ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш.ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСЫ

М.Ш. ТІЛЕПИЕВ, Э.Ұ. УРАЗМАГАМБЕТОВА

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУДАН ЕСЕПТЕР ЖИНАҒЫ

3-бөлім

Оқу құралы

Ақтау 2011

ӘОЖ 517(075.8)
ББК 22.161я73
Т93

Пікір берушілер: Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті профессоры, ф.-м.ғ.д. С.Т. Мұхамбетжанов

Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті профессоры, ф-м.ғ.д. Н.Р. Садыков

Алматы энергетика және байланыс институтының доценті, ф-м.ғ.к. М.Ж. Байсалова

Т93 Тілепиев М.Ш., Уразмагамбетова Э.Ұ.
Математикалық талдаудан есептер жинағы 3-бөлім: Оқу құралы / М.Ш. Тілепиев, Э.Ұ. Уразмагамбетова- Ақтау, Ш.Есенов атындағы КМТжИУ, 2011. - 79 б.

ISBN 978-601-7349-10-3

Бұл оқу құралы Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінде оқитын математика мамандығының Математикалық анализ пәнінің бағдарламасына сәйкес жасалған.

ӘОЖ 517(075.8)
ББК 22.161я73

Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің Оқу-әдістемелік Кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылды

ISBN
978-601-7349-10-3

КІРІСПЕ

Қазіргі ғылым мен техникада математикалық зерттеулер, модельдер, жобалар өте үлкен роль атқарады. Ол қазіргі ақпараттар жүйесінің дамуына тікелей байланысты. Демек математикалық нақты сандар шешімін табуға табысты қолдану мүмкіншілігін кеңейтеді.

Математика фундаменталды пән, одан дәріс беру төменгі жағдайды қарастырады:

а) ойдың логикалық және алгоритмдік дамуын;

ә)негізгі зерттеу әдістерін меңгеру және математикалық есептердің шешімдерін таба білу;

б) математикалық негізгі сандық әдістерді меңгеру және оны компьютерде орындау;

в) математикалық білімді өз бетінше ұғып алуға еңбектену, қолданбалы инженерлік және экономикалық есептерге талдау жүргізу.

Математиканың жалпы курсы дәстүрлі мамандар үшін оқу жоспары бойынша арнайы және жалпы техникалық пәндерді табысты оқытуға маңызды мәні бар инженерлер білімдерінің математикалық фундаментін қалайды.

«Математикалық талдаудан есептер жинағы» 3-бөлім «Математикалық талдау» пәнінің бағдарламасына сәйкес кредиттік жүйеге лайықты етіліп жазылған.

Мұнда көп айнымалды функция, оның шегі, үзіліссіздігі, көп айнымалды функцияның дифференциалдық есептеулері, екі айнымалы функциялар үшін Тейлор формуласы, екі айнымалы функцияның экстремумы, функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу есептері, қатарлар теориясы, сандық қатарлар, қатар жинақтылығының қажетті және жеткілікті белгілері, таңбалары ауыспалы қатарлар, функционалдық тізбектер мен қатарлар, дәрежелік қатарлар тақырыптары бойынша теориялық материалдар, сонымен қатар үлгі-мысалдардың шешу жолдары көрсетіліп, соңында өзбетімен орындау үшін жаттығулар жауаптарымен берілген.

1 Көп айнымалды функция

1.1 Көп айнымалды функцияның анықталу облысы

Көп айнымалды функцияның анықтамасы. Егер D облысында бір-бірінен тәуелсіз x,y айнымалыларының мәндер жұбына z айнымалының анықталған бір мәні сәйкес келсе, онда z айнымалы х және у айнымалыларына тәуелді *екі айнымалыды функция* деп аталады және оны

$$z = f(x, y)$$

деп белгілейді.

Егер бір-бірінен тәуелсіз $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ айнымалдыларының әрбір мәніне u айнымалысының анықталған бір мәні сәйкес келсе, онда u айнымалысы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалыларына байланысты көп айнымалды функция деп аталады және

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

символдарымен белгіленеді.

1. Конустың көлемін жасаушысы x пен радиусы y арқылы өрнектеу керек.

Шешуі. Геометриядан белгілі, конустың көлемі

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 h$$

формуласымен анықталады, мұндағы h – конустың биіктігі. Бірақ $h = \sqrt{x^2 - y^2}$ болғандықтан, осыдан

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}.$$

2. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ функциясы берілген. $f(3,-4)$ және $f(1, \dfrac{y}{x})$ мәндерін табу керек.

Шешуі. $f(3,-4) = \dfrac{3^2 + (-4)^2}{2 \cdot 3 \cdot (-4)} = -\dfrac{25}{24}$, $\quad f(1, \dfrac{y}{x}) = \dfrac{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot \dfrac{y}{x}} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$.

Функцияның анықталу облысы. $z = f(x, y)$ функциясы анықталатын x және y қос мәндерінің (x, y) жиынын осы функцияның *анықталу облысы (аймағы)* деп атайды.

$z = f(x, y)$ функциясының анықталу облысы Oxy жазықтығындағы нүктелер жиыны болады. Дербес жағдайда, бүкіл Oxy жазықтығы не Oxy жазықтығының тұйық сызықтармен шектелген бөлігі немесе осы жазықтықтың бірнеше бөліктерінің жиынтығы болады.

$z = f(x, y)$ функциясының Oxy тік бұрышты координаттар жүйесіндегі геометриялық бейнесі (графигі) осы теңдеумен анықталатын бет болып табылады.

3. $z = x^2 + y^2$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция x пен y-тің кез келген мәнінде анықталған, яғни анықталу облысы бүкіл Oxy жазықтығы болып табылады.

4. $z = \ln(2x - y)$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Логарифмдік функция $2x - y > 0$, яғни $y < 2x$ болғанда ғана анықталады. Осыдан функцияның анықталу облысы $2x - y = 0$ түзуінен төмен орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі болып табылады.

5. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Функция нақты мәндерін $x^2 + y^2 - a^2 \geq 0$ немесе $x^2 + y^2 \geq a^2$ болғанда ғана қабылдайды, яғни функцияның анықталу облысы центрі координаттар жүйесінің бас нүктесі, ал радиусы a-ға тең болатын дөңгелектен тыс орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

6. $z = \arcsin(y - x)$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция $-1 \leq y - x \leq 1$ теңсіздігі орындалғанда ғана анықталады. Осыдан функцияның анықталу облысы $y = x + 1$ және $y = x - 1$ түзулерінің арасында орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі болады.

Деңгейлік сызық және деңгейлік бет. Екі айнымалды $z = f(x, y)$ функциясының деңгейлік сызығы деп Oxy жазықтығында $f(x, y) = C$ теңдеуімен берілген сызықты айтады.

Үш айнымалды $u = f(x, y, z)$ функциясының деңгейлік беті деп $f(x, y, z) = C$ теңдеуімен берілген бетті айтады.

7. $z = \dfrac{y}{x^2}$ функциясының деңгейлік сызығын табу керек.

Шешуі. Деңгейлік сызықтың теңдеуі $\dfrac{y}{x^2} = C$ немесе $y = Cx^2$ теңдеуімен анықталады. $C = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ сандық мәндерін беру арқылы параболалар жиынтығын алуға болады.

8. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың көлемін биіктігі x пен бүйір қабырғасы y арқылы өрнектеу керек.

Жауабы: $V = \dfrac{2}{3}\left(y^2 - x^2\right)x.$

9. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табан қабырғалары x пен y және биіктігі z арқылы өрнектеу керек.

Жауабы: $S=\frac{2}{3}(x+y)\sqrt{4x^2+3(x-y)^2}$.

10. $f(x,\mathrm{y})=xy+\frac{x}{y}$ функциясы берілген. $f(\frac{1}{2},3)$ және $f(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$ мәндерін табу керек.

Жауабы: $f(\frac{1}{2},3)=\frac{5}{3}$, $f(\frac{1}{x},\frac{1}{y})=\frac{1}{xy}+\frac{y}{x}$

11. $f(x,\mathrm{y})=\frac{x^2-y^2}{2xy}$ функциясы берілген. $f(8,4)$ және $f(x+y,x-y)$ мәндерін табу керек.

Жауабы: $f(8,4)=\frac{3}{4}$, $f(x+y,x-y)=\frac{2xy}{x^2-y^2}$.

Берілген функциялардың анықталу облыстарын табу керек:

12. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$;

Жауабы: $x^2+y^2\le a^2-$ центрі $O(0,0)$, ал радиусы a болатын шеңберімен шектелген Oxy жазықтығының бөлігі.

13. $z=\arccos\frac{x}{y^2}$;

Жауабы: $y^2=x$ және $y^2=-x$ параболаларының арасында орналасқан, $O(0,0)$ нүктесі тиісті емес Oxy жазықтығының бөлігі.

14. $z=2x+5y$;

Жауабы: Бүкіл Oxy жазықтығы.

15. $z=\ln(x+y)$;

Жауабы: $y=-x$ түзуінен жоғары орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

16. $z=\sqrt{y-x^2}$;

Жауабы: $y=x^2$ параболасынан жоғары орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

17. $z=\ln(xy)$.

Жауабы: $xy>0$ -1 және 3 ширектерінде орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

18. $z=x+\frac{3}{y-5}$;

Жауабы: $y=5$ түзуі тиісті емес Oxy жазықтығының бөлігі.

19. $z=\sqrt{y-x^2}+\sqrt{4-y}$;

Жауабы: $y = x^2$ параболасы және $y = 4$ түзуімен шектелген Oxy жазықтығының бөлігі.

20. $z = \dfrac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$;

Жауабы: $x^2 + y^2 = 1$ шеңберімен шектелген және $O(0,0)$ нүктесі жататын Oxy жазықтығының бөлігі.

21. $z = \sqrt{9 - x^2 - y} + \sqrt{y - x + 3}.$

Жауабы: жоғарғы жағынан $y = -x^2 + 9$ параболасы және төменнен $y = x - 3$ түзуімен шектелген Oxy жазықтығының бөлігі.

22. $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$

Жауабы: $x^2 + y^2 < 4 -$ центрі $O(0,0),$ ал радиусы 2 болатын шеңберімен шектелген Oxy жазықтығының бөлігі.

23. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}.$

Жауабы: $x = \pm 1$ және $y = \pm 1$ түзулерімен шектелген квадрат.

24. $z = \ln(x^2 + y).$

Жауабы: $y = -x^2$ параболасынан жоғары орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

25. $z = \ln(x^2 + y^2).$

Жауабы: $O(0,0)$ нүктесі тиісті емес Oxy жазықтығының бөлігі.

26. $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z.$

Жауабы: $x = \pm 1,$ $y = \pm 1$ және $z = \pm 1$ жазықтықтарымен шектелген куб.

27. $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}.$

Жауабы: $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2 -$ центрі $O(0,0,0),$ ал радиусы a болатын сферамен шектелген $Oxyz$ кеңістігінің бөлігі.

Берілген функциялардың деңгейлік сызықтарын табу керек:

28. $z = \sin(2x + y).$

Жауабы: деңгейлік сызығы - $y = C - 2x$ түзуі.

29. $z = \ln(x^2 + y).$

Жауабы: деңгейлік сызығы - $y = C - x^2$ параболасы.

30. $z = arctg(xy).$

Жауабы: деңгейлік сызығы - $xy = C$ гиперболасы.

31. $z = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}.$

Жауабы: деңгейлік сызығы - $C(x^2 + y^2) = 2x$ шеңбері.

32. $z = f(x^2 + y^2).$

Жауабы: деңгейлік сызығы - $x^2 + y^2 = C^2$ шеңбері.

33. $z = f(x^2 - y^2).$

Жауабы: деңгейлік сызығы - $x^2 - y^2 = C^2$ гиперболасы.

Берілген функциялардың деңгейлік беттерін табу керек:

34. $u = x + 2y + 3z.$

Жауабы: деңгейлік беті - $x + 2y + 3z = C$ жазықтығы.

35. $u = x^2 + y^2 + z^2.$

Жауабы: деңгейлік беті - $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ сферасы.

36. $u = x^2 + y^2 - z^2.$

Жауабы: деңгейлік беті - $x^2 + y^2 - z^2 = C$, $C > 0$ болса, онда ол бір қуысты параболоид, $C < 0$ болса, онда екі қуысты параболоид , ал $C = 0$ болса, онда конус.

1.2 Көп айнымалды функцияның үзіліссіздігі

Функцияның шегі. Егер кезкелген $\forall \varepsilon > 0$ саны үшін $\exists \delta > 0$ саны табылып,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

теңсіздігі орындалғанда,

$$|f(x;y) - A| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда $z = f(x, y)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесінің $M_0(a, b)$ нүктесіне ұмтылғандағы шегі деп A санын айтады және оны былай жазады

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x;y) = A.$$

Үзіліссіздік және үзіліс нүктесі. Егер

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x;y) = f(a;b)$$

тең болса, онда $z = f(x, y)$ функциясын $M_0(a, b)$ нүктесіне үзіліссіз деп атайды.

Егер $z = f(x, y)$ функциясы D облысының кезкелген нүктесінде үзіліссіз болса, онда оны D облысында үзіліссіз деп атайды.

$z = f(x, y)$ функциясы үшін үзіліссіздік шарты жекеленген нүктелерде (оқшауланған үзіліс нүктелер), бір немесе бірнеше сызықтар құрайтын нүктелерде (үзіліс сызығы) орындалмауы мүмкін.

37. $z=\dfrac{xy-2}{x^2+y}$ функциясының үзіліс нүктелерін табу керек.

Шешуі. Егер бөлімі нөлге тең болса, онда функцияның мәні анықталмайды. Бұл жағдайда, $x^2+y=0$ немесе $y=-x^2$- параболаның теңдеуі. Осыдан, берілген функция $y=-x^2$ параболасында жатқан нүктелерінде үзілісті, яғни үзіліс сызығы $y=-x^2$ параболасы.

Берілген функциялардың шектерін табу керек.

38. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{xy}$. Жауабы: 0.

39. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$. Жауабы: 0 .

Нұсқау.Полярлық координаталарға көшу керек.

40. $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$. Жауабы: 5 .

41. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 8}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$ Жауабы: e^8.

42. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\left(1+xy\right)^{\frac{1}{y}}$ Жауабы: e^2.

43. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x+y}$. Жауабы:шегі жоқ.

Нұсқау. x пен $y-$тің өзгеруін $y=\alpha x^2$ түзуі бойымен қарап, шектің мәні $\alpha-$ге байланысты әртүлі мәндерге тең болатындығын көрсету керек.

44. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Жауабы:шегі жоқ.

Нұсқау. x пен $y-$тің өзгеруін $y=\alpha x^2$ түзуі бойымен қарап, шектің мәні $\alpha-$ге байланысты әртүлі мәндерге тең болатындығын көрсету керек.

Берілген функциялардың үзіліс нүктелерін табу керек

45. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ Жауабы: $x=0,\ y=0$ үзіліс нүктесі.

46. $z=\dfrac{1}{a^2-x^2-y^2}$ Жауабы: үзіліс сызығы - $x^2+y^2=a^2$ шеңбері.

47. $z=\dfrac{1}{(2x-y)^2}$ Жауабы: $y=2x$ түзуінің нүктелері (үзіліс сызығы)

48. $z=\dfrac{1}{\left(x^2-y^2\right)}$ Жауабы: $y=x$ және $y=-x$ түзулерінің нүктелері (үзіліс сызығы)

49. $z=\cos\left(\frac{1}{xy}\right)$ Жауабы: үзіліс сызығы – координаталық өстері.

1.3 Көп айнымалды функцияның туындылары мен дифференциалдары

Көп айнымалды функцияның дербес, толық өсімшелері және дербес туындылары. $z=f(x,y)$ функциясымен анықталған бетті қарастырайық. Оны $y=const$ жазықтығымен қияйық. Бұл жазықтықта y -тұрақты, x айнымалысына Δx өсімшесін берейік. Сонда *x айнымалысы бойынша z функциясының* $\Delta_x z$ *дербес өсімшесі*

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

формуласымен анықталады.

Сол сияқты, егер $z=f(x,y)$ функциясы үшін x – тұрақты болып, ал y айнымалысы бойынша Δy өсімшесін алса, онда *y айнымалысы бойынша дербес өсімшесі*

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

формуласымен анықталады.

Егер x және y айнымалылары бойынша Δx және Δy өсімшілерін қабылдаса, онда z функциясының толық өсімшесі

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

формуласымен анықталады.

$z=f(x,y)$ функциясының *x айнымалысы бойынша дербес туындысы* деп

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x,y)$$

шегін айтады.

$z=f(x,y)$ функциясының *y айнымалысы бойынша дербес туындысы* деп

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x,y)$$

шегін айтады.

Дербес туындыны есептеу ережесі: $z=f(x,y)$ функциясының x айнымалысы бойынша дербес туындысын есептеу үшін z функциясының у – тұрақты деп алғандағы х бойынша туындысын есептеу керек, және, керісінше, y бойынша дербес туындысын есептеу үшін z функциясының х – тұрақты деп алғандағы у бойынша туындысын есептейді.

50. $z=x^2-2xy+3y^2+4x-5y+6$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес өсімшілерін және толық өсімшесін табу керек.

Шешуі.

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = [(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)\cdot y + 3y^2 + 4(x+\Delta x) - 5y + 6] -$$
$$-(x^2-2xy+3y^2+4x-5y+6) = (x+\Delta x)^2 - x^2 - 2y\Delta x + 4\Delta x =$$
$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2y\Delta x - 4\Delta x = (2x-2y-4+\Delta x)\cdot\Delta x;$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \left[x^2 - 2x(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 4x - 5(y+\Delta y) + 6\right] =$$
$$= (x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6) = -2x\Delta y + 3(y+\Delta y)^2 - 3y^2 - 5\Delta y =$$
$$= -2x\Delta y + 6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 - 5\Delta y = (-2x + 6y - 5 + 3\Delta x)\cdot \Delta x\,;$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = [(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 4(x+\Delta x) -$$
$$-5(y+\Delta y) + 6] - (x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 5y + 6) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y +$$
$$+6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 + 4\Delta x - 5\Delta y = (2x - 2y + 4)\Delta x + (-2x + 6y - 5)\Delta y + (\Delta x)^2 - 2\Delta x\Delta y + 3(\Delta y)^2.$$

51. $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 5x + 6y + 4$ функцияның дербес туындысын табу керек.

