементке тиісті, $f(x, y, z)$ функциясы σ бетінің әрбір нүктесінде анықталады.

Егер бет $z=\varphi(x, y)$ теңдеуімен берілсе, онда I текті беттік интеграл

$$\iint_\sigma f(x,y,z)d\sigma = \iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

формуласымен есептеледі.

468. $\iint_\sigma \frac{d\sigma}{(1+x+z)^2}$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ: $x+y+z=1$ жазықтығының I октанттағы бөлігі.

Шешуі. Жазықтық теңдеуін түрлендірейік: $z=1-x-y$. Бұдан $z'_x=-1$, $z'_y=-1$, .

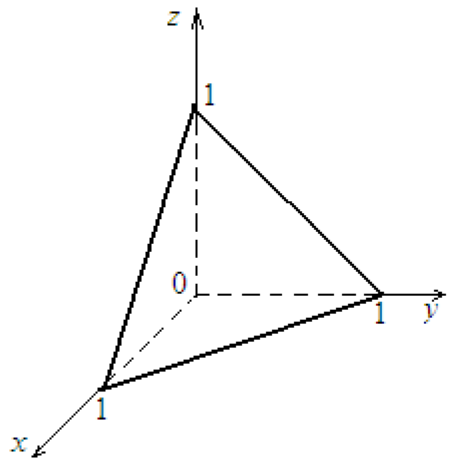
$d\sigma=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}dxdy=\sqrt{3}dxdy$.

σ бетінің Oxy жазықтығына проекциясы x+y=1, x=0, y=0 түзулерімен шектелген D үшбұрышы болады (5.1 Сурет). Осы үшбұрышта x 0-ден 1-ге дейін өзгереді.

$$\iint_\sigma \frac{d\sigma}{(1+x+z)^2}=\iint_D\frac{\sqrt{3}dxdy}{(1+x+1-x-y)^2}=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 dx\cdot\int_0^{1-x}\frac{dy}{(2-y)^2}=\sqrt{3}\int_0^1 \left.\frac{1}{2-y}\right|_0^{1-x}dx=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)dx=\sqrt{3}\left[\ln|1+x|-\frac{1}{2}x\right]_0^1=\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$



5.1 Сурет

▲

469. $\iint_\sigma (x^2+y^2)d\sigma$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті $z^2=x^2+y^2$ конусының $z=0$ және $z=1$ жазықтықтарының арасындағы бөлігі.

Шешуі. $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$d\sigma=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy.$$

Сонда берілген интеграл $I=\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy.$

Интегралдау облысы D: $x^2+y^2\le 1$ дөңгелегі болғандықтан

$$I=\sqrt{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy=4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 r^3dr=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.. \quad ▲$$

470. $2x+2y+z=8a$ бетінің $x^2+y^2=a^2$ цилиндрімен шектелген бөлігінің ауданын есептеу керек.

Шешуі. $z=8a-2x-2y$, бұдан $z'_x=-2, z'_y=-2$, ал $d\sigma=3dxdy$

$$\sigma = \iint\limits_{\sigma} d\sigma = 3\iint\limits_{\sigma_{xy}} dxdy\,.$$

σ_{xy} : $x^2 + y^2 \le a^2$ дөңгелегі болады. Полярлық координаттар жүйесіне көшсек:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le a\,,$$

онда

$$\sigma = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a rdr = 1{,}5\int_0^{2\pi} r^2\Big|_0^a d\varphi = 1{,}5a^2\int_0^{2\pi} d\varphi = 3\pi a^2\,. \quad \blacktriangle$$

471. $\iint\limits_{\sigma}\left(2x + \frac{4}{3}y + z\right)d\sigma$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті: $6x + 4y + 3z = 12$ жазықтығының бірінші октанттағы бөлігі. **Ж:** $4\sqrt{61}$.

472. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2 + y^2\right)d\sigma$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті: $x^2 + y^2 = 2z$ параболоидының $z = 1$ жазықтығымен қиғандағы бөлігі. **Ж:** $\frac{\pi}{15}\left(24\sqrt{3} + 4\right)$.

473. $\iint\limits_{\sigma} xyzd\sigma$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті: $z = x^2 + y^2$ параболоидының $z = 0$ және $z = 1$ жазықтықтарымен қиғандағы бөлігі.

Ж: $\frac{1}{420}\left(125\sqrt{5} - 1\right)$.

2. Координаттар бойынша беттік интегралдар (II текті беттік интегралдар). $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ -үзіліссіз функциялары, L сызығымен шектелген σ беті және σ бетінің әрбір $M(x,y,z)$ нүктесінде оң бағытта бағытталған $\vec{n}(M) = \{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ нормалі (бірлік векторы) берілсе, онда *II текті беттік интеграл*

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\sigma}\left[P\cos\alpha + Q\cos\beta + r\cos\gamma\right]d\sigma$$

өрнектеледі.

Егер σ беті $\Phi(x,y,z) = 0$ теңдеуімен айқын емес түрде берілсе, онда нормальдің бағыттаушы косинустары

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}; \qquad \cos\beta = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}};$$

формулаларымен анықталады, мұндағы таңба σ бетінің $\vec{n}$ нормалінің бағытына байланысты анықталады.

Егер σ беті $x = x(y,z)$ немесе $y = y(x,z)$ немесе $z = z(x,y)$ формуласымен берілсе және σ бетінің Oyz, Oxz, Oxy жазықтықтарындағы проекцияларын сәйкес σ_{yz}, σ_{xz}, σ_{xy} деп белгілесек, онда II текті беттік интеграл

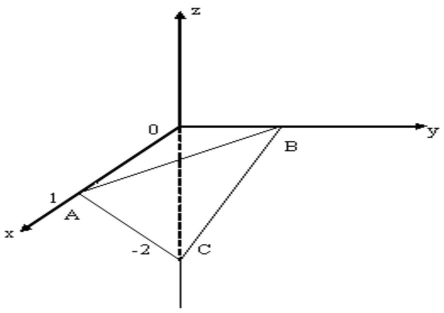
$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)\cos\alpha d\sigma = \pm\iint_{\sigma_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz;$$

$$\iint_{\sigma} Q(x,y,z)\cos\beta d\sigma = \pm\iint_{\sigma_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz;$$

$$\iint_{\sigma} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma = \pm\iint_{\sigma_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy;$$

формулаларымен есептеледі.

474. $I = \iint_{\sigma}(x-z)dydz + (z+y)dxdz + (2x+y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті $2x + y - z - 2 = 0$ жазықтығының координат жазықтықтарымен қиғандағы бөлігі, нормаль бағыты Ox осімен сүйір бұрыш жасайды (5.2 Сурет).



5.2 Сурет

Шешуі.

$$J = \iint_{\sigma}(x-z)dydz + \iint_{\sigma}(z+y)dxdz + \iint_{\sigma}(2x+y)dxdy =$$

$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

$$\cos\alpha > 0,\ \cos\beta > 0,\ \cos\gamma < 0.$$

$J_1 = \iint_{\sigma}(x-z)dydz$ интегралын есептейік.

$$\sigma_{yz} - \Delta OCB:\ \ x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z,\ 0 \le y \le 2,\ \ y - 2 \le z \le 0$$

$$J_1 = \iint_{\sigma}(x-z)dydz = +\iint_{\sigma_{yz}}\left(1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - z\right)dydz = \frac{1}{2}\int_0^2 dy\int_{y-2}^{0}(2-y-z)dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\left((2-y)z - \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{y-2}^{0}dy = -\frac{1}{2}\int_0^2\left[(2-y)(y-2) - \frac{(y-2)^2}{2}\right]dy = -\frac{1}{2}\int_0^2\left(-\frac{3(y-2)^2}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2(y-2)^2dy = \frac{1}{4}(y-2)^3\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(0+8) = 2.$$

$J_2 = \iint_{\sigma}(z+y)dxdz$ интегралын есептейік.

$$\sigma_{xz} - \Delta AOC,\ \ \mathrm{y} = 2 - 2x + z,\ 0 \le x \le 1,\ \ 2\mathrm{x} - 2 \le z \le 0$$

$$J_2 = \iint_{\sigma}(z+y)dxdz = +\iint_{\sigma_{xz}}(z + 2 - 2x + z)dxdz = \int_0^1 dx\int_{2x-2}^{0}(2 - 2x + 2z)dz =$$

$$= \int_0^1\left((2-2x)z + z^2\right)\Big|_{2x-2}^{0}dx = -\int_0^1\left[(2-2x)(2x-2) + (2x-2)^2\right]dx = 0.$$

$J_3 = \iint\limits_{\sigma} (2x+y)dxdy$ интегралын есептейік.

$$\sigma_{xy} - \Delta AOB,\ \ \mathrm{z} = 2x+y-2,\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le \mathrm{y} \le 2-2x$$

$$J_3 = \iint\limits_{\sigma} (2x+y)dxdy = -\iint\limits_{\sigma_{xy}} (2x+y)dxdy = -\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} (2x+y)dy =$$

$$= -\int\limits_0^1 \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{2-2x} dx = -\int\limits_0^1 \left[2x(2-2x) + \frac{(2-2x)^2}{2} \right] dx = -\int\limits_0^1 \left(4x - 4x^2 + 2 - 4x + 2x^2\right) dx =$$

$$= -\int\limits_0^1 \left(2 - 2x^2\right) dx = -\left(2x - \frac{2}{3}x^3 \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{4}{3}.$$

Сонымен

$$J = 2 + 0 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

475. $\iint\limits_{\sigma} yzdydz + xzdxdy + xydxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті $x + 2y + 3z = 6$ жазықтығының координаттар жазықтығымен қиғандағы бөлігі.

Ж: 21.

476. $\iint\limits_{\sigma} 2dxdy + ydxdz - x^2 zdydz$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ эллипсоидының бірінші октанттағы бөлігі. **Ж:** $\frac{4\pi}{3} - \frac{4}{15}.$

477. $\iint\limits_{\sigma} (x+z)dzdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы σ беті $2x + 2y + z = 2$ жазықтығының бірінші октанттағы бөлігі.

Ж: $\frac{1}{12}.$

6 ӨРІС ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Егер кеңістіктің әрбір нүктесіне $U = U(x, y, z)$ скалярлық функцияның мәні сәйкес келсе, онда оны *скалярлық өріс* дейді.

Мысалы, егер $U(x, y, z)$ функциясы кеңістіктегі V облысының әрбір нүктесінде температураны анықтаса, онда оны температураның *скалярлық өрісі* дейді.

$U(x, y, z)$ скалярлық өріс бір тек қана бір берілген С мәнін қабылдайтын нүктелер жиынын деңгейлік бет дейді, оның теңдеуі $U(x, y, z) = C$.

Мысалы, $U = x^2 + y^2$ функциясының берілген скалярлық өрісінің деңгейлік сызығы $x^2 + y^2 = C$ шеңберлер тобы болады.

Егер кеңістіктің әрбір $M(x,y,z)$ нүктесінде $\vec{F}(M)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}++R(x,y,z)\,\vec{k}$ векторының анықталған мәні сәйкес келсе, онда *векторлық өріс* берілді дейді.

Скаляр немесе векторлық өріс t - уақытына байланыссыз болса, онда оны *стационарлық*, ал байланысты болса, *стационарсыз* деп атайды.

Векторлық сызық деп әрбір $M(x,y,z)$ нүктесінде бағыты сәйкес $\vec{F}(M)$ векторымен бағыттас болатын қисық сызығын айтады. Векторлық сызық

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

дифференциалдық теңдеулер жүйесімен анықталады.

$U=U(x,y,z)$ скалярлық өрістің *градиенті* деп

$$gradU=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

векторын айтады да, қысқаша ∇U символымен белгілейді, мұндағы

$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ - *Гамильтон операторы* немесе *набла* дейді.

Өріс градиенті бет деңгейіне жүргізілген нормаль бағытымен функцияның өсу жағына қарай бағытталады және оның өсу жылдамдығының ең үлкен шамасы өріс градиентінің ұзындығының тең, яғни

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}=\left|gradU\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

$\vec{F}(M)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$ векторлық өрістің *дивергенциясы* деп

$$div\,\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\,\vec{F}$$

скаляр шамасын айтады.

$\vec{F}(M)=P\,\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k}$ векторлық өрістің *құйыны (роторы)* деп

$$rot\,\vec{F}=\nabla\times F=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

векторын айтады.

Бірлік $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ нормаль бағытындағы σ беті бойынша өтетін $\vec{F}(M)=P\,\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k}$ векторының *ағыны* деп

$$\Pi=\iint_{\sigma}\vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma=\iint_{\sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)d\sigma=\iint_{\sigma}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$$

интегралын айтады.

$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ векторының L сызығы бойынша алынған сызықты интеграл

$$\int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

формуласымен анықталады, мұндағы $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ векторы L қисығына жүргізілген жанама вектор.

Егер L қисығы тұйық болса, онда сызықты интегралды $\vec{F}$ векторлық өрісінің *иірімі (циркуляциясы)* деп атайды:

$$Ц = \oint_L \vec{F} d\vec{r} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Егер L қисығы σ бетін қоршаған тұйық қисық болса, онда *Стокс формуласы* орындалады және оның формуласы

$$Ц = \oint_L \vec{F} d\vec{r} = \iint_\sigma \vec{n}\, rot\,\vec{F}\, d\sigma$$

немесе

$$Ц = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] d\sigma,$$

мұндағы $\vec{n}$ векторы σ бетіне жүргізілген сыртқы нормалы, оның бағытымен қарағанда L контурымен айналу бағыты сағат тіліне қарсы алынады.

Егер V көлемін қоршаған σ бетін тұйық, ал оған жүргізілген сыртқы нормаль бірлік $\vec{n}$ векторы болса, онда *Гаусс-Остраградский формуласы* орындалады және оның формуласы

$$\Pi = \oiint_\sigma \vec{F}\,\vec{n} d\sigma = \iiint_V div\,\vec{F} dxdydz$$

немесе

$$\Pi = \oiint_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdz = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial t} \right) dxdydz.$$

Егер өрістің әрбір нүктесінде $diV\,\vec{F} = 0$ болса, онда $\vec{F}$ векторлық өрісін *құбырлық (соленоидалды) өріс* дейді. Бұл жағдайда кез келген тұйық бет арқылы өтетін вектор ағыны нөлге тең.

Егер $\vec{F} = gradU$, яғни $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$, болса, онда $\vec{F}$ векторлық өрісін дәрменді (потенциалды) өріс дейді, мұндағы U – скалярлық функция. Берілген бір байланысты облыста $\vec{F}(M)$ - өрісі дәрменді болу үшін $rot\,\vec{F} = 0$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті. Бұл жағдайда U – дәрмені бар және оны

$$U(M) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C$$

теңдеуімен анықтайды. Егер U – дәрмені бір мәнді функция болса, онда

$$\int_{AB} \vec{F}\, d\vec{r} = U(B) - U(A),$$

мұндағы AB доғасы L қисығының бойынан алынады, x_0, y_0, z_0, C - кез келген сандар.

Егер $\vec{F}(M)$ векторлық өріс бір мезгілде дәрменді және құбырлы өріс болса, онда

$$diV(gradU) = 0$$

және дәрменді U функциясы гармониялық функция болады, яғни Лаплас теңдеуін қанағаттандырады.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \text{ немесе } \Delta U = 0,$$

мұндағы $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - Лаплас операторы.

478. $\vec{F} = x^2 \vec{i} + 2y^2 \vec{j} + 3z^2 \vec{k}$ векторлық өрісінің дивергенциясын табу керек.

Ж: $diV \vec{F} = 2x + 4y + 6z.$

479. $\vec{F} = x^2 \cdot \vec{i} + xy^2 \cdot \vec{j} + yz^2 \cdot \vec{k}$ векторлық өрісінің құйынының (роторын) табу керек.

Шешуі.

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{l} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy^2 & yz^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial(yz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial(x^2)}{\partial z} - \frac{\partial(yz^2)}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y}\right) =$$

$$= z^2 \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{k}.$$

▲

480. Стокс формуласының көмегімен $\vec{F} = (x + 3y + 2z)\,\vec{i} + (3x + z)\,\vec{j} + (2x - y)\vec{k}$ векторлық өрісінің MNP үшбұрыш контуры бойынша иірімін (циркуляциясын) табу керек, мұндағы $M(2;0;0;)$, $N(0;3;0)$, $P(0;0;1)$.

Шешуі.

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 3y + 2z & 3x + z & 2x - y \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-1) + \vec{j}(2-2) + \vec{k}(3-3) = -2\,\vec{i}.$$

Стокс формуласы бойынша $Ц = \oint_L \vec{F} d\vec{r} = \iint_\sigma \vec{n}\, rot\,\vec{F}\, d\sigma = -2\iint_{\sigma_{yz}} dydz.$

MNP үшбұрышынан тұратын L контуры $3x+2y+6z-6=0$ жазықтығында жатады, осыдан $y=-2\int_0^3 dy\int_0^{1-\frac{y}{3}}dz=-2\int_0^3\left(1-\frac{y}{3}\right)dy=3.$ ▲

481. Стокс формуласының көмегімен $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$ векторлық өрісінің ABC үшбұрыш контуры бойынша иірімін (циркуляциясын) табу керек, мұндағы $A(0;0;0;)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$. **Ж:** 1.

482. Стокс формуласының көмегімен $\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j}$ векторлық өрісінің $x^2+(y-1)^2=1$ шеңбері бойынша иірімін (циркуляциясын) табу керек. **Ж:** 2π.

483. $\vec{F}=(2x-4yz)\vec{i}+(2y-4xz)\vec{j}+(2z-4xy)\vec{k}$ векторлық өрісі дәрменді (потенциалды) немесе құбырлы (соленоидалды) бола ма тексеру керек. Дәрменді өріс болған жағдайда оны дәрменін (потенциалын) табу керек.

Шешуі. Векторлық өрістің дәрменділігін тексерейік:

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x-4yz & 2y-4xz & 2z-4xy\end{vmatrix}=\vec{i}(-4x+4x)+\vec{j}(-4y+4y)+\vec{k}(-4z-4z)=0.$$

$\vec{F}$ векторлық өрісі дәрменді. Енді өрістің дәрменін табайық.

$$U(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}(2x-y_0z)dx+\int_{y_0}^{y}(2y-xz_0)dy+\int_{z_0}^{z}(2z-xy)dz+C=$$

$$=\left(x^2-xy_0z_0\right)\Big|_{x_0}^{x}+\left(y^2-xyz_0\right)\Big|_{y_0}^{y}+\left(z^2-xyz\right)\Big|_{z_0}^{z}+C=x^2-xy_0z_0-x_0^2+xy_0z_0+y^2-xyz_0-$$

$$-y_0^2+xy_0z_0+z^2-xyz-z^2-xyz_0+C=x^2+y^2+z^2-4xyz-x_0^2-y_0^2-z_0^2+4x_0y_0z_0+C.$$

$C_1=-x_0^2-y_0^2-z_0^2+4x_0y_0z_0+C$ деп алсақ, онда

$$U=x^2+y^2+z^2-4xyz+C_1.$$

Енді өріс құбырлы бола ма, тексерейік: $div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=6\neq 0.$

Берілген өріс құбырлы емес. ▲

$\vec{F}=Pdx+Qdy+Rdz$ өрісі дәрменді немесе құбырлы өріс бола ма, тексеру керек. Дәрменді өріс болған жағдайда дәрменін табу керек.

484. $\vec{F}=(3x^2+yz)\vec{i}+(3y^2+xz)\vec{j}+(3z^2+xy)\vec{k}.$

Ж: Өріс дәрменді, бірақ құбырлы емес $U(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+xyz+C.$

485. $\vec{F}=(2x+yz)\vec{i}+(y+xz)\vec{j}+(-3z+xy)\vec{k}.$

Ж: Өріс әрі дәрменді, әрі құбырлы (гармоникалық өріс)
$U(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2 + xyz + C.$

486. $\vec{F} = xz\,\vec{i} + yz\,\vec{j} - z^2\,\vec{k}.$ **Ж:** Өріс дәрменді емес, бірақ құбырлы.

$\vec{F} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ өрісі және $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығы мен координат жазықтықтарымен шектелген пирамида σ беті берілсін. Гаусс-Остроградский формуласының көмегімен $\vec{F}$ өрісінің ағынын есептеу керек.

487. $\vec{F} = x^2\cdot\vec{i} - z^2\cdot\vec{j} + y^2\cdot\vec{k},\ \ 2x + y + z = 2.$

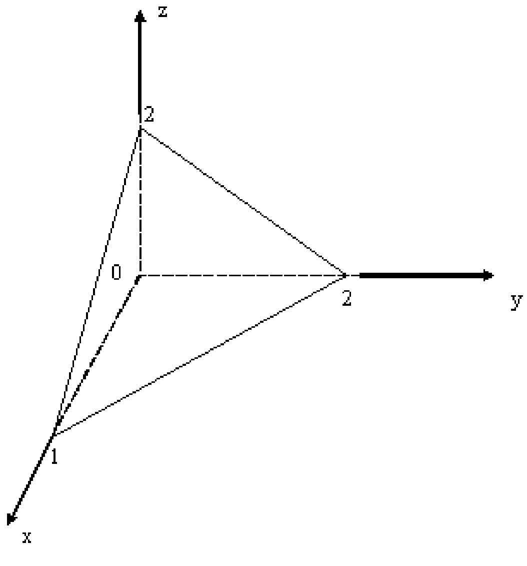
Шешуі.

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint_V div\vec{V}\,\vec{F}dxdydz,\ div\vec{V}\,\vec{F} = 2x.$$

Сонымен, 5.3 Сурет бойынша интегралдар шектерін қояйық:

$$\Pi = 2\iiint_V dxdydz = 2\int_0^1 dx \cdot 2\int_0^{2-2x} dy \cdot \int_0^{2-2x-y} xdz = 2\int_0^1 dx\cdot$$

$$\cdot\int_0^{2-2x} x(2-2x-y)dy = 2\int_0^1 x\left(2y - 2xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-x} dx = \int_0^1 x(2-2x)^2\,dx = \frac{1}{3}. \ \blacktriangle$$



5.3 Сурет

488. $\vec{F} = 4z\cdot\vec{i} + (x - y - z)\cdot\vec{j} + (3y + 2z)\cdot\vec{k},\ \ \text{-}\,2x + y + z - 4 = 0.$ **Ж:** $\frac{16}{3}$.

489. $\vec{F} = (x + y)\cdot\vec{i} + (y + z)\cdot\vec{j} + (2x + 2z)\cdot\vec{k},\ \ 3x - 2y + 2z - 6 = 0.$ **Ж:** 12.

490. $\vec{F} = y^2z\cdot\vec{i} + x^2\cdot\vec{j} + (xy + 3z)\cdot\vec{k},\ \ 2x + 2y + z = 2.$ **Ж:** 1

491. $\vec{F} = y^2\cdot\vec{i} + x^2\cdot\vec{j} + z^2\cdot\vec{k},\ \ x + y + z = 6.$ **Ж:** $\frac{1}{12}$.

7 ҚАТАРЛАР

7.1САН ҚАТАРЫ

1. Мүшелері оң сан қатарлары. $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ қандай да бір сан тізбегі берілсе, онда

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \tag{7.1}$$

шексіз қосындыны *сан қатары* деп атайды.

Мұндағы $u_1, u_2, u_3, ...$ сандары сан қатарларының *мүшелері*, ал u_n саны *жалпы мүшесі* (*немесе n-ші мүшесі)* деп аталады.

Жалпы мүшесі арқылы сан қатарын қысқаша $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ деп жазуға болады.

(7.1)-қатардың алғашқы мүшелерінің қосындыларын қарастырайық.

$S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$, ..., $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ қатардың *дербес қосындылары* деп аталады.

Егер сан қатарының алғашқы мүшелерінің қосындылар тізбегінің шегі бар болса, яғни

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S, \tag{7.2}$$

саны бар болса, онда ол қатардың *қосындысы* деп аталады, және қатар *жинақты* делінеді.

Егер (7.2) шегі болмаса, онда берілген сан қатарын *жинақсыз* дейміз, ондай қатардың қосындысы жоқ.

Мысалы,

Сан қатарының негізгі теоремаларын қарастырайық:

а) егер $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ қатары жинақты болса, онда алғашқы m мүшелерін алып тастағанда пайда болған

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + ... \tag{7.3}$$

қатары да жинақты болады. Керісінше алғашқы m мүшелері алынып тасталынған қатар жинақты болса, онда берілген қатарда жинақты болады.

(7.3)-қатарды берілген қатардың *m-ші қалдығы* деп атайды;

ә) егер $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$қатары жинақты және қосындысы S-ке тең болса, онда $\alpha u_1 + \alpha u_2 + \alpha u_3 + ... + \alpha u_n + ...$ қатары да жинақты және қосындысы $\alpha \cdot S$-ке тең болады;

б) егер $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ және $v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ...$ қатарлары жинақты және қосындылары сәйкесінше S және δ болса, онда $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + ... + (u_n + v_n) + ...$ қатары да жинақты және қосындысы $(S + \delta)$-ға тең болады.

Көп жағдайларда қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысы арқылы оның жинақты немесе жинақсыз болуын тексеру өте қиын немесе күрделі есептеуді қажет етеді. Сондықтан қатардың жинақтың немесе жинақсыз болуын білу үшін жинақтылық белгілерінқарастырамыз.

Қатар жинақтылығының қажетті белгісі.

Егер қатар жинақты болса, онда $n \to \infty$-да оның жалпы (n-ші) мүшесі нөлге ұмтылады, яғни

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Ал егер $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ болса, онда қатар жинақсыз болады.

Қатар жинақтылығының жеткілікті белгілері

а) I салыстыру белгісі. $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ (7.4)

және $v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ...$ (7.5)

қатарлары берілсін және $u_n \leq v_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ болсын.

Егер (7.5)-қатар жинақты болса, онда (7.4)-қатар да жинақты болады.

Егер (7.4)-қатар жинақсыз болса, онда (7.5)-қатар да жинақсыз болады.

ә) II салыстыру белгісі. Егер $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$ ақырлы шегі бар болса, онда $\sum_{i=1}^{\infty} u_n$ және $\sum_{i=1}^{\infty} v_n$ қатарлары екеуі де бірдей жинақты немесе бірдей жинақсыз болады.

б) Даламбер белгісі. Мүшелері оң болатын $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ қатары үшін

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

болса, онда:

1) $\ell > 1$ болғанда, қатар жинақсыз;

2) $\ell < 1$ болғанда, қатар жинақты;

3) $\ell = 1$ болғанда, қатар жинақты да немесе жинақсыз да болуы мүмкін.

в) Коши белгісі. Мүшелері оң болатын $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ қатары үшін

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

болса, онда:

1) $\ell > 1$ болғанда, қатар жинақсыз;

2) $\ell < 1$ болғанда, қатар жинақты;

3) $\ell = 1$ болғанда, қатар жинақты да немесе жинақсыз да болуы мүмкін.

г) Кошидің интегралдық белгісі. Мүшелері оң және өспейтін $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ қатары берілсін (яғни $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq ... \geq u_n \geq ...$) және $u_n = f(n),\ n = 1,2,3,...$ болсын. Мұндағы $f(x)$ - өспейтін үзіліссіз функция.

Егер $\int_1^{\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары да жинақты болады.

Егер $\int_1^{\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақсыз болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары да жинақсыз болады.

492. $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ қатарының жалпы мүшесі берілген. Алғашқы мүшелерін табу керек.

Шешуі. $u_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{5}$; $u_3 = \dfrac{3}{10}$; $u_4 = \dfrac{4}{17}$; $u_5 = \dfrac{5}{26}$. ▲

493. $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$ қатарының жалпы мүшесі берілген. Алғашқы бес мүшелерін табу керек.

Шешуі. $u_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{1\cdot 2}{2^2} = \dfrac{1}{2}$; $u_3 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{2^3} = \dfrac{3}{4}$; $u_4 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2^4}$; $u_5 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2^5} = \dfrac{15}{4}$. ▲

494. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \dfrac{7}{2^4} + \ldots$ қатарының жалпы мүшесін табу керек.

Шешуі. Алымында 1, 3, 5, ... сандарынан тұратын тізбек арифметикалық прогрессия құрайды, оның n-ші мүшесін $\grave{a}_n = a_1 + d(n-1)$ формуласы бойынша табамыз. Мұнда $a_1 = 1, d = 2,$ сондықтан $a_n = 2n - 1.$

Бөліміндегі $2,\ 2^2,\ 2^3, \ldots$ сандары геометриялық прогрессия құрайды, оның n-ші мүшесі $b_n = 2^n$-ге тең. Осыдан жалпы мүшесі $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$. ▲

495. $\dfrac{3}{5} + \left(\dfrac{4}{8}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{11}\right)^3 + \left(\dfrac{6}{14}\right)^4 + \ldots$ қатарының жалпы мүшесін табу керек.

