УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАБОЛО - ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ

М.Ш. Тилепиев, Э.У. Уразмагамбетова, М.Р. Кулиманова

Бұл жұмыста жәй жуықтау әдісі үшін қарапайым парабола-эллипстік жүйелерде туындының алдындағы кішкентай ε параметрінің бір өлшемді есептерінің шешімдерінің берілген есептің шешімдеріне жинақталуына әсері қарастырылған.

В данной работе рассматривается влияние малого параметра ε при производной по времени на сходимость решения расщепленной задачи к решению исходной, в случае простейшей параболо - эллиптической системы для метода слабой аппроксимации.

В работах [1, 2] изучены системы дифференциальных уравнений составного типа и их аппроксимации системами, принадлежащими одному из хорошо изученных типов. В частности, исследованы полуэволюционные системы и их аппроксимации эволюционными, содержащие малые параметры при производных во времени. Для решения эволюционных систем различных типов имеется много эффективных методов, в частности, метод дробных шагов [3]. Встает вопрос, как влияет малый параметр ε при производной по времени на сходимость решения расщепленной задачи к решению исходной. В данной работе этот вопрос рассматривается в случае простейшей параболо - эллиптической системы для метода слабой аппроксимации.

Пусть $T,\ l_i$ - заданные положительные постоянные $i=1{,}2$, $\Omega=\{x=(x_1,x_2)|\ 0<x_i<l_i, i=1{,}2\}$ прямоугольник в пространстве R^2, $Q_{(t_1,t_2)}=\Omega\times(t_1,t_2)$, $Q_{[t_1,t_2]}=\Omega\times[t_1,t_2]$.

Рассмотрим в $Q_{[0,T]}$ полуэволюционную систему уравнений:

$$0=a_{11}\Delta u_1+a_{12}\Delta u_2+b_{11}u_1+b_{12}u_2,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=a_{21}\Delta u_1+a_{22}\Delta u_2+b_{21}u_1+b_{22}u_2, \qquad (1)$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$- положительно определенные матрицы с постоянными коэффициентами, $\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \alpha_0\xi^2$, $\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\xi_i\xi_j \le \beta\xi^2$, $\forall\xi\in R^2$, α, β- положительные постоянные, $u=(u_1,u_2)$ - искомый вектор. Поставим для системы первую краевую задачу с однородными граничными условиями

$$u\big|_{\partial\Omega}=0,$$

т.е.

$$u\big|_{\substack{x_1=0,\ x_2=0\\ x_1=l_1,\ x_2=l_2}} = u(0,x_2,t)=u(l_1,x_2,t)=u(x_1,0,t)=u(x_1,l_2,t)=0 \tag{2}$$

и начальными данными

$$u_2\big|_{t=0}=\varphi_2. \tag{3}$$

Из (1) - (3) найдем $u_1\big|_{t=0}=\varphi_1(x_1,x_2)$ как решение задачи Дирихле

$$a_{11}\Delta\varphi_1=-a_{12}\Delta\varphi_2-b_{11}\varphi_1+b_{12}\varphi_2, \tag{4}$$

$$\varphi_1\big|_{\partial\Omega}=0.$$

Аппроксимируем систему (1) эволюционной системой

$$\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial t}=a_{11}\Delta u_1+a_{12}\Delta u_2+b_{11}u_1+b_{12}u_2,\quad \varepsilon>0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=a_{21}\Delta u_1+a_{22}\Delta u_2+b_{21}u_1+b_{22}u_2 \tag{5}$$

содержащей малый параметр $\varepsilon>0$ при производной по времени. Рассмотрим для системы (5) однородные краевые условия (2) и начальные данные

$$u\big|_{t=0}=\varphi, \tag{6}$$

где $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, φ_1 - произвольно заданная функция, φ_2 - решение задачи (4).