Шешуі: y-ті тұрақты деп алып, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 5$ табамыз.

Осы сияқты, x-ті тұрақты деп алып, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 3x + 6$ табамыз.

52. $z = \arcsin(xy^2) + \frac{x}{y^2}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі: $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}}\cdot y^2 + \frac{1}{y^2} = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}} + \frac{1}{y^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}}\cdot 2xy - \frac{2x}{y^3} = \frac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}} - \frac{2x}{y^3}.$$

53. Үш айнымалылы $u = e^{x^2+y^2+z^2}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі: $$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cdot e^{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\cdot e^{x^2+y^2+z^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z\cdot e^{x^2+y^2+z^2}.$$

Берілген функциялардың дербес өсімшілерін және толық өсімшесін табу керек:

54. $z = 2x^2 + xy + y^2$;

Жауабы: $\Delta_x z = (4x + y + 2\Delta x)\Delta x$; $\Delta_y z = (x + 2y + \Delta y)\Delta y$.
$$\Delta z = (4x + y)\Delta x + (x + 2y)\Delta y + 2\Delta x^2 + \Delta y^2.$$

55. $z = x^3 - x^2y + y^2$;

Жауабы: $\Delta_x z = (x+\Delta x)^3 - x^3 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$; $\Delta_y z = (-x^2 + 2y + \Delta y)\Delta y$.
$$\Delta z = (x+\Delta x)^3 - x^3 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + (-x^2 + 2y)\Delta y + \Delta y^2.$$

56. $z = \frac{y+4}{x-7}$; Жауабы: $\Delta_x z = -\frac{(y+4)\Delta x}{(x-7)(x+\Delta x-7)}$; $\Delta_y z = \frac{\Delta y}{x-7}$.

$$\Delta z = -\frac{(y+4)\Delta x}{(x-7)(x+\Delta x-7)} + \frac{\Delta y}{x-7}.$$

57. $z = \dfrac{x+5}{y+8}$; Жауабы: $\Delta_x z = \dfrac{\Delta x}{y+8}$; $\Delta_y z = -\dfrac{(x+5)\Delta y}{(y+8)(y+\Delta y+8)}$.

$$\Delta z = \frac{\Delta x}{y+8} + \frac{(x+5)\Delta y}{(y+8)(y+\Delta y+8)}.$$

58. $z = \ln \dfrac{y}{x^2}$; Жауабы: $\Delta_x z = -2\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$; $\Delta_y z = \ln\left(1+\dfrac{\Delta y}{y}\right)$.

$$\Delta z = -2\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right).$$

59. $z = y\sin x.$ Жауабы: $\Delta_x z = y(\sin(x+\Delta x) - \sin x)$; $\Delta_y z = \Delta y \sin x.$

$$\Delta z = y(\sin(x+\Delta x) - \sin x) + \Delta y \sin x.$$

60. $z = e^{x+y-4}$ Жауабы: $\Delta_x z = e^{x+y-4}(e^{\Delta x}-1)$; $\Delta_y z = e^{x+y-4}(e^{\Delta y}-1)$;

$$\Delta z = e^{x+y-4}(e^{\Delta x+\Delta y}-1).$$

61. $z = e^{y-x}$ Жауабы: $\Delta_x z = e^{y-x}(e^{-\Delta x}-1)$; $\Delta_y z = e^{y-x}(e^{\Delta y}-1)$;

$$\Delta z = e^{y-x}(e^{-\Delta x+\Delta y}-1).$$

62. $z = x^2 + \sqrt{y}.$ Жауабы: $\Delta_x z = 2x\Delta x + \Delta x^2$; $\Delta_y z = \sqrt{y+\Delta y} - \sqrt{y}$;

$$\Delta z = 2x\Delta x + \Delta x^2 + \sqrt{y+\Delta y} - \sqrt{y};$$

63. $z = \sin(x^2+y) + x.$ Жауабы:

$\Delta_x z = \sin((x+\Delta x)^2 + y) - \sin(x^2+y) + \Delta x,$ $\Delta_y z = \sin(x^2+y+\Delta y) - \sin(x^2+y),$

$\Delta z = \sin((x+\Delta x)^2 + y + \Delta y) - \sin(x^2+y) + \Delta x,$

Берілген функциялардың дербес туындыларын табу керек:

64. $z = x^3 - 2y^5.$ Жауабы: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 10xy^4.$

65. $z = 7x^3y - 4xy^5.$ Жауабы: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 21x^2y - 4y^5$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 7x^3 - 20xy^4.$

66. $z = x^3 + y^3 - 3axy.$ Жауабы: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3ay$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3ax.$

67. $z = x^4 + 5x^2y + 7x^2y + 7y^2 - 6x - 3y.$

Жауабы: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 10x^2y - 6$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 + 14y - 3.$

68. $z = \dfrac{y+3}{x+7}$; Жауабы: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y+3}{(x+7)^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x+7}.$

69. $z = \dfrac{x}{y-5}$; Жауабы: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y-5}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{(y-5)^2}.$

70. $z=\frac{x-y}{x+y};$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{(x+y)^2}.$

71. $z=\sqrt{x^2-y^2}.$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}.$

72. $z=x^2\sin^2 y;$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin^2 y;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2\sin 2y.$

73. $z=arctg\frac{x}{y};$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$

74. $z=x^8y^5+x^4y^7;$

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=8x^7y^5+4x^3y^7;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=5x^8y^4+7x^4y^6.$

75. $z=x^y.$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$

76. $z=\ln\frac{y^3}{x};$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{x}.$

77. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right).$

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}.$

78. $z=\sin(x^2+y^2);$

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y\cos(x^2+y^2).$

79. $z=\cos\left(\frac{x}{y}\right);$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right).$

80. $z=e^{2x+3y-4}$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x+3y-4};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3e^{2x+3y-4}.$

81. $z=\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+4};$

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+4}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y+1}{\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+4}}.$

82. $z=e^{xy};$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}.$

83. $z=x\sqrt{y}+y\sqrt{x};$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}+\frac{y}{2\sqrt{x}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}+\sqrt{x}.$

84. $z=\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y};$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y^2}+\frac{1}{y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2}{y^2}-\frac{x}{y^2}.$

85. $z=\sqrt{x}e^{x/y}$; Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\sqrt{x^3}}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$.

86. $z=tg(\frac{x}{y})$ Жауабы: $z'_x=\frac{1}{y\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}$, $z'_y=-\frac{x}{y^2\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}$.

87. $z=\arcsin(x-3y)$ Жауабы: $z'_x=\frac{1}{\sqrt{1-(x-3y)^2}}$, $z'_y=-\frac{3}{\sqrt{1-(x-3y)^2}}$.

88. $z=\arccos(2x+y)$ Жауабы: $z'_x=\frac{2}{\sqrt{1-(2x+y)^2}}$, $z'_y=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+y)^2}}$.

89. $z=e^{\sqrt{x+y}}$ Жауабы: $z'_x=z'_y=\frac{e^{\sqrt{x+y}}}{2\sqrt{x+y}}$.

90. $z=\sin\sqrt{xy}$ Жауабы: $z'_x=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{xy}$; $z'_y=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\cos\sqrt{xy}$

91. $z=tg(xy^2)$ Жауабы: $z'_x=\frac{y^2}{\cos^2\left(xy^2\right)}$, $z'_y=\frac{2xy}{\cos^2\left(xy^2\right)}$.

92. $z=\sin(x^2+y)+x$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot\cos(x^2+y)+1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(x^2y)$

93. $z=\arccos(2x^2+y^2)$ Жауабы: $z'_x=\frac{4x}{\sqrt{1-(2x+y)^2}}$, $z'_y=\frac{2y}{\sqrt{1-(2x+y)^2}}$,

94. $z=\arcsin(x^2-3xy+2y^2)$

Жауабы: $z'_x=\frac{2x-3y}{\sqrt{1-(x^2-3xy+2y^2)^2}}$, $z'_y=\frac{4y-3x}{\sqrt{1-(x^2-3xy+y^2)^2}}$.

95. $u=\ln\left(x+\frac{y}{2z}\right)$;

Жауабы: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2z}{2xz+y}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2xz+y}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{y}{z(2xz+y)}$.

96. $u=x^{yz}$;

Жауабы: $\frac{\partial u}{\partial x}=yz\cdot x^{yz-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=z\cdot x^{yz}\ln x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=y\cdot x^{yz}\ln x$.

97. $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$;

Жауабы: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{x}$.

98. $u=e^{\frac{xy}{z}}$;

Жауабы: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}e^{\frac{xy}{z}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{z}e^{\frac{xy}{z}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xy}{z^2}e^{\frac{xy}{z}}$.

99 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Жауабы: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

100. Егер $z=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$ болса, онда $z'_x(2;1)$ және $z'_y(2;1)$ табу керек.

Жауабы: $z'_x(2;1)=\dfrac{1}{2}$, $z'_y(2;1)=0$.

101. Егер $f(x;y;z)=\ln(xy+z)$ болса, онда $f'_x(1;2;0)$, $f'_y(1;2;0)$, $f'_z(1;2;0)$ табу керек. Жауабы: $f'_x(1;2;0)=1$, $f'_y(1;2;0)=\dfrac{1}{2}$, $f'_z(1;2;0)=\dfrac{1}{2}$..

102. $u=\ln\dfrac{y}{x}+x^2-y^2$ функциясының $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=3(x^3-y^3)$ теңдеуін қанағаттандыратындығын тексеру керек.

103. $u=\dfrac{xy}{x+y}$ функциясының $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u$ теңдеуін қанағаттандыратындығын тексеру керек.

104. $u=\ln(x^2+y^2)$ функциясының $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ теңдеуін қанағаттандыратындығын тексеру керек.

105. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. функциясының $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1$ теңдеуін қанағаттандыратындығын тексеру керек.

Эйлер теоремасы. Егер кезкелген λ саны үшін

$$f(\lambda x;\lambda y)\equiv\lambda^n f(x;y)$$

орындалса, онда $f(x;y)$ функциясын n-өлшемді біртекті функция деп айтады.

Егер бүтін рационал функцияның әрбір мүшесі бірдей өлшемді болса, онда ол біртекті болады.

Дифференциалданатын $f(x;y)$ функциясы n-өлшемді біртекті функция болса, онда

$$xf'_x(x;y)+yf'_y(x;y)=nf(x;y)$$

теңдігі орындалады (Эйлер теоремасы).

Берілген біртекті функциялар үшін Эйлер теоремасы тексеру керек.

106. $f(x;y)=x^3+2x^2y+3xy^2+4y^3$. **107.** $f(x;y)=\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$.

108. $f(x;y)=\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{2x+3y}$. **109.** $f(x;y)=\sin\dfrac{y}{x}$.

1.4 Көп айнымалды функцияның толық дифференциалы

$z = f(x,y)$ функциясының толық өсімшесі Δz-ті дербес $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ туындылары арқылы

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

түрінде жазуға болады, мұндағы алдыңғы екі қосынды өсімшенің *негізгі бөлігі*, ал кейінгі екі қосынды *қосалқы бөлігі* деп аталады. Δx және Δy шамаларымен салыстырғанда қосалқы бөлігі жоғары ретті шексіз аз шама болғандықтан $\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ ұмтылғанда $\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \to 0$.

Толық өсімшенің негізгі бөлігі *функцияның толық дифференциалы* деп аталып,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

деп белгіленеді. Мұндағы $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.

Егер $u = f(x,y,z,...,t)$ көп айнымалылы функциясы берілсе, онда оның толық дифференциалы

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + ... + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

формуласымен анықталады.

$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$-ң аз мәнінде дифференцианалданатын $z = f(x,y)$ функциясы үшін төмендегі жуықтап есептеу формуласы қолданылады.

$\Delta z \approx dz$, осыдан, $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + dz.$

110. $z = x^2 + xy^2 + \sin y$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Шешуі. Дербес туындыларын табайық: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + \cos y.$

Осыдан $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (2x+y^2)dx + (2xy + \cos y)dy.$

111. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$.

Осыдан $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2+y^2+z^2}.$

112. $\sqrt{4{,}03^2 + 2{,}98^2}$ санының жуық мәнін табу керек.

Шешуі. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциясын қарастырайық.

$x + \Delta x = 4{,}03$, осыдан $x = 4,\ \Delta x = 0{,}03;$

$$y+\Delta y=2{,}98,\ \text{осыдан}\ y=3,\ \Delta y=-0{,}02;$$

$$z=\sqrt{4^2+3^2}=5,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{4}{5},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{3}{5},$$

$$\sqrt{4{,}03^2+2{,}98^2}\approx z+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=5+\frac{4}{5}\cdot 0{,}03+\frac{3}{5}\cdot(-0{,}02)=5{,}012.$$

Берілген функциялардың толық дифференциалдарын табу керек:

113. $z=x^2+5xy+6y^2;$ Жауабы: $dz=(2x+5y)dx+(5x+12y)dy.$

114. $z=x^3+y^3-3axy.$ Жауабы: $dz=3(x^2-ay)dx+3(y^2-ax)dy.$

115. $z=\dfrac{x-y}{x+y};$ Жауабы: $dz=\dfrac{2(ydx-xdy)}{(x+y)^2}.$

116. $z=\dfrac{y-4}{x+5};$ Жауабы: $dz=\dfrac{y-4}{(x+5)^2}dx+\dfrac{1}{x+5}dy.$

117. $z=\ln(xy);$ Жауабы: $dz=\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}.$

118. $z=7x^3y-4xy^5;$ Жауабы: $dz=(21x^2y-4y^5)dx+(7x^3-20xy^4)dy.$

119. $z=\dfrac{x-1}{y+2};$ Жауабы: $dz=\dfrac{dx}{y+2}+\dfrac{x-1}{(y+2)^2}dy.$

120. $z=e^{x^2+y^2};$ Жауабы: $dz=(2xdx+2ydy)e^{x^2+y^2}.$

121. $z=\arcsin(x^2-3xy+2y^2)$ Жауабы: $dz=\dfrac{(2x-3y)dx+(4y-3x)dy}{\sqrt{1-(x^2-3xy+2y^2)^2}}.$

122. $z=\arcsin\dfrac{x}{y};$ Жауабы: $dz=\dfrac{ydx-xdy}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}.$

123. $z=arctg\,\dfrac{x}{y}+arctg\,\dfrac{y}{x}$ Жауабы: $dz=0.$

124. Егер $z=f(x;y)=\dfrac{x}{y^2},$ $df(1;1)$ табу керек.

Жауабы: $df(1;1)=dx-2dy.$

125. $z=\sqrt{3x^2+4y^2+2x+y};$ Жауабы: $dz=\dfrac{(6x+2)dx+(8y+1)dy}{2\sqrt{3x^2+4y^2+2x+y}}.$

126. $u=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x};$

Жауабы: $du=\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{z}{x^2}\right)dx+\left(-\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{z}\right)dy+\left(-\dfrac{y}{z^2}+\dfrac{1}{x}\right)dz.$

127. $u=\sqrt{z}\cdot\sin\dfrac{y}{x};$

Жауабы: $du=-\dfrac{y\sqrt{z}}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}dx+\dfrac{\sqrt{z}}{x}\cos\dfrac{y}{x}dy+\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\sin\dfrac{y}{x}dz.$

128. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot.$ Жауабы: $du=\dfrac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

129. $u=arctg\dfrac{xy}{z^2}\cdot.$ Жауабы: $du=\dfrac{z^2}{x^2y^2+z^4}(ydx+xdy-\dfrac{2xy}{z}dz).$

130. Егер $u=f(x;y;z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $df(3;4;5)$ табу керек.

Жауабы: $df(1;1)=\dfrac{1}{25}(5dz-3dx-4dy).$

131. $(1{,}02)^{3{,}01}$ санын жуықтап есептеу керек. Жауабы: 1,06.

132. $2{,}03^3\cdot 3{,}98^2$ санын жуықтап есептеу керек. Жауабы: 132,51.

133. $2\cdot e^{0{,}015}+\cos(1{,}55)$ санын есептеу керек; Жауабы: 0,05.

Ескерту $\dfrac{\pi}{2}=1{,}57$ деп алу керек.

134. $arctg\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$ санын есептеу керек. Жауабы: 0,82.

135. $\sin 32^0\cos 59^0$ санын есептеу керек. Жауабы: 0,273.
Ескерту $\cos 60^0=0.866$ деп алу керек.

136. Тік төртбұрыштың бір қабырғасы $a=10см,$ал екіншісі $b=10см.$Егер aқабырғасын $4мм$ ұзартып, ал b қабырғасын $1мм$қысқартсақ, тік төртбұрыштың Lдиагоналы қалай өзгереді. Жуық мәнін есептеп, оны дәл мәнімен салыстыру керек. Жауабы: $dL=0.062см,\ \Delta L=0{,}065см.$

137. Конустың биіктігі $H=30см,$ ал табан радиусы $R=10см$ тең. Егер Hбиіктігін $3мм$ ұзартып, ал R радиусы н $1мм$қысқартсақ, конустың көлемі қалай өзгереді. Жауабы: $\Delta V\approx dV\approx -31.4см^3.$

138. Маятниктың тербеліс периоды $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ формуласымен есептеледі, мұндағы l- маятниктің ұзындығы, g - еркін түсу үдеуі. l және gесептеу кезінде $\Delta l=\alpha\ \Delta g=\beta$ қателіктер кетуіне байланысы T периодының қателігін есептеу керек. Жауабы: $\pi\dfrac{\alpha g-\beta l}{g\sqrt{gl}}$

1.5 Күрделі функцияны дифференциалдау

Дифференциалданатын $z=F(u,v)$ функциясы берілсін, мұнда $u=u(x,y), v=v(x,y)$. Z функциясының *дербес туындылары*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

формулаларымен есептеледі.

