ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш.ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСЫ

М.Ш. ТІЛЕПИЕВ, С.Ж. МАХИМОВА

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУДАН ЕСЕПТЕР ЖИНАҒЫ

2-бөлім

Оқу құралы

Ақтау 2011

ӘОЖ 517(075.8)
ББК 22.161я73
Т93

Пікір берушілер: Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті профессоры, ф.-м.ғ.д. С.Т. Мұхамбетжанов
Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті профессоры, ф-м.ғ.д. Н.Р. Садыков
Алматы энергетика және байланыс институтының доценті, ф-м.ғ.к. М.Ж. Байсалова

Т93 Тілепиев М.Ш., Махимова С.Ж.
Математикалық талдаудан есептер жинағы: Оқу құралы 2-бөлім. / М.Ш. Тілепиев, С.Ж. Махимова - Ақтау, Ш.Есенов атындағы КМТжИУ, 2011. - 83б.

ISBN 978-601-7349-09-7

Бұл оқу құралы Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінде оқитын математика мамандығының Математикалық анализ пәнінің бағдарламасына сәйкес жасалған.

ӘОЖ 517(075.8)
ББК 22.161я73

Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің Оқу-әдістемелік Кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылды

ISBN 978-601-7349-09-7

Кіріспе

Қазіргі ғылым мен техникада математикалық зерттеулер, модельдер, жобалар өте үлкен роль атқарады. Ол қазіргі ақпараттар жүйесінің дамуына тікелей байланысты. Демек математикалық нақты сандар шешімін табуға табысты қолдану мүмкіншілігін кеңейтеді.

Математика фундаменталды пән, одан дәріс беру төменгі жағдайды қарастырады:

а) ойдың логикалық және алгоритмдік дамуын;

ә)негізгі зерттеу әдістерін меңгеру және математикалық есептердің шешімдерін таба білу;

б) математикалық негізгі сандық әдістерді меңгеру және оны компьютерде орындау;

в) математикалық білімді өз бетінше ұғып алуға еңбектену, қолданбалы инженерлік және экономикалық есептерге талдау жүргізу.

Математиканың жалпы курсы дәстүрлі мамандар үшін оқу жоспары бойынша арнайы және жалпы техникалық пәндерді табысты оқытуға маңызды мәні бар инженерлер білімдерінің математикалық фундаментін қалайды.

«Математикалық талдаудан есептер жинағы» 2-бөлім «Математикалық анализ» пәнінің бағдарламасына сәйкес кредиттік жүйеге лайықты етіліп жазылған.

Мұнда бір айнымалы функцияның интегралдық есептеулері, анықталмаған интегралдар, интегралдау ережелері және кестесі, анықталған интеграл, меншіксіз интеграл, анықталған интегралдарды қолдану тақырыптары бойынша теориялық материалдар, сонымен қатар үлгі-мысалдардың шешу жолдары көрсетіліп, соңында өзбетімен орындау үшін жаттығулар жауаптарымен берілген.

1 Анықталмаған интеграл

1.1 Анықталмаған интеграл анықтамасы

Егер [a;b] кесіндісінің кез келген нүктесі үшін $F'(x)=f(x)$ немесе $dF(x)=f(x)dx$ теңдігі орындалса, онда осы кесіндіде $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының *алғашқы функциясы* деп аталады.

$f(x)$ функциясының *анықталмаған интегралы* деп $F(x)$+C алғашқы функциялардың жиынтығы аталады және ол былай белгіленеді:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

мұндағы C - тұрақты.

А н ы қ т а л м а ғ а н   и н т е г р а л   қ а с и е т т е р і:

1^0. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$.

2^0. $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$.

3^0. $\int dF(x) = F(x)+C$.

4^0. $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

5^0. $\int kf(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$, мұндағы k - тұрақты.

6^0. Егер $\int f(x)dx = F(x)+C,$ онда $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$.

Н е г і з г і   и н т е г р а л д а р   к е с т е с і

1. $\int dx = x+C$.
2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, x>0, \alpha>-1$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C, x>0$.
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C, a>0, a\neq 1$

$4'$. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$.
11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$
12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

$13'$. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$.

15′. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

1. $\int (x^2 - 3x + 2)dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int (x^2 - 3x + 2)dx = \int x^2 dx - 3\int xdx + 2\int dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + c$

2. $\int \left(\frac{1}{\mathrm{x}^2} dx - \frac{3}{x^3} - \cos x\right)dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: .

$$\int \left(\frac{1}{\mathrm{x}^2} dx - \frac{3}{x^3} - \cos x\right)dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{3}{x^3} dx - \int \cos xdx = \int x^{-2} dx -$$

$$-3\int x^{-3} dx - \int \cos xdx = -x^{-1} - 3\cdot\frac{x^{-2}}{-2} - \sin x + c = -\frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - \sin x + c$$

3. $\int \frac{\mathrm{x}^2 - \sqrt[3]{x}}{5\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{dx}$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{\mathrm{x}^2 - \sqrt[3]{x}}{5\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{dx} = \int \left(\frac{\mathrm{x}^2}{5\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{5\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \frac{1}{5}\int \left(x^{2-\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\int x^{\frac{4}{3}} dx - \int x^{-\frac{1}{3}} dx\right] = \frac{1}{5}\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{35}\cdot x^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10}\cdot x^{\frac{2}{3}} + c =$$

$$= \frac{3}{35}\sqrt[3]{x^7} - \frac{3}{10}\sqrt[3]{x^2} + C.$$

4. $\int (2\mathrm{x} - 1)^4 dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int (2x-1)^4 dx = \frac{1}{2}\int (2x-1)^4 d(2x-1) = \left| d(2x-1) = \frac{1}{2}dx \right| = \frac{(2x-1)^5}{10} + C.$$

5. $\int \frac{dx}{4x-3}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int \frac{dx}{4x-3} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x-3)}{4x-3}dx = \frac{1}{4}\ln(4x-3) + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x}}$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x}} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{7-3x}}d(7-3x) = \left| d(7-3x) = -\frac{1}{3}dx \right| = -\frac{2}{3}\sqrt{7-3x} + C.$$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$ интегралын табу керек.

Шешуі: Бөлімдегі үшмүшелікте толық квадратты шығарып аламыз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-1-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{3} + C\,.$$

8. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x} - arctgx + C.$

9. $\int 2^{3x+5}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int 2^{3x+5}dx = \frac{1}{3}\int 2^{3x+5}d(3x+5) \;= \frac{2^{3x+5}}{3\ln 2} + C.$

10. $\int ctg(6x+7)dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int ctg(6x+7)dx = \frac{1}{6}\int ctg(6x+7)d(6x+7) \;= \frac{1}{6}\ln\left|\sin(6x+7)\right| + C.$

Төмендегі анықталмаған интегралдарды есептеу керек:

11. $\int a^3x^4dx.$ Жауабы: $\frac{a^3x^4}{5}+c.$

12. $\int\left(x^2-2\sin x+1\right)dx.$ Жауабы: $\frac{x^3}{3}+2\cos x+x+C.$

13. $\int\left(x^2+1\right)\left(2x-1\right)dx.$ Жауабы: $\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}+x^2-x+C.$

14. $\int\sqrt{1+2x}\,dx.$ Жауабы: $\frac{\sqrt{(1+2x)^3}}{3}+C.$

15. $\int\left(3t+2\right)^3dt.$ Жауабы: $\frac{1}{12}(3t+2)^4+C.$

16. $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x-3}}dx.$ Жауабы: $\frac{n}{n-1}\sqrt[n]{(x-3)^{n-1}}+C.$

17. $\int\frac{dx}{x-a}.$ Жауабы: $\ln|x-a|+C.$

18. $\int\frac{dx}{a+bx}.$ Жауабы: $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C.$

19. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}.$ Жауабы: $-\frac{2}{3}\sqrt{4-3x}+C.$

20. $\int\left(\frac{1}{(x-2)^4}-\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{4}{(x+3)^2}+\frac{3}{x-4}\right)dx.$

Жауабы: $-\frac{1}{3\,(x-2)^3}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{x+3}+3\ln|x-4|+C.$

21. $\int\left(\frac{1}{(2x-3)^6}+\frac{1}{(4-7x)^9}\right)dx.$

Жауабы: $-\frac{1}{10\,(2x-3)^5}+\frac{1}{56\,(4-7x)^8}+C.$

22. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx.$ Жауабы: $\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

23. $\int\left(\frac{2a}{\sqrt{4-x}}-\frac{b}{(x-5)^2}+3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx.$

Жауабы: $-4a\sqrt{4-x}+\frac{b}{x-5}+\frac{9}{5}c\sqrt[3]{x^5}+C.$

24. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-10}}dx.$ Жауабы: $\ln\left|x+\sqrt{x^2-10}\right|+C.$

25. $\int\frac{dx}{\sqrt{10-x^2}}dx.$ Жауабы: $\arcsin\frac{x}{\sqrt{10}}+C.$

26. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-12x+25}}.$ Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|2x-3+\sqrt{4x^2-12x+25}\right|+\mathrm{C}.$

27. $\int\frac{dx}{\sqrt{7+12x-4x^2}}.$ Жауабы: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-3}{4}+\mathrm{C}.$

28. $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}.$ Жауабы: $\frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$

29. $\int\frac{dx}{3x^2+5}.$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{15}}arctg\left(x\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+C.$

30. $\int\frac{dx}{7x^2-8}.$ Жауабы: $\frac{1}{4\sqrt{14}}\ln\left|\frac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}}\right|+C.$

31. $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}.$ Жауабы: $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$

32. $\int\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+4x+9}.$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}+c.$

33. $\int\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+4x+4}.$ Жауабы: $-\frac{1}{x+2}+c.$

34. $\int \frac{dx}{x^2-10}$ Жауабы: $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|+C.$

35. $\int \frac{dx}{x^2+10}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{10}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{10}}+C.$

36. $\int \frac{dx}{x^2+10x}$ Жауабы: $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x}{x+10}\right|+C.$

37. $\int \frac{\mathrm{x}^4}{x^2+1}dx$ Жауабы: $\frac{x^3}{3}-x+arctgx+c.$

38. $\int \frac{dx}{4x^2-12x+25}$ Жауабы: $\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{x}-3}{4}+\mathrm{C}$

39. $\int \frac{dx}{4x^2-12x+9}$ Жауабы: $-\frac{1}{2(2\mathrm{x}-3)}+\mathrm{C}$

40. $\int \frac{dx}{4x^2-12x-7}$ Жауабы: $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{2\mathrm{x}-7}{2\mathrm{x}+1}\right|+\mathrm{C}$

41. $\int \frac{dx}{20+24x-9x^2}$ Жауабы: $\frac{1}{36}\ln\left|\frac{2+3\mathrm{x}}{10-3\mathrm{x}}\right|+\mathrm{C}$

42. $\int \frac{dx}{3-8x-3x^2}$ Жауабы: $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{3+\mathrm{x}}{1-3\mathrm{x}}\right|+\mathrm{C}$

43. $\int 3^x\cdot e^x dx$ Жауабы: $\frac{3^x\cdot e^x}{1+\ln 3}+\mathrm{C}$

44. $\int \frac{dx}{2^{4x+5}}$ Жауабы: $-\frac{2^{-4x-5}}{4\ \ln 2}+\mathrm{C}$

45. $\int\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$ Жауабы: $ae^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}+C.$

46. $\int 5^{2-3x}dx$ Жауабы: $-\frac{5^{2-3x}}{3\ln 5}+C$

47. $\int (2tgx+3ctgx)^2dx$ Жауабы: $4tgx-9ctgx-x+C.$

48. $\int tg(1-6x)dx$ Жауабы: $\frac{1}{6}\ln\left|cos(1-6x)\right|+C.$

49. $\int (\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{\sqrt{2}})dx$ Жауабы: $-\frac{2}{3}\cos\frac{3x}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

50. $\int (cos5x+\sin 5x)^2dx$ Жауабы: $x-\frac{1}{10}\cos 10x+C.$

51. $\int ctg(5x-7)dx$ Жауабы: $\frac{1}{5}\ln\left|\sin(5x-7)\right|+C.$

52. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-x)}$ Жауабы: $-tg(1-x)+C.$

53. $\int \frac{dx}{\sin^2(2+3x)}$ Жауабы: $-\frac{1}{3}ctg(2+3x)+C.$

54. $\int (ctg\frac{x}{5}+tg5x)dx$ Жауабы: $5\ln\left|\sin\frac{x}{5}\right|-\frac{1}{5}\ln\left|\cos 5x\right|+C$

55. $\int (ch3x+sh4x)dx$ Жауабы: $\left(\frac{1}{3}sh3x+\frac{1}{4}ch4x\right)+C.$

56. $\int \left(\frac{1}{ch^2 2x}+\frac{1}{sh^2\frac{x}{3}}\right)dx$ Жауабы: $\frac{1}{2}th2x-3cth\frac{x}{3}+C.$

57. $\int tg^2 5xdx$ Жауабы: $\frac{1}{5}tg5x-x+C$

58. $\int ctg^2 2xdx$ Жауабы: $-\frac{1}{2}ctg2x-x+C$

59. $\int th^2xdx$ Жауабы: $x-thx+C$

60. $\int cth^2xdx$ Жауабы: $x-cthx+C$

1.2 Дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы интегралдау

Егер $\int f(x)dx = F(x)+C$ және $u=\varphi(x)$ болса, онда

$$\int f(u)\,u'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C.$$

61. $\int t^2\left(2-t^3\right)^3 dt$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int t^2\left(2-t^3\right)^3 dt = -\frac{1}{3}\int(-3)t^2\left(2-t^3\right)^3 dt = \left|-3t^2dt = d\left(2-t^3\right)\right| =$$

$$-\frac{1}{3}\int\left(2-t^3\right)^3 d\left(2-t^3\right) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(2-t^3\right)^4}{4}+c = -\frac{\left(2-t^3\right)^4}{12}+c.$$

62. $\int\frac{\sin x dx}{1+\cos x}$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int\frac{\sin x dx}{1+\cos x} = -\int\frac{d\cos x}{1+\cos x} = -\int\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x} = \ln|1+\cos x|+C.$$

63. $\int e^x\cos e^x dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int e^x\cos e^x dx = \int\cos e^x de^x = \sin e^x + C.$