Шешуі. Әрбір мүшесінің дәрежесі мүшесінің нөмірімен сәйкес келеді. Сондықтан n-ші мүшесінің дәрежесі n-ге тең болады. $\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{8}, \dfrac{5}{11}, \dfrac{6}{14}$ бөлшектерінің алымы бірінші мүшесі 3-ке, айырмасы 1-ге тең арифметикалық прогрессияны құрайды. Онда n-ші мүшесі $n+2$-ке тең болады, ал бөлімі бірінші мүшесі 5-ке, айырмасы 3-ке тең арифметикалық прогрессияны құрайды, осыдан n-ші мүшесі $3n+2$-ке тең болады. Сонымен қатардың жалпы мүшесі

$$u_n = \left(\frac{n+2}{3n+2}\right)^n. \quad ▲$$

496. $1 + \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$ қатарының жалпы мүшесін табу керек.

Шешуі. $u_1 = 1$; $u_2 = \dfrac{1}{1\cdot 2}$; $u_3 = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$; $u_4 = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$; $u_n = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n!} = \dfrac{1}{n!}.$

болады. ▲

497. Мүшелері геометриялық прогрессия болатын $b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots$ сан қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Мектеп бағдарламасынан белгілі: $S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q}$. Егер $|q|<1$ болса, онда қосынды $S = \frac{b}{1-q}$. Олай болса, қатар жинақты.

Ал егер $|q|>1$ болса, онда берілген қатар жинақсыз, себебі: $bq^{n-1} \to \infty$ сондықтан $S_n \to \infty$.

Егер $q=1$ болса, онда қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысы $S_n = \underbrace{b+b+...+b}_{n} = n \cdot b$. Осыдан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, яғни қатар жинақсыз.

Егер $q=-1$ болса, онда қатарды $b-b+b-b+...$ түрінде жазуға болады. Яғни оның алғашқы n мүшесінің қосындысы

$$S_n = \begin{cases} b, егер\, n - так \\ 0, егер\, n - жуп \end{cases}.$$

Бұл жағдайда қатардың қосындысы анықталмаған, яғни қатар жинақсыз.

Сонымен мынадай қорытынды жасауға болады:

Егер $|q|<1$ болса, онда қатар жинақты, ал егер $|q|\geq 1$ болса, онда қатар жинақсыз болады. ▲

498. $\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+...+\frac{1}{(2n+1)^2-1}+...$ сан қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесін $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2-1}$ екі бөлшектің жарты айырымы ретінде көрсетуге болады. $\frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right)$, яғни $\frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$; $\frac{1}{24} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$; $\frac{1}{48} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)$,... олай болса,

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right) + ... + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)$$ деп

жазуға болады. Осыдан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S = \frac{1}{4}$, яғни қатар жинақты. ▲

499. $\frac{5}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+...+\frac{5}{8}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Берілген қатар шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелерінен құралған. Олай болса, қатар жинақты. Оның қосындысын табайық, мұнда

$$b_1 = \frac{5}{8}; \quad q = \frac{2}{5}; \quad S = \frac{b}{1-q} = \frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{25}{24}.$$ ▲

500. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+8^n}{40^n}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесін $U_n=\dfrac{5^n+8^n}{40^n}=\dfrac{5^n}{40^n}+\dfrac{8^n}{40^n}=\dfrac{1}{8^n}+\dfrac{1}{5^n}$ түрінде жазсақ, онда қатарды әрқайсысы геометриялық прогрессияның мүшелерінен құралған $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+8^n}{40^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{8^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5^n}$ екі қатардың қосындысы түрінде жазуға болады. Бұл екі қатар да жинақты болады және олардың қосындысы

$$S=\frac{b}{1+q}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4};$$

олай болса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+8^n}{40^n}\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{28}.$ ▲

501. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}+...+\dfrac{n}{2n+1}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}\neq 0.$

Осыдан қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалмағандықтан, қатар жинақсыз болады. ▲

502. $0{,}4+0{,}31+0{,}301+...+\left[0{,}3+(0{,}1)^n\right]+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}[0{,}3+(0{,}1)^n]=0{,}3\neq 0,$ онда қатар жинақсыз болады. ▲

503. $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{n^n}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^n}=0,$ яғни қажетті белгісі орындалады. Енді $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+...+\dfrac{1}{2^n}+...$ -шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелерінен құралған қатарды қарастырайық. Бұл қатар жинақты болады. $\dfrac{1}{3^3}<\dfrac{1}{2^3};\ \dfrac{1}{4^4}<\dfrac{1}{2^4},...,\dfrac{1}{n^n}<\dfrac{1}{2^n}$ теңсіздіктері орындалғандықтан, берілген қатар да жинақты болады; ▲

504. Жалпы мүшесі $u_n=\dfrac{1}{3\cdot 4^n+5}$ тең болатын қатардың жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Берілген қатарды жалпы мүшесі $v_n = \dfrac{1}{4^n}$ болатын жинақты қатармен салыстырайық.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3\cdot 4^n - 5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-\dfrac{5}{4^n}} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Яғни II салыстыру белгісі бойынша берілген қатар жинақты болады; ▲

505. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+...+\dfrac{n}{2^n}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n} = 0;\ \ u_n = \dfrac{n}{2^n};\ \ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}};$ Даламбер белгісі бойынша:

$\dfrac{u_{n+1}}{n_n} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} : \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \dfrac{n+1}{2n};\ \ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} < 1,$ яғни қатар жинақты. ▲

506. $5+\dfrac{5^2}{2!}+\dfrac{5^3}{3!}+...+\dfrac{5^{ï}}{ï\,!}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 5\cdot 5\cdot ...\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n} = 0,\ \ u_n = \dfrac{5^n}{n!};\ \ u_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!};$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{5^n}{(n+1)!\cdot 5^n} = \dfrac{5\cdot n!}{(n+1)\cdot n!} = \dfrac{5}{n+1};\ \ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1,$ яғни қатар жинақты болады (Даламбер белгісі бойынша). ▲

507. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot ...\cdot n} = 0,\ \ u_n = \dfrac{n!}{n^n},\ \ u_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}};$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!} = \dfrac{(n+1)\cdot n!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n},\ \ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1,$

қатар жинақты (Даламбер белгісі бойынша). ▲

508. $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{ï^{\,ï}}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^n} = 0,\ \ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0 < 1$ қатар жинақты (Коши белгісі бойынша). ▲

509. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{9}{27}+...+\dfrac{n^2}{3^n}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3^2} = 0;$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2}{3^n}} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \dfrac{1}{3} < 1$ мұндағы $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$ яғни қатар жинақты (Коши белгісі бойынша). ▲

510. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{5n+4}\right)^n$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{5n+4}\right)^n = 0;$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{5n+4} = \dfrac{2}{5} < 1,$ яғни қатар жинақты (Коши белгісі бойынша). ▲

511. $1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p} + \ldots$ Дирихле қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = \begin{cases} 0, & \textit{егер } p > 0 \\ 1, & \textit{егер } p = 0 \\ \infty, & \textit{егер } p < 0 \end{cases}$ олай болса, $p > 0$ болғанда қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалады.

Енді жеткілікті белгісін қарастырайық. Даламбер белгісін қолданайық:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)^p} : \frac{1}{n^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

осыдан Даламбер белгісінің көмегімен қатардың жинақтылығын зерттеу мүмкін еместігін көруге болады. Сол сияқты Коши белгісінің көмегімен тексерсек:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = 1$$

болады, яғни бұл жағдайда да қатардың жинақтылығы туралы ешнәрсе айтуға болмайды. Енді Кошидің интегралдық белгісін қолданайық. Ол үшін $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ функциясын қарастырамыз. Себебі $f(n) = \dfrac{1}{n^p}$,

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^N = \dfrac{1}{1-p}\left(N^{1-p} - 1\right), & \textit{егер } p \neq 1, \\ \ln x\Big|_1^N = \ln N, & \textit{егер } p = 1. \end{cases}$$

Осыдан, егер $p \neq 1$ болса, онда $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^p} = \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_1^N \dfrac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{åããð } p > 1, \\ \infty, & \text{åããð } p < 1, \end{cases}$ ал егер $p = 1$ болса, онда $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x} = \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_1^N \dfrac{dx}{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln N = \infty.$ Сонымен мынадай қорытындыға келуге болады, егер $p>1$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ қатары жинақты, ал егер $p\le 1$ болса, онда ол жинақсыз болады.

$p=1$ болғанда , яғни $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{ï}+...$ жинақсыз қатары *гармоникалық қатар* деп аталады. ▲

512. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$ Қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалғанымен, берілген қатар жинақсыз болады. Себебі

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\ \ рет}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot n=\sqrt{n},\ \text{яғни}\ \lim_{n\to\infty}S_n=\infty.$$

Осыдан қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалғанымен, оның жинақтылығы немесе жинақсыздығы белгісіз болатындығын байқаймыз. Сондықтан қатардың жинақтылығын зерттеу үшін жеткілікті белгісін қарастыруымыз керек. Дәреже $p=\frac{1}{2}\prec 1$ болғандықтан (511 –мысалды қараңыз) қатар жинақсыз. ▲

513. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+5}{(n^2-1)(n^3+2)}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесінің алымының дәрежесі төртке, ал бөлімінің дәрежесі беске тең. Алымы мен бөлімінің дәрежелерінің айырмасы бірге тең. Сондықтан, берілген қатарға екінші салыстыру белгісін қолданып, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоникалық қатарымен салыстырамыз.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+5}{(n^2-1)(n^3+2)}:\frac{1}{n}\right)=1$ болғандықтан, берілген қатар да жинақсыз болады. ▲

514. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3+1}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесінің алымының дәрежесі бірге, бөлімінің дәрежесі үшке тең, олай болса айырмасы екіге тең болады. Сондықтан

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ p=2$$

жинақты қатарымен салыстыра отырып, берілген қатардың жинақты екендігін көреміз. ▲

515. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+...+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\to 0,\ n\to\infty$ әрі $u_1>u_2>u_3...$ орындалатындықтан $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ функциясын аламыз.

$$\int_1^N \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\int_1^N \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\ln\ln(x+1)\Big|_1^N=\ln\ln(N+1)-\ln\ln 2\ \ N\to\infty,$$

$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\infty$, осыдан қатар жинақсыз (Кошидің интегралдық белгісі бойынша). ▲

2. Ауыспалы таңбалы қатар. Лейбниц белгісі. Қатар тұрған мүшелерінің таңбалары әртүрлі болатын қатарларды *ауыспалы таңбалы қатар* дейміз.

Ондай қатарларды

$u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}\cdot u_n+...$

деп жазамыз, мұндағы $u_n\geq 0,\ n=1,2,...$. Осындай ауыспалы таңбалы қатарлардың жинақтылығы Лейбниц белгісі арқылы анықталады:

Лейбниц белгісі. Егер ауыспалы таңбалы

$u_1>u_2>u_3>...>u_n>...$, яғни қатар мүшелерінің абсолюттік мәндері кемімелі және

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ болса,

онда қатар жинақты (әрі оның қосындысы бірінші мүшесінен кем болады, яғни $S<u_1$).

Қатардың қосындысын $S=S_n+R_n$ түрінде жазуға болады. Мұндағы

$R_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+...)$ қатардың *n-ші қалдығы* деп аталады.

Осы қалдықтың да таңбалары ауыспалы қатар болғандықтан, Лейбниц белгісін қолдануға болады, олай болса $|R_n|<u_{n+1}$. Осыдан жуықтап есептеу кезінде $S\approx S_n$, ал R_n - жіберілген қатесі болып табылады.

Таңбалары айнымалы

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

қатары және осы қатардың мүшелерінің абсолют мәні бойынша алынған

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+...+|u_n|+...=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$

қатары берілсін.

Егер $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ -қатары жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ -қатары да жинақты болады. Бұл жағдайда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ - қатары *абсолютті жинақты* дейді.

Егер $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ -қатары жинақты, ал $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ -қатары жинақсыз болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ -қатары *шартты жинақты* деп аталады.

516. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 3^n}$ қатарын $\alpha=0{,}001$ дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. $|S-S_n|=|R_n|<u_{n+1}$ осы қатардың бірнеше мүшелерін есептейік:

$$u_1=\frac{1}{3}\approx 0{,}333; \qquad u_2=\frac{1}{8}\approx 0{,}055; \qquad u_3=\frac{1}{81}\approx 0{,}012;$$

$$u_4=\frac{1}{324}\approx 0{,}003; \; u_5=\frac{1}{1215}\approx 0{,}001; \qquad u_6=\frac{1}{4374}<0{,}001.$$

Осыдан $S\approx S_5=0{,}333-0{,}055+0{,}012-0{,}001=0{,}288.$ ▲

517. $\sin\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+...+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек, мұнда α кез келген сан.

Шешуі. Берілген қатардың мүшелерінің абсолют мәні арқылы алынған қатарды қарастырамыз:

$|\sin\alpha|+\frac{|\sin 2\alpha|}{2^2}+\left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right|+...+\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|+...$ қатары жинақты, себебі I салыстыру белгісі бойынша $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$, ал $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$ қатары жинақты (511-мысалды қараңыз, $p=2$). Осыдан берілген қатар абсолют жинақты. ▲

518. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3+7}}$ қатарының абсолют немесе шартты жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Мүшелерінің абсолютті мәні бойынша құрылған $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+7}}$ қатарын қарастырайық. Бұл қатар жинақты, себебі екінші салыстыру белгісі бойынша 21-мысалда көрсетілгендей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $(p=3/2)$ қатарымен салыстырайық, онда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+7}}:\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+7}}=1\neq 0.$$

Олай болса, берілген қатар абсолют жинақты болып табылады. ▲

519. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+...$ қатарының абсолютті немесе шартты жинақтығын зерттеу керек.

Шешуі. Лейбниц белгісін қолданайық:

$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>...$, әрі $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Олай болса, қатар жинақты.

Енді мүшелерінің абсолют мәні арқылы алынған $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ қатарын қарастырайық. Бұл қатар гармоникалық қатар, ал ол жинақсыз болғандықтан берілген қатар шартты жинақты болады. ▲

Қатардың алғашқы бес мүшесін жазу керек.

520. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$; **Ж:** $\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+...$.

521. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; **Ж:** $3+\frac{9}{2}+\frac{27}{6}+\frac{81}{24}+\frac{243}{120}+...$.

522. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^2}$; **Ж:** $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\frac{\ln 4}{16}+\frac{\ln 5}{25}+\frac{\ln 6}{36}+...$.

523. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$; **Ж:** $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{11!}+...$.

524. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{n}{n+10^n}$; **Ж:** $\frac{1}{11}+\frac{2}{102}+\frac{3}{1003}+\frac{4}{10004}+\frac{5}{100005}+...$.

525. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; **Ж:** $\frac{1}{2}+\frac{4}{9}+\frac{27}{64}+\frac{256}{625}+\frac{3125}{776}+...$.

526. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$; **Ж:** $1+\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{3^\rho}+\frac{1}{4^\rho}+\frac{1}{5^\rho}+...$.

527. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^2+1}$. **Ж:** $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{10}{17}+\frac{13}{26}+...$.

Қатардың жалпы мүшесін жазу керек.

528. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{4}}+\frac{4}{\sqrt{5}}+...$; **Ж:** $\frac{n}{\sqrt{n+1}}$. **529.** $1-1+1-1+...$; **Ж:** $(-1)^{n+1}$.

530. $\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+...$; **Ж:** $\left(\frac{2}{5}\right)^n$. **531.** $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\frac{5}{14}+...$; **Ж:** $\frac{n+1}{3n+2}$.

532. $\frac{2}{9}+\frac{4}{17}+\frac{8}{25}+\frac{16}{33}+...$; **Ж:** $\frac{2^n}{8n+1}$. **533.** $\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\frac{1}{28}+\frac{1}{38}+...$; **Ж:** $\frac{1}{10n-2}$.

534. $\frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{7}{5^3}+\frac{10}{5^4}+...$; **Ж:** $\frac{3n-2}{5^n}$. **535.** $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}+\frac{5}{12}+\frac{7}{20}+...$. **Ж:** $\frac{2n-1}{n(n+1)}$.

Қатарлардың жинақтылығын зерттеу керек.

536. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; **Ж:** Жинақты.

537. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+8)}$; **Ж:** Жинақты.

538. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$; **Ж:** Жинақсыз.

539. $\sum_{n=1}^{\infty}(1{,}01)^n$; **Ж:** Жинақсыз.

540. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$; **Ж:** Жинақты.

541. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$; **Ж:** Жинақты.

542. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$; **Ж:** Жинақты.

543. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{4^n}$; **Ж:** Жинақты.

544. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3^n}{12^n}$; **Ж:** Жинақты.

545. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$; **Ж:** Жинақты.

546. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{4^n}$; **Ж:** Жинақты.

547. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$; **Ж:** Жинақты.

548. $\frac{10}{7}+\frac{100}{11}+\frac{1000}{15}+\ldots+\frac{10^n}{4n+3}+\ldots$; **Ж:** Жинақсыз.

549. $\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{3n+1}+\ldots$; **Ж:** Жинақсыз.

550. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$; **Ж:** Жинақсыз.

551. $0{,}8+0{,}71+0{,}701+\ldots+[0{,}7+(0{,}1)^n]+\ldots$. **Ж:** Жинақсыз.

552. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^n+4}$; **Ж:** Жинақты.

553. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 3^n}{4^n+5}$; **Ж:** Жинақты.

554. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n+8^n}$; **Ж:** Жинақты.

555. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{6^n+8^n}$; **Ж:** Жинақты.

556. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+\cos^2 n}$; **Ж:** Жинақты.

557. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-\sin^2 n}$; **Ж:** Жинақты.

558. $\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\ldots+\frac{10^n}{n!}+\ldots$; **Ж:** Жинақты.

559. $\frac{1}{2!}+\frac{\sqrt{1}}{3!}+\frac{\sqrt{3}}{4!}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{(n+1)!}$; **Ж:** Жинақты.

560. $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n+1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots$; **Ж:** Жинақты.

561. $\frac{1!}{2}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{2^3}+\ldots+\frac{n!}{2^n}+\ldots$; **Ж:** Жинақты.

562. $\frac{2}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{6}{3^3}+\ldots+\frac{2n}{3^n}+\ldots$; **Ж:** Жинақты.

563. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2!}+\frac{5}{3!}+\ldots+\frac{2n-1}{n!}+\ldots$; **Ж:** Жинақты.

564. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^3}{6!}+\ldots+\frac{(n!)^n}{(2n)!}+\ldots$; **Ж:** Жинақты.

565. $\frac{1}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{27}{3^3}+...+\frac{n^3}{3^n}+...;$ **Ж:** Жинақты.

566. $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+...+\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n+...;$ **Ж:** Жинақсыз.

567. $\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^3+...+\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n+...;$ **Ж:** Жинақты.

568. $\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{7}{10}\right)^3+...+\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n+...;$ **Ж:** Жинақты.

569. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^3+...+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n+...;$ **Ж:** Жинақты.

570. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+...+\frac{2^{n-1}}{n^n}+...;$ **Ж:** Жинақты.

571. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{9}{2\cdot 5^2}+\frac{25}{3\cdot 5^3}+...+\frac{(2n-1)^2}{n\cdot 5^n}+...;$ **Ж:** Жинақты.

572. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}};$ **Ж:** Жинақсыз. **573.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2};$ **Ж:** Жинақты.

574. $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\,\frac{1}{n};$ **Ж:** Жинақсыз. **575.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)};$ **Ж:** Жинақты.

576. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n};$ **Ж:** Жинақты. **577.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}};$ **Ж:** Жинақты.

578. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n};$ **Ж:** Жинақты. **579.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n};$ **Ж:** Жинақсыз.

580. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^3+1};$ **Ж:** Жинақты. **581.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+3)};$ **Ж:** Жинақсыз.

582. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln(n+1)};$ **Ж:** Жинақты. **583.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1};$ **Ж:** Жинақты.

584. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}};$ **Ж:** Жинақсыз. **585.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln(n+1)};$ **Ж:** Жинақты.

586. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1};$ **Ж:** Жинақты. **587.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^2 n}$ қатары берілген.

Ж: Ескерту. Кошидің интегралдық белгісін пайдаланған жөн.

Ауыспалы таңбалы қатардың жинақтылығын зерттеу керек. Жинақты болған жағдайда, оның абсолютті немесе шартты жинақты болатындығын зерттеу керек.

588. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+...;$ **Ж:** Шартты жинақты.

589. $1-1+1-...+(-1)^{n+1}+...;$ **Ж:** Жинақсыз.

590. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}+...;$ **Ж:** Шартты жинақты.

591. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n-1}}+...;$ **Ж:** Абсолют жинақты.

592. $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}+...;$ **Ж:** Абсолют жинақты.

593. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}+...;$ **Ж:** Шартты жинақты.

594. $\frac{1}{3}-\frac{4}{9}+\frac{9}{19}-...+(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2n^2+1}+...;$ **Ж:** Жинақсыз.

595. $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-...+(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}+...;$ **Ж:** Шартты жинақты.

596. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n\cdot 5^{n+1}};$ **Ж:** Абсолют жинақты.

597. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+8n+4};$ **Ж:** Шартты жинақты.

598. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^5+4};$ **Ж:** Абсолют жинақты.

599. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{n^2\sqrt{n}}.$ **Ж:** Абсолют жинақты.

Қатарларды $\alpha=0{,}001$ дәлдікпен есептеу керек.

600. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!};$ **Ж:** 0,632. **601.** $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!};$ **Ж:** 0,841.

602. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!};$ **Ж:** 0,459. **603.** $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\cdot 2^n}.$ **Ж:** 0,645.

7.2 ФУНКЦИЯЛЫҚ ҚАТАРЛАР

1. Функциялық қатарлар. Мүшелері нақты x айнымалысының функциясы болатын

$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$

қатарын *функциялық қатар* дейді.

$u_1(x), u_2(x),...,u_n(x),...$ функциялары анықталған және $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ қатары жинақты болатын x айнымалының мәндер жиыны функциялық қатардың *жинақталу облысы* делінеді. Функциялық қатардың жинақталу облысы Ox осінің қандай да бір аралығы болады.

Алғашқы n мүшелерінің қосындысы $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$ болса, онда $S(x)=S_n(x)+R_n(x)$. Мұндағы $R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...$ берілген қатардың мүшелерінің *қалдығы* деп аталады.

2. Дәрежелік қатарлар. $a_0+a_1(x-a)+a^2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n+...$ түрінде берілген функциялық қатар *дәрежелік қатар* деп аталады. Мұндағы $a, a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ - нақты сандар.

А б е л ь т е о р е м а с ы. 1. Егер дәрежелік қатар $x=x_0$ болғанда жинақты болса, онда $|x|<|x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x үшін де қатар жинақты болады.

2. Егер дәрежелік қатар $x=x_1$ болғанда жинақсыз болса, онда $|x|>|x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір х үшін де қатар жинақсыз болады.

Абель теоремасынан мынадай тұжырым жасауға болады: Кез келген дәрежелік қатардың жинақты облысы ретінде $a-R<x<a+R$ интервалы алынады. Мұндағы R-*жинақты радиусы*, ал $(a-R,\ a+R)$ *жинақты интервалы* деп аталады.

$x=a\pm R$ нүктелерінде қатардың жинақтылығын тексеру үшін дәрежелік қатарға $x=a\pm R$ мәндерін қойғанда пайда болатын сандық қатардың тексеру жеткілікті.

Егер $R=0$ болса, онда дәрежелік қатар тек $x=a$ нүктесінде жинақты болады.

Егер $R=\infty$ болса, онда дәрежелік қатар х-тің кез келген мәнінде жинақты болады.

Дәрежелік қатардың жинақты радиусы $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ немесе $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ формулаларымен есептеледі.

Жинақты интервалында дәрежелік қатарды кез келген рет мүшелеп дифференциалдауға және интегралдауға болады.

604. $1+\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{3^x}+...+\dfrac{1}{n^x}+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $x>1$ болса, онда қатар жинақты, ал $x\le 1$ болса,онда қатар жинақсыз болады (Дирихле қатарын қараңыз). ▲

605. $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{2+x^4}+\dfrac{1}{2+x^6}+...+\dfrac{1}{n+x^{2n}}+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+x^{2n}}=0$ қажетті белгісі орындалады. $|x|\le 1$ болсын. Жалпы мүшесі $v_n=\dfrac{1}{n}$ болатын гармоникалық (жинақсыз) қатарын қарастырсақ, онда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+x^{2n}}:\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+x^{2n}}=1$. Олай болса, екінші салыстырмалы белгі бойынша берілген қатар жинақсыз.

Егер $|x|>1$ болса, енді берілген қатардың мүшелері шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+...+\frac{1}{x^{2n}}+...$ мүшелерінен кіші болады, яғни берілген қатар жинақты. Сонымен қатар, $|x|>1$ болғанда жинақты, ал $|x|\le 1$ болса, жинақсыз болады. ▲

606. $3x+\frac{3^2}{\sqrt{3}}x^2+\frac{3^3}{\sqrt{3}}+x^3+\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^n+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $a_n=\frac{3^n}{\sqrt{n}}; a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}};\ R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{\sqrt{n}}:\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n}}=\frac{1}{3};$

яғни $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ жинақты облысы болады. Енді интервалдың шекаралық нүктелерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

$x=\frac{1}{3}$ болса, онда $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ қатар жинақсыз (Дирхле қатары).

$x=-\frac{1}{3}$ болса, онда $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ қатар жинақты, себебі $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ және $1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>...$ Лейбниц белгісі орындалады. ▲

607. $\frac{1}{1\cdot 2}x+\frac{1}{2\cdot 3}x^2+...+\frac{1}{n(n+1)}x^n+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі.

$a_n=\frac{1}{n(n+1)}; a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)};\ R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n(n+1)}:\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=1;$

жинақты облысы $(-1;1)$ болады. Енді интервалдың шекараларының нүктелерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

$x=1$ болсын. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$ қатарын тексерейік. Қажетті белгісі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0,$ ал жеткілікті белгісі бойынша $\int_1^\infty\frac{dx}{x(x+1)}=\int_1^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_1^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\lim_{N\to\infty}\left[\ln x-\ln(x+1)\right]_1^N=\lim_{N\to\infty}\ln\frac{x}{x+1}\Bigg|_1^N=\lim_{N\to\infty}\ln\frac{N}{N+1}-\ln\frac{1}{2}=\ln 2,$$

олай болса, қатар жинақты.

Енді $x=-1$ мәнінде қатардың жинақтылығын зерттейік: $-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-...+(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}+...$. Бұл қатар жинақты, себебі мүшелерінің абсолют мәндері бойынша алынған қатар жинақты. Олай болса, жауабы: $-1\le x\le 1.$

▲

608. $1+x+(2x)^2+...+(nx)^n+...$ қатарының жинақты облысын анықтау керек.

Шешуі. $a_n=n^n$; $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, олай болса, қатар тек $x=0$ мәнінде ғана жинақты. ▲

609. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ қатарының жинақты облысын анықтау керек.

Шешуі. $a_n=\dfrac{1}{n!}$; $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}$; $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$; олай болса, қатар х-тің кез келген мәнінде жинақты, яғни $-\infty<x<+\infty$. ▲

610. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot x^n}{n^2\cdot 5^n}$ қатарының жинақты облысын анықтау керек.

Шешуі. $a_n=\dfrac{2^n}{n^2\cdot 5^n}$; $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{n^2\cdot 5^n}}}=\dfrac{5}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\dfrac{5}{2}$; жинақты облысы $\left(-\dfrac{5}{2};\ \dfrac{5}{2}\right)$ болады. Енді интервалды шекараларының мәндерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

$x=\dfrac{5}{2}$ болсын. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ қатарын қарастырайық. Бұл қатар жинақты (Дирихле қатары, $p=2$).

$x=-\dfrac{5}{2}$ болсын. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ қатары абсолют жинақты болады, себебі мүшелерінің абсолют мәндері бойынша алынған қатар жинақты. Олай болса, жауабы: $-\dfrac{5}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}$. ▲

611. $1+\dfrac{x}{7}+\dfrac{x^2}{7^2}+...+\dfrac{x^n}{7^n}+...$ қатарының жинақты облысын анықтау керек.

Шешуі. $a_n=\dfrac{1}{7^n}$; $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n}=7$; жинақты облысы $(-7;7)$ болады. $x=7$ болғанда $1+1+1+1+...$ қатар, ал $x=-7$ болғанда $-1+1-1+...$ қатар жинақсыз болады.

Сондықтан жауабы $-7<x<7$. ▲

612. $\dfrac{x-5}{1\cdot 8}+\dfrac{(x-5)^2}{2\cdot 8^2}+...+\dfrac{(x-5)^n}{n\cdot 8^n}+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $a_n = \dfrac{1}{n \cdot 8^n}; R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = 8;$ олай болса, $-8 < x-5 < 8$ немесе $3 < x < 13;$ $x = 13$ болғанда $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}+...$ қатары жинақсыз болады.

$x = 3$ болғанда $-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+...+(-1)^n\dfrac{1}{n}+...$ қатары жинақты болады. Себебі Лейбниц белгісі бойынша $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{0} = 0,\ 1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > ... > \dfrac{1}{n} > ...$.