Дифференциалданатын $z = f(x,y)$ функциясы берілсін, мұнда $x = x(t), y = y(t)$. Бұл күрделі $z = f(x(t), y(t))$ функциясының t бойынша туындысы

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

формуласымен есептеледі.

Дифференциалданатын $z = f(x,y)$ функциясы берілсін, мұнда $y = y(x)$. Бұл $z = f(x, y(x))$ функциясының x бойынша туындысы

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

формуласымен есептеледі.

139. $z = \cos(u^2 + \sqrt{v})$ функциясының, мұндағы $u = e^{xy}, v = x^2 + y^2$. Дербес туындыларын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot 2u \cdot u_x' - \sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v_x' =$

$$= -\left(2uye^{xy} + \frac{x}{\sqrt{v}}\right)\sin(u^2 + \sqrt{v}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot 2u \cdot u_y' - \sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v_y' =$$

$$= -\left(2uxe^{xy} + \frac{y}{\sqrt{v}}\right)\sin(u^2 + \sqrt{v}).$$

140. $z = x^2 + \sqrt{y}$ функциясы берілген, мұндағы

$x = tgt, \quad y = t^2 + 3t + 5.$ $\frac{dz}{dt}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2x\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2t+3}{2\sqrt{y}} = \frac{2\sin t}{\cos^3 t} + \frac{2t+3}{2\sqrt{t^2+3t+5}}.$

141. $z = x^3 + \sin(xy^2)$ функциясы берілген, мұндағы $y = \sqrt{x^2+1}$. $\frac{dz}{dx}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2\cos(xy^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\cos(xy^2)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Осыдан $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 3x^2 + y^2\cos(xy^2) + \frac{2x^2 y\cos(xy^2)}{\sqrt{x^2+1}}.$

Берілген функциялардың $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларын табу керек:

142. $z = e^{u-2v}$ функциясы берілген, мұндағы $u = \sin x, v = x^3 - y^2$.

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{u-2v}(\cos x-6x^2)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-4ye^{u-2v}$.

143. $z=\sqrt{u^2+v^2}$ функциясы берілген, мұндағы $u=x\cdot\sin y$, $v=y\cdot\cos x$.

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{u\sin y-vy\sin x}{\sqrt{u^2+v^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{ux\cos y+v\cos x}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

144. $z=\ln(u^2+v)$ функциясы берілген, мұндағы $u=y\cdot\arcsin x$, $v=xe^y$.

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2uy/\sqrt{1-x^2}+e^y}{u^2+v}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u\arcsin x+xe^y}{u^2+v}$.

145. $z=\sin(uv)$ функциясы берілген, мұндағы $u=2x+3y$, $v=xy^2$.

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=(2v+uy^2)\cos(uv)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=(3v+2uxy)\cos(uv)$.

146. $z=arctg(\frac{u}{v})$ функциясы берілген, мұндағы $u=x\sin y$, $v=x\cos y$.

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=0$; $\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

Берілген функциялардың $\frac{dz}{dt}$ туындыларын табу керек:

147. $z=e^{4x-5y}$ функциясы берілген, мұндағы $x=\sin t$, $y=t^3$.

Жауабы: $\frac{dz}{dt}=(4\cos t-15t^2)e^{4x-5y}$.

148. $z=x^y$ функциясы берілген, мұндағы $x=arctgt$, $y=t^2+1$.

Жауабы: $\frac{dz}{dt}=\frac{yx^{y-1}}{1+t^2}+2tx^y\ln x$.

149. $z=\arccos\frac{x}{y}$ функциясы берілген, мұндағы $x=t^2+1$, $y=t^3+1$.

Жауабы: $\frac{dz}{dt}=\frac{3xt^2-2yt}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}$.

150. $z=\sqrt{x^2+y+5}$ функциясы берілген, мұндағы $x=\ln t$, $y=t^2$.

Жауабы: $\frac{dz}{dt}=\frac{x+t^2}{t\sqrt{x^2+y+5}}$.

151. $z=tg(x^2-y^2)$ функциясы берілген, мұндағы $y=\sin x$.

Жауабы: $\frac{dz}{dx}=\frac{2x-2y\cos x}{\cos^2(x^2-y^2)}$.

152. $z=\arcsin(x^2+y^2)$ функциясы берілген, мұндағы $y=x^2+2x+5$.

Жауабы: $\frac{dz}{dx}=\frac{2x+4xy+4y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}$.

153. $z=e^{x^2+\sqrt{y}}$ функциясы берілген, мұндағы $y=\ln x$.

Жауабы: $\frac{dz}{dx} = e^{x^2+\sqrt{y}}\left(2x + \frac{1}{2x\sqrt{y}}\right)$.

154. $z = \sqrt{x^3 + y^3}$ функциясы берілген, мұндағы $y = e^x$.

Жауабы: $\frac{dz}{dx} = \frac{3x^2 + 3y^2 e^x}{2\sqrt{x^3 + y^3}}$.

1.6 Айқын емес функциялардың туындысы.

$F(x, y) = 0$ теңдеуі түрінде берілген айқын емес $y = y(x)$ функциясының туындысы

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

формуласымен анықталады, мұндағы $F(x, y)$ функциясы x және y айнымалылары бойынша дифференциалданатын, әрі $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ функция.

$F(x, y, z) = 0$ теңдеуі түрінде берілген айқын емес $z = z(x, y)$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

формулаларымен анықталады, мұндағы $F(x, y, z)$ функциясы x, y және z айнымалылары бойынша дифференциалданатын, әрі $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ функция.

155. $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6 = 0$ функциясы берілген. $\frac{dy}{dx}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $$F(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y + 4,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 6y + 5,$$

Осыдан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 2y + 4}{2x + 6y + 5}.$$

156. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ функциясы берілген. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ туындыларын табу керек.

Шешуі. $$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3yz,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3xz,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

Осыдан

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3x^2-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{x^2-yz}{xy-z^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3y^2-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{y^2-xz}{xy-z^2}.$$

Айқындалмаған $y=y(x)$ функцияларының туындыларын табу керек:

157. $x\sin y+y\cos x=0;$ Жауабы: $\frac{dy}{dx}=\frac{y\sin x-\sin y}{x\cos y+\cos x}.$

158. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$ Жауабы: $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$

159. $x^3+y^3-2xy^2=1;$ Жауабы: $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-2y^2}{4xy-3y^2}.$

160. $y^2=2px;$ Жауабы: $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}.$

161. $x^2+y^2-\sin(xy)=0;$ Жауабы: $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-y\cos(xy)}{2y-x\cos(xy)}.$

162. $\frac{y}{x}+e^{xy}=0.$ Жауабы: $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2ye^{xy}}{x+x^3e^{xy}}.$

Айқындалмаған $z=z(x,y)$ функцияларының x және y айнымалылары бойынша дербес туындыларын табу керек:

163. $x^2+y^2+z^2+3xy+z=0;$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+3y}{2z+1};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y+3x}{2z+1}.$

164. $x^2+2y^2+3z^2+x+5yz=0;$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+1}{5y+6z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4y+5z}{5y+6z}.$

165. $\sqrt{z}\sin xy+x+y=0;$

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2zy\cos(xy)+2\sqrt{z}}{\sin(xy)};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2xz\cos(xy)+2\sqrt{z}}{\sin(xy)}.$

166. $xyz+\ln(x+y+z)=0;$

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz(x+y+z)+1}{xy(x+y+z)+1};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz(x+y+z)+1}{xy(x+y+z)+1}.$

167. $x\sin y+y\sin z+z\sin x=0;$

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\sin y+z\cos x}{\sin x+y\cos z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x\cos y+\sin z}{\sin x+y\cos z}.$

168. $e^z-xyz-x-y=0.$ Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+yz}{e^z-xy};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1+xz}{e^z-xy}.$

1.7 Бағыт бойынша туынды. Функция градиенті.

$z=f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесінде $\vec{a}=\overrightarrow{MM_1}$ векторының *бағыты бойынша туындысы* деп

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}=\lim_{\left|\overrightarrow{MM_1}\right|\to 0}\frac{f(M_1)-f(M)}{|MM_1|}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta S}$$

шегін айтады, мұндағы $\Delta S=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Егер $f(x,y)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда бағыт бойынша туынды

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы α $-\vec{a}$ векторы мен Ox осінің арасындағы бұрыш.

Үш айнымалылы $u=f(x,y,z)$ функциясының бағыт бойынша туындысы

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ $\vec{a}$ векторының бағыттаушы косинустары.

$z=f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесіндегі *градиенті* деп

$$gradz=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{t}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$$

векторын айтады.

Функция градиенті мен $\vec{a}$ векторы бойынша туындысының арасындағы байланыс

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}=n\rho_{\vec{a}}gradz$$

формуласымен анықталады.

Үш айнымалылы $u=f(x,y,z)$ функциясының гардиенті

$$gradz=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

векторына тең.

169. $z=x^2-y^2$ функциясының $M(1;2)$ нүктесіндегі: а) $grad\,z$, б) $\vec{a}=6\vec{i}+8\vec{j}$ векторының бағыты бойынша $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$ $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=-4$

$$|\vec{a}|=\sqrt{6^2+8^2}=10,\quad \cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=0{,}6\quad \sin\alpha=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=0{,}8$$

Осыдан $\quad grad z = 2\vec{i} - 4\vec{j}, \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = 2\cdot 0{,}6 - 4\cdot 0{,}8 = -2.$

170. $u = x^3y^2z$ функциясының $M(1,-2,3)$ нүктесінде а) $gradu$, б) $\vec{MN}$ векторының бағыты бойынша туындысын табу керек, мұндағы $N(-1,0,2)$.

Шешуі. $\vec{a} = \vec{MN}$ векторы мен бағыттаушы косинустарын табайық.

$$\vec{a} = \{-2; 2; -1\}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{4+4+1} = 3,$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{3}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}; \ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 36; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = -12; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 4;$$

осыдан

$$gradu = \{36; -12; 4\} \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = 36\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 12\cdot\frac{2}{3} + 4\cdot\frac{1}{3} = -30\frac{2}{3}.$$

Берілген функциялардың $M(x,y)$ нүктесіндегі а) градиентін, б) $\vec{a}$ векторының бағыты бойынша туындысын табу керек:

171. $z = x^3 + y^3 - 3xy \quad M(2,1), \quad \vec{a} = \{3,4\};$

Жауабы: $grad\ z = \{9,-3\}, \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = 3.$

172. $z = \sqrt{x^2+y^2} \quad M(5,3), \quad \vec{a} = \{12,5\};$

Жауабы: $grad\ z = \{\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\}, \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{45}{52}.$

173. $z = \ln(x^2+y^2) \quad M(-3,4), \quad \vec{a} = \{-1,2\};$

Жауабы: $grad\ z = \{-\frac{6}{25}, \frac{8}{25}\}, \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{22\sqrt{5}}{125}.$

174. $z = \frac{y^2}{x} \quad M(1,2), \quad \vec{a} = \{-8,6\};$

Жауабы: $grad\ z = \{-4,4\}, \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = 5{,}6.$

175. $u = xyz \quad M(1,2,3), \quad \vec{a} = \{1,-1,1\};$

Жауабы: $grad\ u = \{6,2,2\}, \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$

176. $u = x^2 + y^2 + z^2 \quad M(1,1,1), \quad \vec{a} = \{3,2,6\}.$

Жауабы: $grad\, u = \{2, 2, 2\}, \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = 3\frac{1}{7}.$

1.8 Көп айнымалды функциялардың жоғары ретті дербес туындылары мен дифференциалдары.

$z = f(x, y)$ функциясының *екінші ретті дербес туындысы* деп осы функцияның дербес туындысының дербес туындысын айтады және оны былай белгілейді:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Осылай үшінші және жоғары ретті дербес туындылары табылады:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y).$$

және т.с.с.

$z = f(x, y)$ функциясы және оның $f'_x(x, y),\ f'_y(x, y),\ f''_{xy}(x, y),\ f''_{yx}(x, y)$ дербес туындылары D обылысында анықталған және үзіліссіз болса, онда осы облыста "аралас" туындылары тең болады:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

$z = f(x, y)$ функциясының *екінші ретті дифференциалы* деп осы функцияның дифференциалының дифференциалын айтады:

$$d^2 z = d(dz).$$

Осы сияқты үшінші және жоғары ретті дифференциалдары анықталады:

$$d^3 z = d(d^2 z), \ldots, d^n z = d(d^{n-1} z).$$

Егер x және y бір-бірінен тәуелсіз айнымалылар, ал $f(x, y)$ функциясының үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда жоғары ретті дифференциалдар

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{dx^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$

....

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

формулаларымен анықталады.

177. $z = x^3 + 5x^2y - 4y^3 - x^2 - 6xy + 3y^2$ функциясының екінші ретті дербес туындыларын және екінші ретті дифференциалын табу керек.

Шешуі. Алдымен дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 10xy - 2x - 6y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 - 12y^2 - 6x + 6y.$$

Енді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6x + 10y - 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -24y + 6,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 10x - 6,$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= (6x + 10y - 2)dx^2 + 2(10x - 6)dxdy + (-24y + 6)dy^2.$$

Берілген функциялардың екінші ретті дербес туындыларын табу керек:

178. $z = 4x^3 - 6xy^2 + 5y^3$; Жауабы: $z''_{xx} = 24x;\ z''_{xy} = -12y;\ z''_{yy} = 30y.$

179. $z = x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4$;

Жауабы: $z''_{xx} = 12x^2 + 10y^2;\ z''_{xy} = 20xy;\ z''_{yy} = 10x^2 + 48y^2.$

180. $z = x^4y^7 + x^5y^8$;

Жауабы: $z''_{xx} = 12x^2y^7 + 20x^3y^8;$

$z''_{xy} = 28x^3y^6 + 40x^4y^7;\ z''_{yy} = 42x^4y^5 + 56x^5y^6.$

181. $z = \dfrac{y-2}{x+1}$; Жауабы: $z''_{xx} = \dfrac{2(y-2)}{(x+1)^3}$; $z''_{xy} = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $z''_{yy} = 0$.

82. $z = \sin(x^2 + y^2)$; Жауабы: $z''_{yy} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2)$.

$z''_{xx} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2)$; $z''_{xy} = -4xy\sin(x^2 + y^2)$;

183. $z = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{x}{y}$; Жауабы: $z''_{xx} = \dfrac{2}{y^2}$; $z''_{xy} = -\dfrac{4}{y^3} - \dfrac{1}{y^2}$; $z''_{yy} = \dfrac{6x^2}{y^4} + \dfrac{2x}{y^3}$.

184. $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$; Жауабы: $z''_{xx} = \dfrac{2y}{x^3}$; $z''_{xy} = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}$; $z''_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$.

185. $z = e^{xy}$; Жауабы: $z''_{xx} = y^2 e^{xy}$; $z''_{xy} = (1 + xy)e^{xy}$; $z''_{yy} = x^2 e^{xy}$.

186. $z = \ln(2x + 5y)$;

Жауабы: $z''_{xx} = -\dfrac{4}{(2x+5y)^2}$; $z''_{xy} = -\dfrac{10}{(2x+5y)^2}$; $z''_{yy} = -\dfrac{25}{(2x+5y)^2}$.

187. $z = \ln\dfrac{x}{y}$. Жауабы: $z''_{xx} = -\dfrac{1}{x^2}$; $z''_{xy} = 0$; $z''_{yy} = \dfrac{1}{y^2}$.

Берілген функциялардың екінші ретті дифференциалдарын табу керек:

188. $z = x^3 + 5x^2y + 2y^3 + 7xy^2$;

Жауабы: $d^2z = (6x + 10y)dx^2 + 2(10x + 14y)dxdy + (12y + 14x)dy^2$.

189. $z = x^4 y^7$; Жауабы: $d^2z = 12x^2y^7dx^2 + 56x^3y^6dxdy + 42x^4y^5dy^2$.

190. $z = \cos(3x + 4y)$; Жауабы: $d^2z = -(9dx^2 + 24dxdy + 16dy^2)\cos(3x + 4y)$.

191. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; Жауабы: $d^2z = \dfrac{y^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$.

192. $z = \ln(x^2 + y^2)$ функциясының $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек.

193. Екі рет дифференциалданатын кез келген $z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax)$ функциясының $a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек;

194. $u=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ функциясының $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек;

195. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ функциясының $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек.

1.9 Толық дифференциалды интегралдау

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ өрнегі, мұндағы D обласында $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары өздерінің дербес туындыларымен үзілісіз функциялар, қандай да бір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болуы үшін,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

шартының орындалуы қажетті және жеткілікті, яғни

$$d\,u(x,y)\equiv P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,.$$

Бұл жағдайда $u(x,y)$ функциясы

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)d\,x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)d\,y+C,$$

формуласымен табылады, мұндағы (x_0,y_0) - D обласындағы кезкелген нүкте, ал C - кезкелген тұрақты.

196. $(3x^2y+2y+3)\,dx+(x^3+2x+3y^2)\,dy$ өрнегі қандай да бір функциясының толық дифференциалы екендігін дәлелдеп, осы функцияны табу керек.