Согласно методу слабой аппроксимации расщепим задачу (5), (3), (6) на одномерные задачи:

$$0{,}5\varepsilon\frac{\partial u_1^\tau}{\partial t}=a_{11}\frac{\partial^2 u_1^\tau}{\partial x_1^2}+a_{12}\frac{\partial^2 u_2^\tau}{\partial x_1^2}+b_{11}u_1^\tau+b_{12}u_2^\tau,$$

$$0{,}5\frac{\partial u_2^\tau}{\partial t}=a_{21}\frac{\partial^2 u_1^\tau}{\partial x_1^2}+a_{22}\frac{\partial^2 u_2^\tau}{\partial x_1^2}+b_{21}u_1^\tau+b_{22}u_2^\tau,\qquad n\tau<t\le\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau, \tag{7}$$

$$0{,}5\varepsilon\frac{\partial u_1^\tau}{\partial t}=a_{11}\frac{\partial^2 u_1^\tau}{\partial x_2^2}+a_{12}\frac{\partial^2 u_2^\tau}{\partial x_2^2},$$

$$0{,}5\frac{\partial u_2^\tau}{\partial t}=a_{21}\frac{\partial^2 u_1^\tau}{\partial x_2^2}+a_{22}\frac{\partial^2 u_2^\tau}{\partial x_2^2},\qquad (n+1/2)\tau<t\le(n+1)\tau, \tag{8}$$

$$u^\tau\big|_{t=0}=\varphi,\quad u^\tau\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{9}$$

Здесь $n=0,1,\ldots N-1$; $N\tau=T$. На каждом дробном шаге начальные данные берутся с предыдущего дробного шага:

$$u^\tau((n+j/2)\tau+0)=u^\tau((n+j/2)\tau),\ j=0,1\ . \tag{10}$$

Наша задача: оценить норму разности $u^{\varepsilon,\tau}-u$ через параметры τ и ε ($u^{\varepsilon,\tau}$-решение задачи (7) - (9), u-решение задачи (1)-(3)).

Пусть

$$\varphi_k\in W_2^3(\Omega),\ k=1,2. \tag{11}$$

В силу $\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}\xi_i\xi_j\ge\alpha_0\xi^2$, $\xi^2=\xi_1^2+\xi_2^2$, $\sum_{i,j=1}^2 b_{ij}\xi_i\xi_j\le\beta\xi^2$, $\forall\xi\in R^2$, $\alpha,\ \beta$- положительные постоянные, имеем соотношения:

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^2\left(a_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}-b_{ij}u_iu_j\right)dx\ge-\beta\|u\|^2+\alpha\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|^2, \tag{12}$$

для любого $u\in\left(W_2^1(\Omega)\right)^2,\alpha,\beta=\mathrm{const}>0$.

Здесь $\|u_2\|_\Omega=\left(\int_\Omega u_2{}^2dx\right)^{1/2}$ - норма в пространстве $L_2(\Omega),\left(W_2^1(\Omega)\right)^2=W_2^1(\Omega)\times W_2^1(\Omega)$.

Ниже мы получим равномерные по τ априорные оценки решения $u_{2,\tau}$. Для удобства в обозначениях индекс ε опустим, например, будем писать u^{τ} вместо $u^{\varepsilon,\tau}$.

Рассмотрим первый дробный шаг нулевого шага ($n=0$). Умножим систему (7) на вектор $u^{\tau}e^{-kt}$, $k=const>0,$ и проинтегрируем результат по области $Q_{(0,t)},\ 0<t\le\tau/2$. Учитывая соотношение (12), получим неравенство

$$\varepsilon\left\|u_1^{\tau}(t)\right\|_{\Omega}^2 e^{-kt}-\varepsilon\left\|\varphi_1\right\|_{\Omega}^2+\left\|u_2^{\tau}(t)\right\|_{\Omega}^2 e^{-kt}-\left\|\varphi_2\right\|_{\Omega}^{\ 2}+\varepsilon k\int_0^t\left\|u_2^{\tau}(\theta)\right\|_{\Omega}^2 e^{-k\theta}d\theta+$$
$$+k\int_0^t\left\|u_1^{\tau}(\theta)\right\|_{\Omega}^2 e^{-k\theta}d\theta-\beta\int_0^t\left\|u_1^{\tau}(\theta)\right\|_{\Omega}^2 e^{-k\theta}d\theta\le 0.$$