64. $\int\frac{x^2dx}{\left(5+2x^3\right)^2}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int\frac{x^2dx}{\left(5+2x^3\right)^2} = \frac{1}{6}\int\frac{d\left(5+2x^3\right)}{\left(5+2x^3\right)^2} = -\frac{1}{6\left(5+2x^3\right)}+c.$

65. $\int\frac{5x dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int\frac{5x dx}{\left(x^2+1\right)^2} = 5\int\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{5}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{5}{2\left(x^2+1\right)}+c.$

66. $\int\frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int\frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx=\int\frac{5(x+3)-18}{(x+3)^2-49}dx=5\int\frac{(x+3)dx}{(x+3)^2-49}-18\int\frac{dx}{(x+3)^2-49}=\frac{5}{2}\ln\left|(x+3)^2-49\right|-$$

$$-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x+3-7}{x+3+7}\right|+C=\frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right|-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right|+C.$$

67. $\int\frac{3x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int\frac{3x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}}dx=\int\frac{3x-9+13}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx=3\int\frac{x-3}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx+13\int\frac{dx}{\sqrt{16-(x-3)^2}}=$$

$$=-3\sqrt{16-(x-3)^2}+13\arcsin\frac{x-3}{4}+C=-3\sqrt{7+6x-x^2}+13\arcsin\frac{x-3}{4}+C.$$

Төмендегі анықталмаған интегралдарды есептеу керек:

68. $\int\frac{xdx}{x^2+a}$ Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+a\right|+C$

69. $\int\frac{xdx}{2-x^2}$ Жауабы: $-\frac{1}{2}\ln\left|2-x^2\right|+C$

70. $\int\frac{e^t dt}{4-3e^t}$ Жауабы: $-\frac{1}{3}\ln\left|4-3e^t\right|+C$

71. $\int\frac{x^2dx}{2x^3+5}$ Жауабы: $\frac{1}{6}\ln\left|2x^2+5\right|+C$

72. $\int\frac{cosx\,dx}{4-\sin x}$ Жауабы: $-\ln\left|4-\sin x\right|+C$

73. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\cdot arctgx}$ Жауабы: $\ln\left|arctgx\right|+C$

74. $\int\frac{e^{2t}dt}{e^t+1}$ Жауабы: $e^t-\ln(e^t+1)+C$

75. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}$ Жауабы: $\sqrt{x^2+a}+C$

76. $\int \frac{(x+b)dx}{\sqrt{x^2+a}}$ Жауабы: $\sqrt{x^2+a}+b\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$

77. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ Жауабы: $-\sqrt{a^2-x^2}+C$

78. $\int \frac{(x+b)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ Жауабы: $-\sqrt{a^2-x^2}+b\cdot\arcsin x+C$

79. $\int \frac{(7+4x)dx}{\sqrt{5-7x-2x^2}}$ Жауабы: $-\sqrt{5-7x-2x^2}+C$

80. $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{3x^2+4x+6}}$ Жауабы: $\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+4x+6}+C$

81. $\int \frac{(2x+p)dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ Жауабы: $\sqrt{x^2+px+q}+C$

82. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+4}}$ Жауабы: $2\sqrt{e^x+4}+C$

83. $\int \frac{\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{1+x^2}}$ Жауабы: $\frac{1}{3}\ln^3(x+\sqrt{1+x^2})+C$

84. $\int \frac{xdx}{9-x^4}$ Жауабы: $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+x^2}{3-x^2}\right|+C$

85. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$ Жауабы: $-\frac{1}{\arcsin x}+C$

86. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(ctgx+1)^3}$ Жауабы: $\frac{1}{2(ctgx+1)^2}+C$

87. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$ Жауабы: $\frac{2}{3}\sin\frac{x}{2}+C$

88. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}}$ Жауабы: $2\sqrt{1+\sin x}+C$

89. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$ Жауабы: $\frac{1}{\cos x}+C$

90. $\int \frac{2+\ln x}{x}dx$ Жауабы: $\ln(2+\ln x)+C$

91. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ Жауабы: $2\sin\sqrt{x}+C$

92. $\int \frac{\ln x dx}{x}$ Жауабы: $\ln\ln x+C$

93. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ Жауабы: $-e^{\frac{1}{x}}+C$

94. $\int ch^3 x\, shx dx$ Жауабы: $\frac{1}{4}ch^4 x+C$

95. $\int \frac{chx}{sh^4 x}dx$ Жауабы: $-\frac{1}{3sh^3 x}+C$

96. $\int tgx\cdot\sec^2 x dx$ Жауабы: $\frac{1}{2}tg^2 x+C$

97. $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ Жауабы: $\frac{2}{\ln 5}5^{\sqrt{x}}+C$

98. $\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}}$ Жауабы: $\frac{1}{\ln x}\mathrm{arctg}(a^x)+C$

99. $\int \frac{e^{-bx}dx}{1-e^{-2bx}}$ Жауабы: $-\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{1+e^{-bx}}{1-e^{-bx}}\right|+C$

100. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ Жауабы: $\arcsin e^x+C$

101. $\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x}$ Жауабы: $-\lg 10\cdot\cos(\lg x)+C$

102. $\int x^2\sin(x^3+5)dx$ Жауабы: $-\frac{1}{3}\cos(x^3+5)+C$

103. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$ Жауабы: $\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(x^2)+C$

104. $\int \frac{\mathrm{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ Жауабы: $-2\ln\left|\cos\sqrt{x}\right|+C$

105. $\int \frac{xdx}{9+x^4}$ Жауабы: $\frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\,x^2+C$

106. $\int \frac{(x^3-1)dx}{x^4-4x+5}$ Жауабы: $\frac{1}{4}\ln\left|x^4-4x+5\right|+C$

107. $\int \frac{(3-\sqrt{2+3x^2})dx}{2+3x^2}$

Жауабы: $\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{arctg}(x\sqrt{\frac{3}{2}})-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x\sqrt{3}+\sqrt{2+3x^2}\right|+C$

108. $\int x^3\sqrt{5-x^4}dx$ Жауабы: $-\frac{1}{6}\sqrt{\left(5-x^4\right)^3}+C$

109. $\int x^3\sqrt[5]{(x^4+16)^2}\,dx$ Жауабы: $\frac{5}{28}\sqrt[5]{(x^4+16)^7}+C$

110. $\int \frac{1-\sin x}{(x+\cos x)^5}dx$ Жауабы: $-\frac{1}{4(x+\cos x)^4}+C$

111. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$ Жауабы: $-\frac{1}{2\ln^2 x}+C$

112. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ Жауабы: $-\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C$

113. $\int \frac{(3-\sqrt{2+3x^2})dx}{2+3x^2}$

Жауабы: $\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(x\sqrt{3}+\sqrt{2+3x^2}\right)+C$

114. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}\, dx}{x}$ Жауабы: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}+\mathrm{C}$

115. $\int \frac{e^{arctgx}-x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$ Жауабы: $e^{arctgx}-\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)+\mathrm{C}$

116. $\int \frac{2^{\arcsin x}-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ Жауабы: $\frac{1}{\ln 2}2^{\arcsin x}+\sqrt{1-x^2}+\mathrm{C}$

117. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ Жауабы: $\mathrm{arcsine^x}+\mathrm{C}$

118. $\int \frac{\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx}$ Жауабы: $-\frac{1}{2}(\mathrm{arcsinx})^2+\sqrt{1-\mathrm{x}^2}+\mathrm{C}$

119. $\int \frac{x-arcctgx}{1+x^2}\mathrm{dx}$ Жауабы: $\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{x}^2)-\frac{1}{2}(\mathrm{arctgx})^2+\mathrm{C}$

120. $\int \frac{dx}{e^x+1}$ Жауабы: $\mathrm{x}-\ln\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\right)+\mathrm{C}$

1.3 Айнымалыны алмастыру.

Егер $\int f(x)dx$ интегралын есептеу керек, бірақ алғашқы функциясын табу қиын болса, онда $x=\varphi(t)$ алмастыру жасау керек$\Rightarrow$ $dx=\varphi'(t)dt$

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\ .$$

Келесі анықталмаған интегралдарды табыңыз:

121._ $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$ интегралын табу керек.
Шешуі: Мұнда $t = sinx,\ dt = cosxdt$ алмастыруын жасау керек. Сонда

$$\int \sqrt{\sin x}\cos xdx=\left|t=\sin x, dt=\cos xdx\right|=\int\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}t^{3/2}+C=\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}+C.$$

122. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx = \left|\sin x = t, \cos x dx = dt\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^3}} = -\frac{2}{\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C$.

123. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$ интегралын табу керек.

Шешуі: Келесі алмастыру жасаймыз:

$$t = x^2+1; \quad dt = 2xdx, \quad dx = \frac{dt}{2x};.$$

Сонда:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

124. $\int (2x+1)^{20}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1 = t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

125. $\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx = \left\{t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x \sin x = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\} = -\int dt = -t + C =$$
$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

126. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{\sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t}\right\} = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

127. $\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx = \left\{\begin{matrix} u = x+3; & du = dx; \\ x = u-3; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}du = 5\int \frac{udu}{u^2-49} -$$
$$-18\int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

128. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = \left\{\begin{matrix} u = x-3; & du = dx; \\ x = u+3; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du = 3\int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$

$$+13\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C.$$

Төмендегі анықталмаған интегралдарды есептеу керек:

129. $\int \frac{\mathrm{x}+1}{\sqrt{\mathrm{x}^2+2x}}dx$ Жауабы: $\sqrt{\mathrm{x}^2+2x}+\mathrm{C}$

130. $\int (\mathrm{x}-1)e^{x^2-2x}dx$ Жауабы: $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}^2-2x}+\mathrm{C}$

131. $\int \frac{2\cos x dx}{4+\sin x}$ Жауабы: $2\ln|4+\sin x|+\mathrm{C}$

132. $\int \frac{2x dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}$ Жауабы: $\frac{3\sqrt[3]{6-5x^2}}{10}+\mathrm{C}$

133. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$ Жауабы: $-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}+\mathrm{C}$

134. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ Жауабы: $\frac{2\sqrt{(1+\ln x)}}{3}+\mathrm{C}$

135. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ Жауабы: $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+\mathrm{C}$

136. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx$ Жауабы: $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+\mathrm{C}$

137. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+\mathrm{C}$

Ескерту: $x=\frac{1}{t}$ деп алған жөн.

138. $\int \frac{dx}{e^x+1}$ Жауабы: $-\ln(1+e^x)+C$

Ескерту: $x=-\ln t$ деп алған жөн.

139. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ Жауабы: $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

Ескерту: $x=a\,cht$ деп алған жөн.

140. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$ Жауабы: $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$

Ескерту: $x=tgt$ деп алған жөн.

141. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ Жауабы: $2\arcsin\sqrt{x}+C$

Ескерту: $x=\sin^2 t$ деп алған жөн.

142. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ Жауабы: $-\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

Ескерту: $x=a\sin t$ деп алған жөн.

143. $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ Жауабы: $-3\cos\sqrt[3]{x}+C$

Ескерту: $x=t^3$ деп алған жөн.

144. $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx$ Жауабы: $\frac{2}{9}\sqrt{\left(x^3+5\right)^3}+C$

Ескерту: $x^3+5=t^2$ деп алған жөн.

145. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx$ Жауабы: $-\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}+C$

Ескерту: $\cos^2 x=t$ деп алған жөн.

146. $\int x\cdot(2x+5)^{10}dx$ Жауабы: $\frac{(2x+5)^{12}}{48}-\frac{5(2x+5)^{11}}{44}+C$

Ескерту: $2x+5=t$ деп алған жөн.

147. $\int x\cdot\sqrt[5]{3x+4}\,dx$ Жауабы: $\frac{5\sqrt[5]{(3x+4)^{11}}}{99}-\frac{10\sqrt[5]{(3x+4)^6}}{27}+C$

Ескерту: $3x+4=t^5$ деп алған жөн.

148. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ Жауабы: $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+\mathrm{C}$

Ескерту: $2x+1=t^2$ деп алған жөн.

149. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ Жауабы: $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+\mathrm{C}$

Ескерту: $x=\frac{1}{t}$ деп алған жөн.

150. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ Жауабы: $-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+\mathrm{C}$

Ескерту: $x=\frac{1}{t}$ деп алған жөн.

1.4 Бөліктеп интегралдау.

$u=u(x),\ v=v(x)$ дифференциалданатын функциялар болсын, онда

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Бұл формуланы *бөліктеп интегралдау формуласы* деп атайды.

Бұл формулада соңғы интеграл берілген интегралдан оңай болатындай u және dv өрнектерін таңдап алу керек. Көп жағдайда интеграл астындағы функция алгебралық және трансценденттік функциялардың көбейтіндісі түрінде болса, онда бөліктеп интегралдау формуласы қолданылады. Мысалы,

$$\int x^k \cdot e^{mx}dx,\ \int x^k \sin bxdx,\ \int x^k \cos bxdx$$

интегралдарын есептеген кезде $u=x^k$ деп таңдап алу керек.

Ал, $\int x^k \ln^m xdx,\ \int x^k \arcsin^m xdx,\ \int x^k arctg^m xdx$

интегралдарын есептеген кезде сәйкес $u=\ln^m x,\ u=\arcsin^m x,\ u=arctg^m x$ деп таңдап алу керек.

151. $\int x\ln xdx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int x\ln xdx = \left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv=xdx; \\ du=\frac{1}{x}dx; & v=\frac{x^2}{2}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C=$$

$$=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C.$$

152. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv=\frac{1}{x^3}dx; \\ du=\frac{1}{x}dx; & v=-\frac{1}{2x^2}; \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

153. $\int arctgxdx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $u = arctgx$, $dv = dx$ деп алайық. Онда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$

$$\int arctgxdx = x\cdot arctgx - \int\frac{xdx}{1+x^2} = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c.$$

154. $\int e^{ax}\sin bxdx$ интегралын табу керек.

Шешуі: Бұл интегралды табу үшін бөлшектеп интегралдау формуласын екі рет қолданамыз:

$$u = e^{ax},\ \ \sin bxdx = dv \qquad du = ae^{ax},\ \ v = \int \sin bxdx = -\frac{1}{6}\cos bx$$

Сонда $\int e^{ax}\sin bxdx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx$

$\int e^{ax}\cos bxdx$ интегралына бөлектеп интегралдау әдісін тағы пайдалансақ.