Олай болса, $3 \le x < 13.$ ▲

613. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n \cdot x^{3n}}{(n+1)\cdot 8^n}.$

Шешуі. $a_n = \dfrac{n}{(n+1)\cdot 8^n};$ $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3n]{a^n}} = 2;$ олай болса, $-2 < x < 2;$ $x = 2$ болғанда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}$ қатары жинақсыз, себебі $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1 \ne 0;$ $x = -2$ болғанда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\dfrac{n}{n+1}$ қатары да жинақсыз.

Сондықтан, жауабы: $-2 < x < 2.$ ▲

614. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2x}{3^2}+\dfrac{3x^2}{3^3}+...+\dfrac{nx^{n-1}}{3^n}+...;\ |x| < 3$ қатарының қосындысын $1+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{x^3}{3^3}+...+\dfrac{x^n}{3^n}+...$ қатарының мүшелерін дифференциалдау арқылы табу керек.

Шешуі. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласын $\left(S = \dfrac{a}{1-q}\right)$ қолдансақ, онда $1+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{x^3}{3^3}+...+\dfrac{x^n}{3^n}+... = \dfrac{1}{1-\frac{x}{3}} = \dfrac{3}{3-x}.$

Енді дифференциалдасақ, онда $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2x}{3^2}+\dfrac{3x^2}{3^3}+...+\dfrac{nx^{n-1}}{3^n}+... = \dfrac{3}{(3-x)^2}.$ болады. ▲

615. $x+\dfrac{x^2}{2\cdot 2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 2}+\dfrac{x^4}{4\cdot 2^3}+...+\dfrac{x^{n+1}}{n\cdot 2^n}+...\ \ (|x| < 2)$ қатарының қосындысын табу керек.

Шешуі. Берілген қатарды дифференциалдағанда пайда болған қатар шексіз геометриялық прогрессия болғандықтан, $1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{x^3}{2^3}+...+\dfrac{x^n}{2^n}+... =$

$= \dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} = \dfrac{2}{2-x}$ болады. Мұндағы $a = 1,\ q = \dfrac{x}{2}.$ Енді О-ден х аралығында интегралдасақ, онда $x+\dfrac{x^2}{2\cdot 2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 2}+\dfrac{x^4}{4\cdot 2}+...+\dfrac{x^{n+1}}{n\cdot 2^n}+... = 2\int\limits_0^x\dfrac{dx}{2-x} = 2\ln\left|\dfrac{2}{2-x}\right|.$ ▲

Функциялық қатарлардың жинақты облысын табу керек.

616. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$; **Ж:** $x>1$ абс.жинақты, $x\le 1$ жинақсыз.

617. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{x}{4^n}$; **Ж:** $-\infty<x<\infty$. **618.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!x^n}$; **Ж:** $x\neq 0$.

619. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\left(x^2+1\right)^n}$; **Ж:** $-\infty<x<+\infty$. **620.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)x^n}$; **Ж:** $x>1,\quad x\le -1$. **621.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$; **Ж:** $x<-1,\quad x>1$. **622.** $\sum_{n=1}^{\infty}2^n tg\frac{x}{3^n}$; **Ж:** $-\infty<x<+\infty$. **623.** $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin\left(\frac{x}{5^n}\right)$. **Ж:** (-5; 5).

Дәрежелік қатардың жинақты облысын табу керек.

624. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$; **Ж:** (-3; 3). **625.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 4^n}$; **Ж:** $[-4;4]$.

626. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 5^n}$; **Ж:** $[-5;5]$. **627.** $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot x^n$; **Ж:** $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

628. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$; **Ж:** $(-\infty;\infty)$. **629.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$; **Ж:** $(-2;2]$.

630. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{7}\right)^n$; **Ж:** $(-7;7)$. **631.** $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot x^n$; **Ж:** $x=0$.

632. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^n}$; **Ж:** $(-e;e)$. **633.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$; **Ж:** $(-3;3)$.

634. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{3^n}$; **Ж:** $(-\infty;\infty)$. **635.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{4^n(n+1)}$; **Ж:** $\left[-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

636. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{n^n}$; **Ж:** $(-\infty;+\infty)$. **637.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{3^n}$; **Ж:** $x=0$.

638. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{2^n-1}$; **Ж:** $[3;5)$. **639.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{5^n}$; **Ж:** $(-3;7)$.

640. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2\cdot 5^n}$; **Ж:** $[-6;4]$. **641.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+3)^n}{4^n}$; **Ж:** $(-3{,}5;0{,}5)$.

642. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2\cdot 2^n}$; **Ж:** $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ **643.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n}}{n\cdot 9^n}$; **Ж:** $[2;8)$.

644. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{\sqrt{n}\cdot 4^n}$; **Ж:** $[-2;2)$. **645.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{3n}}{27^n}$; **Ж:** $(-5;1)$.

646. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; **Ж:** $(-\infty;\infty)$. **647.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}-1}{(2n-1)!}$. **Ж:** $(-\infty;+\infty)$.

Қатардың қосындысын табу керек.

648. $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}+...,\ \ (|x|<1);$ **Ж:** $\dfrac{1}{(1-x)^2}.$

649. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2x}{2^2}+\dfrac{3x^2}{2^3}+...+\dfrac{nx^{n-1}}{2^n}+...,\ \ (|x|<2);$ **Ж:** $\dfrac{2}{2-x}.$

650. $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+...+\dfrac{x^n}{n}+...,\ \ (|x|<1);$ **Ж:** $-\ln(1-x).$

651. $x+\dfrac{x^2}{2\cdot 3}+\dfrac{x^3}{3\cdot 3^2}+\dfrac{x^4}{4\cdot 3^3}.+..+\dfrac{x^{n+1}}{n\cdot 3^n}+...,\ \ (|x|<3);$ **Ж:** $3\ln\left|\dfrac{3}{3-x}\right|.$

652. $\dfrac{1\cdot 2}{4^2}+\dfrac{2\cdot 3}{4^3}x+\dfrac{3\cdot 4}{4^4}x^2+...+\dfrac{n(n+1)}{4^{n+1}}x^{n-1}+...,\ \ (|x|<4);$ **Ж:** $\dfrac{8}{(4-x)^2}.$

653. $-2x+4x^3-6x^5+...+(-1)^n 2nx^{2n-1}+...,\ \ (|x|<1).$ **Ж:** $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}.$

7.3 ТЕЙЛОР ЖӘНЕ МАКЛОРЕН ҚАТАРЛАРЫ

$f(x)$ функциясы $a-R<x<a+R$ аралығында анықталған және кез келген ретті туындылары бар болсын. Тейлор формуласы бойынша

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(x)}{1!}(x-a)+\frac{f'(x)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^n(x)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

мұндағы $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ \ \xi=a+\theta(x-a),\ 0<\theta<1.$

Егер $n\to\infty,\ R_n(x)\to 0$ болса, онда

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+...$$

қатары *Тейлор қатары* деп аталады. $R_n(x)$ - Тейлор қатарының *қалдық мүшесі* дейді.

Егер $a=0$ болса, онда Тейлор қатары *Маклорен қатары* деп аталады да

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+...$$

түрінде жазылады.

Егер $f(x)$ функциясы $(a-R;\ a+R)$ аралығында анықталып, кез келген n үшін $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$ теңсіздігі орындалса (мұндағы М-оң тұрақты сан), онда осы функция Тейлор қатарына жіктеледі. Кейбір функциялардың Маклорен қатарына жіктелуін көрсетейік:

1. $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+...,\qquad(-\infty<x<+\infty)$

2. $shx=\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+...+\dfrac{x^n}{(2n+1)!}+...,\qquad(-\infty<x<+\infty)$

3. $chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...,$ $(-\infty < x < +\infty)$

4. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...,$ $(-\infty < x < +\infty)$

5. $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} + ...,$ $(-\infty < x < +\infty)$

6.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{\mathrm{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}}{\mathrm{n!}}\mathrm{x^n} + ...$$

Соңғы жіктеуде:

$m \ge 0$ болса, онда $-1 \le x \le 1$

$-1 < m < 0$ болса, онда $-1 < x \le 1$

$m \le -1$ болса, онда $-1 < x < 1.$

Дербес жағдайда:

а) $m = -1$ болса, онда $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ...;$

ә) $m = \frac{1}{2}$ болса,

онда $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + ... + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot ...\cdot 2n}.x^n + ..;$

б) $m = -\frac{1}{2}$ болса, онда

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + ... + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n}x^n + ...$$

7. $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$ $(-1 \le x \le 1).$

Жуықтап есептеулерде $e^x,\ shx,\ chx,\ \sin x,\ \cos x,\ (1+x)''',\ \ln(1+x),\ arctgx$ функциялардың Маклорен қатарларына жіктелуін пайдалану керек. Ал логаримді есептеу үшін кейбір жағдайларда

$$\ln(1+x) = \ln x + \ + 2\left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \frac{1}{5(2x+1)^5} + ...\right]$$

формуласын пайдаланған тиімді.

654. $f(x) = 5^x$ функциясын x дәрежесі бойынша жіктеу керек.

Шешуі. Берілген функцияның және оның туындыларының $x = 0$ нүктесіндегі мәндерін табайық.

$$\begin{array}{ll} f(x) = 5^x & f(0) = 5^0 = 1 \\ f'(x) = 5^x \ln 5 & f(0) = \ln 5 \\ f''(x) = 5^x \ln^2 5 & f''(0) = \ln^2 5 \\ ... & ... \\ f^{(n)}(0) = 5^x \ln^n 5 & f^{(n)}(0) = \ln^n 5. \end{array}$$

Енді функцияны Маклорен қатарына жіктейік:

$$5^x = 1 + x\ln 5 + \frac{x^2 \ln^2 5}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 5}{3!} + \ldots + \frac{x^n \cdot \ln^n 5}{n!} + \ldots .$$

Бұл функцияны Маклорен қатарына жіктеу үшін белгілі e^x функциясының жіктелуін қолдану арқылы да табуға болады. Ол үшін х-ті $x \cdot \ln 5$ өрнегімен ауыстыру керек. ▲

655. $f(x) = e^{-x^2}$ функциясының x дәрежесі бойынша жіктеу керек.

Шешуі. e^x функциясының жіктелуін пайдаланып, х-тің орнына $\left(-x^2\right)$ алсақ, онда $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$. ▲

656. $f(x) = \cos^2 x$ функциясын х дәрежесі бойынша жіктеу керек.

Шешуі. $f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x;$ болғандықтан $\cos 2x = 1 - \frac{2^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{2^4 \cdot x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ болады, осыдан $\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 \cdot x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$ ▲

657. $f(x) = \ln(1+x)$ функциясын Маклорен қатарына жіктеу керек.

Шешуі. $f(x) = \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$ теңдігін және $\frac{1}{1+\tilde{o}}$ функциясының жіктелуін қолдансақ, онда $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots .$

Бұл қатар $(-1;1)$ аралығында жинақты болады. ▲

658. $f(x) = \arcsin x$ функциясын Маклорен қатарына жіктеу керек.

Шешуі. $f(x) = \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ теңдігін және $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ функциясының жіктелуін қолданып, х-тің орнына $\left(-x^2\right)$-ті алмастырсақ, онда

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots . \quad ▲$$

659. $f(x) = \frac{5}{6 - x - x^2}$ функциясын Маклорен қатарына жіктеу керек.

Шешуі. $6 - x - x^2 = (2-x)(3-x)$ болғандықтан $f(x) = \frac{5}{(2-x)(3-x)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{3-x}.$

Мұндағы $A = 1,\ B = -1.$ Сондықтан $\frac{1}{1+x}$ функциясының жіктелуін пайдалансақ:

$$\frac{1}{2-õ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n},$$

$$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{3^n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n},$$

яғни $\frac{1}{6-x-x^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}\right)\cdot x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}.$ ▲

660. $f(x)=\sqrt{x}$ функциясын $(x-4)$ дәрежесі бойынша жіктеу керек.

Шешуі. $x-4=t$ деп алсақ, онда $f(t)=\sqrt{t+4}=2\sqrt{1+\frac{t}{4}}$. Осы функцияға $\sqrt{1+x}$ функциясының жіктелуін қолдансақ,

$$\sqrt{t+4}=2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{4}-\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{t^2}{4^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{t^3}{4^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{t^n}{4^n}+\ldots\right).$$

Осыдан

$$\sqrt{x}=2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{4\cdot 4^2}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}\cdot\frac{(x-4)^3}{4^3}-\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{(x-4)^n}{4^n}+\ldots\,.$$ ▲

661. e санын 0,0001 дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. e^x функциясының жіктелуін қолданамыз. Онда $x=1$ болғанда $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$ болады. n санын $e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ жуық мәнінің қатесі 0,0001 дәлдікпен аспайтындай етіп, таңдап алуымыз керек. $x=1$ болғандықтан $R_n<\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$, мұндағы $0<\theta<1,\ e^\theta<3$.

Егер $n=5$ болса, онда $R_5<\frac{3}{6!}=\frac{1}{240}$.

Егер $n=6$ болса, онда $R_6<\frac{3}{7!}=\frac{1}{1680}<0{,}0001$.

яғни $e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}=2{,}7183.$ ▲

662. $\sin 18^0$ санын 0,0001 дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. $y=\sin x$ функциясының жіктелуін қолдансақ

$$\sin 18^0=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^3+\frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^5-\ldots,$$

$$\frac{\pi}{10}=0{,}31416,\ \left(\frac{\pi}{10}\right)^3=0{,}03101,\ \left(\frac{\pi}{10}\right)^5=0{,}00306.$$

Бұл жағдайда екі мүшесін алу керек, себебі $\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3<0{,}0001$, яғни $\sin 18^0\approx 0{,}31416-0{,}00517=0{,}30899\approx 0{,}3090.$ ▲

663. $3\sqrt{528}$ санын 0,0001 дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. 528 санына жақын бүтін санның кубы $8^3 = 512$ болып табылады, сондықтан 528 санын $528 = 512 + 16$ қосындысы түрінде жазуға болады. Олай болса,

$$3\sqrt{528} = \sqrt[3]{512+16} = 8\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{32}} = 8\cdot\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{32}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{32^2}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot\frac{1}{32^3}+...\right]=$$

$$=8+\frac{1}{12}-\frac{1}{1152}+\frac{1}{66355,2}-.... \,.$$

Төртінші мүше 0,0001 санынан кіші болғандықтан алғашқы үш мүшелерінің қосындысын аламыз, сондықтан $\sqrt[5]{528} \approx 5 + 0,08333 - 0,00087 = 5,08246 \approx 5,0825.$ ▲

664. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x}$ шегін табу керек.

Шешуі. $y = \sin x$ функциясының Маклорен қатарын қолдансақ, онда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+...\right)=\frac{1}{6}.$$ ▲

665. $\int\limits_0^1 x\sin x^2 dx$ интегралын 0,001 дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. $y = \sin x$ функциясының жіктелуін пайдалана отырып, $x\sin x^2 = x^3 - \frac{x^7}{3!}+\frac{x^{11}}{5!}-\frac{x^{15}}{7!}+...$ қатарын аламыз. Осыдан

$$\int_0^1 x\sin x^2 dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^8}{3!\cdot 8}+\frac{x^{12}}{5!\cdot 12}-\frac{x^{16}}{7!\cdot 16}+...\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{1}{3!\cdot 8}+\frac{1}{5!\cdot 12}-\frac{1}{7!\cdot 16}+... \,.$$

Үшінші мүшесі 0,001 санынан кіші болғандықтан, алғашқы екі мүшесін алсақ жеткілікті $\int\limits_0^1 x\sin x^2 dx \approx \frac{1}{4}-\frac{1}{48} = 0,229.$ ▲

Келесі функцияларды x-тің дәрежесі бойынша қатарға жіктеу керек.

666. $f(x) = 3^x$; **Ж:** $1 + x\ln 3 + \dfrac{x^2\ln^2 3}{2!}+...+\dfrac{x^n \ln^n 3}{n!}+...,\quad (-\infty < x < +\infty)$.

667. $f(x) = e^{2x}$; **Ж:** $1+\dfrac{2x}{1!}+\dfrac{2^2x^2}{2!}+...+\dfrac{2^n x^n 3}{n!}+...,\quad (-\infty < x < +\infty)$.

668. $f(x) = e^{-x}$; **Ж:** $1-\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+(-1)\dfrac{x^n}{n!}+...,$.

669. $f(x)=e^{x^2/2}$; **Ж:** $1+\frac{\tilde{o}^2}{2\cdot 1!}+\frac{\tilde{o}^4}{2^2\cdot 2!}+\frac{\tilde{o}^6}{2^3\cdot 3!}+...+\frac{\tilde{o}^{2\ddot{i}}}{2^{\ddot{i}}\cdot \ddot{i}\,!}+...$

670. $f(x)=\sin^2 x$; **Ж:** $\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}-...+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}$.

671. $f(x)=\sqrt{x+4}$; **Ж:** $2\cdot\left(1+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{8^3\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3}{8^3\cdot 3!}x^3-...+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-3)}{8^n\cdot n!}x^n+..\right)$.

672. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; **Ж:** $\sum_0^\infty(-1)^{n\cdot x^{2n}}$.

673. $f(x)=\frac{1}{4+x^4}$; **Ж:** $\sum_0^\infty\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}$.

674. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$; **Ж:** $\sum_1^\infty\frac{x^{n-1}}{n!}$.

675. $f(x)=(1+x)\cdot\ln(1+x)$; **Ж:** $x+\sum_2^\infty(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n}$.

676. $f(x)=\frac{9}{20-x-x^2}$; **Ж:** $\sum_0^\infty\left(\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)\cdot x^4$.

677. $f(x)=\frac{7}{12-x-x^2}$. **Ж:** $\sum_0^\infty\left(\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)\cdot x^n$.

Келесі функцияларды $(x-a)$-ң дәрежесі бойынша қатарға жіктеу керек.

678. $f(x)=\ln x,\quad a=1$; **Ж:** $\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\cdot\frac{(x-1)^n}{n}$.

679. $f(x)=e^x,\quad a=-2$; **Ж:** $e^{-2}\cdot\sum_1^\infty\frac{(x+2)^n}{n}$.

680. $f(x)=\frac{1}{x},\quad a=2$; **Ж:** $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+...$.

681. $f(x)=\frac{1}{x^2},\quad a=-1$; **Ж:** $\sum_0^\infty(n+1)(x+1)^{2^n}\quad -2<x<0$.

682. $f(x,y)=\frac{1}{x}$ функциясын $P(1;-1)$ нүктесінде дәрежесі төртінші ретті мүшесіне дейін жіктеу керек.

Ж: $f(x,y)=-1+(x-1)+(y+1)-(x-1)^2-(x-1)(y+1)+\frac{1}{3}(x-1)^2(y+1)+(x-1)^3+...$.

683. $f(x,y)=\ell^y\cos x$ функциясын $P(0;0)$ нүктесінде дәрежесі төртінші ретті мүшесіне дейін жіктеу керек. **Ж:** $f(x,y)=1+y+\frac{y^2-x^2}{2!}+\frac{y^3-3xy^2}{3!}+...$.

684. $f(x,y)=(1+y)^{1+x}$ функциясын $(0;0)$ нүктесінде дәрежесі төртінші ретті мүшесіне дейін жіктеу керек. **Ж:** $f(x,y)=1+y+xy+\frac{1}{2}xy^2+...$.

685. $f(x,y)=ye^{-x}$ функциясын $(0;1)$ нүктесінде дәрежесі үшінші ретті мүшесіне дейін жіктеу керек. **Ж:** $f(x,y)=1-x+(y-1)-x(y-1)+\frac{1}{2}x^2+...$.

Келесі сандарды 0,0001 дәлдікпен есептеу керек.

686. $\cos 18^0$; **Ж:** 0,9511. **687.** $\sqrt{e}$; **Ж:** 1,6487.

688. $arctg\, 0{,}2$; **Ж:** 0,1973. **689.** $\ln 2$; **Ж:** 0,6931.

690. $\ln 5$; **Ж:** 1,6094. **691.** ℓ^{-1}; **Ж:** 1,6487.

692. $\sqrt[4]{90}$; **Ж:** 3,0801. **693.** $\sqrt[3]{1{,}1}$; **Ж:** 5,0666.

694. $\frac{1}{\sqrt{e}}$; **Ж:** 0,6065. **695.** $\ln 1{,}04$; **Ж:** 0,0392.

696. х-тің қандай мәндерінде $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ формуласы 0,01; ,001; 0,0001 сандарынан артық болмайтын қателіктер жібереді?

Ж: $|x| < 0{,}69, \quad |x| < 0{,}39, \quad |x| < 0{,}22$.

697. х-тің қандай мәндерінде $\sin x \approx x$ формуласы 0,01; 0,001; 0,0001 сандарынан артық болмайтын қателіктер жібереді?

Ж: $|x| < 0{,}39, \quad |x| < 0{,}18, \quad |x| < 0{,}08$.

Төмендегі шектерді Тейлор қатарының көмегімен есептеу керек.

698. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - arctgx}{x^3}$; **Ж:** $\frac{1}{3}$. **699.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\ell^x - 1 - x}$; **Ж:** 1.

700. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - arctgx}{x^3}$; **Ж:** $\frac{1}{6}$. **701.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$. **Ж:** $\frac{1}{3}$.

Тейлор қатарының көмегімен төмендегі анықталған интегралдарды α дәлдіктермен есептеу керек.

702. $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx, \quad \alpha = 0{,}0001$; **Ж:** 0,7468.

703. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \quad \alpha = 0{,}00001$; **Ж:** 0,4931.

704. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \alpha = 0{,}0001$; **Ж:** 0,487.

705. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\grave{a}rctgx}{x} dx, \quad \alpha = 0{,}001$; **Ж:** 0,2483.

706. $\int\limits_0^{0,25} \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) dx, \quad \alpha = 0{,}0001$; **Ж:** 0,071.

707. $\int\limits_0^{0,25} \sqrt{1 + x^3} dx, \quad \alpha = 0{,}0001$; **Ж:** 0,2505.

708. $\int\limits_{0}^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx, \quad \alpha = 0,001;$ **Ж:** 0,102.

709. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx, \quad \alpha = 0,0001.$ **Ж:** 0,2483.

7.4 ФУРЬЕ ҚАТАРЫ

1. 2π **периодты функцияның Фурье қатары.** $[-\pi;\pi]$ сегметінде анықталған, периоды 2π болатын $f(x)$ функциясының *Фурье қатары* деп

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin x)$$

қатарын айтады, мұндағы

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx; \quad n = 1,2,3,...$$

- Фурье қатарының *коэффициенттері* деп аталады.

Егер Фурье қатары жинақты болса, онда оның қосындысы $S(x)$ периоды 2π болатын функция болады.

Дирихле теоремасы: $f(x)$ функциясы $[-\pi;\pi]$-де экстремум мәндерінің саны ақырлы және бірінші текті үзілісті нүктелерінен басқа нүктелерінде үзіліссіз болсын. Пайда болған қатардың $S(x)$ қосындысы үзіліссіз болатын нүктелерінде $f(x)$ функциясының мәніне, яғни $S(x) = f(x)$, ал үзілісті нүктелерінде берілген функцияның оң жақ және сол жақ шектерінің арифметикалық ортасына, яғни

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)], \quad S(x) = \frac{1}{2}[f(-\pi-0) + f(x+0) + f(\pi-0)], \quad x = \pm\pi$$

нүктесінде тең болады.

Е с к е р т у. Интеграл есептеу кезінде, оның мынадай қасиеттерін пайдалану керек:

Егер $f(x)$ функциясы жұп болса, онда $\int\limits_{-a}^{a} f(x) dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x) dx.$

Егер $f(x)$ функциясы тақ болса, онда $\int\limits_{-a}^{a} f(x) dx = 0.$

Сонымен қатар $\int\limits_{-a}^{a} \sin \frac{\pi n x}{a} dx = 0, \quad \int\limits_{-a}^{a} \cos \frac{\pi n x}{a} dx = 0$.

710. $(-\pi;\pi)$ аралығында $f(x)=x+1$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі. Фурье қатарының коэффициенттерін табайық.

$$\grave{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=2;$$

$$\grave{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(x+1)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right]=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin xdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[-(x+1)\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-(\pi+1)\frac{\cos \pi x}{n}+(-\pi+1)\frac{\cos(\pi n)}{n}\right]=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Олай болса,

$$f(x)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}. \qquad \blacktriangle$$

711. $(-\pi;\pi)$ аралығында $f(x)=\begin{cases}2, \text{ егер } -\pi\le x<0\\ 3, \text{ егер } 0\le x\le\pi\end{cases}$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі.

$$\grave{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}3dx=5;$$

$$\grave{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\Bigg[3\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2\sin xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}3\sin nxdx=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}=$$

$$=-\frac{5}{\pi n}(1-\cos\pi n)=-\frac{5}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & \text{егер } n-\text{жұп}\\ -\dfrac{5}{\pi n}, & \text{егер } n-\text{тақ}\end{cases}.$$

Егер $n=2m-1$ деп алсақ, онда $f(x)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}.$

Егер $f(x)$ функциясы тақ болса, яғни $f(-x)=-f(x)$, онда Фурье коэффициенттері

$$a_0=0,\ a_n=0,\ \ b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

Ал егер $f(x)$ функциясы жұп болса, яғни $f(-x)=-f(x)$, онда Фурье коэффициенттерін

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx, \qquad n = 1,2,3,...$$

формулаларымен есептеуге болады. ▲

712. $(-\pi;\pi)$ аралығында $f(x) = x^2 + 1$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі. Жұп функция болғандықтан, $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x^2+1)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} + 1.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(x^2+1\right)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\left[\left(x^2+1\right)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx\right] =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right] = -\frac{4}{\pi n}\left[-\pi\frac{\cos \pi n}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}\right] = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Осыдан $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + \dfrac{1}{2} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{n^2} - \cos nx.$

Периоды 2π болатын $f(x)$ функциясы $[a, a+2\pi]$ аралығында Фурье қатарына жіктелсе, мұндағы a кез келген сан, онда оның коэффициенттері

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nxdx, \qquad n = 1,2,3....$$

формулаларымен табылады.

713. $[0; 2\pi]$ аралығында $f(x) = x^2$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

Шешуі. Бұл жағдайда $a = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3\pi}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin x}{n}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nxdx\right] = -\frac{2}{\pi n}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{2\pi}{n}\cos 2\pi n + \frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{2\pi}\right] = \frac{4}{n^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left[-x^2\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\cos xdx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-4\pi^2\frac{\cos 2\pi n}{n} + \frac{2}{n}\left(x\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nxdx\right)\right] = \frac{1}{n}\left[-\frac{4\pi^2}{n} - \frac{2}{n^3}\cos nx\Bigg|_0^{2\pi}\right] = -\frac{4\pi}{n}.$$

Осыдан $f(x)=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right).$ ▲

2. ***2l*** **-периодты функцияның Фурье қатары.** Егер периоды 2ℓ болатын $f(x)$ функциясы $[-\ell;\ell]$ сегментінде берілсе, мұндағы ℓ кез келген сан, онда Дирихле теоремасының шарттары осы сегментте орындалғанда, $f(x)$ функциясын Фурье қатарына жіктеуге болады.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{\ell}+b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell}\right),$$

мұндағы $a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx,\ \ b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx.$

Егер $f(x)$ функциясы жұп болса, онда

$$a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx,\quad b_n=0,\quad n=1,2,3....$$

Егер $f(x)$ функциясы тақ болса, онда

$$a_0=0,\quad a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx.$$

Егер $f(x)$ функциясы $[0;\ell]$ аралығында берілсе, онда осы функцияны $[-\ell;\ell]$ аралығында Фурье қатарына жіктеу үшін, оны $[-\ell;0]$ аралығында Дирихле теоремасының шарттарын қанағаттандыратын кез келген функциямен жалғастыруға болады.

Егер $[-\pi;0]$ аралығында $-f(x)$ функциясын қарастырсақ, онда бұл жағдайда тақ функция болады, олай болса Фурье қатарына «синус» бойынша жіктеледі деп аталады.

Егер $[-\pi;0]$ аралығында $f(x)$ функциясын алсақ, онда бұл жағдайда жұп функция болады және Фурье қатарына «косинус» бойынша жіктеледі деп аталаймыз.

714. $[-5;5]$ аралығында $f(x)=x-4$ функциясын Фурье қатарына жіктеңіз.