(13)

При $k\ge 4\beta$ из (13) следует, что

$$\varepsilon\left\|u_1^{\tau}(t)\right\|_{\Omega}^2+\left\|u_2^{\tau}(t)\right\|_{\Omega}^2\le\left\{\varepsilon\left\|\varphi_1\right\|^2+\left\|\varphi_2\right\|^2\right\}e^{kt},\ 0<t<\tau/2. \qquad (14)$$

На втором дробном шаге $(n=0,\ t\in(\tau/2,\tau))$ решаем систему (8). Умножим (8) на $u^{\tau}e^{-k(t-\tau/2)}$ и проинтегрируем результат по области $Q_{(\tau/2,t)},\ \tau/2<t\le\tau$.

Аналогично (14) получим неравенство

$$\varepsilon\left\|u_1^{\tau}(t)\right\|_{\Omega}^2+\left\|u_2^{\tau}(t)\right\|_{\Omega}^2\le\left\{\varepsilon\left\|u_1^{\tau}(\tau/2)\right\|^2+\left\|u_2^{\tau}(\tau/2)\right\|^2\right\}e^{k(t-\tau/2)},\ \tau/2<t\le\tau. \qquad (15)$$

Отсюда и из (14) имеем

$$\varepsilon\left\|u_1^{\tau}(t)\right\|_{\Omega}^2+\left\|u_2^{\tau}(t)\right\|_{\Omega}^2\le\left\{\varepsilon\left\|\varphi_1\right\|^2+\left\|\varphi_2\right\|^2\right\}e^{kt},\ 0<t\le\tau \qquad (16)$$

Учитывая (14),(16) и повторяя наши рассуждения на первом $(n=1)$, втором $(n=2)$ и последующих целых $\forall n$ шагах, получим для $t\in(0,T]$ оценку

$$\varepsilon\left\|u_1^{\tau}(t)\right\|^2+\left\|u_2^{\tau}(t)\right\|^2\le\left\{\varepsilon\left\|\varphi_1\right\|^2+\left\|\varphi_2\right\|^2\right\}e^{kt},\ 0<t\le T. \qquad (17)$$

Выведем оценку первых производных по пространственным переменным. Рассмотрим первый дробный шаг при $n=0$. Умножим систему (7) на вектор $\dfrac{\partial u^{\tau}}{\partial x_1}e^{-kt}$, $k=const>0$. После интегрирования по области $Q_{(0,t)},\ t\in(0,\tau/2]$, получим неравенство

$$0{,}5\varepsilon\left\|u_1^{\tau}(t)\right\|^2 e^{-kt} - 0{,}5\varepsilon\left\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right\|^2 + 0{,}5\left\|u_2^{\tau}(t)\right\|^2 e^{-kt} - 0{,}5\left\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right\|^2 +$$

$$+ 0{,}5\varepsilon k\int_0^t\left\|\frac{\partial u_1^{\tau}(\theta)}{\partial x_1}\right\|^2 e^{-k\theta}d\theta + 0{,}5k\int_0^t\left\|\frac{\partial u_2^{\tau}(\theta)}{\partial x_1}\right\|^2 e^{-k\theta}d\theta + \tag{18}$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{2}\left(a_{ij}\,\frac{\partial^2 u_i^{\tau}}{\partial x_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_j^{\tau}}{\partial x_1^{\,2}} - b_{ij}\,\frac{\partial\, u_i^{\tau}}{\partial x_1}\frac{\partial\, u_j^{\tau}}{\partial x_1}\right)e^{-k\theta}dxd\,\theta \le 0.$$