Онда $u = e^{ax}$, $dv = \cos bxdx$, $du = ae^{ax}$, $v = \frac{1}{b}\sin bx$

Сонда

$$\int e^{ax}\sin bxdx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{ae^{ax}\sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bxdx.$$

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{-e^{ax}b\cos bx + ae^{ax}\sin bx}{b^2} + c.$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + c.$$

155. $\int x^2\sin xdx$ интегралын табу керек.

Шешуі: Бұл интегралды табу үшін бөлшектеп интегралдау формуласын екі рет қолданамыз:

$$\int x^2 \sin x dx = \begin{cases} u = x^2; & dv = \sin x dx, \\ du = 2x dx, & v = -\cos x \end{cases} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$$

$$= \begin{cases} u = x; & dv = \cos x dx, \\ du = dx; & v = \sin x \end{cases} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

156. $\int x^2 e^{5x} dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: Бұл интегралды табу үшін бөлшектеп интегралдау формуласын екі рет қолданамыз:

$$\int x^2 e^{5x} dx = \begin{cases} u = x^2; & dv = e^{5x} dx; \\ du = 2x dx, & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{cases} = \frac{1}{5} e^{5x} x^2 - \int \frac{1}{5} e^{5x} 2x dx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx =$$

$$= \begin{cases} u = x; & dv = e^{5x} dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5} e^{5x}; \end{cases} = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{x e^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx\right] = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2}{25} \int e^{5x} dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right).$$

157. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{(a^2 - x^2) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= a^2 \arcsin x \frac{x}{a} - \int x \cdot \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$\int x \cdot \dfrac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ интегралын бөлектеп интегралдау арқылы есептейміз

$u = x,\ \mathrm{dv} = \dfrac{\mathrm{xdx}}{\sqrt{\mathrm{a}^2 - x^2}}$ деп алайық.

$$du = dx,\ \mathrm{v} = \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2} \int (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2 - x^2) = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Соңғы интегралды теңдіктің оң жағына көшірсек,

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}$$

Онда

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c.$$

Бөлшектеп интегралдау формуласын қолдану арқылы берілген интегралдарды табу керек:

158. $\int xe^{ax}dx$ Жауабы: $\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)e^{ax}+\mathrm{C}$

159. $\int x\cos bxdx$ Жауабы: $\frac{x}{b}\sin bx+\frac{1}{b^2}\cos bx+\mathrm{C}$

160. $\int x\sin bxdx$ Жауабы: $-\frac{x}{b}\cos bx+\frac{1}{b^2}\sin bx+\mathrm{C}$

161. $\int x^2e^{ax}dx$ Жауабы: $\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)e^{ax}+\mathrm{C}$

162. $\int x^2\cos bxdx$ Жауабы: $\left(\frac{x^2}{b}-\frac{2}{b^3}\right)\sin bx+\frac{2x}{b^2}\cos bx+\mathrm{C}$

163. $\int x^2\sin bxdx$ Жауабы: $\left(-\frac{x^2}{b}+\frac{2}{b^3}\right)\cos bx+\frac{2x}{b^2}\sin bx+\mathrm{C}$

164. $\int (x^2+px+q)e^{ax}dx$

Жауабы: $\left(\frac{x^2}{a}+\left(\frac{p}{a}-\frac{2}{a^2}\right)x+\frac{q}{a}-\frac{p}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)e^{ax}+\mathrm{C}$

165. $\int (x^2+px+q)\cos bxdx$

Жауабы: $\left(\frac{x^2+px}{b}+\frac{q}{b}-\frac{2}{b^3}\right)\sin bx+\frac{2x+p}{b^2}\cos bx+\mathrm{C}$

166. $\int (x^2+px+q)\sin bxdx$

Жауабы: $\left(-\frac{x^2+px}{b}-\frac{q}{b}+\frac{2}{b^3}\right)\cos bx+\frac{2x+p}{b^2}\sin bx+\mathrm{C}$

167. $\int \ln xdx$ Жауабы: $x(\ln x-1)+\mathrm{C}$

168. $\int \log_a xdx$ Жауабы: $\frac{x}{\ln a}(\ln x-1)+\mathrm{C}=\mathrm{x}\log_{\mathrm{a}}\left|\frac{x}{a}\right|+C$

169. $\int x^2 \ln x dx$ Жауабы: $\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$

170. $\int x^2 \ln x\, dx$ Жауабы: $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n-1}\right) + C$

171. $\int x^2 \log_a x\, dx$ Жауабы: $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log_a x - \frac{\log_a e}{n-1}\right) + C$

172. $\int \ln^2 x dx$ Жауабы: $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

173. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ Жауабы: $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$

174. $\int \ln(x^2+1) dx$ Жауабы: $x\ln(x^2+1) - 2x + 2arctgx + C$

175. $\int \sqrt{x^2+A}\, dx$ Жауабы: $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C$

176. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$ Жауабы: $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

177. $\int \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| dx$ Жауабы: $x\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \sqrt{1+x^2} + C$

178. $\int \arcsin x\, dx$ Жауабы: $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

179. $\int \arcsin\frac{x}{a} dx$ Жауабы: $x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$

180. $\int arctg\frac{x}{a} dx$ Жауабы: $x\, arctg\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln\left|x^2+a^2\right| + C$

181. $\int x\arcsin x\, dx$ Жауабы: $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$

182. $\int x\, arctgx\, dx$ Жауабы: $\frac{x^2+1}{2} arctgx - \frac{x}{2} + C$

183. $\int x^2 \arcsin x\,dx$

Жауабы: $\frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{9} + C$

184. $\int x^2\, arctgx\,dx$ Жауабы: $\frac{x^3}{3}arctgx - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln\left|x^2+1\right| + C$

185. $\int x\arcsin\frac{x}{a}dx$ Жауабы: $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin x + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{4} + C$

186. $\int x\,arctg\frac{x}{a}dx$ Жауабы: $\frac{x^2+a^2}{2}arctgx - \frac{ax}{2} + C$

187. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}dx$

Жауабы: $\frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2\sqrt{a^2-x^2}}{3} - \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{9} + C$

188. $\int x^2\,arctg\frac{x}{a}dx$

Жауабы: $\frac{x^3}{3}arctg\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln\left|x^2+a^2\right| + C$

189. $\int\frac{x}{\sin^2 x}dx$ Жауабы: $-xctgx + \ln\left|\sin x\right| + C$

190. $\int arctg\sqrt{x}dx$ Жауабы: $(x+1)arctg\sqrt{x} + \sqrt{x} + C$

191. $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ Жауабы: $\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$

192. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$ Жауабы: $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \frac{1}{x}\arcsin x + C$

193. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ Жауабы: $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx + b\sin bx\right) + C$

194. $\int e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)dx$ Жауабы: $e^{ax}\cos bx + C$

195. $\int e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)dx$ Жауабы: $e^{ax}\sin bx + C$

1.5 Квадраттық үшмүшесі бар қарапайым интегралдар

$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ **түріндегі интеграл.** Негізгі есептеу әдісі квадраттық үшмүшесінен толық квадратты бөліп алу, яғни

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(x+\cdot\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

түріне келтіру. Сосын

$$2ax+b=t$$

алмастыруын жасау керек.

Егер $m=0$ болса, онда таблицалық интегралын аламыз (3-беттегі 13-ші формуланы қараңыз).

196. $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{5}{4}x+\frac{25}{16}\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{25}{16}\right)}=$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)x}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{2}}arctg\frac{x-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}}+C=\frac{2}{\sqrt{31}}arctg\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C$$

Егер $m\neq 0$ болса, онда алымынан квадраттық үшмүшесінің туындысын, яғни $2ax+b$ бөліп алу керек.

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx=\frac{m}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+$$

$$+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx==\frac{m}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx.$$

Мұнда, екінші қошылғыштағы интеграл жоғарыда қарастырылған.

197. $\int \frac{(x-1)dx}{x^2-x-1}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int\frac{(x-1)dx}{x^2-x-1}=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right|-$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$$

$\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ **түріндегі интеграл.** Негізгі есептеу әдісі квадраттық үшмүшесінен толық квадратты бөліп алу арқылы негізгі кестелік интегралын аламыз (3-беттегі 15-ші немесе 16-шы формулаларды қараңыз).

198. $\int\frac{dx}{\sqrt{5+3x-2x^2}}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int\frac{dx}{\sqrt{5-3x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{49}{16}-\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{7}+C$

199. $\int\frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int\frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}+5\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=$

$$=\sqrt{x^2-2x+5}+5\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C$$

$\int\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **түріндегі интеграл.** Негізгі есептеу әдісі

$$\frac{1}{mx+n}=t$$

алмастыруын жасау керек.

200. $\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4}}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $x+2=\frac{1}{t}$ алмастыруын жасау керек, онда $dx=-\frac{dt}{t^2}$, осыдан

$$\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+4}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-4t+8t^2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16}}}=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{4}+\sqrt{t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}}\right|+C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+2}-\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{2(x+2)}+\frac{1}{8}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2-x+\sqrt{2(x^2+4)}}{x+2}\right|+C.$$

$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ **түріндегі интеграл.** Негізгі есептеу әдісі квадраттық үшмүшесінен толық квадратты бөліп алу арқылы берілген интеграл төмендегі екі интегралдың біреуіне келеді (157-ші және 191-ші есептерге қараңыз).

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c.$$

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A}+\frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+\mathrm{C}$$

201. $\int\sqrt{9+8x-x^2}\,dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int\sqrt{9+8x-x^2}\,dx=\int\sqrt{25-(x-4)^2}\,d(x-4)=\frac{x-4}{2}\sqrt{9+8x-x^2}+\arcsin\frac{x-4}{5}+C.$

Берілген интегралдарды есептеу керек:

202. $\int\frac{dx}{x^2+3x+1}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+\mathrm{C}$

203. $\int\frac{dx}{3x^2-2x+4}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{11}}arctg\frac{3x-1}{\sqrt{11}}+C$

204. $\int\frac{(3x-2)dx}{5x^2-3x+2}$ Жауабы: $\frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right|-\frac{11}{5\sqrt{31}}arctg\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$

205. $\int\frac{xdx}{x^2-7x+13}$ Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-7x+13\right|-\frac{7}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-7}{\sqrt{3}}+C$

206. $\int\frac{(x-1)^2dx}{x^2+3x+4}$ Жауабы: $x-\frac{5}{2}\ln\left|x^2+3x+4\right|-\frac{9}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C$

207. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ Жауабы: $\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|+C$

208. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$ Жауабы: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$

209. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5x}}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|6x+5+\sqrt{36x^2+60x}\right|+C$

210. $\int \frac{(4x+5)dx}{\sqrt{2x^2+5x+3}}$ Жауабы: $2\sqrt{2x^2+5x+3}+C$

211. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$ Жауабы: $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C$

212. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$ Жауабы: $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+C$

213. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$ Жауабы: $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$

214. $\int \frac{2(x-4)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$ Жауабы: $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C$

215. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$ Жауабы: $\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|x\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{5x^2-2x+1}\right|+C$

216. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$ Жауабы: $\arcsin\frac{2-x}{(1-x)\sqrt{2}}+C, \quad x>\sqrt{2}$

217. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$ Жауабы: $-\arcsin\frac{1}{x+1}+C.$

218. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ Жауабы: $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C.$

219. $\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx$ Жауабы: $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2}+\frac{8}{9}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C.$

220. $\int \sqrt{x-x^2}\,dx$ Жауабы: $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+C.$

221. $\int \sqrt{x^2-2x+5}\,dx$ Жауабы: $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+5}+2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C.$

222. $\int \sqrt{x^2+4x+7}\,dx$ Жауабы: $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+7}+\frac{3}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+7}\right|+C.$

1.6 Рационал функцияларды интегралдау

Жәй бөлшектерді интегралдау. Келесі берілген төрт бөлшек *жәй бөлшектер* деп аталады:

I. $\frac{1}{ax+b}$; II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$

n, m – натурал сандар ($n>2,\ m>2$) және $p^2-4q<0$.

Алғашқы түріндегі интеграл екі жәй бөлшектің интегралы $t=ax+b$ алмастыруы арқылы кестелік интегралға келтіріледі.

I. $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C;$

II. $\int\frac{dx}{(ax+b)^m}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^m}=-\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}}+C=-\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}}+C;$

III.

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B+\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+$$

$$+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

223. $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{4}arctg\,\frac{x-3}{4}+C.$

224. $\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx=\int\frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx=\int\frac{14(6x-5)+46}{(6x-5)^2+23}dx=14\int\frac{6x-5}{(6x-5)^2+23}dx+$$

$$+46\int\frac{dx}{(6x-5)^2+23}=\frac{7}{6}\ln\left((6x-5)^2+23\right)+\frac{\sqrt{23}}{3}arctg\,\frac{6x-5}{\sqrt{23}}+C.$$

IV. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx =$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+B}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}$$

Мұнда

$$\int \frac{2x+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{(x^2+px+q)^n} = -\frac{1}{(n-1)\left(x^2 px+q\right)^{n-1}},$$

ал

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} = \int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^n}$$

тең болады, мұндағы

$$x+\frac{p}{2}, \quad dx = dt, \quad m = q-\frac{p^2}{4}$$

Енді

$$I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^n}$$

интегралы үшін келесі рекурентті формуланы қолдану керек.

$$I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^n} = \frac{1}{2m^2(n-1)}\cdot\frac{t}{\left(t^2+m^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{m^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Бұл рекурентті формуланы $n-1$ рет қолдану арқылы I_n интегралы

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m} arctg \frac{t}{m}$$

негізгі кестелік интегралы арқылы есептеуге болады.

225. $I_3 = \int \frac{dx}{\left(x^2+m^2\right)^3}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $n = 3$. Рекурентті формуланы қолдансақ, онда

$$I_3 = \int \frac{dx}{\left(x^2+m^2\right)^3} = \frac{1}{4m^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+m^2\right)^2} + \frac{3}{4m^2}\cdot I_2.$$

$I_2 = \int \frac{dx}{\left(x^2+m^2\right)^2}$ интегралына рекурентті формуланы тағы бір рет қолдансақ ($n=2$), онда

$$I_2 = \int \frac{dx}{\left(x^2+m^2\right)^2} = \frac{1}{2m^2} \cdot \frac{x}{\left(t^2+m^2\right)} + \frac{1}{2m^2} \cdot I_1 = \frac{1}{2m^2} \cdot \frac{x}{\left(t^2+m^2\right)} + \frac{1}{2m^3} \cdot arctg\,\frac{x}{m} + C.$$

Сонымен

$$I_3 = \int \frac{dx}{\left(x^2+m^2\right)^3} = \frac{1}{4m^2} \cdot \frac{x}{\left(x^2+m^2\right)^2} + \frac{3}{8m^4} \cdot \frac{x}{\left(x^2+m^2\right)} + \frac{3}{8m^5} \cdot arctg\,\frac{x}{m} + C.$$

Рационал бөлшектерді интегралдау. Дұрыс рационал бөлшектерді интегралдау үшін оларды төмендегідей жәй бөлшектерге жіктеу керек:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} +$$
$$+ \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{\left(x^2+px+q\right)^\lambda} + \ldots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{\left(x^2+rx+s\right)^2} + \ldots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{\left(x^2+rx+s\right)^\mu},$$

мұндағы A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – тұрақты сандар.