Шешуі. $a_0=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(x-4)dx=\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\Big|_{-5}^{5}=-4.$

$$a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(x-4)\cos\frac{\pi nx}{5}dx=\frac{1}{5}\left[(x-4)\frac{5}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{5}\Big|_{-5}^{5}-\frac{5}{\pi n}\int_{-5}^{5}\sin\frac{\pi nx}{5}dx\right]=0.$$

$$b_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(x-4)\sin\frac{\pi nx}{5}dx=\frac{1}{5}\left[-(x-4)\cdot\frac{5}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{5}\Big|_{-5}^{5}+\frac{5}{\pi n}\int_{-5}^{5}\cos\frac{\pi nx}{5}dx\right]=(-1)^{n+1}\frac{10}{\pi n}.$$

Осыдан $f(x)=-2+\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{\pi nx}{5}.$ ▲

715. $[0;\pi]$ аралығында $f(x)=\pi x$ функциясы берілсін, ал $[-\pi;0]$ аралығында осы функциясының әр түрлі жағдайларын қарастырып, оны Фурье қатарларына жіктеу керек:

а) $f(x)=0;$

ә) $f(x)=-\pi x$ синус бойынша;

б) $f(x)=\pi x$ косинус бойынша;

Шешуі. а) $[-\pi;0]$ аралығында $f(x)=0$ болсын.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\pi x dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\left.x\frac{\sin x}{n}\right|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\left.\frac{1}{n^2}\cos nx\right|_0^{\pi}=\frac{1}{n^2}\left((-1)^k-1\right)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\int_0^{\pi}x\sin nxdx=-\left.x\frac{\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx=-\pi\frac{\cos\pi n}{n}+\left.\frac{1}{n^2}\sin nx\right|_0^{\pi}=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}.$$

Осыдан $f(x)=\dfrac{\pi^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n-1}{n}\cos nx+(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{n}\sin nx\right];$

ә) $[-\pi;0]$ аралығында $f(x)=-\pi x$ болсын, яғни функция тақ, олай болса, Фурье қатарына «синус» бойынша жіктейміз. Бұл жағдайда $a_0=0;$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi x\sin nxdx=2\left(-\left.x\frac{\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=2\left(-\pi\frac{\cos\pi n}{n}+\left.\frac{1}{n^2}\sin nx\right|_0^{\pi}\right)=(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}.$$

Осыдан $f(x)=2\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right];$

б) $[-\pi;0]$ аралығында $f(x)=\pi x$ болсын, яғни функция жұп, олай болса, Фурье қатарына «косинус» бойынша жіктейміз. Бұл жағдайда $b_0=0;$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi x dx=\left.x^2\right|_0^{\pi}=\pi^2;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi x\cos nxdx=2\left(\left.x\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\left.\frac{2}{n^2}\cos nx\right|_0^{\pi}=\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^2}=\begin{cases}0, & \textit{егер } n-\textit{жұп}\\ \dfrac{4}{n^2}, & \textit{егер } n-\textit{тақ}\end{cases}.$$

Егер $n=2m-1$ деп белгілесек, онда $f(x)=\dfrac{\pi^2}{2}+4\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$ ▲

Берілген интегралда функцияларды Фурье қатарына жіктеу керек.

716. $f(x)=x-1,\quad [-\pi;\pi].$ **Ж:** $-1+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}.$

717. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}, \quad [-\pi;\pi].$ **Ж:** $\dfrac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}$.

718. $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}, \quad [-\pi;\pi].$ **Ж:** $\dfrac{\sqrt{3}}{9\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n\sin nx}{1-9n^2}$.

719. $f(x)=\cos\dfrac{x}{3}, \quad [-\pi;\pi].$ **Ж:** $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}+\dfrac{4\sqrt{2}}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n\cos nx}{1-16n^2}$.

720. $f(x)=\begin{cases} a, \text{ егер } -\pi<x\le 0 \\ b, \text{ егер } \quad 0<x<\pi \end{cases}$ дербес жағдайын қарастыру керек:

а) $a=b=1;$ ә) $\grave{a}=-1,\ b=1;$ б) $\grave{a}=0,\ b=1;$ в) $\grave{a}=1,\ b=0.$

Ж: $\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2(a-b)}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

721. $f(x)=\begin{cases} ax, \text{ егер } -\pi<x\le 0 \\ bx, \text{ егер } \quad 0<x<\pi \end{cases}$ дербес жағдайын қарастыру керек:

а) $\grave{a}=b=1;$ ә) $\grave{a}=-1,\ b=1;$ б) $\grave{a}=0,\ b=1;$ в) $\grave{a}=1,\ b=0.$

Ж: $\dfrac{b-a}{2}\pi-\dfrac{2(b-a)}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+(a+b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}$.

722. $f(x)=x, \quad [-\pi;\pi].$ **Ж:** $2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}$.

723. $f(x)=x^2, \quad [-\pi;\pi].$ **Ж:** $\dfrac{\pi^2}{9\pi}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\tilde{n}osnx}{n^2}$.

724. $f(x)=|x|, \quad [-\pi;\pi].$ **Ж:** $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2p-1)x}{(2p-1)^2}$.

725. $f(x)=x\sin x, \quad [-\pi;\pi].$ **Ж:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$.

726. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}, \quad [0;2\pi].$ **Ж:** $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2p-1)x}{(2p-1)^2}$.

727. $f(x)=x, \quad [0;2\pi].$ **Ж:** $\pi+2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$.

728. $f(x)=|x|, \quad [-1;1].$ **Ж:** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2p+1)^2}$.

729. $f(x)=x^2, \quad [-1;1].$ **Ж:** $\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{\pi^2}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos\pi nx}{n^2}$.

730. $f(x)=x-1, \quad [-1;1].$ **Ж:** $-1-\dfrac{2}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x}{n}\sin\pi x$.

731. $f(x)=2+|x|, \quad [-1;1].$ **Ж:** $2{,}5-\dfrac{2}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2p-1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

732. $f(x)=10-x, \quad [5;15].$ **Ж:** а) $\dfrac{10}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin\dfrac{\pi nx}{5}}{n}.$

733. $f(x)=\begin{cases}6, & \text{åãåð } 0<x\le 2\\ 3x, & \text{åãåð } 2<x<4\end{cases}.$ **Ж:** $7{,}5+\dfrac{18}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi x(n-0{,}5)}{n^2}-\dfrac{6}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 0{,}5\pi nx}{(2n-1)^2}.$

734. $[0;\pi]$ жарты периодында $f(x)=\pi-2x$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек:

а) синус бойынша; ә) косинус бойынша.

Ж: а) $2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx}{n},$ ә) $\dfrac{8}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$

735. $[0;2]$ жарты периодында $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек:

а) синус бойынша; ә) косинус бойынша.

Ж: а) $\dfrac{16}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\pi x(n-0{,}5)}{(2n-1)^2},$ ә) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi nx}{n^2}.$

736. $[0;\pi]$ жарты периодында $f(x)=\cos 2x$ функциясын синус бойынша Фурье қатарына жіктеу керек. **Ж:** $\dfrac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2-2^2}.$

737. $[0;\pi]$ жарты периодында $f(x)=x\sin x$ функциясын косинус бойынша Фурье қатарына жіктеу керек. **Ж:** $1-\dfrac{\cos x}{2}+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos nx}{n^2-1}.$

8 ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ

8.1 КЕЗДЕЙСОҚ ОҚИҒА, ОНЫҢ ЖИІЛІГІ МЕН ЫҚТИМАЛДЫҒЫ

1. Тәжірибе және оқиға. Тұрмыста жән ғылымда белгілі бір мақсат үшін жүргізілетін бақылаулар, сынақтар, операциялар, эксперименттер кездеседі. Бұл атауларды тәжірибе, сынақ деп қабылдайық.

Мысалы: теңге немесе ойын кубын (сүйегін) лақтыру, нысанаға оқ ату, қораптан шар суыру, ауа райын болжау, өндірістен шыққан бұйымның сапасын тексеру және т.с.с.

Оқиға дегеніміз белгілі бір себептерден туатын (пайда болатын) не орындалмайтын құбылыс.

Оқиғалар ақикат, мүмкін емес және кездейсоқ болып үш түрге бөлінеді.

Сынақ нәтижесінде міндетті түрде пайда болатын оқиға *ақиқат оқиға* деп аталады.

Мысалы, қорапта тек ақ шарлар болсын. Тәуекелге алған 1 шардың ақ түсті болуы сөзсіз. Қораптан ақ шардың шығуы – ақиқат оқиға.

Сынақ нәтижесінде пайда болу мүмкіндігі жоқ оқиғалар *мүмкін емес оқиғалар* деп аталады.

Мысалы, алдыңғы тәжірибеде қара шардың шығуы - мүмкін емес оқиға.

Сынақ нәтижесінде пайда болуы да немесе пайда болмауы да мүмкін оқиғалар *кездейсоқ оқиғалар* деп аталады.

Мысалы, қорапта қызыл және ақ шарлар болсын. Тәуекелге алған 1 шардың ақ түсті болуы – кездейсоқ оқиға.

Ықтималдықтар теориясы оқиғалардың заңдылықтарын зерттейтін математика ғылымының бір бөлігі. Ықтималдық теориясындағы басты ұғымдар – тәжірибе (эксперимент), кездейсоқ оқиға және оның ықтималдығы.

Оқиғалар латын алфавитінің бас әріптерімен *A, B, C ...* белгіленеді.

n рет тәжірибе жүргізілгенде A оқиғасы m рет пайда болсын. Онда $h(\mathrm{A})=\dfrac{m}{n}$ бөлшегін A оқиғасының пайда болу *салыстырмалы жиілігі* дейді.

Тәжірибенің қайталану саны мейілінше үлкен болғанда салыстырмалы жиілік тұрақты бір санның төңірегінде топталады. Осы заңдылық *статистикалық тұрақтылық* деп, ал осы тұрақты саны *A оқиғасының ықтималдығы* деп аталады. Бұл ықтималдықтың статистикалық тәсілмен анықталуы деп аталып, оның өмір шындығымен байланысын көрсетеді.

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы. Нәтижелердің саны ақырлы болатын, тең мүмкіндікті нәтижелері бар тәжірибені қарастыралық. Бұл нәтижелердің ішінде A оқиғасына m нәтиже қолайлы болсын. Онда

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

яғни, *оқиғаның ықтималдығы* деп осы оқиға қолайлы жағдайлар санының барлық жағдайлар санына қатынасын айтады.

Ықтималдықтың негізгі қасиеттері.

1. Ақиқат оқиғаның ықтималдығы бірге тең, яғни $P(E)=1.$

2. Мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы нөлге тең, яғни $P(\emptyset)=0$

3. Кез келген кездейсоқ оқиғаның ықтималдығы нөл мен бірдің арасында жатады, яғни

$$0\le P(A)\le 0.$$

Ықтималдықтың геометриялық анықтамасы. Қарастырып отырған элементар нәтижелер n өлшемді кеңістіктегі E облысы болсын. E облысының өлшемі бар болсын ($n=2,$ онда ол аудан; $n=3,$ онда ол көлем), оны $m(E)$ арқылы белгілейік. Нүктенің E облысына түсу ықтималдығы "тең мүмкіндікті" болсын. Сонда нүктенің E-нің ішкі облысы болатын A облысына түсу ықтималдығы деп

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(E)}$$

қатынасын атайды.

738. Тиын бір рет лақтырылсын. E жиынын табу керек.

Шешуі. $E=\{\Gamma; Ц\}$, мұндағы *Г*-герб (елтаңба), *Ц*-цифр (таңбасын) жағының түсуін көрсетеді.

▲

739. Тиын екі рет лақтырылсын. *E* жиынын табу керек.

Шешуі. $E=\{ГГ; ГЦ; ЦГ; ЦЦ\}$. ▲

740. Ойын сүйегі бір рет лақтырылсын. *E* жиынын табу керек.

Шешуі. $E=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. ▲

741. Екі адам, *A* мен *B,* $[0;T]$ уақыт аралығында кездесуге келісті. *E* жиынын табу керек.

Шешуі. Егер *x* арқылы *A*-ның, *y* арқылы *B*-ның келген уақыттарын белгілесек, онда $E=\{(x;y);\ 0\le x\le T,\ 0\le y\le T\}$.

▲

742. Тиынды алғаш рет "цифр" болғанға дейін лақтырайық. *E* жиынын табу керек.

Шешуі. $E=\{Ц; ГЦ; ГГЦ; ГГГЦ; ...\}$. ▲

743. Тәжірибе ойын сүйегін *n* рет лақтыру болсын *E* жиынын табу керек.

Шешуі. $E=\{\ell;\ell=(\ell_1,\ell_2,...,\ell_n)\}$, мұндағы $\ell_1-1,2,3,4,5,6,$ цифрларының біреуі.

▲

744. *A* оқиғасы тиынды үш рет лақтырғанда екі рет "цифр" түскенін көрсетсін. *A* оқиғасын табу керек.

Шешуі. $E=\{ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ЦЦГ, ЦГЦ, ГЦЦ, ЦЦЦ\}, A=\{ЦГЦ, ГЦЦ, ЦЦГ\}$.

▲

745. *A* оқиғасы ойын сүйегін екі рет лақтырғанда ұпайларының санының қосындысы жетіге тең болатындығын көрсетсін. *A* оқиғасын анықтау керек.

Шешуі. $E=\{(i,\vec{j});\ i,j=1,2,3,4,5,6\}; A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$. ▲

746. Екі адам, *A* және *B,* уәделі жерде $[0;T]$ уақыт аралығында кездесуге келіскен. Бұрын келгені екіншісін τ уақыт күтетін болған. *C* оқиғасы кездесу болатындығын білдірсін. Осы оқиғаны табу керек.

Шешуі.

$$E=\{(x,y), 0\le x\le T, 0\le y\le T, \tau<T\}$$
$$C=\{(x,y):|x-y|\le\tau\}.$$

▲

747. Ойын сүйегі бір рет лақтырылсын. *A* оқиғасы жұп санның *B* оқиғасы үшке қалдықсыз бөлінетін санның түсуі болсын. Табу керек: 1) $A+B$, 2) AB, 3) $A\setminus B$, 4) $B\setminus A$, 5) $\overline{A}$, 6) $\overline{B}$.

Шешуі. $E=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, A=\{2; 4; 6\}, B=\{3; 6\}$, олай болса

1) $A+B=A\cup B=\{2;3;4;6\}$, 2) $AB=A\cap B=\{6\}$, 3) $A\setminus B=A\overline{B}=\{2;4\}$,

4) $B\setminus A=\overline{A}B=\{3\}$, 5) $\overline{A}\setminus\{1;3;5\}$, 6) $\overline{B}=\{1;2;4;5\}$.

▲

748. Тиынды екі рет лақтырғанда ең болмаса бір рет “ герб ” түсу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. $E=\{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$. A - оқиғасы ең болмағанда “ герб ” бір рет түсуі $A=\{ГГ, ГЦ, ЦГ\}$, яғни $n=4$, $m=3$. Сондықтан $P(A)=\frac{3}{4}$. ▲

749. Жәшікте 5 ақ және 7 қара шар бар. Жәшіктен бір шар алынады. Осы шардың ақ шар болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. $n=12$, $m=5$, $P(A)=\frac{5}{12}$. ▲

750. Ойын сүйегі екі рет лақтырғанда ұпайлардың қосындысы 7-ге тең болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. $n=36$, $m=6$, $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. ▲

2. Комбинаторика элементтері. *Комбинаторика* – математика тарауларының бірі. Мұнда шекті жиын элементтерінің түрлі қосылыстары қарастырылып, олардың сандары саналады. $A=\{a_1,a_2,...,a_p\}$ және $B=\{b_1,b_2,...,b_q\}$ жиындарының әрқайсысынан бір-бірден элемент алынса, яғни (a_1,b_1) қосындыларын *парлар* дейді. Бұл жағдайда элементтер парларының саны $p\cdot q$ –ге тең

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & ... & a_1b_q \\ a_2b_1 & a_2b_2 & ... & a_2b_q \\ a_pb_1 & a_pb_2 & ... & a_pb_q \end{bmatrix}$$

Берілген әртүрлі n элементтен k элемент бойынша жасалған *терулер* деп k элементтен тұратын бір-бірінен тек қана құрамы бойынша ажыратылатын комбинацияларды айтамыз. Терулердің жалпы саны

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k}$$

формуласымен есептеледі.

Берілген әртүрлі n элементтен k элемент бойынша жасалған *орналасулар* деп, әрқайсысы бір-бірінен құрамы және орналасу реті бойынша ажыратылатын комбинацияларды айтамыз. Орналасудың жалпы саны

$$A_n^m=n(n-1)\cdot ...\cdot (n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

формуласымен анықталады.

Берілген әртүрлі n элемент *алмастырулары* деп, әрқайсысы бір-бірінен тек орналасу реті бойынша ажыратылатын комбинацияларды атайды. Алмастырудың жалпы саны

$$p_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

формуласымен анықталады.

(Бұл жерде $n!$ (n-факториал) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ формуласымен есептеледі және $0! = 1$ деп қабылданады).

751. Екі ойын сүйегі лақтырылсын барлық жағдайлар саны қанша?

Шешуі. Тәжірибенің нәтижесі (i, j) парлары болады, $i, j = \overline{1,6}$, онда $n = 6 \cdot 6 = 36$. ▲

752. Үш ойын сүйегі лақтырылған барлық жағдайлар саны қанша?

Шешуі. Тәжірибенің нәтижесі (i, j, k) болады, $i, j, k = \overline{1,6}$, онда $n = 6^3 = 216$.
▲

753. Бірде-бір цифры қайталанбайтын бес орынды сандардың саны қанша?

Шешуі. Бес орынды сан (i, j, k, l, m) болады. $i-$дің орнында $1, 2, \ldots, 9$ цифрларының бірі тұра алады. $j-$ қалған 9 цифрдың біреуі тұрады, себебі бұл жерде нөл саны да болады, $k, l, m-$нің орнында тұра алатын сандардың саны сәйкес – $8, 7, 6$. Сондықтан $n = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$. ▲

754. 36 дан 5 спортлото ойынына қатысушы бір билет сатып алды. Әртүрлі жағдайлар саны қанша?

Шешуі. Ойынның ережесі бойынша билеттегі 1-ден 36-ға дейінгі натурал сандарының бесеуін сызу керек.

Сонда $n = C_{36}^5 = \dfrac{36!}{5! \cdot 3!} = \dfrac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 376992$. ▲

755. Жеті жолаушысы бар лифт 10 этаждың әрқайсысында тоқтап өтеді. Әрбір этажда бірден артық жолаушы түсіп қалмау керек. Әр түрлі жағдайлар саны қанша?

Шешуі. $A_n^m = \dfrac{10!}{3!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604800$. ▲

756. $1, 2, 3, 4, 5$ цифрларынан әр түрлі қанша сан жасап шығаруға болады.

Шешуі. $p_5^5 = 5! = 120$. ▲

757. Бала кубиктерді қатар қойып ойнап отырған, ал кубиктерде *А, А, Б, Л* әріптері жазылған.Сонда *БАЛА* сөзінің шығу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. *В* оқиғасы арқылы *БАЛА* сөзінің шығуын белгілейік. Екі “*А*” әріпінің орнын ауыстырғаннан *БАЛА* сөзі өзгермейді.

Сондықтан $m = 2$, $n = 4!$, яғни $P(B) = \dfrac{1}{12}$. ▲

758. “*МАТЕМАТИКА*” сөзіндегі әріптерді алмастыра отырып, қанша “сөз” жасап шығаруға болады.

Шешуі. “*А*”–3 рет, “*М*”–2 рет, “*Т*”–2 рет, “*Е*”, “*И*”, “*К*” – бір-бірден кездеседі. Сондықтан $C_{10}(3,2,2,1,1,1)=\dfrac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=151200.$ ▲

759. Екі адам, А мен В, $[0,T]$ уақыт аралығында кездесуге келіскен. Уәделі жерге бірінші келген екіншісін τ уақыт күтіп, кетіп қалды. Кездесу болатындығының ықтималдығын табу керек.

Шешуі. x – A-ның, y – B-ның уәделі жерге келу уақыты, олардың кездесу оқиғасы $C=\{(x,y):|x-y|<\tau,\ 0\le\tau\le T.$

$$E=\{(x,y):x,\ y\in[0,T]\cdot m(C)=[T^2-(T-\tau)^2]=2T\tau-\tau^2,\ m(E)=T^2;\ P(C)=\frac{2T\cdot\tau-\tau^2}{T^2}.$$

▲

760. Тиынды екі рет лақтырғанда бір рет “герб” түсу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,25.

761. Жәшікте 3 көк, 4 қызыл және 5 жасыл шар бар. Жәшіктен бір шар алынады. Осы шардың көк болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,25.

762. Ойын сүйегі бір рет лақтырылды. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықтарын табу керек:

а) “5” цифрының түсуі; ә) жұп санының түсуі; б) үшке қалдықсыз бөлінетін санның түсуі; в) “1” цифрынан басқа санның түсуі.

Ж: а) $\frac{1}{6}$; ә)0,5; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{5}{6}$.

763. Барлық жақтары сырланған куб мың бөлікке бөлініп араластырылсын. Содан соң кез келген ретпен бір кубик алынсын.Алынған кубиктің:

а) бір; ә) екі; б) үш жағы сырланған; в) ешбір жағы сырланбаған болуының ықтималдығын табу керек.

Ж: а) 0,384; ә) 0,096; б) 0,008; в) 0,512.

764. Екі ойын сүйегі лақтырылғанда пайда болатын оқиғалардың ықтималдықтарын табу керек:

а) ұпайлардың қосындысы жетіге тең;
ә) ұпайлардың қосындысы жетіден артық;
б) ұпайлардың қосындысы жетіден аспайды;
в) ұпайлардың көбейтіндісі жетіге тең;
г) ұпайлардың көбейтіндісі сегізге тең;
ғ) ұпайлардың көбейтіндісі сегізден аспайды;
д) ұпайлардың көбейтіндісі сегізден кем;
е) ұпайлардың қосындысы сегізге, ал айырмасы төртке тең;
ж) ұпайлардың қосындысы сегізге, ал көбейтіндісі он беске тең.

Ж: а) $\frac{1}{6}$; ә) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{7}{12}$; в)0; г) $\frac{1}{18}$; ғ) $\frac{4}{9}$; д) $\frac{7}{18}$; е) $\frac{1}{18}$; ж) $\frac{1}{18}$.

765. Екі орынды сан ойланды. Ойланған санның а) кез келген екі орынды сан; ә) цифрлары әртүрлі болатын екі орынды сан болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** а) $\frac{1}{90}$; ә) $\frac{1}{81}$.

766. Жәшікте нөмірленген бірдей алты кубик бар. Бір-бірлеп алынған кубиктердің өсу ретімен болатындығының ықтималдығын табу керек.

Ж: $\frac{1}{120}$.

767. Нысанаға 50 рет оқ атылып, оның 29-ы нысанаға тиді. Нысанаға тию салыстырмалы жиілігін табу керек. **Ж:** 0,58.

768. Техникалық бақылау бөлімі тексеру кезінде кездейсоқ алынған 100 детальдың 5-інің жарамсыздығын анықтады. Жарамсыз детальдың пайда болуының салыстырмалы жиілігін табу керек. **Ж**: 0,05.

769. Ер баланың дүниеге келуінің салыстырмалы жиілігі 0,505-ке тең. Дүниеге келген 200 нәрестенің қаншасы ер бала? **Ж:** 101.

770.Сынақ кезінде құралдың жарамды болуының салыстырмалы жиелігі 0,9-ға тең болды. 300 құралдың нешеуі жарамды болады? **Ж:** 270.

771. Үш ойын сүйегі лақтырылған. Сонда үш сүйекте де бірдей сан пайда болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** $\frac{1}{36}$.

772. Жәшікте 10 деталь бар, оның7-і сырланған. Кездейсоқ 3 деталь алынады. Осы детальдардың барлығының да сырланған деталь болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** $\frac{7}{24}$.

773. Жәшікте 25 деталь бар, оның 5-і жарамсыз. Жәшіктен 4 деталь алынды. Алынған детальдардың барлығы да

а) жарамды; ә) жарамсыз болу ықтималдығын табу керек.

Ж:а) $\frac{969}{2530}$; ә) $\frac{1}{2530}$.

774. Абонент телефон нөмірінің соңғы үш цифрін ұмытып қалды, тек олардың әр түрлі екендігі есінде. Ол телефон нөмерін кездейсоқ терді. Оның телефон нөмерін дұрыс теру ықтималдығы қандай? **Ж:** $\frac{1}{720}$.

775. Жәшіктегі N детальдың n-і стандартты. Кездейсоқ m деталь алынды. Алынған детальдардың к-сы стандартты болу ықтималдығын табу керек.

Ж: $\frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$.

776. Студент бағдарламаның 50 сұрағының 35-ін біледі. Оның өзінің емтихан билетіне енетін үш сұрақтың тек екеуін білетіндігінің ықтималдығын табу керек. **Ж:** $\frac{51}{112}$.

777. Топта 20 студент бар, оның 7-і үздік оқиды. Тізім бойынша 5 студент кездейсоқ ретпен таңдап алынды. Таңдап алынған студенттердің 3-нің үздік студент болуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** $\frac{455}{2584}$.

778. Қорапта 10 детал бар, оның 7-і сырланған. Қораптан 3 детал алынады. Алынған детальдардың а) біреуі; ә) екеуі боялған болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** а) $\frac{7}{40}$; ә) $\frac{21}{40}$.

779. 36 картаның кез келген үшеуі алынады. Алынған үш картаның екеуі тұз болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,027.

780. Лотереяда 1000 билет бар. Оның әрбір екі билетінің біріне ұтыс шығады. 2 билет сатып алынды. Осы екі билеттің біреуіне ұтыс шығу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,5.

781. 36 картаның кез келген төртеуі алынады. Алынған картаның екеуі тұз, бір-бірден король және дама болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** $\frac{32}{19635}$.

782. Топта 20 студент бар, оның 4-і үздік, 7-і озат студенттер. Тізім бойынша таңдап алынған студенттің 2-і үздік 2-і озат студент болуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** $\frac{189}{2584}$.

783. Үш сортты 15 бұйым бар. Оның 4-і бірінші,5-і екінші, 6-ы үшінші сортты бұйымдар. Бақылау үшін кез келген 5 бұйым алынды. Оның ішінде 2-і бірінші, 2-і екінші, 1-і үшінші сортты бұйымдар болуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** $\frac{120}{1001}$.

784. Боран кезінде елуінші километр мен сексенінші километр арасындағы бір жерде электр сымы үзілді. Осы үзіліс 58-ші километр мен 65-ші километрдің арасында болу ықтималдығын табу керек. Сымның кез келген аралықтан үзілуінің мүмкіндіктері бірдей. **Ж:** $\frac{7}{30}$.

785. Раіиусы *R*-ге тең шеңбердің ішіне тас лақтырылады. Тас шеңберге іштей сызылған.

а) квадраттың; ә)дұрыс үшбұрыштың ішіне түсу ықтималдығын табу керек.

Ж: а) $\frac{2}{\pi}$; ә) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

3. Ықтималдықтардың қосу және көбейту теоремалары. Тәжірибе кезінде екі оқиғаның біреуінің пайда болуы екіншісінің пайда болуын жоққа шығарса, онда ондай оқиғалар *үйлесімсіз оқиғалар* деп аталады.

A және *B* үйлесімсіз оқиғаларының *A+B қосындысы* деп *A* оқиғасы немесе *B* оқиғасы, тек біреуінің пайда болу оқиғасын айтады.

Тәжірибе кезінде екі оқиғаның біреуінің пайда болуы екіншісінің пайда болуын жоққа шығармаса, ондай оқиғаларды *үйлесімді оқиғалар* дейміз.

Егер екі оқиғаның біреуінің ықтималдығы екіншісінің пайда болу немесе пайда болмауына байланысты болмаса, онда оларды *тәуелсіз оқиғалар* деп атайды.

A мен *B* оқиғаларының *AB көбейтіндісі* деп *A* және *B* оқиғаларының бірге пайда болу оқиғасын айтамыз.

Егер екі оқиғаның біреуінің ықтималдығы екіншісінің пайда болуына немесе пайда болмауына байланысты болса, онда оларды *тәуелді оқиғалар* деп атайды.

$P_A(B)$ - *шартты ықтималдық* деп A оқиғасы пайда болғаннан кейінгі B оқиғасының ықтималдығын айтамыз.

Т е о р е м а л а р.

1. Егер A, B - үйлесімсіз оқиғалар болса, онда олардың біреуінің пайда болу ықтималдығы

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

2. Егер A, B - үйлесімді оқиғалар болса, онда олардың кемінде біреуінің пайда болу ықтималдығы

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

3. Егер A, B - тәуелсіз оқиғалар болса, онда олардың бірге пайда болу ықтималдығы

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

4. Егер A, B - тәуелді оқиғалар болса, онда олардың бірге пайда болу ықтималдығы

$$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B) = P(B)\cdot P_B(A).$$

$A_1, A_2, ..., A_n$ кездейсоқ оқиғалар тобы қос-қостан үйлесімсіз әрі $A_1 + A_2 + ... + A_n = E$ болса, онда олар толық топ құрайды. Толық топ құрайтын оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысы бірге тең, яғни $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + ... + \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = 1.$

Кез келген A оқиғасы мен оның қарама қарсы $\overline{A}$ оқиғасы толық топ құрайды, олай болса $\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1.$ Егер $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = p$ болса, онда $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - p = q$ болады.