Вследствие условия (12)

$$\int_0^t\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{2}\left(a_{ij}\,\frac{\partial^2 u_i^{\tau}}{\partial x_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_j^{\tau}}{\partial x_1^{\,2}} - b_{ij}\,\frac{\partial\, u_i^{\tau}}{\partial x_1}\frac{\partial\, u_j^{\tau}}{\partial x_1}\right)e^{-k\theta}dxd\,\theta \ge -\beta\int_0^t\left\|\frac{\partial u_2^{\tau}}{\partial x_1}\right\|^2 e^{-k\theta}d\theta.$$

Поэтому, выбрав k достаточно большим $(k \ge 2\beta)$, из (18) получим оценку

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial u_1^{\tau}(t)}{\partial x_1}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u_2^{\tau}(t)}{\partial x_1}\right\|^2 \le \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right\|^2\right\}e^{kt},\ 0 < t \le \tau/2. \tag{19}$$

Для оценки производной $\dfrac{\partial u^{\tau}}{\partial x_2}$ на первом дробном шаге

продифференцируем систему (17) по x_2. Функция $v^{\tau} = \dfrac{\partial u^{\tau}}{\partial x_2}$, рассматриваемая как функция переменной x_1, удовлетворяет однородным краевым условиям $v^{\tau}(t,0,x_2) = v^{\tau}(t,l_1,x_2) = 0$ и системе (17). Следовательно, аналогично оценке (16), получим оценку

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial u_1^{\tau}(t)}{\partial x_2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u_2^{\tau}(t)}{\partial x_2}\right\|^2 \le \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right\|^2\right\}e^{kt},\ 0 < t \le \tau/2. \tag{20}$$

Рассматривая на втором дробном шаге систему уравнений (8) и повторяя предыдущие рассуждения, получим следующее соотношение:

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial u_1^{\tau}(t)}{\partial x_i}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u_2^{\tau}(t)}{\partial x_i}\right\|^2 \le \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial u_1^{\tau}(\tau/2)}{\partial x_i}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u_2^{\tau}(\tau/2)}{\partial x_i}\right\|^2\right\}e^{k(t-\tau/2)},\ \tau/2 < t \le \tau,\ i = 1{,}2.$$

Из двух последних неравенств при $t \in (0,\tau]$ следует оценка

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial u_1^{\tau}(t)}{\partial x_i}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u_2^{\tau}(t)}{\partial x_i}\right\|^2 \le \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\right\|^2\right\} e^{kt}, i = 1{,}2. \tag{21}$$

Повторяя наши рассуждения на первом, втором и всех последующих целых шагах, получим оценку (19) уже на всем отрезке $[0,T]$.

Ниже мы получим оценку производной $\frac{\partial^2 u^\tau}{\partial t \partial x_i}$,которые выражаются через величины, равномерно ограниченные по τ.

Умножим систему (7) на вектор $\frac{\partial^6 u^\tau}{\partial {x_1}^6} e^{-kt},\ t \in (0, \tau/2]$, и проинтегрируем результат по области $Q_{(0,t)}$. Трижды интегрируя по частям первый и третий члены и дважды – второй член, получим:

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 {u_1}^\tau(t)}{\partial {x_1}^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 {u_2}^\tau(t)}{\partial {x_1}^2} \right\|^2 \le \left\{ \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial {x_1}^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial {x_1}^2} \right\|^2 \right\} e^{kt},\ 0 < t \le \tau/2.$$

Дифференцируя систему (7) по x_2, умножая результат дифференцирования на $\frac{\partial^5 u^\tau}{\partial x_2 \partial {x_1}^4} e^{-kt},\ t \in (0, \tau/2)$, и интегрируя произведение по области $Q_{(0,t)}$, получим:

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 {u_1}^\tau(t)}{\partial {x_1}^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 {u_2}^\tau(t)}{\partial {x_1}^2} \right\|^2 \le \left\{ \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial {x_1}^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial {x_1}^2} \right\|^2 \right\} e^{kt},\ 0 < t \le \tau/2. \qquad (22)$$

Дважды дифференцируя систему (7) по x_2, умножая результат на $\frac{\partial^4 u^\tau}{\partial {x_2}^2 \partial {x_1}^2} e^{-kt},\ t \in (0, \tau/2)$, и интегрируя произведение по частям, получим:

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 {u_1}^\tau(t)}{\partial x_2^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 {u_2}^\tau(t)}{\partial {x_2}^2} \right\|^2 \le \left\{ \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} \right\|^2 \right\} e^{kt},\ 0 < t \le \tau/2. \qquad (23)$$

Трижды дифференцируя систему (7) по x_2, умножая результат на $\frac{\partial^3 u^\tau}{\partial {x_2}^3} e^{-kt},\ t \in (0, \tau/2)$, и интегрируя произведение по частям, получим:

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 {u_1}^\tau(t)}{\partial x_2^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 {u_2}^\tau(t)}{\partial {x_2}^2} \right\|^2 \le \left\{ \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} \right\|^2 \right\} e^{kt},\ 0 < t \le \tau/2. \qquad (24)$$

Замечание 1 Легко заметить, что производные вида $\frac{\partial^k}{\partial {x_2}^k} \frac{\partial^{2m} u^\tau}{\partial {x_1}^{2m}},\ \mathrm{k} \ge 0,\ \ m \ge 0$ - целое, обращается в нуль на отрезках границы области Ω при $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$, только при $m = 0$, а произведение вида

$\frac{\partial^k}{\partial x_1{}^k}\frac{\partial^{2m} u^\tau}{\partial x_1{}^{2m}}$ - при $x_2 = 0$ и $x_2 = l_2$. Этот факт позволяет проводить

интегрирование по частям во всех рассматриваемых случаях.

Рассматривая на втором дробном шаге систему (8), аналогично тому, как были получены соотношения (21) - (24) (но в другой последовательности, так как система (8) содержит производные по x_2 и меняются местами переменные x_1, x_2), получим соотношение

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_1{}^\tau(t)}{\partial x_j^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_2{}^\tau(t)}{\partial x_j{}^2}\right\|^2 \le \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_1^\tau(\tau/2)}{\partial x_j^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_2^\tau(\tau/2)}{\partial x_j^2}\right\|^2\right\} e^{k(t-\tau/2)}, \tag{25}$$

$$\tau/2 < t \le \tau,\ i, j = 1{,}2.$$

Из соотношений (21) - (25) следует, что

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_1{}^\tau(t)}{\partial x_j^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_2{}^\tau(t)}{\partial x_j{}^2}\right\|^2 \le \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_j^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_j^2}\right\|^2\right\} e^{kt}. \tag{26}$$

Повторив наши рассуждения на первом, втором и всех последующих шагах, получим оценку (26) уже для всех $t \in [0, T]$.

Аналогично выводится оценка

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial^2 u_1{}^\tau(t)}{\partial x_i^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2 u_2{}^\tau(t)}{\partial x_i{}^2}\right\|^2 \le \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_i^2}\right\|^2\right\} e^{kt},\ 0 \le t \le T,\ i = 1{,}2. \tag{27}$$

Из соотношений (17), (20), (26), (27) заключаем, что

$$\begin{gathered}\sqrt{\varepsilon}\left\|u_1^\tau(t)\right\| + \left\|u_2^\tau(t)\right\| + \sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial u_1{}^\tau(t)}{\partial x_i}\right\| + \left\|\frac{\partial u_2{}^\tau(t)}{\partial x_i}\right\| + \sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial^2 u_1{}^\tau(t)}{\partial x_i^2}\right\| + \left\|\frac{\partial^2 u_2{}^\tau(t)}{\partial x_i{}^2}\right\| + \\ + \sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_1{}^\tau(t)}{\partial x_j^2}\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_2{}^\tau(t)}{\partial x_j{}^2}\right\| \le C,\ 0 \le t \le T,\ i = 1{,}2\end{gathered} \tag{28}$$

$$C(\sqrt{\varepsilon}\|\varphi_1\|_{W_2^3} + \|\varphi_2\|_{W_2^3}) \le C\left(1 + \sqrt{\varepsilon}\right) \le C_1,\quad 0 < \varepsilon \le 1.$$

Здесь (и ниже) постоянная C не зависит от ε и τ, лишь от $\alpha,\ \beta$ и начальных данных φ.