A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i шамаларының мәндерін анықтау үшін белгісіз коэффициенттер әдісін қолданыламыз (екі көпмүше тең болуы үшін х-тің бірдей дәрежесіндегі коэффициенттердің тең болуы қажетті және жеткілікті).

Бұрыс рационал бөлшектер үшін алдын ала бүтін бөлігін шығарып алуымыз керек.

226. мысал $\int \frac{x-2}{x^2-1}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі: Интеграл атындағы өрнек бөлімінің екі нақты түбірі бар дұрыс интеграл бөлшек, олай болса

$$\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

тең екендігін аламыз. Осыдан

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A_1(x+1)+A_2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$x-2 = A_1(x+1)+A_2(x-1)$$

x айнымалысының бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерін теңестірсек.

$$\left.\begin{array}{l} x : A_1 + A_2 = 1 \\ x^0 : A_1 - A_2 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\dfrac{1}{2} \\ A_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Табылған A_1, A_2 коэффициентін орнына қойсақ

$$\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{x+1}$$

Сонда

$$\int \frac{x-2}{x^2-1}dx = \int \left[-\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)} \right] dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + C.$$

227. $\displaystyle\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі: $\displaystyle\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}dx = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Dx+E}{x^2+4} \right) dx$

Ортақ бөлімге келтіре отырып, алымдарын теңестіреміз:

$$A(x-4)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Dx+E)(x-2)(x-4) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

$$\begin{cases} A + B + D = 9 \\ -4A - 2B - 6D + E = -30 \\ 4A + 4B + 8D - 6E = 28 \\ -16A - 8D + 8E = -88 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = 9 - A - B \\ E = -30 + 4A + 2B + 54 - 6A - 6B \\ 2A + 2B + 4D - 3E = 14 \\ 2A + B - E = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 9 - A - B \\ E = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 4A + 5B = 35 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = 9 - A - B \\ E = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 5B = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ D = 1 \\ E = 2 \end{cases}$$

Сонымен,

$$\int \frac{5dx}{x-2} + \int \frac{3dx}{x-4} + \int \frac{x+2}{x^2+4}dx = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + arctg\,\frac{x}{2} + C.$$

228. $\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі: Бөлшек бұрыс болғандықтан, алдын ала бүтін бөлігін шығарып аламыз:

$$
\begin{array}{r|l}
6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 & 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\
6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2 \quad\quad\quad\quad & \\
\hline
9x^3 + 8x^2 - 76x - 7 & 2x^2 + 3 \\
9x^3 - 12x^2 - 51x + 18 & \\
\hline
20x^2 - 25x - 25 &
\end{array}
$$

Сонымен,

$$\int \left[2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \right] dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx + 5\int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x +$$

$$+ 5\int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx$$

Алынған бөлшектің бөлімін көбейткіштерге жіктейік. *x=3* болғанда бөлшектің бөлімі нөлге айналатындығы көрініп тұр. Сонда:

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 & x - 3 \\
3x^3 - 9x^2 \quad\quad\quad\quad\quad & \\
\hline
5x^2 - 17x & 3x^2 + 5x - 2 \\
5x^2 - 15x & \\
\hline
-2x + 6 & \\
-2x + 6 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Сонымен, $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x - 3)(3x^2 + 5x - 2) = (x - 3)(x + 2)(3x - 1)$. Сонда:

$$\frac{4x^2 - 5x - 5}{(x-3)(x+2)(3x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-1}$$

$$A(x+2)(3x-1) + B(x-3)(3x-1) + C(x-3)(x+2) = 4x^2 - 5x - 5 \cdot$$

Анықталмаған коэффициенттерді табу кезінде жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерді топтастырып, сосын теңдеулер жүйесін (кейде теңдеулер саны өте көп болуы мүмкін) шешпеу үшін *кез келген мәндер әдісі* деп аталатын әдіс қолдануға болады. Бұл әдістің мәні мынада: жоғарыда алынған өрнекте *x*-ке (саны анықталмаған коэффициенттер санына тең) кез келген мәндерді біртіндеп береді. Есептеулер оңай болу үшін бұл мәндер ретінде бөлшектің бөлімі нөлге айналатын нүктелерді, яғни 3, -2, 1/3 аламыз. Сонда:

$$\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases} \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}$$

Сонымен:

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{x-3} + 5\int \frac{dx}{3x-1} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\ln|x+2| + 2\ln|x-3| + \frac{5}{3}\ln|3x-1| + C.$$

229. $\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2} dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2} dx = \int \frac{A}{x+3} dx + \int \frac{Bx + C}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{Dx + E}{x^2+2} dx$$

Анықталмаған коэффициенттерді табайық:

$$A(x^2+2)^2 + (Bx + C)(x+3) + (Dx + E)(x+3)(x^2+2) = 3x^4 + 14x^2 + 7x + 15$$

Бұдан,

$$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C + Dx^4 + 2Dx^2 + 3Dx^3 + 6Dx + Ex^3 + 2Ex + 3Ex^2 + 6E =$$
$$= (D + A)x^4 + (3D + E)x^3 + (A + B + 2D + 3E + 4A)x^2 + (3B + C + 6D + 2E)x + (2A + 3C + 6E + 4A)$$

$$\begin{cases} D + A = 3 \\ 3D + E = 0 \\ B + 2D + 3E + 4A = 14 \\ 3B + C + 6D + 2E = 7 \\ 3C + 6E + 4A = 15 \end{cases} \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 6 - 2A - 27 + 9A + 4A = 14 \\ 3B + C + 18 - 6A - 18 + 6A = 7 \\ 3C - 54 + 18A + 4A = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 11A = 35 \\ 3B + C = 7 \\ 3C + 22A = 69 \end{cases} \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ 11A = 35 - B \\ C = 7 - 3B \\ 21 - 9B + 70 - 2B = 69 \end{cases} \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

Сонда берілген интегралдың мәні:

$$3\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{2x+1}{(x^2+2)^2}dx=3\int\frac{dx}{x+3}+2\int\frac{x}{(x^2+2)^2}dx+\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=3\ln|x+3|-\frac{1}{x^2+2}+$$
$$+\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Берілген интегралдарды есептеу керек:

230. $\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ Жауабы: $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C$ a $\neq$ b.

231. $\int\frac{(2x-1)dx}{(x-1)(x-2)}$ Жауабы: $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C.$

232. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$ Жауабы: $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}\right|+C.$

233. $\int\frac{(2x^2+41x-91)dx}{(x-1)(x+3)(x-4)}$ Жауабы: $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C.$

234. $\int\frac{(x^2+2x+6)dx}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ Жауабы: $\ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right|+C.$

235. $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$ Жауабы: $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$

236. $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$ Жауабы: $\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|+C.$

237. $\int\frac{x^4dx}{(x^2-1)(x+2)}$ Жауабы: $\frac{x^2}{42}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C.$

238. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$ Жауабы: $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.$

239. $\int\frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^2}$ Жауабы: $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C.$

240. $\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$ Жауабы: $\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}+C.$

241. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$ Жауабы: $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C.$

242. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx$ Жауабы: $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|+C.$

243. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$ Жауабы: $-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$

244. $\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$ Жауабы: $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

245. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}dx$ Жауабы: $\ln\frac{\left(x^2-2x+5\right)^{3/2}}{|x-1|}+\frac{1}{2}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$

246. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$ Жауабы: $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}arctg\,\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

247. $\int \frac{dx}{x^3+1}$ Жауабы: $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

248. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}dx$

Жауабы: $\frac{31}{108}\ln|x-3|+\frac{29}{108}\ln|x+3|+\frac{2}{9}\ln\left(x^2+9\right)-\frac{1}{54}arctg\,\frac{x}{3}+C.$

249. $\int \frac{x+1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}dx$

Жауабы: $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+9}\right|+\frac{1}{8}arctgx-\frac{1}{24}arctg\,\frac{x}{3}+C.$

250. $\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}dx$

Жауабы: $\frac{2-x}{4\left(x^2+2\right)}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

1.7 Иррационал функцияларды интегралдау

$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx$ **интегралы.** Осы интеграл $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ алмастыруын қолдану арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі, мұндағы k саны $m/n,...,r/s$ бөлшектерінің ортақ бөліміне тең.

251. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ интегралын есептеу керек.

Шешуі:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left|\sqrt{x}=t,\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\right|=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x}+C$$

252. $\int\frac{dx}{(2x+1)^{2/3}-(2x+1)^{1/2}}$ интегралын есептеу керек.

Шешуі:

$$\int\frac{dx}{(2x+1)^{2/3}-(2x+1)^{1/2}}=\left|\ 2x+1=t^6,\quad x=\frac{t^6-1}{2},\quad dx=3t^5dt\ \right|=\int\frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=.$$

$$=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=3\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C=$$

$$=\left|\ t=(2x+1)^{1/6}\ \right|=\frac{3}{2}(2x+1)^{1/3}+3\,(2x+1)^{1/6}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C.$$

253. $\int\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі:

$$\int\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}dx=\left|\begin{array}{c}\frac{2-x}{1+x}=t^2;\quad \mathrm{x}=\frac{2-\mathrm{t}^2}{1+t^2}\\ dx=\frac{2t(1+t^2)-2t(2-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=\frac{-2t-2t^3-4t+2t^3}{(1+t^2)^2}dt=\frac{-6tdt}{(1+t^2)^2}\end{array}\right|=$$

$$-\int t\cdot\frac{6tdt}{(1+t^2)^2}=-6\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt=\left|\begin{array}{l}u=t,\quad \mathrm{du}=\mathrm{dt}\\ \frac{\mathrm{tdt}}{(1+\mathrm{t}^2)^2}=dv,\ \mathrm{v}=\frac{1}{2(1+\mathrm{t}^2)}\end{array}\right|=$$

$$=-6\cdot\frac{t}{2(1+t^2)}-3\int\frac{dt}{1+t^2}=-\frac{3t}{1+t^2}-3arctgt+c=\sqrt{(2-x)(1+x)}-3arctg\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}+c.$$

Берілген интегралдарды есептеу керек:

253. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx.$ Жауабы: $2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C.$

254. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{ax+b}}dx.$ Жауабы: $\frac{3}{10a^2}\left[2\sqrt[3]{(ax+b)^5}-5b\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right]+C.$

255. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx.$ Жауабы: $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$

256. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx.$ Жауабы: $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C.$

257. $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}dx.$

Жауабы: $\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right|+C.$

258. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}dx.$

Жауабы: $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-9\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$

$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ **(дифференциалдық бином) интегралы,** мұндағы $m, n, p-$рационал сандар.

Чебышев шарты. Берілген интеграл тек үш жағдайда ғана элементар функциялар арқылы өрнектеледі:

1) $p-$бүтін сан болғанда;

2) $\frac{m+1}{2}-$бүтін сан болғанда, бұл жағдайда $a+bx=z^S$ алмастыру жасау керек, мұндағы s – p бөлшегінің бөлімі;

3) $\frac{m+1}{2}+p-$бүтін сан болғанда бұл жағдайда $ax^{-n}+b=z^S$ алмастыру жасау керек, мұндағы s – p бөлшегінің бөлімі;

259. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$ интегралын есептеу керек.

Шешуі: $m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ p=\frac{1}{3},\ \frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2.$

Осыдан, дифференциалдық биномның екінші жағдайы бойынша

$$1+x^{1/4}=z^3 \qquad x=\left(z^3-1\right)^4, \quad dx=12z^2\left(z^2-1\right)^3dx$$

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int\frac{z^3\left(z^3-1\right)^3}{\left(z^3-1\right)^2}dz=12\int\left(z^6-z^2\right)dz=\frac{12}{7}z^7-3z^4+C=.$$

$$\frac{12}{7}\left(1+x^{1/4}\right)^{7/3}-3\left(1+x^{1/4}\right)^{4/3}+C$$

Берілген интегралдарды есептеу керек:

260. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}dx.$ Жауабы: $-\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8}+\frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9}+C.$

261. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx.$ Жауабы: $\frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^2}+C.$

262. $\int x^2\left(1+2x^2\right)^{-3/2}dx.$ Жауабы: $\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}+C.$

263. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$ Жауабы: $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}-\frac{1}{2}arctg\sqrt[4]{x^{-4}+1}+C.$

264. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}dx.$ Жауабы: $\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x^3}}{\left|x^3\right|}+C.$

$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ **интегралы (Эйлер қойылымы).**

Бірінші Эйлер қойылымы. Егер $a>0$ болса, онда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\cdot x+t$$

алмастыру жасау керек.

265. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$. интегралын есептеу керек.

Шешуі: $a = 1 > 0$ $\sqrt{x^2+c} = -x+t$ $x^2 + c = x^2 - 2xt + t^2$

$$x = \frac{t^2-c}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+c}{2t^2}dt \qquad \sqrt{x^2+c} = -x+t = -\frac{t^2-c}{2t} + t = \frac{t^2+c}{2t}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \int \frac{\frac{t^2+c}{2t^2}dt}{\frac{t^2+c}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+c}\right| + C.$$

Екінші Эйлер қойылымы. Егер $c > 0$ болса, онда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$$

алмастыру жасау керек.

266. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$. интегралын есептеу керек.