786. Жәшікте 10 қызыл, 15 көк және 5 ақ шар бар. Жәшіктен бір шар алынады. Оның түсті шар екендігінің ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Түсті шардың пайда болуы, ол не қызыл шар, не көк шардың пайда болуы болып табылады.

A оқиғасы қызыл шардың пайда болуы, онда $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$

B оқиғасы көк шардың пайда болуы, онда $P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$

A және B - үйлесімсіз оқиғалар болып табылады, олай болса,

$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$ ▲

787. Кітапхананың бір сөресінде кездейсоқ тәртіпте тұрған 15 кітаптың 5-і түптелген. Кітапханашы үш кітап алады. Алынған кітаптардың ең болмаса біреуі түптелгендігінің ықтималдығын табу керек.

Шешуі. A – оқиғасы алынған кітаптың ең болмаса біреуі түптелген, B – оқиғасы алынған үш кітаптың біреуі түптелген, C - оқиғасы –екі кітап түптелген, *Д* оқиғасы – үш кітап түптелген. *В,С,Д* оқиғалары қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар, олай болса

$$P(A)=P(B+C+Д)=P(B)+P(C)+P(Д).$$

$$P(B)=C_5^1\cdot\frac{C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91};\;\; P(C)=C_5^2\cdot\frac{C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91};\;\; P(Д)=\frac{C_5^5}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}.$$

Осыдан $$P(A)=P\left(B+C+Д\right)=\frac{45}{91}+\frac{20}{91}+\frac{2}{91}=\frac{67}{91}.\quad \blacktriangle$$

788. Ертеңгі күн жауынды болуының ықтималдығы $p=0{,}7$ болсын. Ертең күн жауынсыз болатындығының ықтималдығын табу керек.

Шешуі. “Күн жауынды” және “күн жауынсыз” оқиғалары қарама-қарсы оқиғалар, олай болса $q=1-p=0{,}3.$ ▲

789. Жәшікте 10 деталь бар. Оның 7-і стандартты. Кездейсоқ ретпен алынған 2 детальдың ең болмаса біреуі стандартты болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. *А* оқиғасы – “алынған детальдардың ең болмаса біреуі стандартты деталь”, олай болса, $\overline{A}$ оқиғасы – “алынған детальдардың барлығы да стандартты емес”. Яғни

$$\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}.$$

Осыдан $\mathrm{P}\left(A\right)=1-P(\overline{A})=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}.$ ▲

790. Алдыңғы 787- есебінің шартын қарастырайық.

Шешуі. $\overline{A}$ оқиғасы алынған үш кітаптың барлығы да түптелмеген. Онда $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)=\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{24}{91}$. Осыдан $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)=1-P(\overline{A})=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}.=1-\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}$. ▲

791. 2 жәшіктің әрқайсысында 10 шардан бар. Бірінші жәшікте 4, екіншісінде 5 қызыл шар бар. Әрбір жәшіктен бір-бірден екі шар алынды. Олардың екеуі де қызыл шар болуының ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Бірінші жәшіктен алынған шардың қызыл (*А* оқиғасы) болу ықтималдығы $P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, ал екіншісінен қызыл шар (*В* оқиғасы) алуының ықтималдығы $P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

А мен *В* оқиғалары тәуелсіз болғандықтан, екеуініңде қызыл шар (*АВ* оқиғасы) болу ықтималдығы

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}.\quad \blacktriangle$$

792. Бірінші жәшікте 4 қызыл және 6 ақ шар, екіншісінде 3 қызыл, 7 ақ шар, үшіншісінде 2 қызыл, 8 ақ шар бар. әрбір жәшіктен бір-бірден үш шар аламыз. Олардың біреуінің қызыл шар болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Бірінші жәшікте қызыл шар болу оқиғасын A_1, екіншісінде – A_2, үшіншісінде – A_3 деп белгілейік. Мұнда A_1, A_2, A_3 оқиғалары қос-қостан тәуелсіз оқиғалар.

Берілген мысалдың шарты бойынша A_1 оқиғасы пайда болғанда A_2 және A_3 оқиғалары пайда болмауы тиіс. Сондықтан басқа біреулер енгіземіз.

Тек қана A_1 оқиғасының пайда болу оқиғасын B_1 деп белгілейік, яғни $B_1 = A_1, \overline{A_2}, \overline{A_3}$. Сол сияқты, тек қана A_2 оқиғасының пайда болу оқиғасын $B_2 = \overline{A_1}, A_2, \overline{A_3}$, ал тек қана A_3 оқиғасының пайда болу оқиғасын $B_3 = \overline{A_1}, \overline{A_2} A_3$ деп белгілейік. Сонымен A_1, A_2, A_3 оқиғаларының тек қана біреуі пайда болу оқиғасы. $B = B_1 + B_2 + B_3$ оқиғалары қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар болады.

$P(A_1) = 0{,}4;\ P(\overline{A_1}) = 0{,}6;\ P(A_2) = 0{,}3;\ P(\overline{A_2}) = 0{,}7;\ P(A_3) = 0{,}2;\ P(\overline{A_3}) = 0{,}8,$

онда $P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = P(A_1)\cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3}) +$

$+ P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3) = 0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8 + 0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8 + 0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2 = 0{,}224 + 0{,}144 + 0{,}084 = 0{,}452.$

▲

793. Жәшікте 4 қызыл, 6 ақ шар бар. Жәшіктен бір-бірден екі шар алынды. Шарлар кейін жәшікке салынбады. Бірінші шар қызыл болғанда, екінші шардың ақ болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Бірінші шардың қызыл болу оқиғасын A деп, ал екінші шардың ақ болу оқиғасын B деп белгілейік. Бірінші шарды алғаннан кейін жәшікте 3 қызыл, 6 ақ шар қалды, яғни $P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$ ▲

794. Жәшікте 4 қызыл, 6 ақ шар бар. Жәшіктен бірінші ақ шар, екіншісі қызыл шар алыну оқиғасының ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Бірінші шардың ақ болу оқиғасын A, ал екінші шардың қызыл болу оқиғасын B деп белгілейік. Онда A оқиғасының ықтималдығы $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, ал B оқиғасының A оқиғасы пайда болғаннан кейінгі шартты ықтималдығы $P_A(B) = \frac{4}{9}.$

Осыдан $P(AB) = P(A)\cdot P_A(B) = \frac{4}{15}.$ ▲

795. Екі атқыштың нысанаға тигізу ықтималдықтарын сәйкесінше $P_1 = 0{,}6$ және $P_2 = 0{,}7$. Нысанаға бір-бірден атқанда ең болмаса бір рет тигізу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Бірінші атқыштың нысанаға тигізу оқиғасын A деп, екіншісін B деп белгілейік. Бұл жағдайда А мен В оқиғалары тәуелсіз оқиғалар, яғни $P(AB) = P(A)\cdot P(B) = P_1 \cdot P_2 = 0{,}42.$

Осыдан $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}42 = 0{,}88.$ ▲

4. Ең болмаса бір оқиғаның пайда болу ықтималдығы. Өзара үйлесімсіз $A_1,\ A_2, ..., A_n$ оқиғаларының ең болмаса біреуі пайда болу *A* оқиғасының ықтималдығы:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n})$$

формуласымен анықталады, мұндағы $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}$ оқиғасы берілген оқиғалардың барлығының да пайда болмау оқиғасы.

Егер $P(A_1) = p_1,\ P(A_2) = p_2,\ ...,\ P(A_n) = p_n$ және $P(\overline{A_1}) = 1 - p_1 = q_1$, $P(\overline{A_2}) = 1 - p_2 = q_2,\ ...,\ P(\overline{A_n}) = 1 - p_n = q_n$ болса, онда

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_3.$$

Егер $A_1,\ A_2, ..., A_n$, оқиғаларының ықтималдықтары *p*-ға тең болса, онда ең болмаса біреуінің пайда болу *A* оқиғасының ықтималдығы

$$P(A = 1 - (1 - p)^n = 1 - q^n$$

формуласымен анықталады.

Е с к е р т у. Тәжірибе кезінде *A* және *B* оқиғаларының ең болмаса біреуінің пайда болу оқиғасының ықтималдығын әр түрлі формуламен табуға болады: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ немесе $P(A + B) = 1 - P(\overline{AB})$ немесе

$$P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(\overline{AB}).$$

796. Үш атқыштың нысанаға тигізу ықтималдықтары сәйкесінше $p_1 = 0{,}7;\ p_2 = 0{,}8;\ p_3 = 0{,}9 -$ға тең. Нысанаға ең болмаса біреуінің тию оқиғасының ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Бірінші атқыштың нысанаға тигізу оқиғасын *A₁*, ал екіншісін *A₂*, үшіншісін *A₃* деп белгілейік. Бұл оқиғалардың тимеу ықтималдықтарын табайық: $P(\overline{A_1}) = q_1 = 0{,}3;\ P(\overline{A_2}) = q_2 = 0{,}2;\ P(\overline{A_3}) = q_3 = 0{,}1.$

Олай болса $P(A) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}994.$ ▲

797. Мергеннің бір рет атқанда нысанаға тигізу ықтималдығы $p = 0{,}8 -$ге тең. Төрт рет атқанда, ең болмаса бір рет тигізу оқиғасының ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Нысанаға тимеу ықтималдығы $q = 1 - p = 0{,}2$ болғандықтан

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0{,}2^4 = 0{,}9984.$$ ▲

798. Жәшікте 4 қызыл, 6 ақ шар бар. Кездейсоқ 3 шар алынды. Олардың ішінде бірден артық емес қызыл шар болуының ықтималдықтарын табу керек.

Ж: $\frac{2}{3}$.

799. Жәшікте 10 деталь бар, оның 2-і стандартты емес. Кездейсоқ алынған 4 детальдың үшеуден кем емесі стандартты болуының ықтималдығын табу керек.

Ж: $\frac{13}{15}$.

800. Ақшалай-заттай лотереясының әрбір 1000 билетінде 15 заттай және 5 ақшалай ұтыстар бар. Кездейсоқ алынған бір билеттің ақшалай болсын немесе заттай болсын бәрібір ұтуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,02.

801. Атқыштың бір рет атқанда 10 ұпай ықтималдығы 0,1-ге, 9 ұпай алу ықтималдығы 0,3-ке, ал 8 ұпай алу ықтималдығы 0,6-ға тең. Бір рет атқанда 9 ұпайдан кем емес ұпай алу ықтималдығын есептеу керек. **Ж:** 0,4.

802. *A, B, C* оқиғалары толық топ құрайды. Тәжірибе кезінде *A* және *B* оқиғасының ықтималдығы $P(A)=0{,}1;\ P(B)=0{,}3$ тең. *C* оқиғасының ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,6.

803. Ойын сүйегі бір рет лақтырылады. "1" цифрының пайда болмау ықтималдығын табу керек. **Ж:** 5/6.

804. Студент 60 сұрақтың 50-ін біледі. Алынған билет сұрақтарының (үш сұрағы бар) ең болмаса біреуін білетіндігінің ықтималдығын табу керек.

Ж: $\frac{1705}{1711}$.

805. Жәшікте 4 қызыл, 6 ақ шар бар. Кездейсоқ 3 шар алынды. Алынған шарлардың ең болмаса біреуі ақ шар болу ықтималдығын табу керек.

Ж: 29/30.

806. Тиын мен ойын сүйегі бір рет қатар лақтырылғанда "герь" пен "5" цифрының түсуінің ықтималдығын табу керек. **Ж:** 1/12.

807. Атқыштың нысанаға бір рет атқандағы тигізу ықтималдығы $p=0{,}8$-ге тең. Атқыш 3 рет атқанда үшеуінің де нысанаға тию ықтималдығын табу керек.

Ж: 0,512.

808. Дайындалған детальдардың 90 %-ы стандартты, ал 70 %-і бірінші сортты детальдар. Кездейсоқ алынған детальдың бірінші сортты деталь болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,63.

809. Үш ойын сүйегін лақтырғанда "6" цифры ең болмаса бір рет пайда болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 91/216.

810. Жәшікте төрт түсті зат бар. Оның 40 % ақ, 20 % көк, 10 % жасыл, 30% қызыл. Алынған кез келген заттың көк немесе жасыл болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,5.

811. Атқыштың үш рет атқандағы нысанаға ең болмаса бір рет тигізу ықтималдығы 0,936 тең. Атқыштың бір рет атқандағы нысанаға тигізу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,6.

812. Жәшікте 9 қызыл және 6 көк шар бар. Кез келген 2 шар алынады. Алынған шарлардың қызыл болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 12/35.

813. Кітапханада 20 оқулық бар, оның жетеуі түптелген. Кітапханашы кез келген екі оқулық алды. Оқулықтардың түптелген болуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** 21/190.

814. Жәшікте 10 шар бар. Жәшіктен екі қызыл шар алудың ықтималдығын 7/15-ке тең. Жәшікте қанша қызыл шар бар? **Ж:** 7.

815. 100 лотерея билетінің 20-ы ұтыс билеттер. Алынған екі билеттің екеуінің де ұтыс билеттері болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** $\frac{19}{495}$.

816. Мекемеде жеті ер және сегіз әйел жұмыс істейді. Тізім бойынша үш адам таңдап алынды. Таңдап алынған адамдардың а) барлығы да ер; ә) барлығы да әйел болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** а)1/13; ә) 8/65.

817. Ойын сүйегі бір рет лақтырылды. Жұп санның немесе үшке қалдықсыз бөлінетін санның пайда болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 2/3.

818. Дорбаның ішінде 1-ден 90-ға дейін нөмерленген шарлар бар. Дорбадан бір шар алынады. Беске немесе үшке қалдықсыз бөлінетін санның пайда болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 7/15.

819. Екі мотордың жұмыс істеу ықтималдығы сәйкесінше $p_1 = 0{,}9$ және $p_2 = 0{,}6$-ға тең. Екі мотордың ең болмаса біреуінің жұмыс істеуінің ықтималдығының табу керек (әр түрлі әдістерді қолдану керек). **Ж:** 0,96.

820. Екі атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы сәйкесінше $p_1 = 0{,}6$ және $p_2 = 0{,}7$-ға тең. Олар нысанаға бір-бірден оқ атты. Келесі оқиғалардың ықтималдықтарын табу керек:

а) екеуінің де нысанаға тигізуі;
ә) тек біреуінің нысанаға тигізуі;
б) екеуінің де нысанаға тигізе алмауы;
в) ең болмаса біреуінің нысанаға тигізуі;
г) ең болмаса біреуінің нысанаға тимеуі.

Ж: а)0,42; ә)0,46; б) 0,12; в) 0,88; г) 0,58.

821. Атқыш нысанаға екі рет оқ атты. Оның нысанаға тигізу ықтималдығы $p = 0{,}7$. Келесі оқиғалардың ықтималдығын табу керек:

а) нысанаға екі рет тигізуі;
ә) нысанаға тек бір рет тигізуі;
б) нысанаға екі рет тигізе алмауы;
в) нысанаға ең болмаса бір рет тигізуі;
г) нысанаға ең болмаса бір рет тигізбеуі.

Ж: а)0,49; ә)0,42; б) 0,09; в) 0,81; г) 0,51.

822. Үш атқыш бір-бірінен тәуелсіз нысанаға бір-бірден оқ атқан. Олардың нысанаға тигізу ықтималдықтары: $p_1 = 0{,}6,\ p_2 = 0{,}7,\ p_3 = 0{,}8.$ Келесі оқиғалардың ықтималдықтарын есептеу керек:

а) барлық атқыштың нысанаға тигізуі;
ә) атқыштың тек біреуінің тигізуі;
б) атқыштың тек екеуінің тигізуі;
в) атқыштың бәрінің нысанаға тигізбеуі;
г) ең болмаса біреуінің нысанаға тигізбеуі.

Ж: а)0,336; ә)0,188; б) 0,452; в) 0,024; г) 0,976.

5. Толық ықтималдықтар формуласы. Бейес формуласы. Егер *A* оқиғасы өзара үйлесімсіз, толық топ құрайтын $B_1, B_2, \ldots, B_n$ оқиғаларының біреуімен бірге пайда болса, онда *A* оқиғасының ықтималдығы

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)$$

толық ықтималдықтар формуласымен анықталады, мұндағы $P_{B_i}(A)$ - шартты ықтималдықтар.

A оқиғасы өзара үйлесімсіз, толық топ құрайтын *B₁, B₂,...,Bₙ* оқиғаларының біреуімен бірге пайда болсын. Тәжірибе нәтижесінде *A* оқиғасы пайда болсын. Бұл жағдайда *A* оқиғасы пайда болғаннан кейінгі $B_1, B_2, ..., B_n$ оқиғаларының ықтималдықтары

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$$

Бейес формуласымен анықталады.

823. Екі бума радиолампалар бар. Бір радиолампаларының осы бумаларда болу ықтималдықтарын 0,6 және 0,4. Ал лампаның белгілі бір уақыт ішінде жұмыс істеу ықтималдықтарын сәйкесінше әр бума үшін 0,8 және 0,9.

Қалай болса солай бір бума, содан кейін одан радиолампа алынған. Сол радиолампаның белгілі бір уақыт ішінде жұмыс істеу ықтималдығын есептеу керек.

Шешуі. *A* оқиғасы – белгілі бір уақытта радиолампаның жұмыс істеуі. B_1 оқиғасы лампа бірінші бумадан алынуы, онда $P(B_1) = 0{,}6.$ B_2 оқиғасы лампа екінші бумадан алынуы, онда $P(B_2) = 0{,}4.$

B_1 және B_2 оқиғалары толық топ құрайды. $P_{B_1}(A)$ ықтималдығы B_1 оқиғасы пайда болғаннан кейінгі *A* оқиғасының пайда болу шартының ықтималдығы, яғни бірінші бумадан алынған радиолампаның белгілі бір уақыт ішінде жұмыс істеу оқиғасының ықтималдығы $P_{B_1}(A) = 0{,}8.$

$P_{B_1}(A)$ ықтималдығы B_2 оқиғасы пайда болғанша кейінгі *A* оқиғасының пайда болуының шартты ықтималдығы, яғни екінші бумадан алынған радиолампаның белгілі бір уақытта жұмыс істеу оқиғасының ықтималдығы $P_{B_1}(A) = 0{,}9.$ ▲

824. Үш атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы сәйкесінше 0,6; 0,7; 0,8 тең. Алдымен бір атқыш таңдап алынған. Ол нысанаға атқанда оқтың тию ықтималдығын табу керек.

Шешуі. *A* – оқтың нысанаға тию оқиғасы B_i – *i*-ші атқышты таңдап алу оқиғасы, *i=1,2,3.* Атқышты таңдап алу оқиғасы “тең мүмкіндігі” болғандықтан оқиғасы

$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \dfrac{1}{3}$ және $P(B_1) = 0{,}6; P(B_2) = 0{,}7;\ P(B_3) = 0{,}8.$ Олай болса,

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B_3}(A) = \frac{1}{3}(0{,}6 + 0{,}7 + 0{,}8) = 0{,}7.$$ ▲

825. №1-ші 5 жәшікте 3 ақ және 7 қара; №2-ші 7 жәшікте 2 ақ және 8 қара; №3-ші 3 жәшікте 4 ақ және 6 қара шар бар. Алдымен кез келген жәшік алынып, содан кейін одан бір шар алынды. Осы шардың ақ болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. A – шардың ақ болу оқиғасы, B_i – i-ші жәшікте алу оқиғасы, i=1,2,3. барлық жәшіктің саны 15.

$$P(B_1)=\frac{1}{3};\ P(B_2)=\frac{7}{15};\ P(B_3)=\frac{1}{5};\ P_{B_1}(A)=\frac{3}{10};\ P_{B_2}(A)=\frac{1}{5};\ P_{B_3}(A)=\frac{2}{8}.$$

Осыдан $P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{7}{15}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{41}{150}$. ▲

826. Қоймадағы бөлшектердің 70% I зауыттан, оның 2% жарамсыз; 30 %-і II зауыттан, оның 5% жарамсыз. Қоймадан алынған бір бөлшек жарамсыз болсын. Оның бірінші зауытта дайындалған болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. A – қоймадан алынған бөлшек жарамсыз болу оқиғасы, B_1 – I зауыттан, ал B_2 – II зауыттан шыққан бөлшек болу оқиғалары.

$$P(B_1)=0{,}7;\ P(B_2)=0{,}3;\ P_{B_1}(A)=0{,}02;\ P_{B_2}(A)=0{,}05.$$

Осыдан $P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0.7\cdot 0.02}{0.7\cdot 0.02+0.3\cdot 0.05}=\frac{14}{29}$. ▲

827. Бірінші жәшікте 6 ақ және 4 қара, екіншісінде 2 ақ және 8 қара шар бар. Бірінші жәшіктен екіншісіне кездейсоқ бір шар салынады. Содан кейін екінші жәшіктен бір шар алынады. Алынған шар ақ шар болсын. Осы шардың екіншісі жәшіктің (біріншісінен екіншісіне шар салынғанға дейін) шары болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. A – екінші жәшіктен алынған шар ақ болу оқиғасы.

B_1 – бірінші жәшіктен екіншісіне ақ шар ауыстырылған.

B_2 – бірінші жәшіктен екіншісіне қара шар ауыстырылған.

$$P(B_1)=\frac{6}{10};\ P_{B_1}(A)=\frac{3}{11};\ P(B_2)=\frac{4}{10};\ P_{B_2}(A)=\frac{2}{11}.$$

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{10}\cdot\frac{2}{11}}{\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{11}+\frac{4}{10}\cdot\frac{2}{11}}=\frac{4}{13}.$$ ▲

828. Үш зеңбіректен атылған снарядтың нысанаға тию ықтималдықтары сәйкес $p_1=0{,}3;\ p_2=0{,}4;\ p_3=0{,}5$ тең. Әрбір зеңбіректен бір-бірден снаряд атылып, оның екеуі нысанаға тиді. Тиген екі снарядтың біреуі бірінші зеңбіректен атылғандығының ықтималдығын табу керек.

Шешуі. А – екі снарядтың нысанаға тию оқиғасы.

B_1 – бірінші зеңбіректен атылған снарядтың нысанаға тию оқиғасы.

B_2 – екінші зеңбіректен атылған снарядтың нысанаға тимеу оқиғасы.

$$P(B_1)=p_1=0{,}3;\ P(B_2)=1-p_1=q_1=0{,}7.$$

$P_{B_1}(A)$ - тиген екі снарядтың біреуі бірінші зеңбіректікі, ал екінші қалған екі зеңбіректің біреуінің снаряды болу оқиғасының шартты ықтималдығы, яғни $P_{B_1}(A)=p_2q_3+p_3q_2=0{,}4\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}6=0{,}5.$

$P_{B_2}(A)$ - тиген екі снаряд екінші және үшінші зеңбіректің снарядтардың, яғни бірінші зеңбіректің снарядының нысанаға тимеу оқиғасының шартты ықтималдығы $P_{B_1}(A) = p_2 q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}20.$ Осыдан, Бейес формуласы бойынша

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}5}{0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}20} = \frac{15}{29}. \qquad \blacktriangle$$

829. Дайындалған ыдыстар құймасының 75% бірінші, ал 25% екінші цехта жасалған. Осымен бірге бірінші цехтағы ыдыстардың 5%, ал екіншісіндегі 20% жарамсыз. Кездейсоқ алынған ыдыстың а) ақаусыз; ә) жарамсыз болу ықтималдықтарын табу керек. **Ж:**а)73/80; ә)7/80.

830. 500 механизмнің 240 бірінші сортқа, 160 екінші сортқа; 100 үшінші сортқа жатады. Бірінші сортқа тиісті механизмердің ішінде сапасыз механизм болу ықтималдығы 0,03, екінші сортқа тиістілердің арасында – 0,04, үшінші сортқа тиістілердің арасында – 0,05 тең болсын. Кез келген бір механизм алынған. Оның а) сапалы; ә) сапасыз екендігінің ықтималдықтарын табу керек.

Ж: а)0,9628; ә)0,0372.

831. Қару-жарақ тұратын пирамидада 8 винтовка бар, оның бесеуі оптикалық көздеуішті винтовкалар. Оптикалық көздеуішті винтовкадан атқан оқтың нысанаға тию ықтималдығы 0,96, ал жай винтовка үшін – 0,72 тең. Кездейсоқ алынған винтовкадан бір оқ атылған. Атылған оқтың нысанаға тию ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,87.

832. Болттар дайындайтын фабрикада барлық бұйымдардың 27%-ын бірінші станокта, 35%-ын үшінші станокта шығарады. Бұл станоктарда шығатын болттардың сәйкесінше 6%, 5%, 4%-і жарамсыз болсын. Кездейсоқ алынған болттың а) ақаусыз; ә) жарамсыз болу ықтималдықтарын табу керек.

Ж: а)0,9508; ә)0,0492.

833. Бірінші жәшікте – 10 шар, оның 6-ы қызыл, екіншісінде – 20 шар, оның 4-і қызыл. Екі жәшіктен бір-бір шар алып, содан соң олардың біреуін кездейсоқ аламыз. Осы шардың қызыл шар болу ықтималдығын табу керек.

Ж: 0,34.

834. Үш жәшіктің әрқайсысында 6 қызыл және 4 көк шар бар. Бірінші жәшіктен кездейсоқ бір шар алынып, екіншісіне салынсын. Содан соң екіншісінен кездейсоқ бір шар алынып, үшіншісіне салынсын. Содан кейін үшінші жәшіктен бір шар алынсын. Алынған шардың а) қызыл; ә) көк болу ықтималдықтарын табу керек. **Ж:** а)0,6; ә)0,4.

835. Үш атқыш бір-бірден оқ атты, оның екеуі нысанаға тиді. Әрбір атқыштың атқан оқтарының нысанаға тию ықтималдықтары сәйкесінше $p_1 = 0{,}6;\ p_2 = 0{,}7;\ p_3 = 0{,}8$ болса, онда тиген екі оқтың біреуі: а) бірінші; ә) екінші; б) үшінші атқыштың оғы екендігінің ықтималдықтарын табу керек.

Ж: а) $\frac{57}{113}$; ә) $\frac{52}{113}$; б) $\frac{97}{113}$.

836. Бірінші жәшікте 10 шар, оның 6-ы қызыл, екіншісі жәшікте 20 шар, оның 8-і қызыл. Бірінші жәшіктен кездейсоқ бір шар алынып екіншісіне салынады. Одан кейін екіншісінен бір шар алынады. Ол қызыл шар болсын.

Осы шардың бірінші жәшіктің (біріншісінен екіншісіне шар салғанға дейін) шары болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 27/43.

837. Студенттер арасындағы іріктеу жарысына бірінші топтан – 4, екінші топтан – 6, үшінші топтан – 5 студенттер қатысты. Осы тпотардың студенттерінен институттың құрама командасына кіру ықтималдығы сәйкесінше $p_1 = 0{,}9;\ p_2 = 0{,}7;\ p_3 = 0{,}8$ тең. Жарыстың қорытындысына кездейсоқ таңдалған студент құрамаға енді. Осы студент қай топтың студенті екендігінің ықтималдығын табу керек.

Ж: Таңдалған студенттердің бірінші, екінші, үшінші топтың студенті болу ықтималдығы сәйкес 18/59;21/59;20/59 тең болады.

838. Болаттар дайындайтын фабрикада барлық бұйымдардың 45%-ін бірінші машина, 55%-ін екінші машина шығарады. Олардың шығарылатын жарамсыз болттар сәйкесінше 5% және 8% құрайды. Кездейсоқ алынған болт жарамсыз. Осы жарамсыз болтты а) бірінші, ә) екінші машина жасағандығының ықтималдықтарын есептеу керек. **Ж:** а) $\frac{45}{113}$; ә) $\frac{88}{113}$.

839. Өндірістік бөлімшеде 20 жабдық жұмыс істейді. Оның ішінде 9-ы *A* дәрежелі, 7-уі *B* дәрежелі, 4-і *C* дәрежелі. Дайындалған бөлшектердің сапасы өте жақсы болу ықтималдығын сәйкесінше 0,9; 0,8; 0,7. Кездейсоқ таңдап алған бөлшек жарамсыз болып шықты. Оның:

а) *A* дәрежелі; ә) *B* дәрежелі; б) *C* дәрежелі жабдықтың дайындалған бөлшегі екендігінің ықтималдығын табу керек. **Ж:** а)9/35; ә)14/35; б) 12/35.

840. Қару-жарақ тұратын пирамидада 15 винтовка бар. Оның 8-і оптикалық көздеуішті винтовка. Оптикалық көздеуішті винтовкадан атқан оқтың нысанаға тию ықтималдығы $p_1 = 0{,}95,$ ал жай винтовка үшін – 0,7. Кездейсоқ алынған винтовадан бір оқ атылды және ол нысанаға тиді. Нысанаға тиген оқ: а) оптикалық көздеуішті винтовадан; ә) жай винтовкадан атылғандығының ықтималдығын табу керек. **Ж:** а)0,608; ә)0,392.