Из уравнений (7), (8) и соотношений (28) имеем:

$$\left\|\frac{\partial u^{\tau}(t)}{\partial t}\right\|+\left\|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u^{\tau}(t)}{\partial x_j}\right\| \leq \frac{C}{\varepsilon^{3/2}},\ j=1,2. \tag{29}$$

Запишем систему (7), (8) в виде

$$\frac{\partial u^{\tau}}{\partial t}=\alpha_{1,\tau}A\frac{\partial^2 u^{\tau}}{\partial x_1^2}+\alpha_{1,\tau}Bu^{\tau}+\alpha_{2,\tau}A\frac{\partial^2 u^{\tau}}{\partial x_2^2}, \tag{30}$$

где $\alpha_{1,\tau}(t)\equiv 2,\ \alpha_{2,\tau}(t)\equiv 0$ на первых дробных шагах (при $t\in[n\tau,(n+1/2)\tau]$), $n=0,1,\dots,N-1.$

Рассмотрим средние функции u_{cp}^{τ}:

$$u_{cp}^{\tau}(t)=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}u^{\tau}(\theta)d\theta=\left(\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}u_1{}^{\tau}(\theta)d\theta,\ \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}u_2{}^{\tau}(\theta)d\theta\right)=\left(u_{1,cp}^{\tau}(t),\ u_{2,cp}^{\tau}(t)\right). \tag{31}$$

Осредняя систему (30) (интегрируя обе части (30) по отрезку $[t,t+\tau]$ и деля результат на τ), находим, что вектор u_{cp}^{τ} удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \tilde{u}_{cp}{}^{\tau}(t)}{\partial t}=A\Delta u_{cp}{}^{\tau}(t)+Bu_{cp}{}^{\tau}(t)+F_{\tau}(t), \tag{32}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{u}_{cp}{}^{\tau}=\left(\varepsilon\, u_{1,cp}{}^{\tau},u_{2,cp}{}^{\tau}\right), \qquad F_{\tau}(t)=F_{\tau}(t,u^{\tau})= \\ =\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\left\{\alpha_{1,\tau}(\theta)\left[\frac{\partial^2 u^{\tau}(\theta)}{\partial x_1^2}+Bu^{\tau}(\theta)\right]-A\frac{\partial^2 u_{cp}{}^{\tau}(t)}{\partial x_1^2}-Bu_{cp}{}^{\tau}(t)\right\}d\theta+ \\ +\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\left\{\alpha_{2,\tau}(\theta)A\frac{\partial^2 u^{\tau}(\theta)}{\partial x_2^2}-A\frac{\partial^2 u_{cp}{}^{\tau}(t)}{\partial x_2^2}\right\}d\theta.\end{gathered} \tag{33}$$

Нетрудно показать, что используя вид функции F_{τ}, формулу конечных приращений Лагранжа получить оценку

$$\|F_\tau\|_{\left(L_\infty(0,T;W_2^{-1}(\Omega)\right)^2} \le \frac{C\tau}{\varepsilon^{3/2}}, \tag{34}$$

где $W_2^{-1}(\Omega)$ - пространство, сопряженное к $W_2^1(\Omega)$.

Действительно, умножая F_τ скалярно на производную функцию $v \in \left(\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)^2$ и интегрируя члены, содержащие вторые производные, по частям, получим соотношение (ниже $\langle\,,\,\rangle$-отношение двойственности пространств $\left(\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)^2$ и $\left(W_2^{-1}(\Omega)\right)^2$):

$$\langle F_\tau(t),v\rangle = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\alpha_{1,\tau}(\theta)\int_\Omega\left[-A\frac{\partial u^\tau(\theta)}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}+Bu^\tau(\theta)v+A\frac{\partial u_{cp}{}^\tau(t)}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}-Bu_{cp}{}^\tau(t)v\right]dxd\theta -$$