Шешуі: $c = 1 > 0$ $\sqrt{1+x-x^2} = xt + 1$ $1 + x - x^2 = x^2t^2 + 2xt + 1$

$$x = \frac{1+2t}{1+t^2}, \quad dx = -2\frac{1+t-t^2}{(1+t^2)^2}dt \qquad \sqrt{1+x-x^2} = xt+1 = t\frac{1-2t}{1+t^2} + 1 = \frac{1+t-t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{-2\,\frac{1+t-t^2}{(1+t^2)^2}dt}{\frac{1+t-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t^2} = 2\,arctgt + C = 2arctg\,\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{x} + C.$$

Үшінші Эйлер қойылымы. Егер квадраттық ax^2+bx+c үшмүшенің α, $\beta-$ нақты түбірлері болса, онда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$$

алмастыру жасау керек.

267. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$. интегралын есептеу керек.

Шешуі: $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$

онда

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)t$$

$(x+4)(x-1)=(x+4)^2t^2 \qquad (x-1)=(x+4)t^2$

$x=\dfrac{1+4t^2}{1-t^2} \qquad dx=\dfrac{10tdt}{(1-t^2)^2}dt \qquad \sqrt{(x+4)(x-1)}=(\dfrac{1+4t^2}{1-t^2}+4)t=\dfrac{5t}{1-t^2}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{10t\left(1-t^2\right)}{\left(1-t^2\right)5t}dt=\int\frac{2}{1-t^2}dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+C=\ln\left|2x+3+\sqrt{x^2+3x-4}\right|+C.$$

268. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\ln\left|x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$

269. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{3x^2+5x}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|6x+5+\sqrt{36x^2+60x}\right|+C.$

271. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $2\,arctg\,\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3+2x-x^2}}{x}+C.$

272. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{5+2x-4x^2}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $arctg\,\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{5+2x-4x^2}}{x}+C.$

273. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}\right|+C=\ln\left|x-\dfrac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+6}\right|+C.$

274. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{4x^2-8+3}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-3}}\right|+C=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x-2+\sqrt{4x^2-8x+3}\right|+C.$

275. $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C.$

276. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}-\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C.$

1.8 Кейбір тригонометриялық функцияларды интералдау

$$\int R(\cos x, \sin x)dx$$

Интегралдың бұл түрін есептеу үшін $t = tg\frac{x}{2}$ *универсал алмастыру* деп аталатын алмастыру қолданылады. Сонда $R(\cos x, \sin x)$ - тригонометриялық функциялардың рационал функциясы жаңа t айнымалысының рационал функциясына түрленеді.

$$x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Тригонометриядан белгілі формулалар бойынша:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Сондықтан $\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2},$

мұндағы интегралданатын функция t айнымалысы бойынша рационал функция.

277. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5} = 2\int \frac{dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2}+C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

278. $\int \frac{dx}{9+8\cos x + \sin x}$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left[9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right]}=2\int\frac{dt}{t^2+2t+17}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2+16}=$$

$$=\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C.$$

▲

Кейбір жағдайларда осындай алмастырулар күрделі есептеулерге әкеледі, сондықтан басқа алмастырулар қолдануға болады. Солардың кейбіреулерін қарастырайық:

1) $\int R(\sin x)\cos xdx$ болса, онда $\sin x=t$.

2) $\int R(\cos x)\sin xdx$ болса, онда $\cos x=t$.

3) $\int R(tgx)dx$ болса, онда $tgx=t$.

4) $\int R(\sin x,\cos x)dx$ интегралында $\sin x,\cos x$ функциялары тек жұп дәрежелерімен берілсе, онда $tgx=t$;

5) $\int\sin^m x\cos^n xdx$ интегралында егер:

а) m - тақ болса, онда $\cos x=t$;

ә) n - тақ болса, онда $\sin x=t$;

б) n,m - жұп, теріс емес болса, онда $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ формулалары қолданылады;

в) n,m - жұп, ең болмаса біреуі теріс болса, онда $tgx=t$ немесе $ctgx=t$;

6) Әртүрлі аргументтердің синус және косинустарының көбейтіндісінің интегралы берілсе, онда бұл жағдайда төмендегі 3 формуланың біреуін қолданамыз:

$$\int\cos mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}+\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right];$$

$$\int\sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int[\sin(m-n)x+\sin(m+n)x]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m-n)x}{m-n}-\frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right];$$

$$\int\sin mx\sin nxdx=\frac{1}{2}\int[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right].$$

279. $\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \left\{\begin{matrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{matrix}\right\} = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt = \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]dt =$$

$$= \int \left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt = \int tdt + \int 2dt - 4\int \frac{tdt}{t+2} - 5\int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int \frac{t}{t+2}dt =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \frac{t}{t+2} = \frac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \frac{t}{t+2} = \frac{-2}{t+2} + 1 \end{matrix}\right\} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{dt}{t+2} - 4\int dt = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

280. $\int \sin 7x \sin 2x dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

281. $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x}$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} = \left\{\begin{matrix} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{matrix}\right\} = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt = \int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^4} - 3\int \frac{dt}{t^2} +$$

$$+3\int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

282. $\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x[\cos 7x \cos 4x]dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 21x dx - \frac{1}{4}\int \sin x dx + \frac{1}{4}\int \sin 13x dx + \frac{1}{4}\int \sin 7x dx = -\frac{1}{84}\cos 21x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x -$$

$$-\frac{1}{28}\cos 7x + C.$$

283. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ интегралын табыңыз.

Шешуі: $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left| dctg 2x = -\frac{2dx}{\sin^2 2x} \right| = -2\int dctg 2x = -2ctg 2x + C.$

Кейде тригонометриялық функцияларды интегралдағанда бұрыннан белгілі дәрежені төмендететін формулаларды қолданған жөн.

284. $\int \sin^4 xdx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \sin^4 xdx = \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2xdx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2xdx = \frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+$$

$$+\frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4xdx\right] = \frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C.$$

Берілген интегралдарды есептеу керек:

285. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{acosx}+\mathrm{bsinx}}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|tg\frac{1}{2}\left(x+arctg\frac{a}{b}\right)\right|+C$

286. $\int \frac{\mathrm{dx}}{5-3\mathrm{cosx}}$ Жауабы: $\frac{1}{2}arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right)+C$

287. $\int \frac{\mathrm{dx}}{5+3\mathrm{cosx}}$ Жауабы: $\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\cdot tg\frac{x}{2}\right)+\mathrm{C}$

288. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{sinx}}$ Жауабы: $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{sinx}} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C =$

$$= \ln\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right|+C = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+C$$

289. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{cosx}}$ Жауабы: $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{sinx}} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C =$

$$= \ln\left|\frac{\cos x}{1-\sin x}\right|+C = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C$$

290. $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$ Жауабы: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{2tg\frac{x}{2}-1}\right|+C$

291. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ Жауабы: $\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}+x+C$

292. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$ Жауабы: $x-tg\frac{x}{2}+C$

293. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$ Жауабы: $\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{6}tg^2\frac{x}{2}+C$

294. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$

295. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$ Жауабы: $\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+C$

296. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$ Жауабы: $arctg\left(1+tg\frac{x}{2}\right)+C$

297. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$ Жауабы: $\frac{1}{5}\ln\left|5tg\frac{x}{2}+3\right|+C$

298. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$ Жауабы: $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right|+C$

299. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$ Жауабы: $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{tgx}{2}\right)+C$

300. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{15}}arctg\left(\frac{\sqrt{3}\,tgx}{\sqrt{5}}\right)+C$

301. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}$ Жауабы: $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{tgx-5}{tgx}\right|+C$

302. $\int \frac{\sin xdx}{(1-\cos x)^3}$ Жауабы: $-\frac{1}{2\,(1-\cos x)^2}$

303. $\int \sin^3 xdx$ Жауабы: $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

304. $\int \sin^5 xdx$ Жауабы: $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

305. $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$ Жауабы: $\frac{3}{5}\cos^{5/3} x+3\cos^{-1/3} x+C$

306. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$ Жауабы: $\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C$

307. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx$ Жауабы: $\ln(1+\sin^2 x) + C$

308. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x + 6\cos x + 5}$ Жауабы: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos x}{5-\cos x}\right| + C$

309. $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$ Жауабы: $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$

310. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ Жауабы: $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$

311. $\int tg^3 x\, dx$ Жауабы: $\frac{tg^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$

312. $\int ctg^3 x\, dx$ Жауабы: $-\frac{ctg^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C$

313. $\int ctg^5 x\, dx$ Жауабы: $-\frac{ctg^4 x}{4} + \frac{ctg^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C$

314. $\int tg^4 x\, dx$ Жауабы: $\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + C$

315. $\int ctg^6 x\, dx$ Жауабы: $-\frac{ctg^5 x}{5} + \frac{ctg^3 x}{3} - ctgx - x + C$

316. $\int tg^2 x\, dx$ Жауабы: $tgx - x + C$

317. $\int ctg^2 x\, dx$ Жауабы: $-ctgx - x + C$

318. $\int \sin^2 x\, dx$ Жауабы: $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

319. $\int \cos^2 x\, dx$ Жауабы: $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$

320. $\int \cos^4 x\, dx$ Жауабы: $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$

321. $\int \cos^6 x\,dx$ Жауабы: $\frac{5x}{16}+\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin^3 x}{48}+\frac{3\sin 4x}{64}+C$

322. $\int \sin^4 \cos^4 x\,dx$ Жауабы: $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$

323. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$ Жауабы: $-\frac{1}{3}ctg^3 x+C$

324. $\int \sin^2 x\cos^4 xdx$ Жауабы: $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$

325. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ Жауабы: $-ctgx-\frac{ctg^3 x}{3}+C$

326. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ Жауабы: $tgx+\frac{2}{3}tg^3 x+\frac{1}{5}tg^5 x+C$

327. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$ Жауабы: $tgx+\frac{tg^3 x}{3}-2ctg\,2x+C$

328. $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^3 x}$ Жауабы: $\frac{1}{2}tg^2 x+3\ln|tgx|-\frac{3}{2}ctg^2 x-\frac{1}{4}ctg\,4x+C$

329. $\int \sin 3x\cos 5xdx$ Жауабы: $-\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}+C$

330. $\int \sin 10x\sin 15xdx$ Жауабы: $-\frac{\sin 25x}{50}+\frac{\sin 5x}{10}+C$

331. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$ Жауабы: $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C$

332. $\int \sin x\sin 3xdx$ Жауабы: $-\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+C$

333. $\int \cos 4x\cos 7xdx$ Жауабы: $-\frac{\sin 11x}{22}+\frac{\sin 3x}{6}+C$

334. $\int \sin\frac{x}{4}\cos\frac{3}{4}x$ Жауабы: $-\frac{\cos x}{2}+\cos\frac{x}{2}+C$

335. $\int \sin x\sin 2x\sin 3xdx$ Жауабы: $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$

336. $\int \cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx$ Жауабы: $\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4}+\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4}+\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4}+\sin\frac{x}{4}+C$

Тригонометриялық қойылым.

$R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ интегралы берілсе, онда $x=a\sin t$ немесе $x=a\cos t$ алмастыру жасау керек.

337. $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$ интегралын табу керек

Шешуі: $x=a\sin t \quad dx=a\cos tdt$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}=\int\frac{a\cos tdt}{\sqrt{\left(a^2-a^2\sin^2 t\right)^3}}=\int\frac{a\cos tdt}{a^3\cos^3 t}=\int\frac{dt}{a^2\cos^2 t}=\frac{1}{a^2}tgt+c=\frac{\sin t}{a^2\sqrt{1-\sin^2 t}}+C$$

$$\sin t=\frac{x}{a},\qquad \cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

Осыдан $$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$$

$R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ интегралы берілсе, онда $x=atgt$ немесе $x=actgt$ алмастыру жасау керек.

338. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ интегралын табу керек

Шешуі: $x=atgt,\qquad dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{\frac{adt}{\cos^2 t}}{atgt\sqrt{a^2+a^2tg^2t}}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{1-\cos t}{\sin t}\right|+C$$

$tgt=\frac{x}{a},\qquad \sin t=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\qquad \cos t=\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Осыдан

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{1-\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}\right|+C=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{x}\right|+C$$

$R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ интегралы берілсе, онда $x=\frac{a}{\cos t}$ немесе $x=\frac{a}{\sin t}$ алмастыру жасау керек.

339. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ интегралын есептеу керек

Шешуі: $x=\frac{a}{\cos t}$ $\quad dx=\frac{a\sin tdt}{\cos^2 t}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int \frac{\frac{a\sin tdt}{\cos^2 t}}{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}}=\int \frac{\frac{a\sin tdt}{\cos^2 t}}{\frac{a\cdot\sin t}{\cos t}}=\int \frac{dt}{\cos t}=\ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|+C$$

$$\cos t=\frac{x}{a}, \qquad \sin t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$$

Сонымен

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}}{\frac{a}{x}}\right|+C=\ln\left|\frac{x+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}}{a}\right|+C$$

Берілген интегралдарды есептеу керек.

340. $\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}$ Жауабы: $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$

341. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$ Жауабы: $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}C$

342. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ Жауабы: $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

343. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$ Жауабы: $\frac{a}{2}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+\sqrt{a^2-x^2}+C$

344. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx$ Жауабы: $\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{9+x^2}\right|+C$

1.9 Гиперболалық функцияларды интегралдау

Гиперболалық функцияларды интегралдау үшін төмендегі формулаларды қолдану керек.

$ch^2x-sh^2x=1 \qquad sh^2x=\frac{1}{2}(ch2x-1)$

$ch^2x=\frac{1}{2}(sh2x-1) \qquad shxchx=\frac{1}{2}sh2x$

345. $\int ch^2 xdx$ интенгралын табу керек

Шешуі: $\int ch^2 xdx = \frac{1}{2}\int (ch2x+1)dx = \frac{1}{4}sh2x + \frac{1}{2}x + c$

346. $\int sh^3 xdx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $sh^3 xdx = \int sh^2 xd(chx) = \int (ch^2 x - 1)d(chx) = \frac{1}{3}ch^3 x - chx + c$

Берілген интегралды табу керек.