Шешуі. $P(x,y)=3x^2y+2y+3,\qquad Q(x,y)=x^3+2x+3y^2.$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+2,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+2.$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ шарты орындалады, осыдан берілген өрнек қандай да бір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болғандықтан

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(3x^2y+2y+3\right)d\,x+\int_{y_0}^{y}\left(x_0^3+2x_0+3y^2\right)d\,y+C\ .$$

$x_0=0,\ y_0=0$ деп алсақ, онда

$$u(x,y)=\int_{0}^{x}\left(3x^2y+2y+3\right)d\,x+\int_{0}^{y}3y^2\,d\,y+C$$

немесе

$$u(x,y)=(x^3y+2xy+3x)+y^3+C$$

$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,u,z)dz$ өрнегі,мұндағы D обласында $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ және $R(x,y,z)$ функциялары өздерінің дербес туындыларымен үзіліссіз функциялар, қандай да бір $u(x,y,z)$ функциясының толық дифференциалы болуы үшін,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z} \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

шартының орындалуы қажетті және жеткілікті, яғни

$$d\,u(x,y)\equiv P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z).$$

Бұл жағдайда $u(x,y)$ функциясы

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)d\,x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)d\,y+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)dz+C,$$

формуласымен табылады, мұндағы (x_0,y_0,z_0) - D обласындағы кезкелген нүкте, ал C - кезкелген тұрақты.

197. $(3x^2+3y-1)\,dx+(z^2+3x)\,dy+(2yz+1)dz$ өрнегі қандай да бір функциясының толық дифференциалы екендігін дәлелдеп, осы функцияны табу керек.

Шешуі. $P(x,y,z)=3x^2+3y-1, \quad Q(x,y,z)=z^2+3x, \quad R(x,y,z)=(2yz+1).$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=3, \quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=2z, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=0$$

шарттары орындалады, берілген өрнек қандай да бір $u(x,y,z)$ функциясының толық дифференциалы болғандықтан

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}(3x^2+3y-1)d\,x+\int_{y_0}^{y}(z^2+3x_0)d\,y+\int_{z_0}^{z}(2y_0z+1)dz+C$$

$x_0=0,\ y_0=0, z_0=0$ деп алсақ, онда

$$u(x,y,z)=\int_{0}^{x}(3x^2+3y-1)d\,x+\int_{0}^{y}z^2\,d\,y+\int_{0}^{z}dz+C$$

немесе

$$u(x,y)=x^3+3xy-x+yz^2+z+C.$$

Берілген өрнектердің қандай да бір функциясының толық дифференциалы екендігін дәлелдеп, осы функцияны табу керек:

198. $y\,dx+x\,dy$ Жауабы: $u(x,y)=xy+C$

199. $(3x^2+2y)\,dx+(2x-3)\,dy$ Жауабы: $u(x,y)=x^3+2xy-3y+C$

200. $(x^2+4y)dx+(4x+y^2)dy$ Жауабы: $u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+4xy-\frac{1}{3}y^3+C$

201. $(3x^2y-4xy^2)dx+(x^3-4x^2y+12y^3)dy$

Жауабы: $u(x,y)=x^3y-4x^2y^2+3y^4+C$

202. $\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy$ Жауабы: $u(x,y)=4x+\frac{y^2}{x}+C$

203. $3x^2e^y\,dx+(x^3e^y-1)dy$ Жауабы: $u(x,y)=x^3e^y-y+C$

204. $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$ Жауабы: $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+C$

205. $(2x+y+z)dx+(x+2y+z)dy+(x+y+2z)$

Жауабы: $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2xy+xz+yz+C.$

206. $(3x^2+2y^2+3z)dx+(4xy+2y-z)dy+(3x-y-2)$

Жауабы: $u(x,y,z)=x^3+2xy^2+3xz+y^2-yz-2z+C.$

207. $\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)dx+(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2})dy+\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)$

Жауабы: $u(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+C.$

1.10 Бетке жүргізілген жанама жазықтық және нормаль түзу

Қарастырылатын σ беті $z=f(x,y)$ теңдеуімен берілсін. Беттің бойынан $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесін алайық. Осы нүктеде $f=(x,y)$ функциясы дифференциалданатын болсын.

Беттің M_0 нүктесі арқылы өтетін барлық қисықтарға жүргізілген жанамалардан тұратын жазықтықты *жанама жазықтық* дейді. Оның теңдеуі

$$z-z_0=(x-x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}.$$

M_0 нүктесі арқылы өтетін және жанама жазықтыққа перпендикуляр болатын түзуді *беттің нормалі (тіктемесі)* дейді. Оның теңдеуі

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Егер σ беті $F(x,y,z)=0$ теңдеуімен берілсе, онда $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесіндегі жанама жазықтықтың теңдеуі

$$(x-x_0)\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}=0,$$

ал нормалінің теңдеуі

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}}.$$

208. $z=1+x^2+y^2$ функциясының $M_0(1;2;3)$ нүктесіндегі жанама жазықтығының және нормалінің теңдеуін жазу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y,\ M_0(1,2,3)$ нүктесінде

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2,\ \frac{\partial z}{\partial y}=4.$$

Осыдан, жанама жазықтығының теңдеуі: $z-3=2(x-1)+4(y-2)$ немесе $2x+4y-z-7=0,$ ал нормалінің теңдеуі

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-1}.$$

209. $2x^2+y^2+3z^2-x-4y+5z=0$ функциясының $M_0(2;1;-1)$ нүктесіндегі жанама жазықтығының және нормаль түзуінің теңдеулерін жазу керек.

Шешуі. $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0}=(4x-1)|_{M_0}=7;\ \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0}=(2y-4)|_{M_0}=-2;\ \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0}=(6z+5)|_{M_0}=-1.$

Осыдан жанама жазықтығының теңдеуі:

$$7(x-2)-2(y-1)-(z+1)=0 \text{ немесе } 7x-2y-z-13=0,$$

ал нормаль түзуінің теңдеуі

$$\frac{x-2}{7}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}.$$

Берілген σ беттердің $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктелеріндегі жанама жазықтықтарының және нормаль түзулерінің теңдеулерін жазу керек:

220. $z=\dfrac{x^2-y^2}{2},\quad M_0(3,1,4);$

Жауабы: $3x-y-z-4=0;\quad \frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-4}{-1}.$

221. $z=x^2+2xy+3y^2,\quad M_0(-1,1,2);$

Жауабы: $4y-z-2=0;\quad \frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{-1}.$

222. $z=2x^2+y^2-4xy,\quad M_0(2,1,-3);$

Жауабы: $4x-6y-z-5=0;\quad \frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z+3}{-1}.$

223. $z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10, \quad M_0(-7,1,8);$

Жауабы: $10x + 29y + z + 38 = 0; \quad \dfrac{x+7}{-10} = \dfrac{y-1}{-29} = \dfrac{z-8}{-1}.$

224. $3x^2 - y^2 + z^2 + xy + yz = 0, \quad M_0(0,2,1);$

Жауабы: $2x - 3y + 5z + 1 = 0; \quad \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-1}{5}.$

225. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0, \quad M_0(1,2,-1);$

Жауабы: $x + 11y + 5z - 18 = 0; \quad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{11} = \dfrac{z+1}{5}.$

226. $x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46, \quad M_0(1,2,-3);$

Жауабы: $2x + 18y - 16z - 86 = 0; \quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{18} = \dfrac{z+3}{-16}.$

227. $x^2 + y^2 - z^2 - 2xz + 2x - z = 0, \quad M_0(1,1,1);$

Жауабы: $2x + 2y - 5z + 1 = 0; \quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-5}.$

1.11 Көп айнымалды функция үшін Тейлор формуласы

(a,b) нүктесінің аймағында жатқан нүктелерде $f(x,y)$ функциясының $(n+1)$-ші ретке дейін үзіліссіз дербес туындылары бар болсын. Онда осы қарастырылып отырған аймақта Тейлор формуласы орындалады:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)\right] +$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b) + R_n(x,y),$$

мұндағы

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f\left[a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)\right], \ (0<\theta<1).$$

Тейлор формуласы дербес жағдайда, яғни $a = b = 0$ болғанда Маклорен формуласы деп аталады.

Осы сияқты формулалар үш және одан да көп айнымалылар үшін де орын алады.

228. $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ функциясын $(1;2)$ нүктесінің аймағында Тейлор формуласына жіктеу керек.

Шешуі.

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[f_x'(a,b)(x-a)+f_y'(a,b)(y-b)\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}''(a,b)(x-a)^2+2\,f_{xy}''(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}''(a,b)(y-b)^2\right]+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b)+R_n(x,y),$$
$$f(1;2)=1^3-2\cdot 2^3+3\cdot 1\cdot 2=-9$$
$$f_x'(x,y)=3x^2+3y, \qquad f_x'(1;2)=3\cdot 1+3\cdot 2=9,$$
$$f_y'(x,y)=-6y^2+3x, \qquad f_y'(1;2)=-6\cdot 4+3\cdot 1=-21,$$
$$f_{xx}''(x,y)=6x, \qquad f_{xx}''(1;2)=6\cdot 1=6,$$
$$f_{xy}''(x,y)=3, \qquad f_{xy}''(1;2)=3$$
$$f_{yy}''(x,y)=-12y, \qquad f_{yy}''(1;2)=-12\cdot 2=-24,$$
$$f_{xxx}'''(x,y)=6, \qquad f_{xxx}'''(1;2)=6,$$
$$f_{xxy}'''(x,y)=0, \qquad f_{xxy}'''(1;2)=0$$
$$f_{xyy}'''(x,y)=0, \qquad f_{xyy}'''(1;2)=0$$
$$f_{yyy}'''(x,y)=-12 \qquad f_{yyy}'''(1;2)=-12.$$

Осыдан
$$f(x,y)=x^3-2y^3+3xy=-9+\left[9(x-1)-21(y-2)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[6(x-1)^2+6(x-1)(y-2)-24(y-2)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\left[6(x-1)^3+0\cdot(x-1)^2(y-2)+0\cdot(x-1)(y-2)^2-12(y-2)^3\right].$$

229. $f(x,y)=4x^3-x^2+2xy-y^2+5x+y-8$ функциясын $(1;-1)$ нүктесінің аймағында Тейлор формуласына жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y)=-4+13(x-1)+5(y+1)+11(x-1)^2+(x-1)(y+1)-(y+1)^2+4(x-1)^3.$

230. $f(x,y)=x^3+3xy-2y^3$ функциясын $(2;1)$ нүктесінің аймағында Тейлор формуласына жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y)=12+15(x-2)+6(x-1)^2+3(x-2)(y-1)-6(y-1)^2+(x-2)^3-2(y-1)^3.$

231. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z+4$ функциясын $(1;1;1)$ нүктесінің аймағында Тейлор формуласына жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+2(x-1)(y-1)-(y-1)(z-1).$

232. $f(x,y,z)=e^{x+y}$ функциясын төртінші ретке дейін $(1;-1)$ нүктесінің аймағында Тейлор формуласына жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y,z)=1+\left[(x-1)+(y+1)\right]+\frac{1}{2!}\left[(x-1)+(y+1)\right]^2+\frac{1}{3!}\left[(x-1)+(y+1)^3\right].$

233. $f(x,y,z)=cosx\cdot\cos y$ функциясын бесінші ретке дейін Маклорен формуласына жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y,z)=1-\frac{x^2+y^2}{2!}+\frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}.$

234. $f(x,y,z)=e^x\sin y$ функциясын төртінші ретке дейін Маклорен формуласына жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y,z)=y+xy+\dfrac{3x^2y-y^3}{3!}$.

1.12 Екі айнымалды функцияның экстремумы

Екі айнымалды функцияның экстремумы. D облысында анықталған $z=f(x,y)$ функциясы берілсін. Осы облыста жататын $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің маңайындағы барлық $M(x,y)$ нүктелерінде

$$f(x_0,y_0)>f(x,y) \quad (f(x_0,y_0)<f(x,y))$$

теңсіздігі орындалса, онда $z=f(x,y)$ функциясы M_0 нүктесінде максимум (минимум) мәнін қабылдайды. "Максимум" және "минимум" мәндері экстремум мәндері деп аталады.

Үш және одан көп айнымалылы функцияларының экстремумдары да осылайша анықталады.

Кез келген дифференциалданатын екі айнымалылы функция экстремум мәндерін тек оның барлық дербес туындылары нөлге тең болатын нүктелерінде ғана қабылдайды. Мұндай нүктелер *стационарлық (тұрақты) нүктелер* деп аталады. Мысалы, дифференциалданатын $z=f(x,y)$ функциясының стационарлық нүктесі $M_0(x_0,y_0)$

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$$

жүйесін шешу арқылы анықталады. Бұл шарт $z=f(x,y)$ функциясының *экстремумының қажетті шарты* делінеді. Стационарлық нүктелердің барлығы бірдей экстремум нүктелері бола бермейді. Сондықтан олардың әрқайсысы экстремум мәндерін қабылдауының жеткілікті шартын қанағаттандыру керек. $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі $z=f(x,y)$ функциясының стационар нүктесі болсын.

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0), \quad B=f''_{xy}(x_0,y_0), \quad C=f''_{yy}(x_0,y_0)$$
$$\Delta=AC-B^2,$$

деп белгілейік. Егер стационарлық $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде:

а) $\Delta>0$ және $A>0$ болса, онда M_0 - минимум нүктесі,

$\Delta>0$ және $A<0$ болса, онда M_0 - максимум нүктесі;

б) $\Delta<0$ болса, онда M_0 нүктесінде экстремум болмайды;

в) $\Delta=0$ болса, онда M_0 нүктесінде экстремум болуы да, болмауы да мүмкін.

235. $z=2x^2-xy+3y^2-5x+7y$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - y - 5, \; \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 6y + 7$$

болады, осыдан

$$\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ -x + 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің шешімі $x = 1, \; y = -1, \; M(1,-1)$ нүктесіндегі екінші ретті дербес туындылары

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$$

болады. Сонымен

$$\Delta = AC - B^2 = 4 \cdot 6 - (-1)^2 = 23 > 0, \; A > 0.$$

Яғни $M(1,-1)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды және ол

$$z_{\min} = z(M) = -6 \text{ болады.}$$

236. $z = x^3 + y^2 - 3axy$ функциясын экстремумге зерттеу керек $(a > 0)$.

Шешуі.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3ay = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің шешімі: $x_1 = a, \; y_1 = a$ және $x_2 = 0, \; y_2 = 0$.

Екінші ретті дербес туындысын табайық: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3a, \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$

$M_1(a,a)$ нүктесінде

$$A = 6a, \; B = -3a, \; C = 6a, \quad \Delta = AC - B^2 = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0, \; A > 0.$$

Яғни $M_1(a,a)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды және ол $z_{\min} = -a^3$ тең болады. $M_2(0,0)$ нүктесінде

$$A = 0, \; B = -3a, \; C = 0, \; \Delta = AC - B^2 = -9a^2 < 0.$$

Яғни $M_2(0,0)$ нүктесінде экстремум жоқ.

Берілген функцияларды экстремумге зерттеу керек:

237. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1;$ Жауабы: $z_{\min} = z(-1;1) = 0.$

238. $z = 4x - 2y - x^2 - y^2;$ Жауабы: $z_{\min} = z(2;-1) = 5.$

239. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1;$ Жауабы: $z_{\min} = z\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$

240. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10;$ Жауабы: $z_{\min} = z(0; 0) = 10.$

241. $z = x^2 - y^2 + 5xy + 6;$ Жауабы: Экстремум жоқ.

242. $z = 3xy - x^2y - xy^2;$ Жауабы: $z_{\min} = z(1; 1) = 1.$

Шартты экстремум. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері. $z = f(x, y)$ функциясының *шартты экстремумы* деп осы функцияның, x және y айнымалыларының $\varphi(x, y) = 0$ теңдеуімен байланысты болған жағдайдағы экстремум мәнін айтады. Мұндағы $\varphi(x, y) = 0$ теңдеуі *байланыс теңдеуі* деп аталады.

Шартты экстремумды табу үшін Лагранж функциясы деп аталатын $u(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$ функциясының экстремумын табу жеткілікті, мұндағы λ - анықталмаған тұрақты көбейткіш.

Лагранж функциясының экстремумының бар болуының қажетті шарты:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Осы үш теңдеуден тұратын жүйеден x, y және λ мәндерін табуға болады.

D тұйық облысында $z = f(x, y)$ функцияның ең үлкен M және ең кіші m мәндерін табу үшін:

а) D облысының ішінде жатқан барлық станционарлық нүктелерді тауып, осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептеу керек (бұл нүктелерде экстремум мәндерінің болуы не болмауын тексерудің қажеті жоқ);

б) D облысының шекарасында функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек;

в) барлық табылған мәндердің ең кішісін (бұл ең кіші мән) және ең үлкенін (бұл ең үлкен мән) таңдап аламыз.

243. $z = x^2 - y^2$ функциясының байланыс теңдеуі $2x - y - 6 = 0$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек.

Шешуі. Лагранж функциясын қарастырайық:

$$u = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y - 6).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y - \lambda = 0, \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

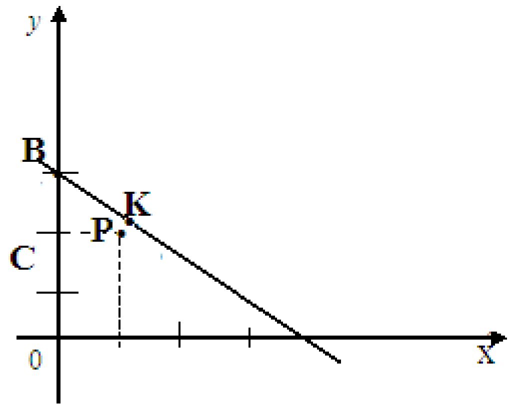
жүйесінен $\lambda = -4, x = 4, y = 2$ мәндері табылады. Осыдан $M(4, 2)$ нүктесінде $z = x^2 - y^2$ функциясы шартты максимум мәнін қабылдайды және ол $z_{\max} = 12$ болады.