8.2 ҚАЙТАЛАНАТЫН ТӘЖІРИБЕЛЕР

1. Бернулли формуласы. Нәтижесінде тәуелсіз оқиғалар пайда болатын тәжірибелерді *тәуелсіз тәжірибелер* деп аталады. Екі ғана нәтижесі бар тәуелсіз тәжірибелерді қарастырайық.

Мысалы, тиын лақтыру, детальдардың стандарттығын тексеру, бұйымның сапасын тексеру және т.б.

Жалпы жағдайда, екі нәтижені "*A* оқиғасы пайда болады" және "*A* оқиғасы пайда болмайды" деп айтамыз да, сәйкесінше $A, \bar{A}$ таңбаларын қолданамыз. Бұл оқиғалар қарама-қарсы оқиғалар болғандықтан, олардың ықтималдықтары $P(A) = p$ және $P(\overline{A}) = 1 - p = q$ деп белгіленеді, мұндағы p – бір тәжірибеден екінші тәжірибеге көшкенде өзгермесін.

n тәуелсіз сынақта ықтималдығы тұрақты *A* оқиғасының m рет пайда болу ықтималдығы мына формуламен анықталады.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Бұл формула *Бернулли формуласы* деп аталады.

Тәуелсіз n тәжірибеден A оқиғасының:

а) k –дан кем рет пайда болуының ықтималдығы

$P_n(m < k) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + ... + P_n(k-1)$

ә) k –дан артық рет пайда болуының ықтималдығы

$P_n(m > k) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + ... + P_n(n)$

б) k –дан артық емес рет пайда болуының ықтималдығы

$P_n(m \le k) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + ... + P_n(k)$

в) k –дан кем емес (немесе кем дегенде k) рет пайда болуының ықтималдығы $P_n(m \ge k) = P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n(n)$

г) k_1-ден артық және k_2-ден кем рет $(k_1 < k_2)$ пайда болуының ықтималдығы

$$P_n(k_1 < m < k_2) = P_n(k_1+1) + P(k_2+2) + ... + P(k_2-1);$$

A оқиғасының ең үлкен ықтималды m_0 рет пайда болуы

$(n+1)p - 1 < m_0 \le (n+1)p$

теңсіздігімен анықталады.

Егер $(n+1)p -$ бүтін болса, $m_0 -$ дің екі бүтін мәні, атап айтқанда m_0 және $m_0 + 1$, ал егер $(n+1)p -$ бүтін болмаса, онда $m_0 -$ дің бір ғана бүтін мәні болады.

841. Жанұяда 7 бала бар. Ер бала мен қыз баланың туу ықтималдығын бірдей деп алып, 3 қыз бала болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. A – “қыз баланың дүниеге келу” оқиғасы, $\bar{A}$ – “ұл баланың дүниеге келу” оқиғасы, $P(A) = p = 0{,}5;\ P(\bar{A}) = q = 0{,}5;\ n = 7,\ m = 3.$

Онда $P_7(3) = C_7^3 p^3 q^4 = \dfrac{35}{128}.$ ▲

842. Автоматты станокта стандартты (қалыпты) деталь дайындау ықтималдығы 0,9-ға тең. Алынған 5 детальдың үшеуі стандартты деталь болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. A – детальдың стандартты болу оқиғасы $P(A) = p = 0{,}9;\ P(\bar{A}) = q = 1 - p = 0{,}1;\ n = 5,\ m = 3.\ \ P_3(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0{,}0729.$ ▲

843. Бір тәулік ішінде электроэнергияның шығыны белгіленген мөлшерден артпауының ықтималдығы $p = 0{,}75$-ке тең. Алдағы 9 тәуліктің 7 тәулік ішінде электроэнергияның шығыны белгіленген мөлшерден артпауының ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Әрбір 9 тәуліктің біреуінде электроэнергия шығынының белгіленген мөлшерден аспауының (A оқиғасы) ықтималдығы $p = 0{,}75$ болса, онда электроэнергия шығынының белгіленген мөлшерден артық болуының ($\bar{A}$ оқиғасы) ықтималдығы $q = 1 - p = 0{,}25.$ Осыдан Бернулли формуласы бойынша

$$P_9(7)=C_9^7 p^7 q^2 = C_9^2 p^7 q^2 = \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot 0{,}75^7\cdot 0{,}25^2 \approx 0{,}30. \quad \blacktriangle$$

844. Батарея нысанаға 6 рет оқ атқан. әрбір оқ атқанда нысанаға тию ықтималдығы 0,4-ке тең. Көздеген нысана зақымдану (жойылу, істен шығу) үшін кем дегенде 4 оқ тию керек. Нысананың зақымдалу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. A – нысананың зақымдану оқиғасы.

$n=6,\ \ p=0{,}4,\ \ q=1-p=0{,}6,\ \ m\ge k=4,$ яғни $P(A)=P_6(m\ge 4)=P_6(4)+P_6(5)+P_6(6)=$

$$=C_6^4 p^4 q^2 + C_6^5 p^5 q + C_6^6 p^6 = \frac{6\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^2 + 6\cdot 0{,}4^5\cdot 0{,}6 + 0{,}4^6 \approx$$

$$\approx 0{,}1106+0{,}0369+0{,}0041=0{,}1516. \quad \blacktriangle$$

845. Цехта 7 мотор бар. әрбір мотордың жұмыс істеу ықтималдығы $p=0{,}8-$ге тең. Төмендегі берілген оқиғалардың ықтималдықтарын табу керек: а) барлық моторлар жұмыс жасайды; ә) барлық моторлар жұмыс істемейді; б) тек 4 мотор жұмыс істейді; в) 4-тен кем мотор жұмыс істейді; г) 4-тен кем емес мотор жұмыс істейді; ғ) 4-тен артық мотор жұмыс істейді; д) 4-тен артық емес мотор жұмыс істейді; е) ең болмаса екі мотор жұмыс істейді; ё) ең болмаса бір мотор жұмыс істеіді; ж) үштен артық емес және бестен кем емес мотор жұмыс істейді; з) үштен артық және алтыдан кем мотор жұмыс істейді.

Шешуі. $p=0{,}8,\ \ q=0{,}2,$ онда

а) $P_7(7)=C_7^7 p^7 q^0 = p^7 = 0{,}8^7 = 0{,}209752;$

ә) $P_7(0)=C_7^0 p^0 q^7 = q^7 = 0{,}2^7 = 0{,}0000128;$

б) $P_7(4)=C_7^4 p^4 q^3 = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^3 = 0.1146880;$

в) $P_7(m<4)=p_7(0)+p_7(1)+p_7(2)+p_7(3)=0{,}0000125+0{,}0003584+$
$+0{,}0043008+0{,}0286720=0{,}0333440;$

г) $P_7(m\ge 4)=p_7(4)+p_7(5)+p_7(6)+p_7(7)=0{,}1146880+0{,}2752512+0{,}3670016+$
$+0{,}2097152=0{,}9666560$ немесе $P_7(m\ge 4)=1-p_7(m<4)=1-0{,}0333440=0{,}9666560;$

ғ) $P_7(m>4)=p_7(5)+p_7(6)+p_7(7)=0{,}2752512+0{,}3670016+0{,}2097152=0{,}8519680;$

д)
$P_7(m\le 4)=p_7(0)+p_7(1)+p_7(2)+p_7(3)+p_7(4)=0{,}0000128+0{,}0003584+0{,}0043008+$
$+0{,}0286720+0{,}1146880=0{,}148032$

немесе $P_7(m\le 4)=1-p(m>4)=1-0{,}8519680=0{,}1480320;$

е) $P_7(m\ge 2)=p_7(m>1)=1-(p_7(0)+p_7(1))=1-(0{,}0000128+0{,}0003584)=0{,}9996288;$

ё) $P_7(m>0)=1-p_7(0)=1-0{,}0000128=0{,}9999872;$

ж)
$P_7(3\le m\le 5)=p_7(3)+p_7(4)+p_7(5)=0{,}0286720+0{,}1146880+0{,}02752512=0{,}4186112;$

з) $P_7(3<m<6)=p_7(4)+p_7(5)=0{,}1146880+0{,}2752512=0{,}3899392. \quad \blacktriangle$

846. Белгілі бір технологиялық процесте барлық өндірілген өнімнің 75 % жоғары сортты. 110 бұйымынан тұратын партияның ішіндегі жоғары сортты бұйымдардың ең ықтимал санын табу керек.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $n=110,\quad p=0{,}75,\quad (n+1)p-1<m_0<(n+1)p$ теңсізігі бойынша $111\cdot 0{,}75-1<m_0<111\cdot 0{,}75$ $82{,}25<m_0<83{,}25$ осыдан $m_0=83.$

▲

847. 4 рет нысанаға оқ атылған. әрбір оқтың нысанаға тию ықтималдығы 0,3 болсын. Ең ықтимал сан және ең үлкен ықтималдығы табу керек.

Шешуі. $n=4,\ \ p=0{,}3,\ \ q=0{,}7.\ \ (n+1)p-1<m_0<(n+1)p;\ \ 5\cdot 0{,}3-1<m_0<5\cdot 0{,}3$ осыдан

$$m_0=1.\ p_4(1)=C_4^1 pq^3=4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^3=0{,}4116. \qquad ▲$$

2. Лапластың локальдық және интегралдық теоремалары. Тәжірибелердің саны көп болса, онда Бернулли формуласымен ықтималдықты есептеу үлкен арифметикалық есептеулерге келтіреді. Сондықтан бұл жағдайда жуықтау формуласын қолданады.

Л а п л а с т ы ң л о к а л ь д ы қ т е о р е м а с ы**.** Егер *A* оқиғасының әр тәжірибеде пайда болу ықтималдығы p тұрақты болса, онда *n* тәжірибеде *A* оқиғасының *k* рет пайда болу ықтималдығының жуық мәні

$$P_n(k)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$$

формуласымен анықталады, мұндағы

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

$\varphi(x)$-жұп функция және $x\geq 0$ үшін $\varphi(x)$ функциясының мәндерінің кестесі қосымша № 1-де берілген.

Л а п л а с т ы ң и н т е г р а л д ы қ т е о р е м а с ы. Егер *A* оқиғасының әр тәжірибеде пайда болу ықтималдығы p тұрақты болса, онда n тәжірибеде *A* оқиғасы k_1 – ден кем емес және k_2 – ден артық емес рет пайда болу ықтималдығының жуық мәні:

$$P_n(k_1;k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$$

формуласымен анықталады, мұндағы

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dz$$

- Лаплас функциясы, $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}},\quad x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}.$

Лаплас функциясы тақ функция, яғни $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ және $0\leq x\leq 5$ үшін $\Phi(x)$ функциясының мәндерінің кестесі қосымша № 2-де берілген, ал $x>5$ болғанда $\Phi(x)=0{,}5$ деп есептеу керек. ▲

848. Әрбір тәжірибе кезінде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,6-ға тең. 200 рет тәжірибе жүргізілгенде A оқиғасының 125 рет пайда болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. $n = 200, \quad p = 0{,}6, \quad q = 0{,}4, \quad m = 125.$ Онда

$$\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} = 6{,}9286, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{125 - 200 \cdot 0{,}6}{4\sqrt{3}} = \frac{5}{4\sqrt{3}} = 0{,}722.$$

Қосымша № 1-ден $\varphi(x) = 0{,}3079.$ Осыдан $P_{200}(125) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = 0{,}0444.$ ▲

849. Тәуелсіз 100 тәжірибе кезінде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы тұрақты әрі $p = 0{,}8-$ге тең. A оқиғасының а) 75-тен кем емес және 90-нан артық емес рет, ә) 75-тен кем емес рет, б) 74-тен артық емес пайда болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Лапластың интегралдық теоремасын қолданамыз:

а) Есептің шарты бойынша $n = 100, \ p = 0{,}8, \ q = 0{,}2, \ k_1 = 75, \ k_2 = 90.$ Онда

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}5.$$

Лаплас функциясы тақ функция, яғни $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ болғандықтан

$$P_{100}(75;90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

Қосымша № 2 кестесі бойынша $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938, \ \Phi(1{,}25) = 0{,}3944$,

осыдан $P_{100}(75;90) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882;$

ә) Бұл жағдайда $k_1 = 75,$ ал $k_2 = 100$ болады, онда

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5.$$

Қосымша $P_{100}(75;100) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944;$

б) “A оқиғасы 75-тен кем емес рет пайда болу” және “A оқиғасы 74-тен артық емес рет пайда болу” оқиғалары қарама-қарсы оқиғалар болғандықтан, олардың ықтималдықтарының қосындысы бірге тең.

Осыдан $P_{100}(75;74) = 1 - P_{100}(75;100) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$ ▲

3. Салыстырмалы жиіліктің тұрақты ықтималдықтан ауытқуын бағалау. Лаплас формуласын пайдаланып, тәуелсіз тәжірибелердің нәтижесінде A оқиғасының пайда болуының ықтималдығының салыстырмалы жиіліктен ауытқуының абсолюттік шамасы ε -оң санынан кіші болуының ықтималдығының жуық мәні

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

формуласымен анықталады.

Егер тәжірибе саны n өте көп болғанда және әрбір тәжірибеде A оқиғасының пайда болуының ықтималдығы p өте аз болғанда, $P_n(k)-$ ықтималдығының жуық мәнін

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Пуасонның жуықтап есептеу формуласымен есептеу тиімді болады, мұндағы $\lambda = n \cdot p$.

850. Детальдың стандартты боуының ықтималдығы $p = 0{,}9$. Кейзесоқ таңдап алынған 400 детальдың ішінде стандартты детальдың пайда болуының салыстырмалы жиілігі $p = 0.9$ ықтималдығынан абсолют шамасы бойынша ауытқуы $\varepsilon = 0{,}03$ кіші болуының ықтималдықтарын табу керек.

Шешуі. $n = 400,\ p = 0{,}9,\ q = 0{,}1,\ \varepsilon = 0{,}03.$

Онда $P\left(\left| \frac{m}{400} - 0{,}9 \right| \le 0{,}03 \right) \approx 2\Phi\left(0{,}03 \cdot \sqrt{\frac{400}{0{,}9 \cdot 0{,}1}} \right) = 2\Phi(2).$

Қосымша № 2 кестесі бойынша $\Phi(2) = 0{,}4772$ осыдан $2\Phi(2) = 0{,}9544.$ ▲

851. Детальдың стандартты болу ықтималдығы $p = 0.9$. Салыстырмалы жиіліктің тұрақты ықтималдықтан ауытқуының абсолют шамасы $\varepsilon = 0{,}03$ кіші болуының ықтималдығы 0,9544 болуы үшін қанша тәуелсіз тәжірибе жасау керек?

Шешуі. Есептің шарты бойынша $p = 0{,}9, q = 0{,}1, \varepsilon = 0{,}03$

$P\left(\left| \frac{m}{n} - 0{,}9 \right| < 0{,}03 \right) = 0{,}9544.$ Осыдан n-ді табу керек. Ол үшін (8)-формуланы пайдаланамыз. $2\Phi\left(0{,}03 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}9 \cdot 0{,}1}} \right) = 2\Phi(0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}9544$, осыдан $\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right) = 0{,}4772.$

Қосымша № 2 кестесі бойынша $0{,}1\sqrt{n} = 2$ осыдан $n = 400.$

Үш сигма ережесі. 0,9973 ықтималдықпен практикалық есептерде $\left| \frac{m}{n} - p \right| < 3\sigma$ теңсіздігі орындалады, мұндағы $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ теңсіздігінен табылады. Шынында да қосымша кестеге қарап тапсақ, онда $P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < 3\sigma \right) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$ болады. ▲

852. Салыстырмалы жиіліктің $P = \frac{3}{8}$ ықтималдығынан ауытқуының абсолют шамасы $\varepsilon = 0{,}01 -$ ден кіші болуының ықтималдығы 0,995 болу үшін қанша тәжірибе жасау керек?

Шешуі. $P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < 0{,}01 \right) = 0{,}995,$ яғни $2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{n}{pq}} \right) = 0{,}995$ немесе $\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{n}{pq}} \right) = 0{,}4975.$ Кесте бойынша $0{,}01\sqrt{\frac{n}{pq}} = 2{,}81,\ p = \frac{3}{8},\ q = \frac{5}{8}$ болғандықтан

$n = 18500$. Енді осы есепті “үш сигма” ережесі бойынша шығарсақ, $3\sigma = 0{,}01$, онда $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \frac{0{,}01}{3}$, осыдан $n \approx 21000$. ▲

853. Зауыттан шығатын өнімнің орта есеппен алғанда 0,02 % жарамсыз бұйым. 2000 бұйымды алып тексергенде жарамсыз бұйымның саны 3-ке тең болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. $n = 2000,\ p = 0{,}00002,\ m = 3,\ \lambda = 0{,}4.\quad P_{2000}(3) \approx \frac{(0{,}4)^3 \cdot e^{-0{,}4}}{3!} \approx 0{,}007150.$ ▲

854. 500 адамның ішінде m адамның туған күні қаңтардың 1-іне келу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. $n = 500,\ p = \frac{1}{365},\ \lambda = np = \frac{500}{365},$ онда (4.9) формуласын қолдансақ $P_{500}(0) \approx 0{,}2541,\ P_{500}(1) \approx 0{,}3481,\ P_{500}(2) \approx 0{,}2385,\ P_{500}(3) \approx 0{,}1089,\ P_{500}(4) \approx 0{,}0373,$ $P_{500}(5) \approx 0{,}0112.$ ▲

855. Тиын 8 рет лақтырылды. 5 рет “цифр” жағының түсу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 7/32.

856. Топта 20 ер бала және 10 қыз бала бар. Әрбір бала тек бір сұраққа жауап береді. Оқытушының қойған үш сұрағына екі ер бала мен бір қыз баланың жауап беру ықтималдығын табу керек. **Ж:** 4/9.

857. 5 жәшіте 4 қызыл және 6 ақ шардан бар. Әрбір жәшіктен бір-бірден шар алынады. Алынған шарлардың 3 қызыл және 2 ақ шар болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,2304.

858. Автоматты станокта стандартты деталь дайындау ықтималдығы $p = 0{,}9-$ға тең. Алынған 5 детальдың m детальдың стандартты болу ықтималдығын табу керек, мұндағы: а) *m=0;* ә) *m=1;* б) *m=2;* в) *m=3;* г) *m=4;* ғ) *m=5.* **Ж:** а) 0,00001; ә) 0,00045; б) 0,00810; в) 0,07290; г) 0,32805; ғ) 0,59049.

859. Шахмат ойнау шеберлігі бірдей екі адам шахмат ойнады. Тең аяқталған ойын есептелмейді. Қайсысының ықтималдығы жоғары?

а) төрт партиядан екеуін ұтуы немесе алты партиядан үшеуін ұтуы; ә) төрт партиядан екеуін ұтуы немесе екі партиядан біреуінің ұтуы; б) бес партияның үшеуінің ұтуы немесе алты партияның үшеуінің ұтуы.

Ж: а) $P_4(2) = 3/8 > P_6(3) = 5/16$; ә) екі партияның біреуінің ұту ықтималдығы көп; б) ықтималдықтары тең $P_5(3) = P_6(3) = 5/16$.

860. Әрбір тәуелсіз тәжірибе А оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,4-ке тең. 5 тәжірибеде А оқиғасы 3-тен артық емес рет пайда болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,913.

861. Ер бала мен қыз баланың туу ықтималдығы бірдей. Жанұяда 5 бала бар, оның а) 3-уінің қыз бала; ә) 3-тен кем емесі қыз бала; б) ең болмаса біреуі қыз бала боуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** а) 5/16; ә) 0,5; б) 31/32.

862. Тиын алты рет лақтырылғанда “цифр” жағының: а) үштен кем рет; ә) үштен артық рет түсуінің ықтималдығын табу керек. **Ж:** а) 11/32; ә) 11/32.

863. Әрқайсысында 5 қызыл, 15 ақ шар бар. 8 жәшіктен бір-бірден кездесоқ шарлар алынады. Алынған қызыл шарлардың 3-тен кем емес және 6-дан артық емес рет шығуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** $\frac{2709}{8192}$.

864. Топта 20 студент бар. Оның 8-і ұлы бала. Кездейсоқ 5 студент таңдап алынады. Оның: а) барлығы да ұл балалар; ә) барлығы да қыз балалар; б) ең болмаса біреуі ұл бала; в) ең болмаса біреуі қыз бала; г) ең болмаса екеуі қыз бала; ғ) екіден кем емес және төрттен артық емес ұл балалардың болуының ықтималдығын табу керек.

Ж: а) $\frac{7}{1938}$; ә) $\frac{33}{646}$; б) $\frac{613}{646}$; в) $\frac{1931}{1938}$; г) $\frac{224}{323}$; ғ) $\frac{616}{969}$.

865. Шахмат ойнау шеберлігі бірдей екі адам шахмат ойнады. Тең ойналған ойын есептелмейді. Қайсысының ықтималдығы жоғары?

а) төрт партиядан кем дегенде үшеуінің ұтуы мен алты партиядан кем дегенде төртеуінің ұтуы; ә) төрт партияның екі партиясынан артық емесінен ұтуы мен екі партияның ең болмаса біреуі ұтуы; б) бес партиядан кем дегенде үшеуін ұтуы немесе жеті партиядан кем дегенде төртеуін ұтуы.

Ж: а) төрт партиядан кем дегенде үш партия ұтуы; ә) екі партиядан ең болмаса біреуінің ұтуы; б) ықтималдықтары бірдей.

866. 15 элементке сынақ жасалсын. Әрбір элементтің сынақтан өту ықтималдығы 0,9-ға тең. Сынақтың өте алатын элементтердің ықтимал саның табу керек. **Ж:** 14.

867. Атылған 25 оқтың әрқайсысының нысанаға тию ықтималдығы 0,75-ке тең. Нысанаға тиетін оқтардың ең ықтимал санын табу керек. **Ж:** 19.

868. Бірнеше жылдық байқаудың нәтижесінде қыркүйек айының 1 күні жауын жаууының ықтималдығы 1/7-ге тең екендігі анықталды. 50 жылда қыркүйек айының 1-інде жауынды болатын күндердің ең ықтимал санын табу керек. **Ж:** 7.

869. 39 тәуелсіз тәжірибе кезінде *A* оқиғасының пайда болуының ең ықтимал саны $m_0=25$-ке тең. Әрбір тәжірибедегі *A* оқиғасының пайда болуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,625<P<0.65.

870. Әрбір тәуелсіз тәжірибе кезінде *A* оқиғасының пайда болу ықтималдығы $p=0,3$ тең. *A* оқиғасының пайда болуының ықтимал саны $m_0=30$ болу үшін қанша тәжірибе жасау керек? **Ж:** $n_1=100$, $n_2=101$.

871. *A* оқиғасының әрбір тәуелсіз тәжірибеде пайда болу ықтималдығы 0,6 тең. 2400 тәуелсіз тәжірибеде *A* оқиғасының 1400 пайда болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0.0166.

872. Тиын $2N$ рет (N саны көп) лақтырылғанда N рет «цифр» жағының пайда болуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** $\frac{0,564}{\sqrt{N}}$.

873. Нысанаға бір рет атқанда оның тиуінің ықтималдығы 0,8-ге тең. Нысанаға 100 рет атқанда оның: а) 50 рет; ә) 75 рет; б) 80 рет; в) 100 рет тиуінің ықтималдығын табу керек. **Ж:** а)0; ә)0.0457; б)0.0997; в)0.

874. Ұл баланың өмірге келу ықтималдығы 0,51-ге тең болсын. 100 сәбидің ішінде: а) 50 ұл бала; ә) 50 қыз бала болуының ықтималдығын табу керек.

Ж: а)0.0782; ә)0.0782; б)0.0108.

875. Ойын сүйегі 180 рет лақтырылғанда "5" санының 40 рет пайда болуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0.0108.

876. Зеңбіректен бір рет атылған снарядтың нысанаға дәл тию ықтималдығы p=0,25. Атылған 75 снарядтың 24-ің нысанаға тиюінің ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0.03992.

877. Әрбір 2100 тәуелсіз тәжірибе кезінде *A* оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,7 тең. *A* оқиғасының: а) 1470 реттен кем емес және 1500 реттен артық емес; ә) 1400 реттен кем емес, б) 1469 реттен артық емес пайда болуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** а)0.4236; ә)0.5; б)0.4801.

878. Тиынды 460 рет лақтырғанда "цифр" жағының 190 реттен кем емес және 210 реттен артық емес пайда болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,0306.

879. Ұл баланың өмірге келу ықтималдығы 0,51 тең. 100 сәбидің ішінде 45 реттен кем емес және 55 реттен артық емес ұл балалардың болуының ықтималдығын есептеу керек. **Ж:** 0,673.

880. ойын сүйегін 180 рет лақтырғанда "5" санының 20 реттен кем емес және 25 реттен артық емес пайда болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,3883.

881. Әрбір детальдың стандартты болу ықтималдығы 0,9 тең. 144 детальдың стандартты детальдардың саны 125 деталдан кем емес және 135 деталдан артық емес стандартты болуының ықтималдығын табу керек.

Ж: 0.8329.

882. Атылған оқтың нысанаға тию ықтималдығы 0,7-ге тең. 300 оқтың нысанаға 215-тен кем емес және 225-тен артық емес аралығында тиуінің ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0.2349.

883. Әрбір тәжірибеде *A* оқиғасының пайда болу ықтималдығы $p=0,5$ тең. 900 тәуелсіз тәжірибе жүргізілген, салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан ауытқуының абсолют шамасы $\varepsilon=0,02$-ден артық емес болуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0.7698.

884. Әрбір 144 детальдың стандартты болу ықтималдығы 0,9-ға тең. Салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан ауытқуының абсолюттік шамасы $\varepsilon=0,01$ артық емес болуының ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0.311.

885. Тиын 500 рет лақтырылғанда салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан ауытқуының абсолют шамасы $\varepsilon=0,03$-тен артық емес болуының ықтималдығын есептеу керек. **Ж:** 0.8198.

886. Нысанаға 300 рет оқ атылды. Әрбір оқтың нысанаға тию ықтималдығы 0,7 тең. Салыстырмалы жиіліктің ықтималдығын ауытқуының абсолют шамасы $\varepsilon=0,04$-тен артық емес болуының ықтималдығын есептеу керек.

Ж: 0.869.

887. Әрбір тәуелсіз тәжірибелер кезінде *A* оқиғасының пайда болуының ықтималдығы $p=0,8$-ге тең. Салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан ауытқуының абсолют шамасы $\varepsilon=0,02$-ден кіші болуының ықтималдығы 0,7888 болу үшін қанша тәуелсіз тәжірибелер жасау керек? **Ж:** 625.

888. Детальдың стандартты болуының ықтималдығы 0,9-ға тең. Салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан ауытқуының абсолют шамасы ε *=0,05*-тен артық емес болуының ықтималдығы 0,9876 болу үшін қанша тәжірибе жасау керек? **Ж:** 225.

889. Әрбір 600 тәуелсіз тәжірибелерде *A* оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,6 тең. Салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан ауытқуының абсолют шамасы ε-нен кіші болғандағы ықтималдығы 0,8664 тең. ε санын табу керек. **Ж:** 0.03.

890. Әрбір 400 өнімнің сапалы болуының ықтималдығы p=0,8 тең. Салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан ауытқуының абсолют шамасы ε -нен кіші болғандағы ықтималдығы 0,99 тең. ε санын табу керек. **Ж:** 0.05.

891. Техникалық бақылау бөлімі 900 детальды тексерді. Әрбір детальдың стандартты болу ықтималдығы p=0,9 тең. Ықтималдығы 0,95 болатындай тексерілген датальдардың ішінде m стандартты делатьдың санын анықтау керек. **Ж:** 739<m<827.

892. Ойын сүйегінің 80 рет лақтырылды. Ықтималдығы 0,99 болатындай “5” санын түсу санын табу керек. **Ж:** m=5.

893. Салыстырмалы жиіліктің $p = 0{,}8$ ықтималдығынан ауытқуының абсолют шамасы $\varepsilon = 0{,}03$-тен кіші болуының ықтималдығы 0,9973 болуы үшін қанша тәжірибе жасау керек? **Ж:** 1600.

894. Салыстырмалы жиіліктің p=0,5 ықтималдығынан ауытқуының абсолют шамасы ε =0,03-тен кіші болуының ықтималдығы 0,9973 болуы үшін қанша тәжірибе жасау керек? **Ж:** 3600.

895. 1000 элемент бір-біріне байланыссыз жұмыс істейді. Әрбір элементтің белгілі бір Т уақытта жұмыс істемей қалу ықтималдығы *p=0,002*. Т уақыт ішінде бес элементтің жұмыс істемей қалуыныңы ықтималдығын табу керек.

Нұсқау: $e^{-2} = 0{,}13534$. **Ж:** 0.036.

896. Зауыттан шығатын өнімнің орта есеппен алғанда 0,02 % жарамсыз бұйым. 5000 бұйымды алып тексергенде жарамсыз бұйымдардың саны үшке тең болу ықтималдығы қандай? Нұсқау: $e^{1} = 0{,}36788$. **Ж:** 0.0613.