347. $\int ch^3 xdx$ Жауабы: $shx + \frac{1}{3}sh^2 x + c$

348. $\int ch^4 xdx$ Жауабы: $\frac{3x}{8} + \frac{sh2x}{4} + \frac{sh4x}{32} + c$

349. $\int th^3 xdx$ Жауабы: $\ln(chx) - \frac{tg^2 x}{2} + c$

350. $\int cth^3 xdx$ Жауабы: $x - cthx - \frac{cth^3 x}{3} + c$

351. $\int \frac{shx}{\sqrt{chx}}dx$ Жауабы: $2\sqrt{chx} + c$

352. $\int sh^4 xchxdx$ Жауабы: $\frac{sh^5 x}{5} + c$

353. $\int \frac{thx}{ch^2 x}dx$ Жауабы: $\frac{th^2 x}{2} + c$

354. $\int \frac{dx}{sh^2 xch^2 x}$ Жауабы: $-2cth2x + c$

2 Анықталған интеграл

2.1 Анықталған интегралды есептеу

Анықталған интегралдың анықтамасы. $f(x)$ функциясының $[a;b]$ аралығындағы *анықталған интегралы* деп $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ - интегралдық қосындының $(\max \Delta x_i \to 0)$ шегін айтады және былай белгіленеді: $\int_a^b f(x)dx$

мұндағы a - төменгі, $в$ - жоғарғы шегі, $x-$ айнымалы шама, $[a;b]-$ интегралдау аралығы.

Егер $f(x)$функциясы $[a;b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда осы аралықта интегралданады.

А н ы қ т а л ғ а н   и н т е г р а л   қ а с и е т т е р і:

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$;

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

4) егер $[a;b]$-де $m \le f(x) \le M$ болса, онда:

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a);$$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

6) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Анықталған интегралды анықталмаған интеграл көмегімен есептеу.

Ж о ғ а р ғ ы ш е г і а й н ы м а л ы а н ы қ т а л ғ а н ин т е г р а л. Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болады, яғни

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Н ь ю т о н – Л е й б н и ц ф о р м у л а с ы. Егер $F'(x) = f(x)$ болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$F(x)$ алғашқы функциясын $\int f(x)dx = F(x) + C$ анықталмаған интегралын шешу арқылы есептеледі.

355. $\int_{-1}^{3} x^4 dx$ интегралын есептеу керек

Шешуі: $\int\limits_{-1}^{3} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = 48\frac{4}{5}$

356. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$ интегралын есептеу керек

Шешуі: $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

Берілген интегралды есептеу керек.

357. $\int\limits_{1}^{2} (x^2 - 2x + 3)dx$ Жауабы: $\frac{7}{3}$

358. $\int\limits_{0}^{1} e^x dx$ Жауабы: $e - 1$

359. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x dx$ Жауабы: 1

360. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$ Жауабы: $\frac{\pi}{4}$

361. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ Жауабы: $\frac{\pi}{4}$

362. $\int\limits_{0}^{\pi/3} tgx dx$ Жауабы: $\ln 2$

363. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x}$ Жауабы: 1

364. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 x dx$ Жауабы: $\frac{\pi}{4}$

365. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$ Жауабы: $\ln 2$

366. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ Жауабы: $-\frac{3}{8}$

367. $\int\limits_{1}^{2} \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$ Жауабы: $33\frac{1}{3}$

368. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$ Жауабы: $\ln\frac{9}{8}$

369. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+4x+5}$ Жауабы: $arctg3-arctg2=arctg\frac{1}{7}$

370. $\int_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+4}}$ Жауабы: $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

371. $\int_2^{3.5} \frac{xdx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ Жауабы: $\frac{\pi}{6}$

372. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 xdx$ Жауабы: $\frac{2}{3}$

373. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ Жауабы: $\ln 2$

374. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx$ Жауабы: $\frac{\pi}{16}$

2.2 Меншіксіз интегралдар

Шегі ақырсыз интегралдар. Егер $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ шегі бар болса, онда осы шекті $f(x)$ функциясының $[a,\infty)$ интервалындағы *меншіксіз интегралы* дейді және оны былай белгілейді

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Егер осы шек бар болса меншіксіз интеграл *жинақты*, қарсы жағдайда *жинақсыз* дейді. Осы сияқты

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

интегралдарын да *меншіксіз интегралдар* дейді.

Үзілісті функцияның интегралы. $x=c$ нүктесінде үзілісті болатын $f(x)$ функциясының $\int_a^c f(x)dx$ интегралы былай анықталады:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int_a^b f(x)dx.$$

Егер осы шек бар болса, онда меншіксіз интеграл *жинақты*, қарсы жағдайда *жинақсыз* дейді.

Осы сияқты

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{a\to c+0}\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ мұндағы } a \prec c \prec b,$$

интегралдарын да *меншіксіз интегралдар* дейді.

375. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ меншіксіз интегралын есептеу керек.

Шешуі: $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{b\to\infty} arctg(x+1)\Big|_0^b =$

$= \lim_{b\to\infty}\left(arctg(b+1) - arctg1\ \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$ Интеграл жинақты.

376. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ меншіксіз интегралын табыңыз.

Шешуі: $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty.$ Интеграл жинақсыз.

377. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ меншіксіз интегралын есептеу керек.

Шешуі:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to -0}\int_{-1}^{b}\frac{dx}{x^2} + \lim_{a\to +0}\int_{a}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to -0}(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{b}) + \lim_{a\to +0}(-\frac{1}{x}\Big|_{a}^{1}) =$$

$= \lim_{b\to -0}(1-\frac{1}{b}) + \lim_{a\to +0}(\frac{1}{a}-1) = \infty.$ Интеграл жинақсыз.

Берілген меншіксіз интегралды есептеу керек.

378. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ Жауабы: 2 (жинақты).

379. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ Жауабы: жинақсыз

380. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ Жауабы: $\frac{1}{1-p}$ (жинақты), егер $p<1$;

жинақсыз, егер $p \ge 1$;

381. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ Жауабы: жинақсыз.

382. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ Жауабы: 1 (жинақты).

383. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ Жауабы: $\frac{1}{p-1}$ (жинақты), егер $p>1$;
жинақсыз, егер $p \le 1$;

384. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Жауабы: $\frac{\pi}{2}$ (жинақты).

385. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$ Жауабы: $\frac{\pi}{2a}$ $(a>0)$ (жинақты).

386. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x}$ Жауабы: жинақсыз

387. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ Жауабы: $\frac{1}{\ln 2}$ (жинақты).

388. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$ Жауабы: $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ (жинақты).

389. $\int\limits_0^{\pi/2} ctgx dx$ Жауабы: жинақсыз

390. $\int\limits_0^{\infty} e^{-kx}dx,\ k>0$ Жауабы: $\frac{1}{k}$ (жинақты).

391. $\int\limits_0^{\infty} \frac{arctgx}{x^2+1}dx$ Жауабы: $\frac{\pi^2}{8}$ (жинақты).

392. $\int\limits_0^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ Жауабы: 1(жинақты).

393. $\int\limits_0^{1} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$ Жауабы: -1(жинақты).

2.3 Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру

Егер $f(x)$ функциясы $a \le x \le b$ аралығында үзіліссіз және $\varphi(x)$ функциясы өзінің $\varphi'(x)$ туындысымен $\alpha \le t \le \beta$ аралығында үзіліссіз , мұнда $a=\varphi(\alpha)$ және

$b=\varphi(\beta)$, сонымен қатар $f(\varphi(t))$ функциясы $a \le x \le b$ аралығында анықталған және үзіліссіз болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

394. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Айнымалыны алмастырып, сонан соң Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша есептейміз:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x=\sin x & dx=\cos x dx \\ x=0 & t=0 \\ x=1 & t=\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Берілген интегралдарды есептеу керек

395. $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, $x=t^2$ Жауабы: $4-2\ln 3$

396. $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}dx$, $x-2=t^3$ Жауабы: $8-\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

397. $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 dx$, $\cos x = t$ Жауабы: $\frac{1}{3}$

398. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $tg\frac{x}{2}=t$ Жауабы: $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$

399. $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$, $\sqrt{2+4x}=t$ Жауабы: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

400. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$, $\sqrt{x-1}=t$ Жауабы: $2(2-arctg2)$

401. $\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, $x=\frac{1}{t}$ Жауабы: $\ln\frac{3}{2}$

402. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$, $\sin x = t$ Жауабы: $\ln\frac{4}{3}$

403. Егер $f(x)-$ жұп функция болса, онда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a (x)dx$$

теңдігін дәлелдеу керек

404. Егер $f(x)-$ тақ функция болса, онда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

теңдігін дәлелдеу керек

2.4 Бөліктеп интегралдау формуласы

Егер $u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары және олардың туындылары $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса,онда анықталған интеграл үшін бөліктеп интегралдау формуласы тура болады:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

405. $\int_0^{\pi} x\sin x\, dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Бөліктеп интегралдау формуласын қолданып, сонан соң Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша есептейміз:

$$\int_0^{\pi} x\sin x\, dx = \begin{vmatrix} x = u;\ dx = du \\ \sin xdx = dv; \\ -\cos x = v \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos xdx = -\pi\cos\pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi .$$

406. $\int_1^e x\ln xdx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз:

$$\int_1^e x\ln x dx = \begin{vmatrix} \ln x = u; & \dfrac{dx}{x} = du \\ xdx = dv; & \dfrac{x^2}{2} = v \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

Берілген интегралды есептеу керек

407. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ Жауабы: $\frac{\pi}{2} - 1$

408. $\int_1^e \ln x dx$ Жауабы: 1

409. $\int_0^1 x^3 \cdot e^{2x}\, dx$ Жауабы: $\frac{e^2+3}{8}$

410. $\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$ Жауабы: $\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$

411. $\int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx$ Жауабы: 1

412. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx \quad (a>0)$ Жауабы: $\frac{a}{a^2+b^2}$

413. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\, dx \quad (a>0)$ Жауабы: $\frac{a}{a^2+b^2}$

2.5 Жазық фигураның ауданы

Тік бұрышты координатадағы аудан. Егер үзіліссіз қисығы тік бұрышты координатада $y = f(x)$ теңдеуімен берілсе, $y = f(x)$ қисығымен $y = 0,\ x = a,\ \ x = b$ түзулерімен шектелген «қисық сызықты» трапециясының ауданы

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

формуласымен есептеледі.

414. $y = 4x - x^2$ қисығымен және абсцисса осімен шектелген фигура ауданын есептеу керек.

Шешуі: Қисықтың абсцисса осін қиятын нүктелерін табамыз. Ол үшін $4x - x^2 = 0$ теңдеуін шешеміз. $x = 0, \quad x = 4$ Ендеше

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx = (2x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

415. $y = \frac{1}{2}x^2$ қисығымен және $y = 0, \ x = 1, \ x = 3$ түзулерімен шектелген фигура ауданын есептеу керек.

Шешуі:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_1^3 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{x^3}{6}\Big|_1^3 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = 4\frac{1}{3}.$$

$y = f_1(x)$ және $y = f_2(x)$ қисықтарымен ($f_2(x) > f_1(x)$) және $x = a, x = b$ түзулерімен шектелген жазық фигураның ауданы

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$$

формуласымен есептеледі.

416. $y = x^3; y = 8$ сызықтарымен және ординат осімен шектелген фигура ауданын табу керек.

Шешуі: Берілген сызықтардың қиылысу нүктесін табамыз.

$$\begin{cases} y = x^3; \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

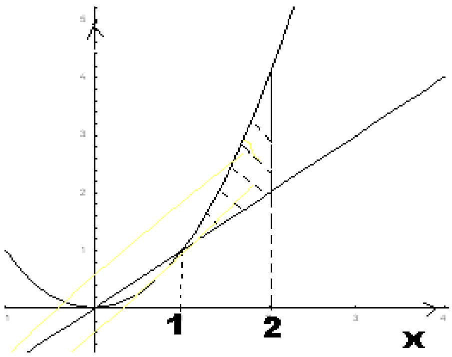
Берілген фигура сол жағынан ордината осімен шектелгендіктен, төменгі шек $x = 0$ болады. Сонымен формула бойынша

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_0^2 (8 - x^3)dx = (8x - \frac{x^4}{4})\Big|_0^2 = 16 - 4 = 12.$$

417. y = x, y = x^2, x = 1, x = 2 сызықтарымен шектелген фигураның ауданын табу керек (2.1 Сурет).

Шешуі:

$$S=\int_1^2 x^2dx-\int_1^2 xdx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$



2.1 Сурет

Параметрлік түрде берілген $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$ мұндағы $\alpha\le t\le\beta,\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b,$ қисықпен шектелген жазық фигураның ауданы $S=\int_\varepsilon^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$ формуласымен есептеледі.

418. $\begin{cases} x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ эллипсінің ауданын табу керек.

Шешуі: Эллипстің симмериялығын пайдаланып, оның ширегінің ауданын есептеп, қортындыны төртке көбейту жеткілікті. Осында x айнымалысы $0-$ден $+a-$ ға дейін өзгереді. Олай болса t айнымалысы $\frac{\pi}{2}-$ден $0-$ ға дейін өзгереді.

$$S=\int_a^b \psi(t)\varphi'(t)dt=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t\,(-a\sin t)\,dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=$$

$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=2ab\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

419. OX өсімен шекталген $\begin{cases} x=a\,(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ циклоидасының ауданын табу керек.

Шешуі: x айнымалысы $0-$ден $2\pi a-$ ға дейін өзгереді. Олай болса t айнымалысы $0-$ден $2\pi-$ ға дейін өзгереді.

$$S=\int_a^b \psi(t)\varphi'(t)dt=\int_0^{2\pi} a(1-co\,st)\,a\,(1-\cos t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-co\,st)^2\,dt=$$

$$=a^2\left[\int_0^{2\pi}dt-2\int_0^{2\pi}\cos tdt+\int_0^{2\pi}\cos^2 tdt\right].$$

мұнда

$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi, \qquad \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt = \pi$$

Сонымен

$$S = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2.$$

Полярлық координатадағы аудан. Егер үзіліссіз қисығы тік бұрышты координатада $r = f(\varphi)$ теңдеуімен берілсе, $r = f(\varphi)$ қисығымен (доғасымен) $\varphi_1 = \alpha, \ \ \varphi_2 = \beta$ полярлық сәулелермен шектелген «қисық сызықты» сектордың ауданы

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$$

формуласымен есептеледі.

420. $r = a(1+\cos\varphi)$ кардиоида қисығымен шектелген ауданды табу керек.

Шешуі: Қисықтың симметриялылығын ескеріп, берілген ауданның жартысын есептеп, шыққан нәтижені екі есе еселейміз:

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\varphi)d\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= a^2\left[\varphi\Big|_0^{\pi} + 2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right] =$$

$$= a^2\left(\pi + \frac{1}{2}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi}\right) = a^2(\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}a^2\pi.$$

421. $r = a\sqrt{cos 2\varphi}$ лемниската қисығымен шектелген ауданды табу керек.