$$-\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\int_\Omega\left[\alpha_{1,\tau}(\theta)A\frac{\partial u^\tau(\theta)}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}-A\frac{\partial u_{cp}{}^\tau(t)}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right]dxd\,\theta =$$

$$=\frac{2}{\tau}\int_{\sigma_1}\int_\Omega A\left(\frac{\partial u_{cp}^\tau(t)}{\partial x_1}-\frac{\partial u^\tau(\theta)}{\partial x_1}\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}dxd\theta+\frac{2}{\tau}\int_{\sigma_1}\int_\Omega B\left(u^\tau(\theta)-u_{cp}^\tau(t)\right)vdxd\theta+$$

$$+\frac{2}{\tau}\int_{\sigma_2}\int_\Omega A\left(\frac{\partial u_{cp}^\tau(t)}{\partial x_2}-\frac{\partial u^\tau}{\partial x_2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2}dxd\theta = I_1+I_2+I_3.$$

Здесь σ_1 - множество точек отрезка $[t,t+\tau]$, на которых отлична от нуля функция $\alpha_{1,\tau}, \sigma_2 = [t,t+\tau]\ \sigma_1$ (на σ_2 отлична от нуля функция $\alpha_{2,\tau}$). Оценим I_1:

$$I_1 = \frac{2}{\tau}\Big(\int_{\sigma_1}\int_\Omega A\left(\frac{\partial u_{cp}^\tau(t)}{\partial x_1}-\frac{\partial u_{cp}^\tau(\theta)}{\partial x_1}\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}dxd\theta+\int_{\sigma_1}\int_\Omega A\left(\frac{\partial u_{cp}^\tau(\theta)}{\partial x_1}-\frac{\partial u^\tau(\theta)}{\partial x_1}\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}dxd\theta\Big). \tag{35}$$

Имеют место равенства

$$\frac{\partial u_{cp}^{\tau}(\theta)}{\partial x_1}-\frac{\partial u^{\tau}(\theta)}{\partial x_1}=\frac{1}{\tau}\int\limits_{\theta}^{\theta+\tau}\left(\frac{\partial u^{\tau}(\xi)}{\partial x_1}-\frac{\partial u^{\tau}(\theta)}{\partial x_1}\right)d\xi=\frac{1}{\tau}\int\limits_{\theta}^{\theta+\tau}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u^{\tau}}{\partial x_1}(\zeta)(\xi-\theta)d\xi,$$

$$\frac{\partial u_{cp}^{\tau}(t)}{\partial x_1}-\frac{\partial u_{cp}^{\tau}(\theta)}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_{cp}^{\tau}(\zeta)}{\partial x_1}(t-\theta).. \tag{36}$$

Здесь мы применили формулу конечных приращений Лагранжа; ζ - некоторая точка, лежащая на интервале (θ,ξ).

Из (35), (36), учитывая (29), получаем что $|I_1|\le\frac{c\cdot\tau}{\varepsilon^{3/2}}\|v\|_{\left(\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)^2}$.

Аналогично оцениваются члены $I_{2,}\ I_3$, что и доказывает соотношение (34).

Обозначим теперь решение задачи (7)-(9) через $u^{\varepsilon,\tau}$, а решение задачи (5), (3), (6) – через u^{ε}. Тогда вектор $w = u_{cp}^{\varepsilon,\tau} - u^{\varepsilon}$ удовлетворяет системе

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A\ \Delta w + B\,w - F_{\tau}, \tag{37}$$

с однородными граничными условиями и начальными данными $w(0) = u_{cp}^{\varepsilon,\tau}(0) - \varphi$, удовлетворяющими вследствие (29) неравенству

$$\left\|u_{cp}^{\varepsilon,\tau}(0)-\varphi\right\|\le C\frac{\tau}{\varepsilon^{3/2}}. \tag{38}$$