897. Дүкенге мың бөтелке минералдық су әкелінді. Әр бөтелкенің сынып қалу ықтималдығы 0,003 тең. Дүкенге әкелінге бөтелкелердің ішінде: а) екеуі; ә) екеуден кіші; б) екеуден көп; в) ең болмаса біреуі сынып қалу ықтималдығын табу керек. Нұсқау: $e^{-3} = 0{,}04979$. **Ж:** а)0.224; ә)0.199; б)0.577.

898. Бір лотериялық билеттің ұту ықтималдығы *p=0,005* тең. Сатып алынған 100 лотериялық билеттің: а) төртеу; ә) ең болмаса біреуі; б) төртеуден кем; в) төрттен кем емес ұтуының ықтималдығын табу керек.

Нұсқау: $e^{0,5} = 0{,}60653$. **Ж:** а)0.00002; ә)0.39347; б)0.99823; в)0.00177.

899. 250 детальдың әрқайсысының стандартты емес болуының ықтималдығы 0,004 тең. Осы детальдардың ішінде:

а) үшеуі; ә) үшеуінен кем; б) үшеуінен кем емес; в) ең болмаса бір детальдың стандартты емес екендігінің ықтималдығын табу керек.

Нұсқау: $e^{-1} = 0{,}36788$. **Ж:** а)0.0613; ә)0.9197; б)0.0803; в)0.63212.

8.3 КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР

Кездейсоқ шама деп тәжірибе нәтижесінде алдын ала белгісіз және көптеген себептерге байланысты өзінің мүмкін сандық мәндерінің тек қана біреуін қабылдайтын шаманы айтамыз.

Сонымен, тәжірибе нәтижесінде кездейсоқ оқиғаның пайда болуы немесе пайда болмауы алдын ала белгісіз болса, ал кездейсоқ шама міндетті түрде пайда болады, тек оның қандай мәнді қабылдайтыны алдын ала белгісіз. Мысалы, тиын екі рет лақтырылды. "Цифр" жағының пайда болуы немесе пайда болмауы кездейсоқ оқиға, ал оның пайда болу саны кездейсоқ шама болады. Бұл жағдайда кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері 0,1, 2 болады, яғни "цифр" жағы пайда болмайды немесе 1 рет, немесе 2 рет пайда болады.

Кездейсоқ шамалар X, У, Z, … бас әріптермен, ал оның мүмкін мәндері *x, y, z, ...* кіші әріптермен белгіленеді. Мысалдар келтірейік.

1. Жаңа туған 100 сәбидің ішіндегі ер балалар саны - кездейсоқ шама, ал оның мүмкін мәндері 0, 1, 2, ..., 100 болады.

2. Зеңбіректен атылған снарядтың ұшу қашықтығы - кездейсоқ шама болады. Ұшу қашықтығы оптикалық көздеуіштің орналасуына, желдің бағытымен жылдамдығына және т.б. көптеген себептерге байланысты. Бұл жағдайда осы шаманың мүмкін мәндері қандай да бір (*а, в*) аралығында жатады.

3. Тәуелсіз n тәжірибедегі *А* оқиғасының пайда болу саны - кездейсоқ шама болады, ал оның мүмкін мәндері 0, 1, 2, 3, ... n болады.

Кездейсоқ шамалар дискретті (үзілісті) және үзіліссіз кездейсоқ шамалар болып екіге бөлінеді.

1. Дискретті кездейсоқ шамалар. *X* кездейсоқ шамасының қабылдайтын мәндері ақырлы бүтін сандар немесе тізбек түрінде жазылса, онда ол *дискретті (үзілісті) кездейсоқ шама* деп аталды.

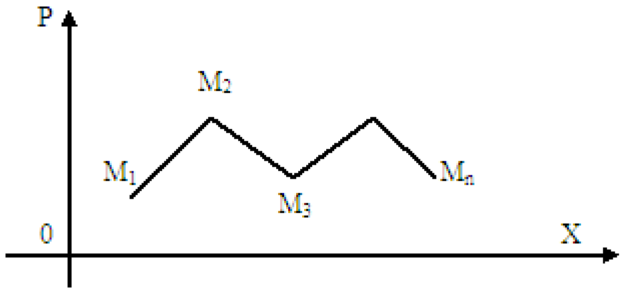
Дискретті *X* кездейсоқ шаманың $x_1, x_2, ..., x_n$ мәндері мен олардың сәйкес $p_1, p_2, ..., p_n$ ықтималдықтарының арасындағы байланысты дискретті кездейсоқ шаманың *үлестірім заңы* деп атайды. Ол кесте, график және аналитикалық түрде беріледі. Кесте түрінде былай беріледі:

8.1 Кесте

X	x_1	x_1	…	x_n
P	p_1	p_1	…	p_n

мұндағы $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1,\ P_i \geq 0,\ i - \overline{1,n}.$

Графиктік түрде былай беріледі: ол үшін декарттық координаталар жүйесінде $M_1(x_1, p_1), M_2(x_2, p_2)$, ..., $M_n(x_n, p_n)$ нүктелерін саламыз, мұндағы x_i - кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері, ал p_i - сәйкес ықтималдықтары. Егер осы нүктелерді кесінділермен қоссақ, онда пайда болған фигура *үлестірім көпмүшесі* деп аталады (8.1 Сурет).



8.1 Сурет

Егер X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері *0, 1, 2, ... , n* болып, оның сәйкес ықтималдығы

$$P(X = n) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Бернулли формуласымен берілсе, онда X кездейсоқ шамасы *Бернулли немесе бином үлестірім заңына бағынады* делінеді.

Егер X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері *0, 1, 2, ... , n*, ал *n* үлкен сан және p ықтималдығының шамасы аз болып, оның сәйкес ықтималдықтары

$$P(X = n) = P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \ \lambda = np.$$

Пуассон формуласымен берілсе, онда X кездейсоқ шамасы *Пуассон үлестірім заңына бағынады* деп аталады.

Егер X кездейсоқ шамасы *0, 1, 2, ... , n*, мәндерін қабылдап, олардың сәйкес ықтималдықтары

$$P(X = n) = p \cdot q^{m-1}, \quad m = 0,1,2,.., n$$

формуласымен анықталса, онда X кездейсоқ шамасы *геометриялық үлестірім заңына бағынады* деп аталады.

Егер X кездейсоқ шамасы *0, 1, 2, ... , n* мәндерін қабылдап, оның сәйкес ықтималдығы

$$P(X = m) = \frac{C_n^m C_{N-n}^{k-m}}{C_N^k}$$

формуласымен анықталса, мұндағы $0 \le m \le \min(n, k)$, онда X кездейсоқ шамасы *гипергеометриялық үлестірім заңына бағынады* деп аталады.

Егер тәуелсіз екі кездейсоқ шамалардың

8.2 Кесте

X	x_1	x_2
P	p_{11}	p_{12}

8.3 Кесте

У	y_1	y_2	y_3
P	p_{21}	p_{22}	p_{23}

үлестірім заңдары берілсе, мұндағы $p_{11}+p_{12}=1,\ \ p_{21}+p_{22}+p_{23}=1,$ онда

8.4 Кесте

X±У	$x_1 \pm y_1$	$x_1 \pm y_2$	$x_1 \pm y_3$	$x_2 \pm y_1$	$x_2 \pm y_2$	$x_2 \pm y_3$
P	$p_{11} \cdot p_{21}$	$p_{11} \cdot p_{22}$	$p_{11} \cdot p_{23}$	$p_{12} \cdot p_{21}$	$p_{12} \cdot p_{22}$	$p_{12} \cdot p_{23}$

және

8.5 Кесте

X·У	$x_1 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_2$	$x_1 \cdot y_3$	$x_2 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_3$
P	$p_{11} \cdot p_{21}$	$p_{11} \cdot p_{22}$	$p_{11} \cdot p_{23}$	$p_{12} \cdot p_{21}$	$p_{12} \cdot p_{22}$	$p_{12} \cdot p_{23}$

болады.

900. Екі тиынды лақтырғанда цифр жағының пайда болу саны х кездейсоқ шама. Оның үлестірім заңын табу керек.

Шешуі. Кездейсоқ шаманың қабылдайтын мәндері $x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=0.$ Онда сәйкес ықтималдықтары $P(X=x_1)=p_1=0{,}25,\ \ P(X=x_2)=p_2=0{,}5$, $P(X=x_3)=p_3=0{,}25.$ Осыдан

8.6 Кесте

X	2	1	0
P	0,25	0,5	0,2 5

Тексеру: 0,25+0,5+0,25=1. ▲

901. Тиынның "цифр" жағы түскенге дейінгі лақтыру саны кездейсоқ шама болсын. Үлестірім заңын табу керек.

Шешуі. Кезейсоқ шаманың қабылдайтын мәндері $x_1=1, x_2=2,..., x_n=n,...,$ онда оның сәйкес ықтималдықтары $P(X=x_1)=\frac{1}{2}$,

$P(X=x_2)=\frac{1}{2^2},...,\ P(X=x_n)=\frac{1}{2},...$. Осыдан

8.7 Кесте

X	1	2	...	n
P	1/2	$1/2^2$	...	1/2 n

Тексеру. Бұл жағдайда, ықтималдықтарының қосындысы шексіз геометриялық прогрессияның қосындысы болып табылады, осыдан

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}=\frac{1/2}{1-1/2}=1. \quad ▲$$

902. Мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы $p=0{,}7$ тең. Төрт рет атқанда нысанаға тию санының үлестірім заңын табу керек.

Шешуі. X кездейсоқ шама. Нысанаға оқтың тию саны

$x_1=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4.$

$P(X=0)=C_4^0q^4=0{,}3^4=0{,}0081.$

$P(X=1)=C_4^1pq^3=4\cdot0{,}7\cdot0{,}3^3=0{,}0756.$

$P(X=2)=C_4^2p^2q^2=6\cdot0{,}7^2\cdot0{,}3^2=0{,}2646.$

$P(X=3)=C_4^3p^3q=4\cdot0{,}7^3\cdot0{,}3=0{,}4116.$

$P(X=4)=C_4^4p^4=0{,}7^4=0{,}2401.$

Осыдан

8.8 Кесте

X	0	1	2	3	4
P	0, 0081	0,07 56	0,2 646	0,4 116	0,2 401

Тексеру: 0,0081+0,0756+0,2646+0,4116=1. ▲

903. Дискретті кездейсоқ шамалардың

8.9 Кесте

X	0	1
P	0,4	0,6

8.10 Кесте

У	2	3
P	0,3	0,7

үлестірім заңдары берілген. $X+У,\ X+У,\ X\cdot У$ үлестірім заңдарын табу керек.

Шешуі.

8.11 Кесте

Х+У	0+2	0+3	1+2	1+3
p	0,12	0,28	0,18	0,42

немесе

8.12 Кесте

Х+У	2	3	4
p	0,12	0,46	0,42

Осы сияқты

8.13 Кесте

Х-У	-3	-2	-1
p	0,28	0,18	0,54

8.14 Кесте

Х·У	0	2	3
p	0,4	0,18	0,42

▲

2. Мода. Оқиғалар ағыны. Дискретті Х кездейсоқ шаманың *M_0 модасы* деп ықтималдығы ең үлкен болатын Х кездейсоқ шаманың мәнін айтады.

Мысалы, кездейсоқ шама биномды үлестірім заңымен берілсе, онда мода $(n+1)p-1 < M_0 \le (n+1)p$ формуласынан табылады.

Кездейсоқ уақыт аралығында пайда болатын оқиғаларды қарастырайық. *Оқиғалар ағыны* деп уақыттың кездейсоқ бір мезгілде бірінен кейін бірі пайда болатын оқиғалар тізбегін айтамыз.

Мысалы, жедел жәрдем пунктіне автоматты телефон станциясына (АТС) түскен шақырулар, аэропортқа ұшақтың келуі, элементтердің бірінен кейін бірінің істен шығуы және т.б..

Егер: а) оқиғаның пайда болу ықтималдығы уақыт аралығының ұзақтығына байланысты;

ә) кез келген уақыт аралығындағы оқиғалар санының пайда болуының ықтималдығы, осы уақыт аралығына дейінгі оқиғалардың пайда болу санынан тәуелсіз;

б) екі немесе одан да көп оқиғалардың ықтималдықтары уақыт аралығы жеткілікті аз болғанша азая беретін болса, онда мұндай оқиғалар ағынын *жай оқиғалар ағыны* деп атайды.

t уақыт аралығында оқиғаның m рет пайда болу ықтималдығы

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)\cdot e^{-\lambda t}}{\text{m!}}.$$

Пуассон формуласымен анықталады, мұндағы λ бірлік уақыт мөлшеріндегі оқиғаның пайда болу саны болып табылады.

904. АТС-ке бір минутта түскен шақырудың саны орта есеппен екіге тең. 5 минут ішінде: а) үш рет; ә) үштен кем; б) үштен кем емес шақырудың түсу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. $\lambda = 2,\ t = 5,\ m = 3,$ онда

а) $P_5(3) = \dfrac{10^3 \cdot e^{10}}{3!} = \dfrac{1000 \cdot 0{,}000045}{6} = 0{,}0075;$

ә) $P_5(m < 3) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = e^{-10} + \dfrac{10 \cdot e^{-10}}{1!} + \dfrac{100 \cdot e^{-10}}{2!} = 0{,}002745;$

б) $P_5(m \geq 3) = 1 - P_5(m < 3) = 0{,}997255.$ ▲

3. Дискретті кездейсоқ шаманың сандық сипаттамасы. Үлестірім заңы кездейсоқ шаманы толық сипаттайды, бірақ көп жағдайларда үлестірім заңы белгілі бола бермейді, сондықтан көп жағдайларда кездейсоқ шаманың “сандық сипаттамасы” деген ұғым пайдаланады. Оған математикалық үміт, диспресия және орташа квадраттық ауытқу жатады.

Математикалық үміт кездейсоқ шаманың орта мәнін сипаттайды.

Дискретті Х кездейсоқ шамасының *математикалық үміті* деп олардың мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтарына көбейтінділерінің қосындысын айтады және ол былай белгіленеді.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Математикалық үміттің қасиеттері.

1. $M(C) = C,\quad C -$ тұрақты.
2. $M(CX) = CM(X).$
3. $M(X + У) = M(X) \pm M(У).$
4. $M(X \cdot У) = M(X) \cdot M(У).$

Биномдық үлестірім заңымен берілген кездейсоқ шаманың математикалық үміті $M(X) = np.$

Пуассон үлестірім заңымен берілген кездейсоқ шаманың математикалық үміті $M(X) = \lambda.$

Кездейсоқ шаманың математикалық үмітімен қатар оның математикалық үміттен ауытқуын бағалайтын сандық сипаттамалар дисперсия және орташа квадраттық ауытқу болып табылады.

Дискретті *X кездейсоқ шаманың дисперсиясы* деп кездейсоқ шаманың математикалық үмітінен ауытқуының квадратының математикалық үмітін айтамыз және оны былай белгілейміз:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2\ P_i.$$

Дисперсияны есептеудегі жеңіл формуласы

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} p_i - \left(\sum_{ш=1}^{m} x_i p_i \right)^2.$$

Дисперсияның қасиеттері:

1. $D(X) \geq 0.$

2. $D(C)=0,\ \ C-$тұрақты.

3. $D(CX)=C^2D(X).$

4. $D(X\pm У)=D(X)\pm D(Y).$

Биномдық үлестірім заңымен берілген кездейсоқ шаманың дисперсиясы $D(X)=npq.$

Пуассон үлестірім заңымен берілген кездейсоқ шаманың дисперсиясы $D(X)=\lambda.$

Дискретті X кездейсоқ шаманың орташа квадраттық ауытқуы: $\sigma(X)=\sqrt{D(x)}.$

905. Кездейсоқ шаманың

8.15 Кесте

X	1	2	3
p	0,2	0,5	0,3

үлестірім заңы берілген. Оның математикалық үмітін табу керек.

Шешуі. $M(X)=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}3=2{,}1.$ ▲

906. Алдыңғы мысалда берілген есептің шартын қарастырайық. Оның диспрециясын және орташа квадраттық ауытқуын табу керек.

Шешуі. $M(X)=2{,}1$

8.16 Кесте

X	1	4	9
p	0,2	0,5	0,63

$M(X^2)=1\cdot 0.2+4\cdot 0.5+9\cdot 0.3=4.9.$

Осыдан $D(X)=M(X^2)-M^2(X)=4.9-2.1^2=0.49,\ \ \sigma(X)=\sqrt{D(x)}=0{,}7.$ ▲

907. Дискретті X кездейсоқ шамасы x_1 және x_2 мүмкін мәндерін қабылдайды, мұндағы $x_1<x_2$. Математикалық үміті $M(X)=3{,}4,$ дисперсиясы $D(X)=0{,}24$ және x_1 мәніне сәйкес ықтималдығы $p_1=0{,}6$ болатын кездейсоқ шаманың үлестірім заңын табу керек.

Шешуі. Үлестірім заңы

8.17 Кесте

X	x_1	x_2
p	p_1	p_2

мұндағы $p_1+p_2=1,$ осыдан $p_2=1-p_1=0{,}4.$ Математикалық үмітпен диспресияның $M(X)=x_1p_1+x_2p_2,\ \ D(X)=x_1^{\,2}p_1+x_2^{\,2}p_2-M^2(X)$

формулалары бойынша $\begin{cases} 0,6x_1 + 0,4x_2 = 3,4 \\ 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 - 3,4^2 = 0,24 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 17 \\ 3x_1^2 + 2x_2^2 = 59 \end{cases}$

теңдеулер жүйесін қарастырамыз. Бұл жүйенің екі шешімі бар. $x_1 = 3,\ x_2 = 4$ немесе $x_1 = 3{,}8,\ x_2 = 1{,}4$ бірақ $x_1 < x_2$ болғандықтан

8.18 Кесте

X	3	4
p	0,6	0,4

болады. ▲

4. Моменттер. Дискретті X кездейсоқ шаманың $k-$*ретті бастапқы моменті* деп кездейсоқ шаманың $k-$шы дәрежесінің математикалық үмітін айтады және оны былай белгілейді:

$$v_k. = M(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i.$$

Дискретті X кездейсоқ шаманың $k-$*ретті орталық моменті* деп кездейсоқ шаманың математикалық үміттен ауытқуының $k-$шы дәрежесінің математикалық үмітін айтады және оны былай белгілейді:

$$\mu_k = M[X - M(x)]^k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k \cdot p_i.$$

Үшінші ретті орталық моменттің орташа квадраттық ауытқуының кубына қатынасын *ассиметрия* деп атайды және оны былай белгілейді:

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

X кездейсоқ шаманың *эксцессі* деп $E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$ теңдігімен анықталған өрнекті айтады.

Дербес жағдайда $v_1 = M(X),\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = D(X) = v_2 - v_1^2.$

Орталық моменттің анықтамасын және математикалық үмітін қасиеттерін қолданып

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3, \mu_4 = v_4 + 4v_3v_1 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4$$

теңдіктерін алуға болады.

908. Дискретті X кездейсоқ шамасы

8.19 Кесте

X	2	3	5
p	0,1	0,1	0,5

үлестірім заңымен берілген. Бірінші, екінші, үшінші, төртінші бастапқы және орталық моменттерін табу керек.

Шешуі. $v_1 = M(x) = 2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}5 = 3{,}9,$

$$v_2 = M(x^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}4 \cdot 25 \cdot 0{,}5 = 16{,}5,$$
$$v_3 = M(x^3) = 8 \cdot 0{,}1 + 27 \cdot 0{,}4 + 125 \cdot 0{,}5 = 74{,}1,$$
$$v_4 = M(x^4) = 16 \cdot 0{,}1 + 81 \cdot 0{,}4 + 625 \cdot 0{,}5 = 346{,}5.$$

$\mu_1 = 0,$

$\mu_2 = v_2 - v_1^2 = 16{,}5 - 3{,}9^2 = 1{,}29,$

$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2_1^3 = 74{,}1 - 3 \cdot 3{,}9 \cdot 16{,}5 + 2 \cdot 3{,}9^3 = -0{,}318,$

$\mu_4 = v_4 - 3v_3v_1 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4 = 346{,}5 - 4 \cdot 74{,}1 \cdot 3{,}9 + 6 \cdot 16{,}5 \cdot 3{,}9^2 - 3 \cdot 3{,}9^4 = 2{,}2977.$ ▲

909. А оқиғасының пайда болу ықтималдығы p. Бір тәжірибе кезінде A оқиғасының пайда болу санын X кездейсоқ шамасының үлестірім заңы түрінде жазу керек.

Ж:

X	0	1	2	3	…	m
P	q	p q	p^2q	$p3q$	…	$p^m q$

910. Жәшікте 4 ақ және 6 қара шар бар. Жәшіктен екі шар алынсын. Жәшіктен екі шар алынсын. Жәшіктен алынған ақ шарлардың санын X кездейсоқ шаманың үлестірім заңы түрінде жазу керек.

Ж:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	$p3q$

911. Үш атқыш нысанаға бір-бірден атыс жасады. Нысанаға тигізу ықтималдығы бірінші атқыш үшін 0,9, екіншісінікі – 0,8, үшіншісі – 0,7. нысанаға тиетін, оқтардың санын X кездейсоқ шамасының үлестірім заңы түрінде жазу керек.

Ж:

X	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

912. 100 лотериялық билеттің ішінде 500 теңгеден бес ұтыс және 50 теңгеден 20 ұтыс бар. Алынған бір билеттің ақшалай ұтысының үлестірім заңын табу керек.

Ж:

X	500	50	0
P	0,05	0,20	0,75

913. Алдыңғы есептің шартын қарастырайық. Алынған екі билеттің ақшалай ұтысының үлестірім заңын табу керек.

Ж:

X	1000	550	500	100	50	0
P	$\frac{1}{495}$	$\frac{2}{99}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{19}{495}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{37}{66}$

914. Ойын сүйегін екі рет лақтырғанда пайда болатын ұпайлардың қосындысының үлестірім заңын табу керек.

Ж:

X	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

915. Тиын үш рет лақтырылды. “Елтаңба” жағының пайда болу санының үлестірім заңын табу керек.

Ж:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

916. 6 детальдың 4-і стандартты деталь. Кездейсоқ алынған екі детальдың ішіндегі стандартты детальдар санының үлестірім заңын табу керек.

Ж:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

917. 6 детальдың 4-і стандартты деталь. Кездейсоқ алынған үш детальдың ішіндегі стандартты детальдар санының үлестірім заңын табу керек.

Ж:

X	1	2	3
P	0,2	0,6	0,2

918. Атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы 0,8 тең. Атқыш нысанаға тигізгенше оқ атады. Оқтың атылу санының үлестірім заңын есептеу керек.

Ж:

X	1	2	3	4	5
P	0,8	0,16	0,032	0,0064	0,00128

919. Станок – автомат 1000 деталь жасап шығарады. Оның ішінде ақауы бар детальдар кездесу ықтималдығы 0,003 тең. Ақауы бар детальдардың санының үлестірім заңын есептеу керек.

Нұсқау. $e^3 = 0{,}050$ деп алыңыз.

Ж:

X	0	1	2	3	4	5	…

P	0,050	0,150	0,225	0,225	0,169	0,101	…

Дискретті кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдары берілген. X+У, X-У, XУ кездейсоқ шамаларының үлестірім заңдарын табу керек.

920.

8.20 Кесте

X	1	2
p	0,6	0,4

8.21 Кесте

У	3	5
p	0,7	0,3

Ж:

X+У	4	5	6	7
P	0,42	0,28	0,18	0,12

X-У	-4	-3	-2	-1
P	0,42	0,28	0,18	0,12

XУ	3	5	6	10
P	0,42	0,18	0,28	0,12

921.

8.22 Кесте

X	0	1
p	0,8	0,2

8.23 Кесте

У	2	4	5
p	0,5	0,4	0,1

Ж:

X+У	2	3	4	5	6
P	0,40	0,10	0,32	0,16	0,02

X-У	-5	-4	-3	-2	-1
P	0,08	0,34	0,08	0,40	0,10

XУ	0	2	4	5

P	0,80	0,10	0,08	0,02

922. Диспечерлік пункте такси шақыру үшін бір минутта түскен тапсырмалардың орта саны 4-ке тең. Екі минут ішінде:

а) бес рет; ә) бестен кем рет; б) бестен кем емес рет тапсырыс болғандығының ықтималдығын табу керек.

Нұсқау: $e^3 = 0{,}0000335.$ **Ж:** а) 0,09148; ә) 0,0095; б) 0,99005.

923. Аэродромға бір сағатта орта есеппен үш ұшақ қонады. Екі сағат ішінде: а) төрт; ә) төрттен кем; б) төрттен кем емес ұшақ қонуының ықтималдығын табу керек.

Нұсқау: $e^3 = 0{,}00249.$ **Ж:** а) 0,13446; ә) 0,15189; б) 0,84811.

Дискретті X кездейсоқ шаманың үлестірім заңы берілген. Оның математикалық үмітін, дисперсиясын, орташа квадраттық ауытқуын, модасын табу керек.

924.

8.24 Кесте

X	0	1	2	3	4
P	0,05	0,10	0,25	0,40	0,20

Ж: $M(x) = 2{,}6;$ $D(x) = 1{,}14;$ $\sigma = 1{,}0677;$ $M_0 = 3.$

925.

8.25 Кесте

X	1	3	5	7	9
P	0,10	0,40	0,08	0,34	0,08

Ж: $M(x) = 4{,}8;$ $D(x) = 5{,}8;$ $\sigma = 2{,}408;$ $M_0 = 3.$

926.

8.26 Кесте

X	-3	-1	0	1	3
P	0,08	0,16	0,26	0,30	0,20

Ж: $M(x) = 0{,}5;$ $D(x) = 2{,}73;$ $\sigma = 1{,}652;$ $M_0 = 1.$

927.

8.27 Кесте

X	-2	0	2	4	6
P	0,03	0,16	0,50	0,50	0,06

Ж: $M(x)=2{,}3;\quad D(x)=2{,}99;\qquad \sigma=1{,}729;\qquad M_0=2.$

Берілген *M(X)* математикалық үміті, $D(X)$ диспресиясы және x_1 мүмкін мәнінің p_1 ықтималдығы бойынша $x_1 < x_2$ болатындай, тек қана екі мүмкін болатын x_1 x_2 мәндерін қабылдайтын дискретті X кездейсоқ шамасының үлестірім заңын табу керек.

928. $p_1=0{,}9,\quad M(X)=3{,}1,\quad D(X)=0{,}09.$

Ж:

X	3	4
P	0,9	0,1

929. $p_1=0{,}8,\quad M(X)=2{,}4,\quad D(X)=0{,}64.$

Ж:

X	2	4
P	0,8	0,2

930. $p_1=0{,}7,\quad M(X)=2{,}6,\quad D(X)=0{,}84.$

Ж:

X	2	4
P	0,7	0,3

931. $p_1=0{,}5,\quad M(X)=3{,}5,\quad D(X)=0{,}25.$

Ж:

X	3	4
P	0,5	0,5

8.4 ҮЗІЛІССІЗ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР

1. Үзіліссіз кездейсоқ шамалар. Х кездейсоқ шамасының қабылдайтын мәндері шекті немесе шексіз аралықтардағы барлық мәндерді қабылдайтын болса, онда ол *үзіліссіз кездейсоқ шама* деп аталады.

Х кездейсоқ шамасының *үлестірім функциясы немесе интегралдық функциясы* деп кездейсоқ шаманыњ х-тен кіші болу ықтималдығын айтады және оны былай белгілейді

$$F(x)=P(X<x)$$

Үлестірім функциясының қасиеттері.

1. $0 \le F(x) \le 1$

2. $F(x)$ - кемімейтін функция, яғни $x_2 > x_1$ болғанда $F(x_2) \ge F(x_1)$.

3. Егер кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері (a, b) интервалына тиісті болса, онда $x \le a$ болғанда $F(x)=0$ және $x \ge b$ болғанда $F(x_2)=1$ болады.

1 - салдар. $P(x_1 \le X < x_2)=F(x_2)-F(x_1)$.

2 - салдар. $P(X=x)=0$.

3 - салдар. $F(-\infty)=0,\quad F(+\infty)=1$.

Егер дискретті Х кездейсоқ шамасы берілсе, онда оның үлестірім функциясы

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P_i \quad \text{болады.}$$

Үзіліссіз кездейсоқ шама Х-ң *үлестірім тығыздығы немесе дифференциалдық функциясы* деп үлестірім функциясының бірінші туындысын айтады және оны былай белгілейді: $f(x) = F'(x)$.

Үлестірім функциясының қасиеттері:

1. $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Дербес жағдайда, егер Х кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері (a, b) интервалына тиісті болса, онда $\int_a^b f(x)dx = 1$.

3. $P(x_1 \leq X \prec x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.
4. $f(\pm\infty) = 0$.

Егер $f(x)$ үлестірім тығыздығы берілсе, онда үлестірім функциясы

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

формуласымен табылады.