Шешуі: Қисықтың симметриялылығын ескеріп, берілген ауданның ширегін есептеп, шыққан нәтижені төрт есе еселейміз:

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\varphi)d\varphi = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4} = a^2.$$

Берілген сызықтармен шектелген фигураның ауданын табу керек.

422. $y^2 = 9x, \ \ y = 3x$ Жауабы: $\frac{1}{2}$

423. $xy = a^2, \ \ y = 0, \ \ x = a, \ \ x = 2a$ Жауабы: $a^2\ln 2$

424. $y = x^2, \quad y = 0$ Жауабы: $\frac{32}{3}$

425. $y^2 = 2px, \quad 2py = x^2$ Жауабы: $\frac{4p^2}{3}$

426. $y = x^3, \quad y = 2x, \quad y = x$ Жауабы: $\frac{3}{2}$

427. $y^3 = x, \quad y = 1, \quad x = 8$ Жауабы: $4\frac{1}{4}$

428. $y = tgx, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{3}$ Жауабы: $\ln 2$

429. $y = ax - x^2, \quad y = 0$ Жауабы: $\frac{a^3}{6}$

430. $y = \frac{a^2}{x^2 + a^2}, \quad y = 0$ Жауабы: πa^2

431. $y = 2x - x^2, \quad y + x = 0$ Жауабы: $4\frac{1}{2}$

432. $y = \frac{x^2}{3}, \quad y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ Жауабы: $10\frac{2}{3}$

433. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$ Жауабы: $\frac{3}{8}\pi ab$

434. $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin - \sin 2t) \end{cases}$ Жауабы: $6\pi a^2$

435. $r = a\cos\varphi$ Жауабы: $\frac{\pi a^2}{4}$

436. $r = a\cos 2\varphi$ Жауабы: $\frac{\pi a^2}{4}$

437. $r = a\cos 3\varphi$ Жауабы: $\frac{\pi}{4}$

438. $r = a\cos 4\varphi$ Жауабы: $\frac{\pi}{4}$

2.6 Қисық доғасының ұзындығы

Тік бұрышты координатадағы доғаның ұзындығы. Жазықтықта $y = f(x)$ теңдеуімен өрнектелген АВ доғасының ұзындығы, мұндағы $a \prec x \prec b$,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

формуласымен есептеледі.

439. $x^2 + y^2 = R^2$ теңдеуімен берілген шеңбердің ұзындығын табу керек.

Шешуі: Шеңбердің симметриялылығын ескеріп, берілген ауданның ширегін есептеп, шыққан нәтижені төрт есе еселейміз.

Шеңбердің теңдеуі $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, осыдан

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Сонда

$$L = 4 \cdot \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 4 \cdot \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R\arcsin x \Big|_0^R = 2\pi R.$$

440. $x = 0-$ден $x = 1-$ге дейінгі аралықтағы $x^3 = y^2$ $(y \geq 0)$ теңдеуімен берілген қисықтың доғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі: $y = \sqrt{x^3}$, осыдан

$$y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}.$$

Сонда

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}\right)^{3/2} \Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27} = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right).$$

441. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроидасының ұзындығын табу керек.

Шешуі: Астроиданың теңдеуін дифференциалдаймыз:

$$y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Қисықтың симметриялылығын ескеріп, берілген ұзындықтың ширегін есептеп, шыққан нәтижені төрт еселейміз:

$$\frac{1}{4}\ L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = a^{\frac{1}{3}} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \Bigg|_0^a = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} a.$$

$$L = 6a.$$

Параметрлік түрде берілген $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$ мұндағы $\alpha \le t \le \beta,\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b,$ қисықпен шектелген доғасының ұзындығы

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

формуласымен есептеледі.

442. $\begin{cases} x=a\,(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ циклоиданың бір аркасының ұзындығын табу керек.

Шешуі: $x'=a(1-\cos t);\quad y'=a\sin t$. Сондықтан,

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$
$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$
$$=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(\cos\pi-\cos 0)=8a.$$

443. $\begin{cases} x=cos^5 t \\ y=\sin^5 t \end{cases}$ $(0\le t\le \frac{\pi}{2})$ теңдеуімен берілген қисықтың доғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі: $x'=-5\sin t\cos^4 t;\quad y'=5\sin^4 t\cos t$.

Сондықтан,

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{25\sin^2 t\cos^8 t+25\sin^8 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{\sin^6 t+\cos^6 t}\,dt=\frac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2t}\,dt=-\frac{5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos^2 2t}\,d(\cos 2t)=$$
$$=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}\cos 2t+\sqrt{1+3\cos^2 2t}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5}{8}\left[2+\frac{\ln(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right].$$

Полярлық координатадағы доғаның ұзындығы. AB қисығы $r=f(\varphi)$ теңдеуімен берілсе, мұндағы $\alpha\le\varphi\le\beta,$ онда AB доғасының ұзындығы

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi$$

формуласымен есептеледі.

444. $r=a\sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ $(0\le\varphi\le 3\pi)$ теңдеуімен берілген қисықтың доғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі: $r'=a\sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)$.

Сондықтан,

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi=$$

$$=\int_{0}^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\left(\frac{\varphi}{3}\right)+a^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)}\,d\varphi=\int_{0}^{3\pi}\sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)d\varphi=\frac{3\pi a}{2}$$

445. $r=a(1+\cos\varphi)$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$ теңдеуімен берілген қисықтың доғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі: Қисықтың симметриялылығын ескеріп, берілген ұзындықтың жартысын есептеп, шыққан нәтижені екі еселейміз.

$$r'=-a\sin\varphi\,.$$

Сондықтан,

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi=2\int_{0}^{\pi}\sqrt{a^2(1+cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2a\int_{0}^{\pi}\sqrt{2+2cos\varphi}\,d\varphi=4a\int_{0}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{\pi}=8a.$$

Берілген қисықтың доғасының ұзындығын табу керек.

446. $y=\frac{x^2}{2}$ $0\le x\le 1$ Жауабы: $\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$

447. $y^2=x^3$ (0;0) нүктесінен (4;8) нүктесіне дейін

Жауабы: $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$

448. $y=2\sqrt{x}$ $0\le x\le 1$ Жауабы: $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$

449. $y=\ln x \quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$ Жауабы: $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

450. $\begin{cases} x=\dfrac{t^3}{3}-t \\ y=t^2+2 \end{cases}$ $0\le t\le 3$ Жауабы: 12

451. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$, Жауабы: $6a$

452. $\begin{cases} x=8\sin t+6\cos t \\ y=6\sin t-8\cos t \end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, Жауабы: 5π

453. $r=a\varphi$ (Архимед спиралі) полюстен бірінші айналымға дейін

Жауабы: $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.

454. $r=a\sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ $(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$ Жауабы: $\frac{1}{8}(2\pi-3\sqrt{3})$.

455. $r=e^{a\varphi}$ полюстен (r,φ) нүктесіне дейін.

Жауабы: $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\varphi}$.

2.7 Дененің көлемі.

Қимасының ауданы бойынша дененің көлемі. Егер дененің $S=S(x)-$ OX өсіне перпендикуляр болатын параллель қимасының ауданы болса, онда дененің клемі

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

формуласымен есептеледі, мұндағы $a\le x\le b$.

456. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоидының көлемін табу керек.

Шешуі: Эллипсоидтың OYZ параллель жүргізілген қималар эллипс болады (OX өсіне перпендикуляр). Оның теңдеуі

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}, \qquad \frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}=1.$$

Эллипстің жарты өстері

$$b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \quad c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

Эллипстің ауданы $S(x)=\pi b_1c_1$ – ге тең (418 есепті қараңыз). Осыдан

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

Енді эллипсоидының көлемін табамыз

$$V=\int_a^b S(x)dx=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Айналу денесінің көлемі. $y=f(x)$ қисығы және $y=0,\ \ x=a,\ \ x=b$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапециясын OX өсімен және OY өсімен айналдырғанда пайда болған денелердің көлемі сәйкес

$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx, \qquad V_y=2\pi\int_a^b xy(x)dx=2\pi\int_a^b x\,f(x)dx$$

формулаларымен есептеледі, мұндағы $a\le x\le b.$

457. $y=\sin x \quad (0\le x\le\pi)$ синусоидасы және OX өсімен шектелген фигураны а) OX өсі бойынша, б) OY өсі бойынша айналдырғанда пайда болған денелердің көлемін табу керек.

Шешуі:

$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)dx=\pi\int_0^\pi \sin^2 xdx=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}$$

$$V_y=2\pi\int_a^b xy(x)dx=2\pi\int_0^\pi x\sin xdx=2\pi(-x\cos x+\sin x)\big|_0^\pi=2\pi^2$$

Берілген сызықтармен шектелген фигураны OX немесе OY өсімен айналдырғанда пайда болған дененің көлемін табу керек.

458. $y = ax - x^2 \quad (a > 0)$

а) OX өсі бойынша — Жауабы: а) $V_x = \dfrac{\pi a^5}{30}$

б) OY өсі бойынша — б) $V_y = \dfrac{\pi a^4}{6}\pi$

459. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

OX өсі бойынша — Жауабы: $\dfrac{4}{3}\pi ab^2$

460. $y = \dfrac{bx}{a}$

OY өсі бойынша — Жауабы: $\dfrac{1}{3}\pi a^2 b$

461. $y = \dfrac{x^2}{2}, \quad y = \dfrac{x^3}{8}$

OX өсі бойынша — Жауабы: $\dfrac{4\pi}{35}$

462. $y^2 = 2px, \quad x = a$

OY өсі бойынша — Жауабы: πpa^2

463. $y^2 = x^3, \quad y = 0, \ x = 3$

а) OX өсі бойынша — Жауабы: а) $V_x = \dfrac{\pi}{4}$

б) OY өсі бойынша — б) $V_y = \dfrac{4}{7}\pi$

464. $y = e^x, \quad y = 0, \ x = 0$

а) OX өсі бойынша — Жауабы: а) $V_x = \dfrac{\pi}{2}$

б) OY өсі бойынша — б) $V_y = 2\pi$

465. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

а) OX өсі бойынша — Жауабы: а) $V_x = 5\pi^2 a^3$

б) OY өсі бойынша — б) $V_y = 6\pi^2 a^3$

466. $\begin{cases} x = a\,cos^3 t) \\ y = a\sin^3 t) \end{cases}$

а) OX өсі бойынша — Жауабы: а) $V_x = \dfrac{32\pi a^3}{105}$

б) OY өсі бойынша — б) $V_y = \dfrac{32\pi a^3}{105}$

467. $r = a(1 + \cos\varphi)$

полярлық өсі бойынша Жауабы: $\frac{8}{3}\pi a^3$

468. $r = \cos^2\varphi$

полярлық өсі бойынша Жауабы: $\frac{4}{21}\pi a^3$

2.8 Айналу денесінің бетінің ауданы

$y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ қисығының доғасын OX өсімен айналдырғанда пайда болған дененің бетінің ауданы

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

формулаларымен есептеледі.

469. $9y^2 = x(3-x)^2$ қисығының OX өсі бойынша айналдырғанда пайда болған денелердің бетінің ауданын табу керек.

Шешуі: $0 \le x \le 3$ $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ $f'(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{3-x}{6\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int_0^3 \frac{3-x}{3}\sqrt{x}\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx = 3\pi.$$

470. $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ қисығының OX өсі бойынша айналдырғанда пайда болған денелердің бетінің ауданын табу керек.

Шешуі: $x' = a(1-\cos t),\ y = a\sin t$

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt = x\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

Берілген қисықтың доғасын OX өсімен айналдырғанда пайда болған беттің ауданын табу керек.

471. $y = 2x$ $0 \le x \le 2$ Жауабы: $8\pi\sqrt{5}$

472. $y = \sin x \quad 0 \le x \le \pi$ Жауабы: $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$

473. $y = \frac{1}{3}(3-x) \quad 0 \le x \le 3$ Жауабы: 3π

474. $y^2 = 4ax \quad 0 \le x \le 3a$ Жауабы: $\frac{56\pi a^2}{3}$

475. $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ Жауабы: $\frac{128\pi a^2}{5}$

476. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ Жауабы: $\frac{12\pi a^2}{5}$

2.9 Анықталған интегралдың механикада қолдануы

Ауырлық орталығы. $y = f(x) \quad (a \le x \le b)$ теңдеуімен берілген $A(a, f(a))$ мен $B(b, f(b))$ нүктелерін қосатын AB доғасының ауырлық орталығының координаталары

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}, \qquad y_c = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$$

формулаларымен есептеледі.

$y = f(x)$ қисығы және $y = 0, \quad x = a, \quad x = b$ түзулерімен шектелген «қисық сызықты» трапециясының ауырлық орталығының координаталары

$$x_c = \frac{\int_a^b x\, f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \qquad y_c = \frac{\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

формулаларымен есептеледі.

477. $x^2 + y^2 = a^2, \quad y > 0$ жарты шеңберінің ауырлық орталығының координаталарын табу керек.

Шешуі:

$y=\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\quad \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$$y_c=\frac{\int_a^b y\,f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}{\pi a}=\frac{a\int_{-a}^{a}dx}{\pi a}=\frac{2a}{\pi},$$

$x_c=0,$ себебі жарты шеңбер OY өсіне қарағанда симметриялы.

478. $y=\sqrt{ax}$ параболасы және $x=a$ түзуімен шектелген фигураның ауырлық орталығының координаталарын табу керек.

Шешуі:

$$x_c=\frac{\int_a^b x\,f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{\int_0^a x\sqrt{ax}dx}{\int_0^a\sqrt{ax}dx}=\frac{2\sqrt{a}\cdot\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a}=\frac{3a}{5},$$

$$y_c=\frac{\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{\int_0^a axdx}{\int_0^a\sqrt{ax}dx}=\frac{\cdot\frac{1}{2}a\,x^2\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a}=\frac{3a}{8}$$

Инерция моменті. $y=f(x)$ $\quad(a\le x\le b)$ теңдеуімен берілген $A(a, f(a)$ мен $B(b, f(b)$ нүктелерін қосатын AB доғасының OX өсі және OY өсіне қарағанда инерция моменті

$$I_x=\int_a^b y^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx,\qquad I_y=\int_a^b x^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx,$$

формулаларымен есептеледі.