244. $z = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 10$ функциясының $y = 0,\quad x = 0$ және $3x + 4y = 12$ сызықтарымен шектелген тұйық D облысындағы (аймағындағы) ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Шешуі. Стационар (тұрақты) M нүктесін табайық.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x - y - 4 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

Осы жүйеден $x = 1, y = 2, P(1, 2)$ нүктесі D облысының ішінде жатыр (1.1 Сурет). $z(P) = z(1, 2) = 1$.



1.1 Сурет

Енді берілген функцияны D облысының шекарасында зерттейік. Облыс шекарасы *OA, AB* және *OB* кесінділерінен тұрады:

а) *OA* бөлігінде $y = 0, 0 \le x \le 4,$ осыдан $z = 3x^2 - 4x + 10, z_x' = 6x - 4 = 0,$

$$x = \frac{2}{3} \in [0, 4],\ N(\frac{2}{3}, 0),\ z(N) = 8\frac{2}{3};$$

OA кесіндісінің шеткі нүктелерінде $z(0) = z(0, 0) = 10,\ z(A) = z(4, 0) = 42;$

б) *OB* бөлігінде $x = 0, 0 \le y \le 3,$ осыдан

$$z = 2y^2 - 7y + 10,\ z'_y = 4y - 7, \qquad y = \frac{7}{4} \in [0, 3],\ C(0, \frac{7}{4}),\ z(C) = 4\frac{7}{8};$$

OB кесіндісінің шеткі нүктелерінде $z(0) = 10,\ z(B) = z(0, 3) = 7;$

AB бөлігінде $y = \frac{3}{4}(4 - x),\ 0 \le x \le 4,$

$$z = 3x^2 - \frac{3}{4}x(4 - x) + \frac{9}{8}(4 - x)^2 - 4x - \frac{21}{4}(4 - x) + 10 \quad \text{немесе}$$

$$z = \frac{39}{8}x^2 - \frac{43}{8}x + 7,\ z'_x = \frac{39}{4}x - \frac{43}{4} = 0,\ x = \frac{43}{39} = 1\frac{4}{39} \in [0,4],\ y = 2\frac{9}{52},$$

$$K(1\frac{4}{39};2\frac{9}{52}),\ z(K) = 1\frac{23}{312};$$

AB кесіндісінің шеткі нүктелеріндегі мәндері белгілі.

Табылған $z(P),\ z(N),\ z(K),\ z(C),\ z(0),\ z(A),\ z(B)$ мәндерін салыстыра отырып, z функциясының D облысындағы ең үлкен мәні $M = z(A) = 42,$ ал ең кіші мәні $m = z(P) = 1$ болатындығын анықтаймыз.

245. $z = x^2 + y^2$ функциясының байланыс теңдеуі $3x + 4y = 12$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек;

Жауабы: $x = \frac{36}{25},\ y = \frac{48}{25},\ \lambda = -\frac{24}{25}$ болғанда $z_{\min} = \frac{144}{25}.$

246. $z = 3x + 4y$ функциясының байланыс теңдеуі $x^2 + y^2 = 25$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек.

Жауабы: $x = -3,\ y = -4,\ \lambda = \frac{1}{2}$ болғанда

$z_{\min} = -25;\ x = 3,\ y = -4,\ \lambda = -\frac{1}{2}$ болғанда $z_{\max} = 25.$

Берілген $z = f(x, y)$ функциясының берілген сызықтармен шектелген D облысында ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек:

247. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 4, \qquad D: x = 0, y = 0, x + y + 3 = 0;$

Жауабы: $M = z(-3, 0) = z(0, 3) = 10;\ m = z(-1, -1) = 3.$

248. $z = xy - y^2 + 3x + 4y - 2, \qquad D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0;$

Жауабы: $M = z(0,5; 0,5) = 1,5;\ m = z(0, 0) = -2.$

249. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 5, \qquad D: x = 2, y = 0, y = x + 2;$

Жауабы: $M = z(2, 3) = 14;\ m = z(1, 0) = 4.$

250. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 4, \qquad D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0;$

Жауабы: $M = z(-3, 2) = 10;\ m = z(-2, 0) = 1.$

2 Қатарлар теориясы

2.1 Сан қатары

Мүшелері оң сан қатарлары. $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ қандай да бір сан тізбегі берілсе, онда

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \quad (2.1)$$

шексіз қосындыны *сан қатары* деп атайды.

Мұндағы $u_1, u_2, u_3, ...$ сандары сан қатарларының *мүшелері*, ал u_n саны *жалпы мүшесі* (*немесе n-ші мүшесі)* деп аталады.

Жалпы мүшесі арқылы сан қатарын қысқаша $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ деп жазуға болады.

(2.1)-қатардың алғашқы мүшелерінің қосындыларын қарастырайық.

$$S_1 = u_1,\ \mathrm{S}_2 = u_1 + u_2,\quad \mathrm{S}_3 = u_1 + u_2 + u_3,\quad ...,\quad \mathrm{S}_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$$

қатардың *дербес қосындылары* деп аталады.

Егер сан қатарының алғашқы мүшелерінің қосындылар тізбегінің шегі бар болса, яғни

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S, \quad (2.2)$$

саны бар болса, онда ол қатардың *қосындысы* деп аталады, және қатар *жинақты* делінеді.

Егер (2.2) шегі болмаса, онда берілген сан қатарын *жинақсыз* дейміз, ондай қатардың қосындысы жоқ.

Мысалы,

Сан қатарының негізгі теоремаларын қарастырайық:

а) егер $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ қатары жинақты болса, онда алғашқы m мүшелерін алып тастағанда пайда болған

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + ... \quad (2.3)$$

қатары да жинақты болады. Керісінше алғашқы m мүшелері алынып тасталынған қатар жинақты болса, онда берілген қатарда жинақты болады.
(2.3)-қатарды берілген қатардың *m-ші қалдығы* деп атайды;

ә) егер $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ қатары жинақты және қосындысы S-ке тең болса, онда $\alpha u_1 + \alpha u_2 + \alpha u_3 + ... + \alpha u_n + ...$ қатары да жинақты және қосындысы $\alpha \cdot S$-ке тең болады;

б) егер $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ және $v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ...$ қатарлары жинақты және қосындылары сәйкесінше S және δ болса, онда

$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+...+(u_n+v_n)+...$ қатары да жинақты және қосындысы $(S+\delta)$-ға тең болады.

Көп жағдайларда қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысы арқылы оның жинақты немесе жинақсыз болуын тексеру өте қиын немесе күрделі есептеуді қажет етеді. Сондықтан қатардың жинақтың немесе жинақсыз болуын білу үшін жинақтылық белгілерінқарастырамыз.

Қатар жинақтылығының қажетті белгісі.

Егер қатар жинақты болса, онда $n\to\infty$-да оның жалпы (n-ші) мүшесі нөлге ұмтылады, яғни

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Ал егер $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ болса, онда қатар жинақсыз болады.

Қатар жинақтылығының жеткілікті белгілері

а) I салыстыру белгісі.

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+... \qquad (2.4)$$

және

$$v_1+v_2+v_3+...+v_n+... \qquad (2.5)$$

қатарлары берілсін және $u_n \le v_n \quad (n=1,2,3,...)$ болсын.

Егер (2.5)-қатар жинақты болса, онда (2.4)-қатар да жинақты болады.

Егер (2.4)-қатар жинақсыз болса, онда (2.5)-қатар да жинақсыз болады.

ә) II салыстыру белгісі. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$ ақырлы шегі бар болса, онда $\sum\limits_{ї=1}^{\infty} u_n$ және $\sum\limits_{ї=1}^{\infty} v_n$ қатарлары екеуі де бірдей жинақты немесе бірдей жинақсыз болады.

б) Даламбер белгісі. Мүшелері оң болатын $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ қатары үшін

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

болса, онда:

1) $\ell > 1$ болғанда, қатар жинақсыз;

2) $\ell < 1$ болғанда, қатар жинақты;

3) $\ell = 1$ болғанда, қатар жинақты да немесе жинақсыз да болуы мүмкін.

в) Коши белгісі. Мүшелері оң болатын $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ қатары үшін

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

болса, онда:

1) $\ell > 1$ болғанда, қатар жинақсыз;

2) $\ell < 1$ болғанда, қатар жинақты;

3) $\ell = 1$ болғанда, қатар жинақты да немесе жинақсыз да болуы мүмкін.

г) К о ш и д і ң   и н т е г р а л д ы қ   б е л г і с і. Мүшелері оң және өспейтін $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ қатары берілсін (яғни $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq ... \geq u_n \geq ...$) және $u_n = f(n),\ n = 1,2,3,...$ болсын. Мұндағы $f(x)$ - өспейтін үзіліссіз функция.

Егер $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақты болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары да жинақты болады.

Егер $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақсыз болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары да жинақсыз болады.

251. $u_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$ қатарының жалпы мүшесі берілген. Алғашқы мүшелерін табу керек.

Шешуі. $u_1 = \dfrac{1}{2};\ u_2 = \dfrac{2}{5};\ u_3 = \dfrac{3}{10};\ u_4 = \dfrac{4}{17};\ u_5 = \dfrac{5}{26}.$

252. $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$ қатарының жалпы мүшесі берілген. Алғашқы бес мүшелерін табу керек.

Шешуі. $u_1 = \dfrac{1}{2}; u_2 = \dfrac{1 \cdot 2}{2^2} = \dfrac{1}{2};\ u_3 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2^3} = \dfrac{3}{4};\ u_4 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2^4};\ u_5 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2^5} = \dfrac{15}{4}.$

Қатардың алғашқы бес мүшесін жазу керек.

253. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - 4n + 5};$ Жауабы: $\dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} + ...$

254. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!};$ Жауабы: $3 + \dfrac{9}{2} + \dfrac{27}{6} + \dfrac{81}{24} + \dfrac{243}{120} + ...$

255. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{n^2};$ Жауабы: $\dfrac{\ln 2}{4} + \dfrac{\ln 3}{9} + \dfrac{\ln 4}{16} + \dfrac{\ln 5}{25} + \dfrac{\ln 6}{36} + ...$

256. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!};$ Жауабы: $\dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} + \dfrac{1}{7!} + \dfrac{1}{9!} + \dfrac{1}{11!} + ...$

257. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{n}{n + 10^n};$ Жауабы: $\dfrac{1}{11} + \dfrac{2}{102} + \dfrac{3}{1003} + \dfrac{4}{10004} + \dfrac{5}{100005} + ...$

258. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n;$ Жауабы: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{27}{64} + \dfrac{256}{625} + \dfrac{3125}{776} + ...$

259. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p};$ Жауабы: $1 + \dfrac{1}{2^\rho} + \dfrac{1}{3^\rho} + \dfrac{1}{4^\rho} + \dfrac{1}{5^\rho} + ...$

260. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^2+1}.$ Жауабы: $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{10}{17}+\frac{13}{26}+\ldots.$

261. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots$ қатарының жалпы мүшесін табу керек.

Шешуі. Алымында 1, 3, 5, ... сандарынан тұратын тізбек арифметикалық прогрессия құрайды, оның n-ші мүшесін $\grave{a}_n=a_1+d(n-1)$ формуласы бойынша табамыз. Мұнда $a_1=1, d=2,$ сондықтан $a_n=2n-1.$

Бөліміндегі $2,\ 2^2,\ 2^3,\ldots$ сандары геометриялық прогрессия құрайды, оның n-ші мүшесі $b_n=2^n$-ге тең. Осыдан жалпы мүшесі $u_n=\frac{2n-1}{2^n}.$

262. $\frac{3}{5}+\left(\frac{4}{8}\right)^2+\left(\frac{5}{11}\right)^3+\left(\frac{6}{14}\right)^4+\ldots$ қатарының жалпы мүшесін табу керек.

Шешуі. Әрбір мүшесінің дәрежесі мүшесінің нөмірімен сәйкес келеді. Сондықтан n-ші мүшесінің дәрежесі n-ге тең болады. $\frac{3}{5},\frac{4}{8},\frac{5}{11},\frac{6}{14}$ бөлшектерінің алымы бірінші мүшесі 3-ке, айырмасы 1-ге тең арифметикалық прогрессияны құрайды. Онда n-ші мүшесі $n+2$-ке тең болады, ал бөлімі бірінші мүшесі 5-ке, айырмасы 3-ке тең арифметикалық прогрессияны құрайды, осыдан n-ші мүшесі $3n+2$-ке тең болады. Сонымен қатардың жалпы мүшесі

$$u_n=\left(\frac{n+2}{3n+2}\right)^n.$$

263. $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$ қатарының жалпы мүшесін табу керек.

Шешуі. $u_1=1;\ u_2=\frac{1}{1\cdot 2};\ u_3=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3};\ u_4=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};\ u_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n!}=\frac{1}{n!}.$ болады.

Қатардың жалпы мүшесін жазу керек.

264. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{4}}+\frac{4}{\sqrt{5}}+\ldots;$ Жауабы: $\frac{n}{\sqrt{n+1}}.$

265. $1-1+1-1+\ldots;$ Жауабы: $(-1)^{n+1}.$

266. $\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\ldots;$ Жауабы: $\left(\frac{2}{5}\right)^n.$

267. $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\frac{5}{14}+\ldots;$ Жауабы: $\frac{n+1}{3n+2}.$

268. $\frac{2}{9}+\frac{4}{17}+\frac{8}{25}+\frac{16}{33}+\ldots;$ Жауабы: $\frac{2^n}{8n+1}.$

269. $\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\frac{1}{28}+\frac{1}{38}+...;$ Жауабы: $\frac{1}{10n-2}$.

270. $\frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{7}{5^3}+\frac{10}{5^4}+...;$ Жауабы: $\frac{3n-2}{5^n}$.

271. $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}+\frac{5}{12}+\frac{7}{20}+...$. Жауабы: $\frac{2n-1}{n(n+1)}$.

272. Мүшелері геометриялық прогрессия болатын $b+bq+bq^2+...+bq^{n-1}+...$ сан қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Мектеп бағдарламасынан белгілі: $S_n=\frac{b(1-q^n)}{1-q}$. Егер $|q|<1$ болса, онда қосынды $S=\frac{b}{1-q}$. Олай болса, қатар жинақты.

Ал егер $|q|>1$ болса, онда берілген қатар жинақсыз, себебі: $bq^{n-1}\to\infty$ сондықтан $S_n\to\infty$.

Егер $q=1$ болса, онда қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысы $S_n=\underbrace{b+b+...+b}_{n}=n\cdot b$. Осыдан $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, яғни қатар жинақсыз.

Егер $q=-1$ болса, онда қатарды $b-b+b-b+...$ түрінде жазуға болады. Яғни оның алғашқы n мүшесінің қосындысы

$$S_n=\begin{cases} b, \text{егер } n-\text{так} \\ 0, \text{егер } n-\text{жуп} \end{cases}.$$

Бұл жағдайда қатардың қосындысы анықталмаған, яғни қатар жинақсыз.

Сонымен мынадай қорытынды жасауға болады:

Егер $|q|<1$ болса, онда қатар жинақты, ал егер $|q|\geq 1$ болса, онда қатар жинақсыз болады. ▲

273. $\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+...+\frac{1}{(2n+1)^2-1}+...$ сан қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесін $u_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}$ екі бөлшектің жарты айырымы ретінде көрсетуге болады. $\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$, яғни $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$; $\frac{1}{24}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$; $\frac{1}{48}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)$,... олай болса,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)+...+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)$$ деп

жазуға болады. Осыдан $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S=\frac{1}{4}$, яғни қатар жинақты.

274. $\frac{5}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+...+\frac{5}{8}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Берілген қатар шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелерінен құралған. Олай болса, қатар жинақты. Оның қосындысын табайық, мұнда

$$b_1=\frac{5}{8}; \quad q=\frac{2}{5}; \quad S=\frac{b}{1-q}=\frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{25}{24}.$$

275. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+8^n}{40^n}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесін $U_n=\frac{5^n+8^n}{40^n}=\frac{5^n}{40^n}+\frac{8^n}{40^n}=\frac{1}{8^n}+\frac{1}{5^n}$ түрінде жазсақ, онда қатарды әрқайсысы геометриялық прогрессияның мүшелерінен құралған $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+8^n}{40^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ екі қатардың қосындысы түрінде жазуға болады. Бұл екі қатар да жинақты болады және олардың қосындысы

$$S=\frac{b}{1+q}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4};$$

олай болса, $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+8^n}{40^n}\frac{1}{7}+\frac{1}{4}=\frac{11}{28}.$$

276. $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+...+\frac{n}{2n+1}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0.$

Осыдан қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалмағандықтан, қатар жинақсыз болады.

277. $0{,}4+0{,}31+0{,}301+...+\left[0{,}3+(0{,}1)^n\right]+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}[0{,}3+(0{,}1)^n]=0{,}3\neq 0,$ онда қатар жинақсыз болады.

278. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^n}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}=0,$ яғни қажетті белгісі орындалады. Енді $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...$ -шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелерінен құралған қатарды қарастырайық. Бұл қатар жинақты болады. $\frac{1}{3^3}<\frac{1}{2^3}$; $\frac{1}{4^4}<\frac{1}{2^4}, ..., \frac{1}{n^n}<\frac{1}{2^n}$ теңсіздіктері орындалғандықтан, берілген қатар да жинақты болады;

279. Жалпы мүшесі $u_n=\frac{1}{3\cdot 4^n+5}$ тең болатын қатардың жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Берілген қатарды жалпы мүшесі $v_n=\frac{1}{4^n}$ болатын жинақты қатармен салыстырайық.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3\cdot 4^n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{5}{4^n}}=\frac{1}{3}\neq 0.$$

Яғни II салыстыру белгісі бойынша берілген қатар жинақты болады;

280. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$; $u_n=\frac{n}{2^n}$; $u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$; Даламбер белгісі бойынша:

$\frac{u_{n+1}}{n_n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}=\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n}=\frac{n+1}{2n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}<1$, яғни қатар жинақты.