932. Х кездейсоқ шамасының үлестірім функциясы

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{егер} \quad x \leq -2; \\ 0{,}2x^2 - 0{,}8, & \text{егер} \quad -2 < x \leq 3; \\ 1, & \text{егер} \quad x > 3. \end{cases}$$

берілсін. Кездейсоқ шаманың мәндерінің $(0;\ 2)$ интервалына түсу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. $P(0 \leq X < 2) = F(2) - F(0) = (0{,}2 \cdot 2^2 - 0{,}8) - (0{,}2 \cdot 0^2 - 0{,}8) = 0{,}8$. ▲

933. Х кездейсоқ шамасының үлестірім заңы кесте түрінде берілсін.

X	1	3	4	6	7
P	0,05	0,20	0,35	0,30	0,10

Үлестірім функциясын табу керек.

Шешуі. 1. Егер $x \leq 1$ болса, онда $F(x) = 0$ болады.
2. Егер $1 < x \leq 3$ болса, онда $F(x) = 0{,}05$
3. Егер $3 < x \leq 4$ болса, онда $F(x) = 0{,}05 + 0{,}20 = 0{,}25$
4. Егер $4 < x \leq 6$ болса, онда $F(x) = 0{,}05 + 0{,}20 + 0{,}35 = 0{,}60$

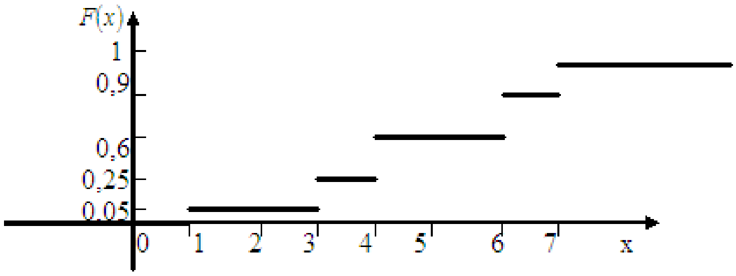
5. Егер $6 < x \le 7$ болса, онда $F(x) = 0{,}05 + 0{,}20 + 0{,}35 + 0{,}30 = 0{,}90$

6. Егер $x > 7$ болса, онда $F(x) = 1$.

Сонымен

$$F(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad x \le 1; \\ 0{,}05, & егер \quad 1 < x \le 3; \\ 0{,}25, & егер \quad 3 < x \le 4; \\ 0{,}60, & егер \quad 4 < x \le 6; \\ 0{,}90, & егер \quad 6 < x \le 7; \\ 1, & егер \quad x > 7. \end{cases}$$

Осы функцияның графигі (8. 2 Сурет)



8. 2 Сурет

▲

934. 933-есепте қарастырылған X кездейсоқ шаманың мәндері $(2; 5)$ интервалына түсу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. $P(2 \le x < 5) = F(5) - F(0) = 0{,}6 - 0{,}05 = 0{,}55$. ▲

935. 932-есепте берілген үлестірім функциясының үлестірім тығыздығын табу керек.

Шешуі. $$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad x \le -2; \\ 0{,}4x, & егер \quad -2 \prec x \le 3; \\ 0, & егер \quad x \succ 3. \end{cases}$$

▲

936. Үзіліссіз кездейсоқ шама X-ң үлестірім тығыздығы

$$f(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad x \le 1; \\ a \cdot (x-1)^2, & егер \quad 1 \prec x \le 4; \\ 0, & егер \quad x \succ 4. \end{cases}$$

берілген. Тұрақты a санын табу керек.

Шешуі. Үлестірім тығыздығының қасиеті бойынша $\int_1^4 f(x)dx = 1$ осыдан $a \cdot \frac{(x-1)^3}{3}\Big|_1^4 = 1$ немесе $a \cdot 9 = 1$. Сонымен $a = 1/9$. ▲

937. Үзіліссіз кездейсоқ шама X-њ үзіліссіз ‰лестірім тығыздығы

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 0;\\ 0{,}25x, & егер \quad 0\prec x\le 2;\\ 0, & егер \quad x\succ 2.\end{cases}$$

берілген. Оның $(0{,}4;\ 1{,}2)$ интервалына түсу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. $F(x)=\int\limits_{0,4}^{1,2} f(x)dx=\frac{1}{4}\int\limits_{0,4}^{1,2} xdx=\frac{1}{8}x^2\Big|_{0,4}^{1,2}=0{,}18-0{,}08=0{,}1.$ ▲

938. Үзіліссіз X кездейсоқ шаманың үзіліссіз үлестірім тығыздығы

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 0;\\ \frac{x+2}{6}, & егер \quad 0\prec x\le 2;\\ 0, & егер \quad x\succ 2.\end{cases}$$

Берілген кездейсоқ шаманың:

а) үлестірім функциясын табу керек,

ә) үлестірім тығыздығы мен функцияның графигін салу керек.

Шешуі. а) $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$ формуласын қолданамыз.

Егер $x\le 0$ болса, онда $f(x)=0$. Осыдан $F(x)=0$ болады.

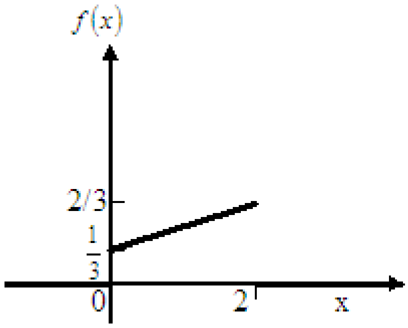
Егер $x\prec 0\le 2$ болса, онда $f(x)=\frac{x+2}{6}$. Олай болса

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{x}\frac{x+2}{6}dx=\frac{(x+2)^2}{12}\Big|_0^x=\frac{(x+2)^2}{12}-\frac{1}{3}.$$

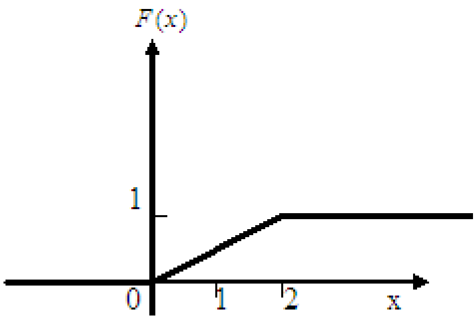
Егер $x\succ 2$ болса, онда $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{2}\frac{(x+2)}{6}dx+\int\limits_{2}^{x} 0\cdot dx=1.$

Сонымен $$F(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 0;\\ \frac{(x+2)^2}{12}-\frac{1}{3}, & егер \quad 0\prec x\le 2;\\ 1, & егер \quad x\succ 2.\end{cases}.$$

ә) Үлестірім тығыздығы мен функцияның графигін салайық (8.3,8.4 Суреттер)



8.3 Сурет



8.4 Сурет

2. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары. Үзіліссіз кездейсоқ шама Х-ң *математикалық үміті*

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\ f(x)dx$$

формуласын анықталады. Егер барлық мүмкін мәндері (a,b) интервалына тиісті болса, онда $M(X)=\int_{a}^{b}x\ f(x)dx$.

Үзіліссіз Х кездейсоқ шаманың $M_0(X)$ *модасы* деп оның үлестірім тығыздығының максимуміне сәйкес келетін кездейсоқ шаманың мәнін айтады.

Үзіліссіз Х кездейсоқ шаманың $M_e(X)$ *медианасы* деп $P(X\prec M_e(X))=P(X\succ M_e(X))=\frac{1}{2}$ теңдігімен анықталатын кездейсоқ шаманың мәнін айтады.

Үзіліссіз Х кездейсоқ шаманың *дисперсиясы*

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx \qquad \text{немесе} \qquad D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-M^2(X)$$

формуласымен анықталады. Егер барлық мүмкін мәндері (a,b) интервалына тиісті болса, онда $D(X)=\int_{a}^{b}[x-M(X)]^2 f(x)dx$ немесе $D(X)=\int_{a}^{b}x^2\cdot f(x)dx-M^2(X)$.

Жоғарыда көрсетілген дискретті кездейсоқ шаманың математикалық үмітімен дисперсиясының барлық қасиеттері үзіліссіз Х кездейсоқ шамасының математикалық үмітімен дисперсиясы үшін де орындалады.

Үзіліссіз Х кездейсоқ шаманың *орташа квадраттық ауытқуы* $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ формуласымен анықталады.

Үзіліссіз Х кездейсоқ шаманың k-ретті бастапқы моменті

$\nu_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx$, k-ретті орталық моменті $\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^k\cdot f(x)dx$

асимметриясы $a_S=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$ және эксцессі $\varepsilon_k=\frac{\mu_4}{\sigma_4}-3$ формулаларымен анықталады. Дербес жағдайларда $\nu_1=M(X)$, $\mu_1=0$, $\mu_2=D(X)=\nu_2-\nu_1^2$, $\mu_3=\nu_3-3\nu_1\ \nu_2+2\nu_1^3$,

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\ \nu_1^2-3\nu_1^4.$$

Егер үзіліссіз Х кездейсоқ шамасы (a,b) аралығында анықталып, оның үлестірім тығыздығы

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le a;\\ \frac{1}{b-a}, & егер \quad a<x\le b;\\ 0, & егер \quad x>b.\end{cases}$$

формуласымен берілсе, онда кездейсоқ шама *бірқалыпты үлестірім заңымен берілді* делінеді.

Егер үзіліссіз Х кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & егер \quad x\geq 0;\\ 0 \quad , & егер \quad x<0.\end{cases}$$

формуласымен берілсе, онда кездейсоқ шаманы *көрсеткішті үлестірім заңымен берілді* дейді.

Үзіліссіз Х кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

формуласымен берілсе, онда кездейсоқ шаманы *қалыпты үлестірім заңымен берілді* дейді, мұндағы $a=M(X)$ - математикалық үміт, ал $\sigma=\sigma(X)$ - орташа квадраттық ауытқу болады.

Үлестірім функциясы $F(x)=\Phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$ формуласымен анықталады, оның мәндері 1-кестеде берілген. Х кездейсоқ шамасының мәндері (α,β) интервалында болу ықтималдығы $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ формуласымен анықталады.

Х кездейсоқ шамасының математикалық үмітінен ауытқуының абсолют мәні оң δ санынан кіші болу ықтималдығы $P(|x-a|\prec\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ формуласымен анықталады. Бұл жағдайда $M_0=a,\quad M_e=a$.

939. Үзіліссіз Х кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы

$$F(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\leq 2;\\ (x-2)^2, & егер \quad 2<x\leq 3;\\ 1, & егер \quad x>3.\end{cases}$$

$M(X),\quad D(X),\quad \sigma(X),\quad M_0,\quad M_e$ табу керек.

Шешуі. Алдымен үлестірім тығыздығын табу керек.

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\leq 2;\\ 2(x-2), & егер \quad 2<x\leq 3;\\ 0, & егер \quad x>3.\end{cases}$$

Енді, $M(X)=\int\limits_a^b x\cdot f(x)dx=\int\limits_2^3 2x(x-2)dx=\left(\frac{2x^3}{3}-2x^2\right)\Big|_2^3=\frac{8}{3}$,

$$D(X)=\int\limits_a^b x^2\cdot f(x)dx-M^2(X)=\int\limits_2^3 2x^2(x-2)dx-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{4x^2}{3}\right)\Big|_2^3-\frac{64}{9}=\frac{1}{18},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Үлестірім тығыздық $(2,3)$ интервалында сызықты функция, сондықтан осы аралықта оның максимумы жоқ, олай болса кездейсоқ шаманың модасы жоқ.

$M_e = P(X < M_e) = P(X > M_e) = 0{,}5$ немесе $M_e = \int_{-\infty}^{M_e} f(x)dx = 0{,}5$ формуласымен табылады, олай болса $2\int_{2}^{M_e}(x-2)dx = 0{,}5$ немесе $(M_e-2)^2 = 0{,}5$ теңдеуінен $M_e = 2 \pm \sqrt{0{,}5}$ осыдан $2 < M_e < 3$ болғандықтан $M_e = 2+\sqrt{0{,}5} \approx 2{,}707$. ▲

940. Үзіліссіз Х кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығы

$$f(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad x \le 2; \\ -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6, & егер \quad 2 < x \le 4; \\ 0, & егер \quad x > 4. \end{cases}$$

берілген. Кездейсоқ шаманың модасын табу керек.

Шешуі. $f'(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$, $f'(x) = 0$ осыдан $x = 3$, $f''(3) = -\frac{3}{2} < 0$.

Олай болса функция $x = 3$ нүктесінде максимум мәніне тең болады. Осыдан $M_0 = 3$.

▲

941. Бір қалыпты үлестірім заңымен берілген Х кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын, математикалық үмітін, дисперсиясын және орташа квадраттық ауытқуын табу керек.

Шешуі. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ формуласын қолданайық.

Егер $x \le a$ болса, онда $F(x) = 0$.

Егер $a \prec x \le b$ болса, онда $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0\cdot dx + \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dx = \frac{x-a}{b-a}$.

Егер $x > b$ болса, онда $F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0\cdot dx + \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} dx + \int_{a}^{x} 0\cdot dx = 1$.

Осыдан

$$F(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad x \le a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & егер \quad a < x \le b; \\ 1, & егер \quad x > b. \end{cases}$$

$$M(X) = \int_{a}^{b} x\cdot f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{xdx}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - M^2(X) = \int_{a}^{b} \frac{x^2dx}{b-a} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}.$$ ▲

942. Көрсеткішті үлестірім заңымен берілген X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын, математикалық үмітін, дисперсиясын, орташа квадраттық ауытқуын, кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің $(a,\ b)$ интервалында болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Алдымен $F(x)$ функциясын табайық.

Егер $x < 0$ болса, онда $F(x) = 0$.

Егер $x \ge 0$ болса, онда $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \lambda \int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}$.

Осыдан

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{егер} \quad x \ge 0 \\ 0, & \text{егер} \quad x < 0. \end{cases}$$

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \lambda \int\limits_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X) = \lambda \int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + 2\int\limits_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= -\frac{2}{\lambda} x e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda}\int\limits_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = -\frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Осыдан $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \dfrac{1}{\lambda}$;

$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. ▲

943. Кездейсоқ шама қалыпты үлестірім заңымен берілген. Математикалық үміті $M(X) = 70$, дисперсиясы $D(X) = 100$. Кездейсоқ шаманың мәндері (50,80) интервалында болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. $\alpha = 50$ $\quad \beta = 80$ $\quad a = 70$ $\quad \sigma = 10$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\rho - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{80-70}{10}\right) - \Phi\left(\frac{50-70}{10}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) =$$

$$= 0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185.$$

▲

944. Үзіліссіз X кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер} \quad x \le 2; \\ (x-2)/3, & \text{егер} \quad 2 < x \le 5; \\ 1, & \text{егер} \quad x > 5. \end{cases}$$

Кездейсоқ шаманың мәндерінің

а) (3; 4), є) (3; 6), б) (1; 4), в) (1; 7) интервалына түсу ықтималдығын табу керек. **Ж:** а) $\frac{1}{3}$; ә) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) 1.

945. X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясы

$$F(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 2;\\ 0{,}5x, & егер \quad 2<x\le 4;\\ 1, & егер \quad x>4.\end{cases}$$

Тәжірибе кезінде X кездейсоқ шамасының

а) 0,2 -ден кем, б) үштен кем, в) үштен кем емес, г) бестен кіші емес мәнін қабылдауының ықтималдығын табу керек. **Ж:** а) 0; ә) 0,6; б) 0,2; в) 1.

946. X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясы $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctgx$.

Тәжірибе кезінде X кездейсоқ шамасының мәндерінің (0;1) интервалында болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,25.

947. X кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы

$$F(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 3;\\ (x-3)^2, & егер \quad 3\le x\prec 4;\\ 1, & егер \quad x\ge 4.\end{cases}$$

берілген. Кездейсоқ шаманың мәндерінің

а) (1; 2,9), є) (2,6; 3,5), б) (3,2; 3,9), в) (3,6; 4,5) интервалына түсу ықтималдығын табу керек. **Ж:** а) 0; ә) 0,25; б) 0,77; в) 0,64.

X - кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын табу керек.

948.

X	1	3	5
P	0,2	0,5	0,3

Ж: $F(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 1\\ 0{,}2, & егер \quad 1<x\le 3\\ 0{,}7, & егер \quad 3<x\le 5\\ 1, & егер \quad x>5.\end{cases}$

949.

X	0	5	10	15
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Ж: $F(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 0\\ 0{,}1, & егер \quad 0<x\le 5\\ 0{,}8, & егер \quad 10<x\le 15\\ 1, & егер \quad x>15.\end{cases}$

950.

X	-2	0	3	5
P	0,05	0,15	0,50	0,3

Ж: $F(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le -2\\ 0{,}05, & егер \quad -2<x\le 0\\ 0{,}2, & егер \quad 0<x\le 3\\ 0{,}7, & егер \quad x>5\\ 1, & егер \quad x>5.\end{cases}$

951.

X	-1	0	1	2
P	0,25	0,30	0,35	0,10

Ж: $F(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le -1\\ 0{,}25, & егер \quad -1<x\le 0\\ 0{,}55, & егер \quad 0<x\le 1\\ 0{,}90 & егер \quad 1<x\le 2\\ 1, & егер \quad x>2.\end{cases}$

952. Жәшікте 5 ақ және 20 қара шар бар. Бір шар алынды. X кездейсоқ шамасын алынған ақ шардың саны деп алып үлестірім функциясын құру керек.

Ж: $F(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 0\\ 0{,}8, & егер \quad 0<x\le 1\\ 1, & егер \quad x>1.\end{cases}$

953. Жәшікте 4 ақ және 6 қара шар бар. Екі шар алынды. X кездейсоқ шамасы алынған ақ шардың саны. үлестірім функциясын құру керек.

Ж: $F(x)=\begin{cases}0, & егер \ \ x\le 0\\ \dfrac{1}{3}, & егер \ \ 1<x\le 2\\ 1, & егер \ \ x>2.\end{cases}$

X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясы берілген. Үлестірім тығыздығын табу керек:

954. $F(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 0;\\ 1-\cos x, & егер \quad 0<x\le \pi/2;\\ 1, & егер \quad x>\pi/2.\end{cases}$

955. $F(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le -3;\\ \dfrac{1}{16}(x+3)^2, & егер \quad -3<x\le 1;\\ 1, & егер \quad x>1.\end{cases}$

Ж: $f(x)=\begin{cases}0, & егер \ \ x\le 0\\ \sin x, & егер \ \ 0<x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0, & егер \ \ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

Ж: $f(x)=\begin{cases}0, & егер \ \ x\le -3\\ \dfrac{x+3}{8}, & егер \ \ -3<x\le 10\\ 0, & егер \ \ x>1.\end{cases}$

956. Үзіліссіз X кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы $f(x)=\dfrac{a}{x^2+1}$ берілген. Тұрақты a санын табу керек. **Ж:** $\dfrac{1}{\pi}$.

X кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы берілген. Тұрақты a санын табу керек.

957. $f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 0;\\ \alpha\sin x, & егер \quad 0<x\le \pi;\\ 0, & егер \quad x>\pi.\end{cases}$

958. $f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 0;\\ a(3x-x^2), & егер \quad 0<x\le 3;\\ 0, & егер \quad x>3.\end{cases}$

Ж: 0,5 .

Ж: 2/9.

959. X кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 0\\ \dfrac{3}{2}\sin 2x, & егер \quad 0\le x\le \pi/3\\ 0, & егер \quad x>\pi/3\end{cases}$$

берілген. Кездейсоқ шаманың мәндерінің $\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ интервалында болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** 3/8.

960. X кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы

$$f(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad x<0; \\ 3x^2, & егер \quad 0\le x\le 1; \\ 0, & егер \quad x>1. \end{cases}$$

берілген. Кездейсоқ шаманың мәндерінің а) $(-3;0{,}5)$, ә) $(0{,}2;0{,}8)$, б) $(0.5;2)$ интервалында болу ықтималдығын табу керек. **Ж:** а) 0,125; ә) 0,504; б) 0,875.

961. X кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы

$$f(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad x\le -3; \\ \frac{1}{8}(x+3), & егер \quad -3<x\le 1; \\ 0, & егер \quad x>1. \end{cases}$$

берілген. Кездейсоқ шаманың мәндерінің а) $(-2;0)$, ә) $(-4;0)$, б) $(-1;2)$ интервалына түсу ықтималдығын есептеу керек. **Ж:** а) 0,5; ә) 9/16; б) 0,75.

X кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы берілген. Кездейсоқ шаманың үлестірім функциясын табу керек.

962.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad 0\le 0; \\ \frac{1}{2}\sin x, & егер \quad 0<x\le\pi; \\ 0, & егер \quad x\ge\pi. \end{cases}$$

Ж:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad 0\le 0; \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & егер \quad 0<x \\ 1, & егер \quad x\ge\pi. \end{cases}$$

963.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad 0\le 1; \\ x-0{,}5, & егер \quad 1<x\le 2; \\ 0, & егер \quad x>2. \end{cases}$$

Ж:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad 0\le 1; \\ 0.5x^2-0.5x, & егер \quad 1<x\le \\ 1, & егер \quad x>2. \end{cases}$$

964.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

Ж:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctgx$$

965.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad x\le 0; \\ x/4, & егер \quad 0<x\le 2; \\ 1-\frac{x}{4}, & егер \quad 2<x\le 4; \\ 0, & егер \quad x>4. \end{cases}$$

Ж:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad x\le 0; \\ x^2/8, & егер \quad 0<x\le 2; \\ x-\frac{x^2}{8}-1, & егер \quad 2<x\le 4; \\ 1, & егер \quad x>4. \end{cases}$$

X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясы берілген. Кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын және орташа квадраттық ауытқуын табу керек.

966. $f(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad x \le 0; \\ 2x, & егер \quad 0 < x \le 1; \\ 0, & егер \quad x > 1. \end{cases}$

Ж: $M(x)=2/3$
$D(x)=1/18$
$\sigma(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

967. $f(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad x \le -3; \\ \dfrac{1}{8}(x+3), & егер \quad -3 < x \le 1; \\ 0, & егер \quad x > 1. \end{cases}$

Ж: $M(x)=-1/3$
$D(x)=8/9$
$\sigma(x)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

968. $f(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad x \le 0; \\ 0{,}5\sin x, & егер \quad 0 < x \le \pi; \\ 0, & егер \quad x > \pi. \end{cases}$

Ж: $M(x)=\pi/2$
$D(x)=\dfrac{\pi^2-8}{4}$
$\sigma(x)=\dfrac{\sqrt{\pi^2-8}}{2}$

969. $f(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad x < 0; \\ x - x^3/4, & егер \quad 0 \le x \le 2; \\ 0, & егер \quad x > 2. \end{cases}$

Ж: $M(x)=15/16$
$D(x)=44/225$
$\sigma(x)=\dfrac{2\sqrt{11}}{15}$

X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясы берілген. Кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын және орташа квадраттық ауытқуын табу керек.

970. $F(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad x \le 0; \\ x/4, & егер \quad 0 < x \le 4; \\ 1, & егер \quad x > 4. \end{cases}$

Ж: $M(x)=2$
$D(x)=\dfrac{4}{3}$
$\sigma(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

971. $F(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad x > 2; \\ 1-\dfrac{8}{x^3}, & егер \quad x < 2. \end{cases}$

Ж: $M(x)=3$
$D(x)=3$
$\sigma(x)=\sqrt{3}$

972. $F(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad x \le 1; \\ 0{,}5(x^2-x), & егер \quad 1 < x \le 2; \\ 1, & егер \quad x > 2. \end{cases}$

Ж: $M(x)=19/12$
$D(x)=\dfrac{11}{144}$
$\sigma(x)=\dfrac{\sqrt{11}}{12}$

973. $F(x)=\begin{cases} 0, & егер \quad x \le 0; \\ 0{,}04x^2, & егер \quad 0 < x \le 5; \\ 1, & егер \quad x > 5. \end{cases}$

Ж: $M(x)=10/3$
$D(x)=\dfrac{25}{18}$
$\sigma(x)=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$

X кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы берілген. Модасы мен медианасын табу керек.

974. $$f(x)=\begin{cases} 0, & егер\ \ x\le 0; \\ 2\cos 2x, & егер\ \ 0<x\le \pi/4 \\ 0, & егер\ \ x>\pi/4. \end{cases}$$

Ж: $M_o=\dfrac{\pi}{8}$, $M_e=\dfrac{\pi}{12}$

975. $$f(x)=\begin{cases} 0, & егер\ \ x\le 0; \\ -0{,}75x^2+6x-11{,}25, & егер\ \ 3<x\le 5; \\ 0, & егер\ \ x>5. \end{cases}$$

Ж: $M_o=4$, $M_e=4$

976. $$f(x)=\begin{cases} 0, & егер\ \ x\le 0; \\ x-x^3/4, & егер\ \ 0<x\le 2; \\ 0, & егер\ \ x>2. \end{cases}$$

Ж: $M_o=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $M_e=4-2\sqrt{2}$

977. $$f(x)=\begin{cases} 0, & егер\ \ x<2; \\ -0{,}75(2-x)(x-4), & егер\ \ 2\le x\le 4; \\ 0, & егер\ \ x>4. \end{cases}$$

Ж: $M_o=3$, $M_e=3$

Кездейсоқ шама қалыпты үлестірім заңымен берілген. Оның математикалық үміті a-ға, орташа квадрат ауытқуы σ-ға тең. Кездейсоқ шаманың мәндерінің (α,β) интервалында болу ықтималдығын табу керек.

978. $a=5$, $\sigma=0{,}8$, $\alpha=4$, $\beta=7$. **Ж:** 0,8882

979. $a=20$, $\sigma=5$, $\alpha=15$, $\beta=25$. **Ж:** 0,6826

980. $a=10$, $\sigma=2$, $\alpha=12$, $\beta=14$. **Ж:** 0,1359

981. $a=15$, $\sigma=6$, $\alpha=9$, $\beta=21$. **Ж:** 0,6826

982. Зауытта жасалған бөлшектің диаметрі қалыпты үлестірімді заңымен берілген кездейсоқ шама. Диаметрінің стандартты ұзындығы $a=2{,}5см$, ал орташа квадраттық ауытқуы $\sigma=0{,}1см$. Бақылау кезінде диаметрі стандартты ±зындығынан ауытќуынының абсолют мєні $\delta=1{,}5мм$-ден аспайтындығынның ыќтималдығын табу керек. **Ж:** 0,8664

983. Дайындалған заттың салмағы қалыпты үлестірім заңымен берілген кездейсоқ шама. Оның стандартты салмағы $a=5кг$, ал орташа квадраттық ауытқуы $\sigma=2гр$. Тексеру кезінде заттың салмағы стандартты салмағынан ауытқуының абсолют шамасы $\delta=2{,}5г$ -нан аспауының ықтималдығын табу керек. **Ж:** 0,7888.

984. Қалыпты үлестірім заңымен берілген кездейсоқ шаманың $M(x)=a=26$, $D(x)=\sigma^2=4$. Кездейсоқ шаманың математикалық үміттен ауытқуының абсолют мәні $\delta=1$ аспауының ықтималдығын табу керек.

Ж: 0,383.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). - Алматы: «Иль-Тех-Кітап». ЖШС, 2000. - 744 б.

2. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. – Алматы: ҚазТУ, 2000. – 254 б.

3. Берман Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа. – Москва: Наука, 1985.-384 с.

4. Божанов Е.Т. Конспект лекции по высшей математике. Часть I, II. -1992.

5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М., Наука, 1980.

6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М., Наука, 1980.

7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть1,2. - М., Высшая школа, 1998.

8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнении по математическому анализу. - М., Наука, 1985.

9. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.К. Жоғары математика. - Алматы: КБП, 2004. - 409 б.

10. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М. - 1992-1995г.

11. Қабдықайыров Қ. Жоғары математика. - Алматы: РБК, 1993.

12. Қасымов Қ.А., Қасымов Е.А. Жоғары математика курсы. - Алматы: Санат, 1994.

13. Пискунов Н. С. Дифференциальные и интегральные исчисления. Часть I, II. - 1972.

14. Сборник индивидуальных задании по высшей математике. Под ред. Рябушка А. П. - Минск, 2001.

15. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – Москва: Наука, 1996.-736 с.

16. Хасеинов К.А. Каноны математики. – Алматы: Атамұра, 2003.

17. Тілепиев М.Ш., Ералы С.Е. Қатарлар теориясының элементтері. – Алматы: АЭжБИ, 2005

18. Ералы С.Е., Тілепі М.Ш. Ықтималдықтар теориясы. – Алматы: АЭжБИ, 2007

19. Құлжағарова Б.Т. Дифференциалдық теңдеулер. -Ақтау, КМТжИУ баспаханасы, 2009

МАЗМҰНЫ

Мұрат Шәпенұлы Тілепиев,
Базаргүл Табылғанқызы Құлжағарова

МАТЕМАТИКА 2
Есептер мен жаттығулар

Оқу құралы