В силу (12), (34), (38) для решения w уравнения (37) имеет место оценка

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|u_{1,cp}^{\varepsilon,\tau}-u_1^{\varepsilon}\right\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|u_{2,cp}^{\varepsilon,\tau}-u_2^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|u_{cp}^{\varepsilon,\tau}-u^{\varepsilon}\right\|_{(L_2(0,T;W_2^1(\Omega)))^2}\le C\frac{\tau}{\varepsilon^{3/2}}. \tag{39}$$

Так как вследствие (29), (31)

$$\left\|u_{cp}^{\varepsilon,\tau}(t)-u^{\varepsilon,\tau}\right\|_{\Omega} + \left\|\frac{\partial u_{cp}^{\varepsilon,\tau}}{\partial x}-\frac{\partial u^{\varepsilon,\tau}(t)}{\partial x}\right\|_{\Omega}\le C\frac{\tau}{\varepsilon^{3/2}}, \tag{40}$$

то по неравенству треугольника из (39), (40) следует оценка

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|u_1^{\varepsilon,\tau}-u_1^{\varepsilon}\right\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|u_2^{\varepsilon,\tau}-u_2^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|u^{\varepsilon,\tau}-u^{\varepsilon}\right\|_{(L_2(0,T;W_2^1(\Omega)))^2}\le C\frac{\tau}{\varepsilon^{3/2}}. \tag{41}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1 Пусть $\varphi_k \in W_2^3(\Omega)$, $k=1,2$ и коэффициенты системы уравнений (1) удовлетворяют условиям $\sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \alpha_0\xi^2$, $\sum\limits_{i,j=1}^{2} b_{ij}\xi_i\xi_j \le \beta\xi^2$, $\forall\xi\in R^2$, $\alpha,\ \beta$- положительные постоянные. Тогда имеет место оценка (41), где u^{ε} - решение задачи (5), (3), (6), $u^{\varepsilon,\tau}$- решение задачи (7)- (9) и постоянная C не зависит от $\varepsilon,\ \tau$, а лишь от $\alpha,\beta,\|\varphi\|_{W_2^3(\Omega)}$.

Замечание 2 При выполнении условия (11) решения рассмотренных задач обладает гладкостью, для законности проведенных выше преобразований.

Рассмотрим теперь задачу (1)-(3). Легко видеть, что она эквивалентна задаче (1), (2) с начальными данными (6) при условии их согласования

$$a_{11}\Delta\varphi_1 + a_{12}\Delta\varphi_2 + b_{11}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2 = 0. \qquad (42)$$

Здесь функция φ_1 определяется из первого уравнения системы (1.83) при $t\to 0$. Из результатов работ $[4,5]$ следует, что при выполнении условий (11), (12), (42) имеет место оценка

$$\left\|u_2 - u_2^{\varepsilon}\right\|_{C(0,T;L_2(\Omega))} + \left\|u - u^{\varepsilon}\right\|_{(L_2(0,T;W_2^1(\Omega)))^2} \le C\cdot\varepsilon, \qquad (43)$$

где u - решение задачи (1) – (3) класса $\left(W_2^1\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)\right)^2$.

Из соотношений (41), (43) следует, что

$$\left\|u_2 - u_2^{\varepsilon,\tau}\right\|_{C(0,T;L_2(\Omega))} + \left\|u - u^{\varepsilon,\tau}\right\|_{(L_2(0,T;W_2^1(\Omega)))^2} \le C\cdot\left(\varepsilon + \frac{\tau}{\varepsilon^{3/2}}\right). \qquad (44)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2 Пусть выполняются соотношения (11), (12) и условия согласования (42). Тогда имеет место оценка (44).

Литература:

1 Кучер Н.А. Об обосновании схем расщепления, используемых в методе крупных частиц // В сб.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1988. -Вып. 85. – С. 1-36.
2 Белов Ю.Я., Кантор С.А. Метод слабой аппроксимации. – Красноярск: Красноярский госуниверситет, 1999. – 236 с.
3 Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 196 с.
4 Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
5 Джаикбаев А.М., Исаев С.А. О параболической аппроксимации диффузионной модели неооднородной жидкости // Моделирование в механике. – Новосибирск, 1990. – Т. 4(21), № 6. – С. 27-40.