281. $5+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+...+\frac{5^ї}{ї\,!}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 5\cdot 5\cdot ...\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}=0$, $u_n=\frac{5^n}{n!}$; $u_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{5^n}{(n+1)!\cdot 5^n}=\frac{5\cdot n!}{(n+1)\cdot n!}=\frac{5}{n+1};\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1,$$

яғни қатар жинақты болады (Даламбер белгісі бойынша).

282. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot ...\cdot n}=0$, $u_n=\frac{n!}{n^n}$, $u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n!}{n^n}=\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\frac{(n+1)\cdot n!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n},\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=e^{-1}<1,$$

қатар жинақты (Даламбер белгісі бойынша).

283. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{ï^{ï}}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$ қатар жинақты (Коши белгісі бойынша).

284. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{27}+...+\frac{n^2}{3^n}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^2}=0;\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\frac{1}{3}<1$ мұндағы $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$ яғни қатар жинақты (Коши белгісі бойынша).

285. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n=0;\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5n+4}=\frac{2}{5}<1,$ яғни қатар жинақты (Коши белгісі бойынша).

286. $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+...+\frac{1}{n^p}+...$ Дирихле қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}0, & егер\ p>0\\ 1, & егер\ p=0\\ \infty, & егер\ p<0\end{cases}$

олай болса, $p>0$ болғанда қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалады.

Енді жеткілікті белгісін қарастырайық. Даламбер белгісін қолданайық:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{(n+1)^p}:\frac{1}{n^p}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

осыдан Даламбер белгісінің көмегімен қатардың жинақтылығын зерттеу мүмкін еместігін көруге болады. Сол сияқты Коши белгісінің көмегімен тексерсек:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=1$$

болады, яғни бұл жағдайда да қатардың жинақтылығы туралы ешнәрсе айтуға болмайды. Енді Кошидің интегралдық белгісін қолданайық. Ол үшін $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ функциясын қарастырамыз. Себебі $f(n)=\dfrac{1}{n^p}$,

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^N=\dfrac{1}{1-p}\left(N^{1-p}-1\right), & егер\ \ p\neq 1,\\ \left.\ln x\right|_1^N=\ln N, & егер\ \ p=1.\end{cases}$$

Осыдан, егер $p\neq 1$ болса, онда $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & åãåð\ p>1,\\ \infty, & åãåð\ p<1,\end{cases}$ ал егер $p=1$ болса, онда $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\ln N=\infty.$ Сонымен мынадай қорытындыға келуге болады, егер $p>1$ болса, онда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ қатары жинақты, ал егер $p\leq 1$ болса, онда ол жинақсыз болады.

$p=1$ болғанда , яғни $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{ï}+...$ жинақсыз қатары *гармоникалық қатар* деп аталады.

287. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$ Қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалғанымен, берілген қатар жинақсыз болады. Себебі

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\ \ рет}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot n=\sqrt{n},$$

яғни $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\infty.$

Осыдан қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалғанымен, оның жинақтылығы немесе жинақсыздығы белгісіз болатындығын байқаймыз. Сондықтан қатардың жинақтылығын зерттеу үшін жеткілікті белгісін қарастыруымыз керек. Дәреже $p=\dfrac{1}{2}\prec 1$ болғандықтан (286 –мысалды қараңыз) қатар жинақсыз.

288. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+5}{\left(n^2-1\right)\left(n^3+2\right)}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесінің алымының дәрежесі төртке, ал бөлімінің дәрежесі беске тең. Алымы мен бөлімінің дәрежелерінің айырмасы бірге тең. Сондықтан, берілген қатарға екінші салыстыру белгісін қолданып, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоникалық қатарымен салыстырамыз.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+5}{(n^2-1)(n^3+2)}:\frac{1}{n}\right)=1$$

болғандықтан, берілген қатар да жинақсыз болады.

289. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3+1}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесінің алымының дәрежесі бірге, бөлімінің дәрежесі үшке тең, олай болса айырмасы екіге тең болады. Сондықтан

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ p=2$$

жинақты қатарымен салыстыра отырып, берілген қатардың жинақты екендігін көреміз. ▲

290. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+...+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\to 0,\ n\to\infty$ әрі $u_1>u_2>u_3...$ орындалатындықтан $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ функциясын аламыз.

$$\int_1^N\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\int_1^N\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\ln\ln(x+1)\Big|_1^N=\ln\ln(N+1)-\ln\ln 2\ \ N\to\infty,$$

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\infty$, осыдан қатар жинақсыз (Кошидің интегралдық белгісі бойынша).

Берілген қатарлардың жинақтылығын зерттеу керек:

291. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; Жауабы: Жинақты.

292. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+8)}$; Жауабы: Жинақты.

293. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$; Жауабы: Жинақсыз.

294. $\sum_{n=1}^{\infty}(1{,}01)^n$; Жауабы: Жинақсыз.

295. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$; Жауабы: Жинақты.

296. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$; Жауабы: Жинақты.

297. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$; Жауабы: Жинақты.

298. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{4^n}$; Жауабы: Жинақты.

299. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3^n}{12^n}$; Жауабы: Жинақты.

300. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$; Жауабы: Жинақты.

301. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{4^n}$; Жауабы: Жинақты.

302. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$; Жауабы: Жинақты.

303. $\frac{10}{7}+\frac{100}{11}+\frac{1000}{15}+\ldots+\frac{10^n}{4n+3}+\ldots$; Жауабы: Жинақсыз.

304. $\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{3n+1}+\ldots$; Жауабы: Жинақсыз.

305. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$; Жауабы: Жинақсыз.

306. $0{,}8+0{,}71+0{,}701+\ldots+[0{,}7+(0{,}1)^n]+\ldots$. Жауабы: Жинақсыз.

307. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^n+4}$; Жауабы: Жинақты.

308. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 3^n}{4^n+5}$; Жауабы: Жинақты.

309. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n+8^n}$; Жауабы: Жинақты.

310. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{6^n+8^n}$; Жауабы: Жинақты.

311. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+\cos^2 n}$; Жауабы: Жинақты.

312. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-\sin^2 n}$; Жауабы: Жинақты.

313. $\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\ldots+\frac{10^n}{n!}+\ldots;$ Жауабы: Жинақты.

314. $\frac{1}{2!}+\frac{\sqrt{1}}{3!}+\frac{\sqrt{3}}{4!}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{(n+1)!};$ Жауабы: Жинақты.

315. $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n+1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots;$ Жауабы: Жинақты.

316. $\frac{1!}{2}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{2^3}+\ldots+\frac{n!}{2^n}+\ldots;$ Жауабы: Жинақты.

317. $\frac{2}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{6}{3^3}+\ldots+\frac{2n}{3^n}+\ldots;$ Жауабы: Жинақты.

318. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2!}+\frac{5}{3!}+\ldots+\frac{2n-1}{n!}+\ldots;$ Жауабы: Жинақты.

319. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^3}{6!}+\ldots+\frac{(n!)^n}{(2n)!}+\ldots;$ Жауабы: Жинақты.

320. $\frac{1}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{27}{3^3}+\ldots+\frac{n^3}{3^n}+\ldots;$ Жауабы: Жинақты.

321. $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n+\ldots;$ Жауабы:Жинақсыз.

322. $\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n+\ldots;$ Жауабы:Жинақты.

323. $\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{7}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n+\ldots;$ Жауабы: Жинақты.

324. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n+\ldots;$ Жауабы: Жинақты.

325. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{n^n}+\ldots;$ Жауабы: Жинақты.

326. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{9}{2\cdot 5^2}+\frac{25}{3\cdot 5^3}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{n\cdot 5^n}+\ldots;$ Жауабы:Жинақты.

327. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}};$ Жауабы: Жинақсыз.

328. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2};$ Жауабы: Жинақты.

329. $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{1}{n};$ Жауабы:Жинақсыз.

330. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)};$ Жауабы:Жинақты.

331. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n};$ Жауабы: Жинақты.

332. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; Жауабы: Жинақты.

333. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; Жауабы: Жинақты.

334. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n}$; Жауабы: Жинақсыз.

335. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^3+1}$; Жауабы: Жинақты.

336. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+3)}$; Жауабы: Жинақсыз.

337. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln(n+1)}$; Жауабы: Жинақты.

338. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$; Жауабы: Жинақты.

339. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; Жауабы: Жинақсыз.

340. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln(n+1)}$; Жауабы: Жинақты.

341. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$; Жауабы:Жинақты.

342. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$ қатары кезкелген q мәні мен $p>1$ болғанда және $q>1$, $p=1$ болғанда жинақты, ал кезкелген q мәні мен $p<1$ болғанда және $q\le 1$, $p=1$ болғанда жинақсыз болатындығын дәлелдеу керек.

Ескерту. Кошидің интегралдық белгісін пайдаланған жөн.

2.2 Ауыспалы таңбалы қатар. Лейбниц белгісі.

Қатар тұрған мүшелерінің таңбалары әртүрлі болатын қатарларды *ауыспалы таңбалы қатар* дейміз.

Ондай қатарларды

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot u_n+\ldots$$

деп жазамыз, мұндағы $u_n\ge 0,\ n=1,2,\ldots$. Осындай ауыспалы таңбалы қатарлардың жинақтылығы Лейбниц белгісі арқылы анықталады:

Л е й б н и ц б е л г і с і. Егер ауыспалы таңбалы

$u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$, яғни қатар мүшелерінің абсолюттік мәндері кемімелі және

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

болса, онда қатар жинақты (әрі оның қосындысы бірінші мүшесінен кем болады, яғни $S < u_1$).

Қатардың қосындысын $S = S_n + R_n$ түрінде жазуға болады. Мұндағы

$R_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + ...)$ қатардың *n-ші қалдығы* деп аталады.

Осы қалдықтың да таңбалары ауыспалы қатар болғандықтан, Лейбниц белгісін қолдануға болады, олай болса $|R_n| < u_{n+1}$. Осыдан жуықтап есептеу кезінде $S \approx S_n$, ал R_n - жіберілген қатесі болып табылады.

Таңбалары айнымалы

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

қатары және осы қатардың мүшелерінің абсолют мәні бойынша алынған

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

қатары берілсін.

Егер $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ -қатары жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ -қатары да жинақты болады. Бұл жағдайда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - қатары *абсолютті жинақты* дейді.

Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ -қатары жинақты, ал $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ -қатары жинақсыз болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - қатары *шартты жинақты* деп аталады.

343. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n \cdot 3^n}$ қатарын $\alpha = 0{,}001$ дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. $|S - S_n| = |R_n| < u_{n+1}$ осы қатардың бірнеше мүшелерін есептейік:

$$u_1 = \frac{1}{3} \approx 0{,}333; \qquad u_2 = \frac{1}{8} \approx 0{,}055; \qquad u_3 = \frac{1}{81} \approx 0{,}012;$$

$$u_4 = \frac{1}{324} \approx 0{,}003; \; u_5 = \frac{1}{1215} \approx 0{,}001; \qquad u_6 = \frac{1}{4374} < 0{,}001.$$

Осыдан $S \approx S_5 = 0{,}333 - 0{,}055 + 0{,}012 - 0{,}001 = 0{,}288.$

344. $\sin\alpha + \dfrac{\sin 2\alpha}{2^2} + \dfrac{\sin 3\alpha}{3^2} + ... + \dfrac{\sin n\alpha}{n^2} + ...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек, мұнда α кез келген сан.

Шешуі. Берілген қатардың мүшелерінің абсолют мәні арқылы алынған қатарды қарастырамыз:

$$|\sin\alpha| + \frac{|\sin 2\alpha|}{2^2} + \left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| + \ldots$$

қатары жинақты, себебі I салыстыру белгісі бойынша

$$\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},$$

ал

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

қатары жинақты (286-мысалды қараңыз, $p = 2$). Осыдан берілген қатар абсолют жинақты.

345. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3 + 7}}$ қатарының абсолют немесе шартты жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Мүшелерінің абсолютті мәні бойынша құрылған $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 7}}$ қатарын қарастырайық. Бұл қатар жинақты, себебі екінші салыстыру белгісі бойынша 286-мысалда көрсетілгендей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $(p = 3/2)$ қатарымен салыстырайық, онда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3 + 7}} : \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3 + 7}} = 1 \ne 0.$$

Олай болса, берілген қатар абсолют жинақты болып табылады.

346. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$ қатарының абсолютті немесе шартты жинақтығын зерттеу керек.

Шешуі. Лейбниц белгісін қолданайық:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Олай болса, қатар жинақты.

Енді мүшелерінің абсолют мәні арқылы алынған $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ қатарын қарастырайық. Бұл қатар гармоникалық қатар, ал ол жинақсыз болғандықтан берілген қатар шартты жинақты болады.

Ауыспалы таңбалы қатардың жинақтылығын зерттеу керек. Жинақты болған жағдайда, оның абсолютті немесе шартты жинақты болатындығын зерттеу керек.

347. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+...;$ Жауабы: Шартты жинақты.

348. $1-1+1-...+(-1)^{n+1}+...;$ Жауабы:Жинақсыз.

349. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}+...;$ Жауабы:Шартты жинақты.

350. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n-1}}+...;$ Жауабы:Абсолют жинақты.

351. $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}+...;$ Жауабы: Абсолют жинақты.

352. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}+...;$ Жауабы:Шартты жинақты.

353. $\frac{1}{3}-\frac{4}{9}+\frac{9}{19}-...+(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2n^2+1}+...;$ Жауабы:Жинақсыз.

354. $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-...+(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}+...;$ Жауабы: Шартты жинақты.

355. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n\cdot 5^{n+1}};$ Жауабы:Абсолют жинақты.

356. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+8n+4};$ Жауабы:Шартты жинақты.

357. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^5+4};$ Жауабы: Абсолют жинақты.

358. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{n^2\sqrt{n}}.$ Жауабы: Абсолют жинақты.

Берілген қатарларды $\alpha=0{,}001$ дәлдікпен есептеу керек.

359. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!};$ Жауабы: 0,632.

360. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!};$ Жауабы: 0,841.

361. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!};$ Жауабы: 0,459.

362. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\cdot 2^n}.$ Жауабы: 0,645.

2.3 Функциялық қатарлар

Функциялық қатарлар. Мүшелері нақты x айнымалысының функциясы болатын

$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$

қатарын *функциялық қатар* дейді.

$u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ функциялары анықталған және $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатары жинақты болатын x айнымалының мәндер жиыны функциялық қатардың *жинақталу облысы* делінеді. Функциялық қатардың жинақталу облысы Ox осінің қандай да бір аралығы болады.

Алғашқы n мүшелерінің қосындысы $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$ болса, онда $S(x)=S_n(x)+R_n(x)$. Мұндағы $R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...$ берілген қатардың мүшелерінің *қалдығы* деп аталады.

Дәрежелік қатарлар. $a_0+a_1(x-a)+a^2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n+...$ түрінде берілген функциялық қатар *дәрежелік қатар* деп аталады. Мұндағы $a, a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ - нақты сандар.

А б е л ь т е о р е м а с ы. 1. Егер дәрежелік қатар $x=x_0$ болғанда жинақты болса, онда $|x|<|x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x үшін де қатар жинақты болады.

2. Егер дәрежелік қатар $x=x_1$ болғанда жинақсыз болса, онда $|x|>|x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x үшін де қатар жинақсыз болады.

Абель теоремасынан мынадай тұжырым жасауға болады: Кез келген дәрежелік қатардың жинақты облысы ретінде $a-R<x<a+R$ интервалы алынады. Мұндағы R-*жинақты радиусы*, ал $(a-R,\ a+R)$ *жинақты интервалы* деп аталады.

$x=a\pm R$ нүктелерінде қатардың жинақтылығын тексеру үшін дәрежелік қатарға $x=a\pm R$ мәндерін қойғанда пайда болатын сандық қатардың тексеру жеткілікті.

Егер $R=0$ болса, онда дәрежелік қатар тек $x=a$ нүктесінде жинақты болады.

Егер $R=\infty$ болса, онда дәрежелік қатар x-тің кез келген мәнінде жинақты болады.

Дәрежелік қатардың жинақты радиусы

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ немесе } R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$$

формулаларымен есептеледі.

Жинақты интервалында дәрежелік қатарды кез келген рет мүшелеп дифференциалдауға және интегралдауға болады.

363. $1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+...+\frac{1}{n^x}+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $x>1$ болса, онда қатар жинақты, ал $x\le 1$ болса,онда қатар жинақсыз болады (Дирихле қатарын қараңыз).

364. $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2+x^4}+\frac{1}{2+x^6}+...+\frac{1}{n+x^{2n}}+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+x^{2n}}=0$ қажетті белгісі орындалады. $|x|\le 1$ болсын. Жалпы мүшесі $v_n=\frac{1}{n}$ болатын гармоникалық (жинақсыз) қатарын қарастырсақ, онда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+x^{2n}}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x^{2n}}=1.$$

Олай болса, екінші салыстырмалы белгі бойынша берілген қатар жинақсыз.

Егер $|x|>1$ болса, енді берілген қатардың мүшелері шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+...+\frac{1}{x^{2n}}+...$$

мүшелерінен кіші болады, яғни берілген қатар жинақты. Сонымен қатар, $|x|>1$ болғанда жинақты, ал $|x|\le 1$ болса, жинақсыз болады.

365. $3x+\frac{3^2}{\sqrt{3}}x^2+\frac{3^3}{\sqrt{3}}+x^3+\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^n+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $a_n=\frac{3^n}{\sqrt{n}};a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}};\ R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{\sqrt{n}}:\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n}}=\frac{1}{3};$

яғни $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ жинақты облысы болады. Енді интервалдың шекаралық нүктелерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

$x=\frac{1}{3}$ болса, онда $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ қатар жинақсыз (Дирхле қатары).

$x=-\frac{1}{3}$ болса, онда $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ қатар жинақты, себебі

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0 \text{ және } 1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>...$$

Лейбниц белгісі орындалады.