$y=f(x)$ қисығы және $y=0,\quad x=a,\quad x=b$ түзулерімен шектелген «қисық сызықты» трапециясының OX өсі және OY өсіне қарағанда инерция моменті

$$I_x=\frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)dx,\qquad I_y=\int_a^b x^2 f(x)dx$$

формулаларымен есептеледі

479. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ асттоида доғасының OX, OY өстеріне қарағандағы инерция моментін табу керек.

Шешуі: $x' = -3a\sin t\cos^2 t,$ $y' = 3a\sin^2 t\cos t$

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt = 3a\sin t\cos t\,dt$$

$$I_x = \int_a^b y^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^6 t\,3a\sin t\cos t\,dt = \frac{3}{8}a^3\sin^8 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a^3}{8}.$$

Осылай $I_y = \dfrac{3a^3}{8}.$

480. $y = a^2 - x^2,$ $y = 0$ сызықтарымен шектелген фигураның OX өсінің қарағандағы инерция моментін табу керек

Шешуі:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)dx = \frac{1}{3}\int_a^b \left(a^2 - x^2\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_a^b \left(a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6\right)dx = \frac{1}{3}\left(a^6x - a^4x^3 + \frac{3}{5}a^2x^4 - \frac{1}{7}x^7\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{32\,a^7}{105}.$$

481. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(x \ge 0,\ y \ge 0)$ эллипстің ширегінің ауырлық орталығын табу керек.

Жауабы: $x_c = \dfrac{4a}{3\pi}$; $y_c = \dfrac{4b}{3\pi}$

482. $4y = 16 - x^2,$ $y = 0$ сызықтарымен шектелген фигураның ауырлық орталығын табу керек.

Жауабы: $x_c = 0$; $y_c = 1.6$

483. $y = \sin x,$ $y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$ шектелген фигураның ауырлық орталығын табу керек

Жауабы: $x_c = \pi/2$; $y_c = \pi/8$

484. $y^2 = 20x,$ $x^2 = 20y$ параболаларымен шектелген фигураның ауырлық орталығын табу керек

Жауабы: $x_c = 9$; $y_c = 9$

485. $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ циклоида доғасының ауырлық орталығын табу керек. Жауабы: $x_c = \frac{4a}{3\pi}$; $y_c = \frac{4b}{3\pi}$

486. $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ циклоида және OX өсімен шектелген фигураның ауырлық орталығын табу керек.

Жауабы: $x_c = \pi a$; $y_c = \frac{5a}{6}$

487. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ астроида доғасының $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$ ауырлық орталығын табу керек. Жауабы: $x_c,\, y_c = \frac{2a}{5}$

488. $y = a^2 - x^2$, $y = 0$ сызықтарымен шектелген фигураның OY өсінің қарағандағы инерция моментін табу керек

Жауабы: $I_y = \frac{4a^5}{15}$

489. $x^2 + y^2 = a^2$ а) шеңберінің , б) дөңгелектің OX, OY өстеріне қарағандағы инерция моментін табу керек.

Жауабы: а) $I_x = I_x = \pi a^3$

б) $I_x = I_x = \frac{1}{4}\pi a^4$

490. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипстің ауданының OX, OY өстеріне қарағандағы инерция моментін табу керек

Жауабы: $I_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$, $I_x = \frac{1}{4}\pi a^3 b.$

Тест сұрақтары

1. $\int \frac{dx}{2x+3}$ анықталмаған интегралды табыңыз:

A) $\frac{1}{2}$ln (2x+3)+C; B) ln (2x+3)+C ; C) $\frac{1}{3}$ln (2x+3)+C;

D) $\frac{2x+3}{3}$+C; E) $\frac{2x+3}{2}$+C

2. $\int \frac{dx}{3x}$ анықталмаған интегралды табыңыз:

A) 12 x ^{2} +C; B) $\frac{1}{3}\ln|x| + C$; C) $\ln|3x| + C$;

D) ln $\sqrt[3]{x}$ +C; E) 4x+C;

3. $\int \frac{dx}{x^2+4}$ анықталмаған интегралды табыңыз:

A) $\frac{1}{4}arctg\frac{x}{4}+C$; B) $arctgx+C$; C) $\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C$;

D) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{2}+C$; E) $\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{2}+C$;

4. Анықталмаған интегралдың анықтамасы.

A) $\int Rf(x)dx = R\int f(x)dx;$ B) $\int F(x)dx = f(x)+C$; C) $\int f(x)dx = F(x)$;

D) $\int f(x)dx = F(x)+C$; E) $\int f'(x)dx = f(x)+C$;

5. Интегралды есептеңіз: $\int \frac{dx}{(x+2)^2}$

A) $-\frac{1}{x+2}$; B) $\ln(x+2)+C$; C) $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$;

D) $arctgx+C$; E) $\ln x+C$.

6. Интегралды есептеңіз: $\int \frac{dx}{x^2-4}$

A) $-\frac{1}{x+2}$; B) $\ln(x+2)+C$; C) $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$;

D) $\frac{1}{2}\,arctg\frac{x}{2}+C$; E) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$.

7. $\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$ интегралы үшін қолданылатын алмастыруды табыңыз.

A) $x=atgt$; B) $x=a\sin t$; C) $x=e^t$;

D) $x=\sec t$; E) x=7/3.

8. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ интегралы үшін қолданылатын алмастыруды табыңыз.

A) $x=atgt$; B) $x=a\sin t$; C) $x=e^t$;

D) $x=a\sec t$; E) $x=t^6$.

9. $\int \frac{2xdx}{2x^2+3}$ анықталмаған интегралды табыңыз:

A) ln (2x+3)+C; B) $\frac{1}{2}$ ln $(2x^2+3)$+C; C) $\frac{1}{3}$ ln (2x+3)+C;

D) $\frac{2x+3}{3}$+C; E) $\frac{2x+3}{2}$+C.

10. Қай теңдік дұрыс?

A) $\int f(x+b)dx = F(x+b)+C$; B) $\int f(ax)dx = F(ax)+C$; C) $\int f(ax+b)dx = F(ax)+C$;
D) $\int f(ax+b)dx = F(ax+b)+C$; E) $\int f(ax+b)dx = f(ax+b)$;

11. $\int(\sin 3x+\cos 2x)dx$ интегралын табыңыз

A) $\sin x+\cos x+C;$ B) $-\sin x+\cos x+C;$ C) $-\sin x-\cos x+C;$
D) $\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\cos 3x+C;$ E) $\sin 2x+\cos 2x+C;$;

12. $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ интегралын қай алмастырудың көмегімен интегралдаймыз?
A) универсал алмастырудың;
B) $x=a\sin t$; C) $x=atgt$; D) $x=a\cos t$; E) $x=a\sec t$;

13. Егер $f(x)$ – жұп функция болса, онда $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ неге тең болады ?

A) 0; B) $\int_0^a f(x)dx;$ C) $-f(x);$ D) $2\int_0^a f(x)dx;$ E) $f(x)$;

14. Егер $f(x)$ -тақ функция болса, онда $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ неге тең болады ?

A) 0; B) $\int_0^a f(x)dx;$ C) $-f(x);$ D) $2\int_0^a f(x)dx;$ E) $f(x)$;

15. Мына интегралдардың ішіндегі элементар функциялармен «алынбайтын» интегралды көрсетіңіз.

A) $\int\frac{dx}{x}$; B) $\int\sin xdx$; C) $\int\sin^2 xdx$; D) $\int\frac{\sin x}{x}dx$; E) $\int tg3xdx$

16. Мына интегралды есептеу үшін $\int x\sin xdx$ қай формуланы қолданамыз?

A) $x=atgt$; B) бөлшектеп интегралдау формуласын,
C) $x=t^2$; D) $x=a\sec t$; E) $x=t^6$.

17. Мына интеграл үшін $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$ қолданылатын алмастыру қайсы?

A) $x=atgt$; B) $x=a\sin t$; C) $x=tg\frac{t}{2}$; D) $x=a\sec t$; E) $x=t^6$.

18. $\int \frac{\ln^5 x dx}{x}$ анықталмаған интегралды табыңыз:

A) *ln ln x*+C; B) $\frac{\ln^6 x}{6}$+C; C) -$\frac{ln\, x}{x^2}$+C; D) $\frac{ln^2 x}{2}+\frac{1}{x^2}$ +C; E) $ln\left|\sqrt{x}\right|$ +C ;

19. $\int \sin^2 x d(\sin x)$ анықталмаған интегралды табыңыз:

A) $\frac{\sin^3 x}{3}+C$; B) - cos x +C; C) cos x+C;

D) $\frac{\cos^2 x}{2}+C$; E) $\frac{\sin^2 x}{2}+C$;

20. Қай теңдік дұрыс?

A) $\int f(x+b)dx=\frac{1}{b}F(x+b)+C$; B) $\int f(ax)dx=F(ax)+C$;

C) $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$; D) $\int f(ax+b)dx=F(ax+b)+C$;

E) $\int f(ax+b)dx=f(ax+b)$;

21. Есептеу керек $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

A) 1/2; B) 3; C) $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; D) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; E) 12.

22. $\int_{-1}^{1}(x^3-3x)dx$ интегралын есептеу керек.

A) -2; B) 2; C) 1; D) 3; E) 0.

23. $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin 5x+\cos 5x)dx$ интегралын есептеу керек.

A) -2; B) 2; C) 0; D) 3; E) 1.

24. $\int_0^1 (x^2+3x+1)dx$ интегралын есептеу керек.

A) 3; B) 2/3; C) ½; D) 13/2; E) 17/6.

25. $\int_0^{\pi}\sin 3x dx$ интегралын есептеу керек

A) 3; B) 2/3; C) ½; D) 13/2; E) 13/3.

26. $\int_0^1 e^{5x+1}dx$ интегралын есептеу керек

A) $\frac{1}{5}(e^6-e\ )$; B) $\frac{1}{5e}$; C) e; D) e^5; E) 0.

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\, dx$ интегралын есептеу керек

A) 3; B) 2/3; C) -1; D) 4; E)1/3.

28. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+16}$ меншіксіз интегралын есептеу керек.

A) π; B) 0; C) 1/16; D) $\pi/8$; E)16.

29. $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ меншіксіз интегралын есептеу керек.

A) 3; B) 2; C) -1; D) 0; E) ∞.

30. $y=f_1(x);\quad y=f_2(x);\quad f_1(x)\prec f_2(x);\quad a\le x\le b$ сызықтарымен шектелген фигура ауданы:

A) $S_x=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x^2+y^2}dt$; B) $S=\sqrt{x^2+y^2}$; C) $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$;

D) $S=x^2+y^2$; E) $S=\int_a^b f(x)dx$.

31. $y=\sqrt{x}$ қисығымен және OX осімен, x = 9 түзуімен шектелген фигура ауданын табу керек

A) $\frac{19}{3}$; B) 18; C) $\frac{3}{2}$; D) $\frac{3}{5}$; E) $\frac{2}{5}$.

32. $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx$ интегралымен қандай шаманы есептейміз

A) y = f(x) қисығымен, OX осімен және x =a , x= в түзулерімен шектелген ауданды;
B) y = f(x) қисығының x=a, x=в арасындағы ұзындығын;
C) дененің көлемін;
D) беттің ауданын;
E) екі түзудің арасындағы бұрышты.

33. Анықталған интегралда бөлшектеп интегралдау формуласы

A) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$; B) $\int_a^b udv = uv\Big/_a^b - \int_a^b vdu$; C) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
D) $\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$; E) $\int d(f(x)) = f(x) + C$.

34. $\int_a^b F(s)ds$ интегралының қандай механикалық мағынасы бар

A) тығыздық; B) күш моменті; C) статикалық момент
D) күштің жұмысы; E) жүйенің ауырлық центрі.

35. $\pi\int_a^b f^2(x)dx$ интегралының геометриялық мағынасы

A) фигураның ауданы; B) дененің бетінің ауданы;
C) айналу денесінің көлемі; D) доғаның ұзындығы;
E) екі түзудің арасындағы бұрыш.

36. $\frac{1}{2}\int_a^b \rho^2 d\theta$ интегралымен қандай геометриялық шама табылады.

A) екі түзудің арасындағы бұрыш; B) дененің бетінің ауданы;
C) айналу денесінің көлемі; D) доғаның ұзындығы;
E) қисық сызықты сектордың ауданы.

37. $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)}dt$ интегралымен қандай геометриялық шама табылады.

A) екі түзудің арасындағы бұрыш; B) дененің бетінің ауданы;
C) айналу денесінің көлемі; D) доғаның ұзындығы;
E) қисық сызықты сектордың ауданы.

38. $\rho = a(1+\cos\theta)$ кардиоидасының бүкіл ұзындығы неге тең?

A) $8a$;   B) $(2/3)a$;   C)$6a$;   D)$4a$;   E) $(13/3)a$.

39. $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ интегралымен қандай геометриялық шама табылады.

A) екі түзудің арасындағы бұрыш; B) айналу денесінің бетінің ауданы;
C) айналу денесінің көлемі; D) доғаның ұзындығы;
E) қисық сызықты трапецияның ауданы.

40. Мына өрнектердің ішінен параметрлік түрде берілген қисықпен шектелген фигураның ауданын табу керек.

A) $\int_\alpha^\beta \phi(t))\varphi'(t)dt$;   B) $\pi\int_a^b f^2(x)dx$;   C) $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}dt$;

D) $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$;   E) $\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

Жауаптары

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	E	D	A	E	B	E	B	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	D	A	D	B	C	B	A	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	E	C	E	B	A	E	D	E	C
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	B	B	D	C	E	D	A	B	A

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Берман Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа. – Москва: Наука, 1985.-384 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М., Наука, 1980.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть1,2. - М., Высшая школа, 1998.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнении по математическому анализу. - М., Наука, 1985.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальные и интегральные исчисления. Часть I, II. - 1972.
6. Сборник индивидуальных задании по высшей математике. Под ред. Рябушка А. П. - Минск, 2001.
7. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – Москва: Наука, 1996.-736 с.

МАЗМҰНЫ

Жоспар 2011 ж., реті.

Мұрат Шәпенұлы Тілепиев,
Светлана Жұмағазықызы Махимова

**МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУДАН
ЕСЕПТЕР ЖИНАҒЫ**
2-бөлім

Оқу құралы

Пішімі 60х84 1/12
Көлемі 83 бет 6,9 шартты баспа табағы
Таралымы 20 дана.
Ш.Есенов атындағы КМТжИУ
Редакциялық - баспа бөлімінде басылды.
Ақтау қаласы, 32 ш/а.