366. $\frac{1}{1\cdot 2}x+\frac{1}{2\cdot 3}x^2+...+\frac{1}{n(n+1)}x^n+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі.

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)};a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)};\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n(n+1)}:\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=1;$$

жинақты облысы $(-1;1)$ болады. Енді интервалдың шекараларының нүктелерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

$x=1$ болсын. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$ қатарын тексерейік. Қажетті белгісі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0,$ ал жеткілікті белгісі бойынша

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)}=\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\lim_{N\to\infty}\left[\ln x-\ln(x+1)\right]_1^N=\lim_{N\to\infty}\ln\frac{x}{x+1}\Bigg|_1^N=\lim_{N\to\infty}\ln\frac{N}{N+1}-\ln\frac{1}{2}=\ln 2,$$

олай болса, қатар жинақты.

Енді $x=-1$ мәнінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-...+(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}+...\ .$$

Бұл қатар жинақты, себебі мүшелерінің абсолют мәндері бойынша алынған қатар жинақты. Олай болса, жауабы: $-1\le x\le 1$.

367. $1+x+(2x)^2+...+(nx)^n+...$ қатарының жинақты облысын анықтау керек.

Шешуі. $a_n=n^n$; $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$ олай болса, қатар тек $x=0$ мәнінде ғана жинақты.

368. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ қатарының жинақты облысын анықтау керек.

Шешуі. $a_n=\frac{1}{n!}$; $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$; $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty;$ олай болса, қатар x-тің кез келген мәнінде жинақты, яғни $-\infty<x<+\infty$.

369. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{n^2\cdot 5^n}$ қатарының жинақты облысын анықтау керек.

Шешуі. $a_n=\frac{2^n}{n^2\cdot 5^n}$; $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2\cdot 5^n}}}=\frac{5}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\frac{5}{2};$ жинақты облысы $\left(-\frac{5}{2};\ \frac{5}{2}\right)$ болады. Енді интервалды шекараларының мәндерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

$x=\frac{5}{2}$ болсын. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қатарын қарастырайық. Бұл қатар жинақты (Дирихле қатары, $p=2$).

$x=-\frac{5}{2}$ болсын. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ қатары абсолют жинақты болады, себебі мүшелерінің абсолют мәндері бойынша алынған қатар жинақты. Олай болса, жауабы: $-\frac{5}{2}\le x\le\frac{5}{2}$.

370. $1+\frac{x}{7}+\frac{x^2}{7^2}+...+\frac{x^n}{7^n}+...$ қатарының жинақты облысын анықтау керек.

Шешуі. $a_n=\frac{1}{7^n}; R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n}=7;$ жинақты облысы $(-7;7)$ болады. $x=7$ болғанда $1+1+1+1+...$ қатар, ал $x=-7$ болғанда $-1+1-1+...$ қатар жинақсыз болады.

Сондықтан жауабы $-7<x<7$.

371. $\frac{x-5}{1\cdot 8}+\frac{(x-5)^2}{2\cdot 8^2}+...+\frac{(x-5)^n}{n\cdot 8^n}+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $a_n=\frac{1}{n\cdot 8^n}; R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=8;$ олай болса, $-8<x-5<8$ немесе $3<x<13;$ $x=13$ болғанда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ қатары жинақсыз болады.

$x=3$ болғанда $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+(-1)^n\frac{1}{n}+...$ қатары жинақты болады. Себебі Лейбниц белгісі бойынша $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{0}=0,\ 1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...>\frac{1}{n}>...$.

Олай болса, $3\le x<13$.

372. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^{3n}}{(n+1)\cdot 8^n}$. қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $a_n=\frac{n}{(n+1)\cdot 8^n};$ $R=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3n]{a^n}}=2;$ олай болса, $-2<x<2;$ $x=2$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ қатары жинақсыз, себебі $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\ne 0;$ $x=-2$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{n}{n+1}$ қатары да жинақсыз.

Сондықтан, жауабы: $-2<x<2$.

373. $\frac{1}{3}+\frac{2x}{3^2}+\frac{3x^2}{3^3}+...+\frac{nx^{n-1}}{3^n}+...;\ |x|<3$ қатарының қосындысын $1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{3^3}+...+\frac{x^n}{3^n}+...$ қатарының мүшелерін дифференциалдау арқылы табу керек.

Шешуі. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласын $\left(S=\dfrac{a}{1-q}\right)$ қолдансақ, онда $1+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{x^3}{3^3}+\ldots+\dfrac{x^n}{3^n}+\ldots=\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}=\dfrac{3}{3-x}.$

Енді дифференциалдасақ, онда $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2x}{3^2}+\dfrac{3x^2}{3^3}+\ldots+\dfrac{nx^{n-1}}{3^n}+\ldots=\dfrac{3}{(3-x)^2}$ болады.

374. $x+\dfrac{x^2}{2\cdot 2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 2}+\dfrac{x^4}{4\cdot 2^3}+\ldots+\dfrac{x^{n+1}}{n\cdot 2^n}+\ldots\quad (|x|<2)$ қатарының қосындысын табу керек.

Шешуі. Берілген қатарды дифференциалдағанда пайда болған қатар шексіз геометриялық прогрессия болғандықтан, $1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{x^3}{2^3}+\ldots+\dfrac{x^n}{2^n}+\ldots=$

$=\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}=\dfrac{2}{2-x}$ болады. Мұндағы $a=1,\ q=\dfrac{x}{2}.$ Енді О-ден x аралығында интегралдасақ, онда

$$x+\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^4}{4\cdot 2}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n\cdot 2^n}+\ldots=2\int_0^x\frac{dx}{2-x}=2\ln\left|\frac{2}{2-x}\right|.$$

Функциялық қатарлардың жинақты облысын табу керек.

375. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^x};$ Жауабы: $x>1$ абс.жинақты, $x\le 1$ жинақсыз.

376. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\dfrac{x}{4^n};$ Жауабы: $-\infty<x<\infty$.

377. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!x^n};$ Жауабы: $x\ne 0.$

378. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\left(x^2+1\right)^n};$ Жауабы: $-\infty<x<+\infty.$

379. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)x^n};$ Жауабы: $x>1,\quad x\le -1.$

380. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+x^n};$ Жауабы: $x<-1,\quad x>1.$

381. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n tg\,\dfrac{x}{3^n};$ Жауабы: $-\infty<x<+\infty.$

382. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin\left(\dfrac{x}{5^n}\right).$ Жауабы: (-5; 5).

Дәрежелік қатардың жинақты облысын табу керек.

383. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$; Жауабы: (-3; 3).

384. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 4^n}$; Жауабы: $[-4;4]$.

385. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 5^n}$; Жауабы: $[-5;5]$.

386. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot x^n$; Жауабы: $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

387. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$; Жауабы: $(-\infty;\infty)$.

388. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$; Жауабы: $(-2;2]$.

389. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{7}\right)^n$; Жауабы: $(-7;7)$.

390. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot x^n$; Жауабы: $x=0$.

391. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^n}$; Жауабы: $(-e;e)$.

392. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$; Жауабы: $(-3;3)$.

393. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{3^n}$; Жауабы: $(-\infty;\infty)$.

394. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{4^n(n+1)}$; Жауабы: $\left[-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

395. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{n^n}$; Жауабы: $(-\infty;+\infty)$.

396. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{3^n}$; Жауабы: $x=0$.

397. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{2^n-1}$; Жауабы: $[3;5)$.

398. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{5^n}$; Жауабы: $(-3;7)$.

399. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2\cdot 5^n}$; Жауабы: $[-6;4]$.

400. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+3)^n}{4^n}$; Жауабы: $(-3,5;0,5)$.

401. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2\cdot 2^n}$; Жауабы: $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

402. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n}}{n\cdot 9^n}$; Жауабы: $[2;8)$.

403. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{\sqrt{n}\cdot 4^n}$; Жауабы: $[-2;2)$.

404. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{3n}}{27^n}$; Жауабы: $(-5;1)$.

405. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; Жауабы: $(-\infty;\infty)$.

406. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}-1}{(2n-1)!}$. Жауабы: $(-\infty;+\infty)$.

Берілген қатарлардың қосындысын табу керек:

407. $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}+...,\ (|x|<1)$; Жауабы: $\frac{1}{(1-x)^2}$.

408. $\frac{1}{2}+\frac{2x}{2^2}+\frac{3x^2}{2^3}+...+\frac{nx^{n-1}}{2^n}+...,\ (|x|<2)$; Жауабы: $\frac{2}{2-x}$.

409. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...,\ (|x|<1)$; Жауабы: $-\ln(1-x)$.

410. $x+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 3^2}+\frac{x^4}{4\cdot 3^3}.+..+\frac{x^{n+1}}{n\cdot 3^n}+...,\ (|x|<3)$; Жауабы: $3\ln\left|\frac{3}{3-x}\right|$.

411. $\frac{1\cdot 2}{4^2}+\frac{2\cdot 3}{4^3}x+\frac{3\cdot 4}{4^4}x^2+...+\frac{n(n+1)}{4^{n+1}}x^{n-1}+...,\ (|x|<4)$; Жауабы: $\frac{8}{(4-x)^2}$.

412. $-2x+4x^3-6x^5+...+(-1)^n 2nx^{2n-1}+...,\ (|x|<1)$. Жауабы: $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

2.4 Мүшелері комплекс сандар болатын қатарлар

Жалпы мүшесі $c_n=a_n+i\cdot b_n$, $(i^2=-1)$ болатын

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_n+i\cdot\sum_{i=1}^{\infty}b_n$$

қатар мүшелері нақты сандар болатын $\sum_{i=1}^{\infty}a_n$ және $\sum_{i=1}^{\infty}b_n$ қатарлар бір мезгілде жинақты болғанда ғана жинақты болады.

Егер мүшелері модулімен алынған

$$\sum_{i=1}^{\infty}|c_n|=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

қатар жинақты болса, онда берілген қатарды абсолютті жинақты қатар деп айтады.

Егер $z=x+iy$ комплекс айнымалды болса, онда

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + ... + c_n(z - z_0)^n + ...$$

$(c_n = a_n + ib_n, \quad z_0 = x_0 + iy_0)$ дəрежелік қатар үшін центрі $z = z_0$ нүктесі болатын $|z - z_0| < R$ дөңгелегі (жинақталу дөңгелегі) табылып, оның ішінде қатар абсолютті жинақты, ал сыртында жинақсыз болады.

Жинақталу дөңгелегін табу үшін мүшелері модулімен алынған қатарға Даламбер немесе Коши белгісін қолдану жеткілікті.

Қатардың жинақтылығын зерттеу керек. Жинақты болған жағдайда, оның абсолютті немесе шартты жинақты болатындығын зерттеу керек.

413. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + i}$ Жауабы: жинақсыз.

414. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$ Жауабы: абсолютті жинақты.

415. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+(2n-i))^2}$ Жауабы: абсолютті жинақты.

416. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ Жауабы: шартты жинақты.

Берілген қатардың жинақталу дөңгелегін табу керек:

417. $\sum_{i=1}^{\infty} i^n z^n$ Жауабы: $|z| < 1$

418. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n \cdot 3^n}$ Жауабы: $|z - 2i| < 3$

419. $\sum_{i=1}^{\infty} (1+ni)(z+i)^n$ Жауабы: $|z + i| < 1$

420. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(z-3i)^{2n}}{2^{2n}}$ Жауабы: $|z - 3i| < \sqrt{2}$

2.5 Тейлор жəне Маклорен қатарлары

Функцияны дəрежелік қатарға жіктеу. $f(x)$ функциясы $a - R < x < a + R$ аралығында анықталған жəне кез келген ретті туындылары бар болсын. Тейлор формуласы бойынша

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(x)}{1!}(x-a) + \frac{f'(x)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(x)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

мұндағы $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \ \ \xi = a + \theta(x-a), \ 0 < \theta < 1.$

Егер $n \to \infty, \ R_n(x) \to 0$ болса, онда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + ...$$

қатары *Тейлор қатары* деп аталады. $R_n(x)$ - Тейлор қатарының *қалдық мүшесі* дейді.

Егер $a = 0$ болса, онда Тейлор қатары *Маклорен қатары* деп аталады да

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + ...$$

түрінде жазылады.

Егер $f(x)$ функциясы $(a - R;\ a + R)$ аралығында анықталып, кез келген n үшін $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$ теңсіздігі орындалса (мұндағы М-оң тұрақты сан), онда осы функция Тейлор қатарына жіктеледі. Кейбір функциялардың Маклорен қатарына жіктелуін көрсетейік:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...,\qquad (-\infty < x < +\infty)$

2. $shx = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^n}{(2n+1)!} + ...,\qquad (-\infty < x < +\infty)$

3. $chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...,\qquad (-\infty < x < +\infty)$

4. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...,\quad (-\infty < x < +\infty)$

5. $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} + ...,\quad (-\infty < x < +\infty)$

6.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{\mathrm{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}}{\mathrm{n!}}\mathrm{x^n} + ...$$

Соңғы жіктеуде:

$m \geq 0$ болса, онда $-1 \leq x \leq 1$

$-1 < m < 0$ болса, онда $-1 < x \leq 1$

$m \leq -1$ болса, онда $-1 < x < 1.$

Дербес жағдайда:

а) $m = -1$ болса, онда $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ...;$

ә) $m = \frac{1}{2}$ болса,

онда $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + ... + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot ...\cdot 2n}.x^n + ..;$

б) $m = -\frac{1}{2}$ болса, онда

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + ... + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n}x^n + ...$$

7. $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...\qquad (-1 \leq x \leq 1).$

Жуықтап есептеулерде $e^x,\ shx,\ chx,\ \sin x,\ \cos x,\ (1+x)^{m},\ \ln(1+x),\ arctgx$ функциялардың Маклорен қатарларына жіктелуін пайдалану керек. Ал логаримді есептеу үшін кейбір жағдайларда

$$\ln(1+x) = \ln x + \; + 2\left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \frac{1}{5(2x+1)^5} + \ldots\right]$$

формуласын пайдаланған тиімді.

Екі айнымалды функциялар үшін Тейлор қатары. (a,b) нүктесінің аймағында екі айнымалды $f(x,y)$ функциясы анықталған және кез келген ретті туындылары бар болсын. Тейлор формуласы бойынша

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] +$$

.

$$+\frac{1}{3!}\left[f'''_{xxx}(a,b)(x-a)^3 + 3f'''_{xxy}(a,b)(x-a)^2(y-b) + 3f'''_{xyy}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + f'''_{yyy}(a,b)(y-b)^3\right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b) + R_n(x,y),$$

мұндағы

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f\left[a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)\right], \; (0<\theta<1).$$

Егер $n \to \infty$, $R_n(x) \to 0$ болса, онда

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] +$$

.

$$+\frac{1}{3!}\left[f'''_{xxx}(a,b)(x-a)^3 + 3f'''_{xxy}(a,b)(x-a)^2(y-b) + 3f'''_{xyy}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + f'''_{yyy}(a,b)(y-b)^3\right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b) + \ldots$$

қатары *Тейлор қатары* деп аталады. $R_n(x)$ - Тейлор қатарының *қалдық мүшесі* дейді.

Тейлор қатары дербес жағдайда, яғни $a=b=0$ болғанда Маклорен қатары деп аталады.

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y\right] + \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2\right] +$$

$$+\frac{1}{3!}\left[f'''_{xxx}(0,0)x^3 + 3f'''_{xxy}(0,0)x^2y + 3f'''_{xyy}(0,0)xy^2 + f'''_{yyy}(0,0)y^3\right] + \ldots + \frac{1}{n!}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(0,0) + \ldots$$

.

421. $f(x) = 5^x$ функциясын x дәрежесі бойынша жіктеу керек.

Шешуі. Берілген функцияның және оның туындыларының $x=0$ нүктесіндегі мәндерін табайық.

$$f(x) = 5^x \qquad f(0) = 5^0 = 1$$
$$f'(x) = 5^x \ln 5 \qquad f(0) = \ln 5$$
$$f''(x) = 5^x \ln^2 5 \qquad f''(0) = \ln^2 5$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$f^{(n)}(0) = 5^x \ln^n 5 \qquad f^{(n)}(0) = \ln^n 5.$$

Енді функцияны Маклорен қатарына жіктейік:

$$5^x = 1 + x\ln 5 + \frac{x^2 \ln^2 5}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 5}{3!} + \ldots + \frac{x^n \cdot \ln^n 5}{n!} + \ldots.$$

Бұл функцияны Маклорен қатарына жіктеу үшін белгілі e^x функциясының жіктелуін қолдану арқылы да табуға болады. Ол үшін х-ті $x \cdot \ln 5$ өрнегімен ауыстыру керек.

422. $f(x) = e^{-x^2}$ функциясының x дәрежесі бойынша жіктеу керек.

Шешуі. e^x функциясының жіктелуін пайдаланып, х-тің орнына $\left(-x^2\right)$ алсақ, онда $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$.

423. $f(x) = \cos^2 x$ функциясын х дәрежесі бойынша жіктеу керек.

Шешуі. $f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x;$ болғандықтан

$\cos 2x = 1 - \frac{2^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{2^4 \cdot x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ болады, осыдан

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 \cdot x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$$

424. $f(x) = \ln(1+x)$ функциясын Маклорен қатарына жіктеу керек.

Шешуі. $f(x) = \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$ теңдігін және $\frac{1}{1+õ}$ функциясының жіктелуін қолдансақ, онда $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots$.

Бұл қатар $(-1;1)$ аралығында жинақты болады.

425. $f(x) = \arcsin x$ функциясын Маклорен қатарына жіктеу керек.

Шешуі. $f(x) = \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ теңдігін және $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ функциясының жіктелуін қолданып, х-тің орнына $\left(-x^2\right)$-ті алмастырсақ, онда

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots.$$

426. $f(x)=\dfrac{5}{6-x-x^2}$ функциясын Маклорен қатарына жіктеу керек.

Шешуі. $6-x-x^2=(2-x)(3-x)$ болғандықтан $f(x)=\dfrac{5}{(2-x)(3-x)}=\dfrac{A}{2-x}+\dfrac{B}{3-x}.$

Мұндағы $A=1,\ B=-1.$ Сондықтан $\dfrac{1}{1+x}$ функциясының жіктелуін пайдалансақ:

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n},$$

$$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{3^n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n},$$

яғни $\dfrac{1}{6-x-x^2}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{1}{2^n}\right)\cdot x^n=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{6^n}.$

427. $f(x)=\sqrt{x}$ функциясын $(x-4)$ дәрежесі бойынша жіктеу керек.

Шешуі. $x-4=t$ деп алсақ, онда $f(t)=\sqrt{t+4}=2\sqrt{1+\dfrac{t}{4}}.$ Осы функцияға $\sqrt{1+x}$ функциясының жіктелуін қолдансақ,

$$\sqrt{t+4}=2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{4}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{t^2}{4^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{t^3}{4^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\cdot\frac{t^n}{4^n}+\ldots\right).$$

Осыдан

$$\sqrt{x}=2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{4\cdot4^2}+\frac{1\cdot3}{4\cdot6}\cdot\frac{(x-4)^3}{4^3}-\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\cdot\frac{(x-4)^n}{4^n}+\ldots\ .$$

428. е санын 0,0001 дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. e^x функциясының жіктелуін қолданамыз. Онда $x=1$ болғанда $e=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots$ болады. n санын $e\approx1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$ жуық мәнінің қатесі 0,0001 дәлдікпен аспайтындай етіп, таңдап алуымыз керек. $x=1$ болғандықтан $R_n<\dfrac{e^\theta}{(n+1)!}<\dfrac{3}{(n+1)!},$ мұндағы $0<\theta<1,\ e^\theta<3.$

Егер $n=5$ болса, онда $R_5<\dfrac{3}{6!}=\dfrac{1}{240}.$

Егер $n=6$ болса, онда $R_6<\dfrac{3}{7!}=\dfrac{1}{1680}<0{,}0001.$

яғни $e\approx1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{6!}=1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{120}+\dfrac{1}{720}=2{,}7183.$

429. $\sin18^0$ санын 0,0001 дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. $y=\sin x$ функциясының жіктелуін қолдансақ

$$\sin18^0=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^3+\frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^5-\ldots,$$

$$\frac{\pi}{10}=0{,}31416,\ \left(\frac{\pi}{10}\right)^3=0{,}03101,\ \left(\frac{\pi}{10}\right)^5=0{,}00306.$$

Бұл жағдайда екі мүшесін алу керек, себебі $\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3<0{,}0001,$ яғни $\sin 18^0\approx 0{,}31416-0{,}00517=0{,}30899\approx 0{,}3090.$

430. $3\sqrt{528}$ санын 0,0001 дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. 528 санына жақын бүтін санның кубы $8^3=512$ болып табылады, сондықтан 528 санын $528=512+16$ қосындысы түрінде жазуға болады. Олай болса,

$$3\sqrt{528}=\sqrt[3]{512+16}=8\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{32}}=$$

$$=8\cdot\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{32}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{32^2}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot\frac{1}{32^3}+\ldots\right]=$$

$$=8+\frac{1}{12}-\frac{1}{1152}+\frac{1}{66355{,}2}-\ldots .$$

Төртінші мүше 0,0001 санынан кіші болғандықтан алғашқы үш мүшелерінің қосындысын аламыз, сондықтан

$$\sqrt[5]{528}\approx 5+0{,}08333-0{,}00087=5{,}08246\approx 5{,}0825.$$

431. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}$ шегін табу керек.

Шешуі. $y=\sin x$ функциясының Маклорен қатарын қолдансақ, онда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots\right)=\frac{1}{6}.$$

432. $\int\limits_0^1 x\sin x^2dx$ интегралын 0,001 дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. $y=\sin x$ функциясының жіктелуін пайдалана отырып, $x\sin x^2=x^3-\frac{x^7}{3!}+\frac{x^{11}}{5!}-\frac{x^{15}}{7!}+\ldots$ қатарын аламыз. Осыдан

$$\int_0^1 x\sin x^2dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^8}{3!\cdot 8}+\frac{x^{12}}{5!\cdot 12}-\frac{x^{16}}{7!\cdot 16}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{1}{3!\cdot 8}+\frac{1}{5!\cdot 12}-\frac{1}{7!\cdot 16}+\ldots .$$

Үшінші мүшесі 0,001 санынан кіші болғандықтан, алғашқы екі мүшесін алсақ жеткілікті $\int\limits_0^1 x\sin x^2 dx \approx \frac{1}{4}-\frac{1}{48}=0{,}229.$

Келесі функцияларды x-тің дәрежесі бойынша қатарға жіктеу керек:

433. $f(x)=3^x;$ Жауабы: $1+x\ln 3+\frac{x^2\ln^2 3}{2!}+\ldots+\frac{x^n\ln^n 3}{n!}+\ldots, \quad (-\infty<x<+\infty)$.

434. $f(x)=e^{2x};$ Жауабы: $1+\frac{2x}{1!}+\frac{2^2x^2}{2!}+\ldots+\frac{2^n x^n 3}{n!}+\ldots, \quad (-\infty<x<+\infty)$.

435. $f(x)=e^{-x};$ Жауабы: $1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)\frac{x^n}{n!}+\ldots,$.

436. $f(x)=e^{x^2/2};$ Жауабы: $1+\frac{\tilde{o}^2}{2\cdot 1!}+\frac{\tilde{o}^4}{2^2\cdot 2!}+\frac{\tilde{o}^6}{2^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{\tilde{o}^{2\ddot{i}}}{2^{\ddot{i}}\cdot \ddot{i}\,!}+\ldots$

437. $f(x)=\sin^2 x;$ Жауабы: $\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}.$

438. $f(x)=\sqrt{x+4};$

Жауабы: $2\cdot\left(1+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{8^3\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3}{8^3\cdot 3!}x^3-\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{8^n\cdot n!}x^n+..\right).$

439. $f(x)=\frac{1}{1+x^2};$ Жауабы: $\sum\limits_0^\infty(-1)^{n\cdot x^{2n}}.$

440. $f(x)=\frac{1}{4+x^4};$ Жауабы: $\sum\limits_0^\infty\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}.$

441. $f(x)=\frac{e^x-1}{x};$ Жауабы: $\sum\limits_1^\infty\frac{x^{n-1}}{n!}.$

442. $f(x)=(1+x)\cdot\ln(1+x);$ Жауабы: $x+\sum\limits_2^\infty(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n}.$

443. $f(x)=\frac{9}{20-x-x^2};$ Жауабы: $\sum\limits_0^\infty\left(\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)\cdot x^4.$

444. $f(x)=\frac{7}{12-x-x^2}.$ Жауабы: $\sum\limits_0^\infty\left(\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)\cdot x^n.$

Келесі функцияларды $(x-a)$-ң дәрежесі бойынша қатарға жіктеу керек:

445. $f(x)=\ln x, \quad a=1;$ Жауабы: $\sum\limits_1^\infty(-1)^{n+1}\cdot\frac{(x-1)^n}{n}.$

446. $f(x)=e^x, \quad a=-2;$ Жауабы: $e^{-2}\cdot\sum\limits_1^\infty\frac{(x+2)^n}{п}.$

447. $f(x)=\frac{1}{x}, \quad a=2;$ Жауабы: $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\ldots.$

448. $f(x)=\frac{1}{x^2}, \quad a=-1;$ Жауабы: $\sum\limits_0^\infty(n+1)(x+1)^{2^n}\; -2<x<0.$

449. $f(x,y)=\frac{1}{x}$ функциясын $P(1;-1)$ нүктесінде дәрежесі төртінші ретті мүшесіне дейін жіктеу керек.

Жауабы:

$$f(x,y)=-1+(x-1)+(y+1)-(x-1)^2-(x-1)(y+1)+\frac{1}{3}(x-1)^2(y+1)+(x-1)^3+\dots\ .$$

450. $f(x,y)=\ell^y\cos x$ функциясын $P(0;0)$ нүктесінде дәрежесі төртінші ретті мүшесіне дейін жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y)=1+y+\frac{y^2-x^2}{2!}+\frac{y^3-3xy^2}{3!}+\dots\ .$

451. $f(x,y)=(1+y)^{1+x}$ функциясын $(0;0)$ нүктесінде дәрежесі төртінші ретті мүшесіне дейін жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y)=1+y+xy+\frac{1}{2}xy^2+\dots\ .$

452. $f(x,y)=ye^{-x}$ функциясын $(0;1)$ нүктесінде дәрежесі үшінші ретті мүшесіне дейін жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y)=1-x+(y-1)-x(y-1)+\frac{1}{2}x^2+\dots\ .$

Келесі функцияларды x пен y дәрежесі бойынша қатарға жіктеп, оның жинақталу облысын табу керек.

453. $f(x,y)=\sin x\cdot\sin y.$

Жауабы:

$$f(x,y)=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(x+y)^4-(x-y)^4}{2\cdot 4!}+$$
$$+\frac{(x+y)^6-(x-y)^6}{2\cdot 6!}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{(x+y)^{2n}-(x-y)^{2n}}{2\cdot(2n)!}$$
$$(-\infty<x<+\infty;\ -\infty<y<+\infty)$$

454. $f(x,y)=cos(x-y).$

Жауабы:

$$f(x,y)=1-\frac{(x-y)^2}{2!}+\frac{(x-y)^4}{4!}-+\frac{(x-y)^6}{6!}-\dots+(-1)^n\frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}$$
$$(-\infty<x<+\infty;\ -\infty<y<+\infty)$$

455. $f(x,y)=\sin(x^2+y^2).$

Жауабы:

$$f(x,y)=(x^2+y^2)-\frac{(x^2+y^2)^3}{3!}+\frac{(x^2+y^2)^5}{5!}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{(x^2+y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$
$$(-\infty<x<+\infty;\ -\infty<y<+\infty)$$

456. $f(x,y)=\sin(x+y)$ функциясын x пен $y-\frac{\pi}{2}$ дәрежесі бойынша қатарға жіктеу керек.

Жауабы:

$$f(x,y)=1-\frac{\left(x+y-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x+y-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{\left(x+y-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

Келесі сандарды 0,0001 дәлдікпен есептеу керек:

457. $\cos 18^0$; Жауабы: 0,9511.

458. $\sqrt{e}$; Жауабы:1,6487.

459. $arctg\, 0{,}2$; Жауабы:0,1973.

460. $\ln 2$; Жауабы:0,6931.

461. $\ln 5$; Жауабы:1,6094.

462. ℓ^{-1}; Жауабы:1,6487.

463. $\sqrt[4]{90}$; Жауабы:3,0801.

464. $\sqrt[3]{1{,}1}$; Жауабы: 5,0666.

465. $\frac{1}{\sqrt{e}}$; Жауабы: 0,6065.

466. $\ln 1{,}04$; Жауабы:0,0392.

467. х-тің қандай мәндерінде $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$ формуласы 0,01; ,001; 0,0001 сандарынан артық болмайтын қателіктер жібереді?

Жауабы: $|x|<0{,}69,\ \ |x|<0{,}39,\ \ |x|<0{,}22$.

468. х-тің қандай мәндерінде $\sin x\approx x$ формуласы 0,01; 0,001; 0,0001 сандарынан артық болмайтын қателіктер жібереді?

Жауабы: $|x|<0{,}39,\ \ |x|<0{,}18,\ \ |x|<0{,}08$.

Төмендегі шектерді Тейлор қатарының көмегімен есептеу керек.

469. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}$; Жауабы: $\frac{1}{3}$.

470. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ell^x-1-x}$; Жауабы: 1.

471. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-arctgx}{x^3}$; Жауабы: $\frac{1}{6}$.

472. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$. Жауабы: $\frac{1}{3}$.

Тейлор қатарының көмегімен төмендегі анықталған интегралдарды α дәлдіктермен есептеу керек.

473. $\int_0^1 e^{-x^2}dx, \quad \alpha = 0{,}0001;$ Жауабы: 0,7468.

474. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx, \quad \alpha = 0{,}00001;$ Жауабы: 0,4931.

475. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x}dx, \quad \alpha = 0{,}0001;$ Жауабы:0,487.

476. $\int_0^{0,5} \frac{\grave{a}rctgx}{x}dx, \quad \alpha = 0{,}001;$ Жауабы: 0,2483.

477. $\int_0^{0,25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx, \quad \alpha = 0{,}0001;$ Жауабы: 0,071.

478. $\int_0^{0,25} \sqrt{1+x^3}dx, \quad \alpha = 0{,}0001;$ Жауабы:0,2505.

479. $\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}dx, \quad \alpha = 0{,}001;$ Жауабы:0,102.

480. $\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}dx, \quad \alpha = 0{,}0001.$ Жауабы: 0,2483.

Тест сұрақтары

1. Шекті есептеңіз. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}} \frac{\sin(xy)}{5x}$

A) 1; B) 0; C) 5; D) –5; E) –1.

2. Шекті есептеңіз. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 3}} (1+\frac{y}{x})^x$

A) e; B) e^3; C) e^{-2}; D) 0; E) 1.

3. Есептеңіз $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{tg(xy)}{y}$

A) 1; B) 0; C) 3; D) –3; E) ∞.

4. Егер z =f (x,y) функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің маңайында анықталып, ал $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0, y_0)$ болса, онда бұл функция осы нүктеде қандай болады?

A) үзілісті; B) үзіліссіз; C) шектелген; D) дифференциалданатын; E) өспелі.

5. $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ функциясының анықталу облысын көрсететін теңсіздікті табу керек.

A) $x^2+y^2 \neq 2$; B) $x^2+y^2 >2$; C) $x^2+y^2 \leq 2$; D) $x^2+y^2 \geq 2$; E) $x^2+y^2 <2$

6. $z=x^4\cos y$ функциясының дербес туындыларын табу керек

A) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 cosy$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^4 \sin y$; B) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 \cos y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x^4 \sin y$;
C) $\frac{\partial z}{\partial x} = -4x^3 \sin y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3 \cos y$; D) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x \cos y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \sin y$;
E) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^5}{5} \cos y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^4 \sin y$.

7. $z=\ln(x^2-y^2)$ функциясының у бойынша дербес туындысын табу керек.

A) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 - 2y}$; B) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y}$; C) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2 - x^2}$; D) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y^2}$; E) $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2 - y^2}$.

8. $z = 3x^2 - 4xy$ функциясының $\frac{\partial z}{\partial x}$ туындысын M(1;1) нүктесінде есептеу керек.

A)6; B)2; C)5; D)0; E)8.

9. $u = x^2 y z + x - 4y + 2z - 12$ Табу керек: $\frac{\partial u}{\partial z} - ?$

A) 2xyz+1; B) x^2z-4; C) x^2y-2; D) x^2y+2; E) 2xyz-12.

10. $z=3x^2y^5$ функциясының толық дифференциалын табу керек

A) $dz = 6xy^5 dx + 15x^2 y^4 dy$; B) $dz = 6xdx + 15y^4 dy$; C) $dz = x^3 y^5 dx + \frac{x^2 y^6}{2} dy$;
D) $dz = 3x^2 dx + 3y^5 dy$; E) $dz = 6xy^4 dx + 15xy^4 dy$.

11. $z=e^{xy}$ функциясының толық дифференциалын табу керек

A) $dz = e^{xy} dx + e^{xy} dy$; B) $dz = xe^{xy} dx + ye^{xy} dy$; C) $dz = ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$;
D) $dz = xye^{y} dx + xye^{x} dy$; E) $dz = e^{y} dx + e^{x} dy$.

12. $z=y\ln 2x$ функциясының толық дифференциалын табу керек

A) $dz = \frac{y}{x} dx + \ln 2xdy$; B) $dz = \frac{dx}{x} + \ln 2xdy$; C) $dz = 2\ln 2xdx + dy$;

D) $dz = \frac{y}{2x}dx + \ln 2xdy$; E) $dz = \frac{dx}{x} + ydy$.

13. u=xyz функциясының толық дифференциалын табу керек

A) du=xzdx+xydy+yzdz; B) du=xydx+xzdy+yzdz; C) du=xdx+ydy+zdz;
D) du=yzdx+xzdy+xydz; E) du=yzdx+xydy+xydz.

14. $z=2x^2y+3xy^2+x^3$ функциясының y бойынша екінші дербес туындысын табу керек
A) 6x; B) 6y; C)3x; D) 2y; E)5x.

15. $z = x^3 - 2x^2y + 3y^2$ функциясының z''_{xx} дербес туындысын табу керек

A) $z''_{xx} = 3x^2 - 4xy$, B) $z''_{xx} = 6x - 4y$, C) $z''_{xx} = 6x$, D) $z''_{xx} = -4xy$, E) $z''_{xx} = 0$

16. z=cos(ax-by) функциясы берілген. Табу керек z''_{xy}

A) cosax; B)–sin(ax-by); C)–asin(ax-by); D)abcos(ax-by); E)bsin(ax-by).

17. $z = 2x^2y + xy^2$ функциясының A(1;1) нүктесіндегі градиентін табыңыз.

A) $2\vec{i} + \vec{j}$; B) $3\vec{i} - \vec{j}$; C) $5\vec{i} + 4\vec{j}$; D) $3\vec{i} - 2\vec{j}$; E) $2\vec{i} + 4\vec{j}$.

18. u =xy+yz +xz функциясының M(1;1;1) нүктесіндегі градиентін табыңыз.

A) $2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; B) $3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$; C) $5\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$; D) $2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$; E) $2\vec{i} + 4\vec{j}$

19. $z = x^3 + y^3$ функциясының (1;1) нүктесіндегі градиентін табыңыз.

A) $4\vec{i} + 2\vec{j}$; B) $2\vec{i} - \vec{j}$; C) $\vec{i} + 2\vec{j}$; D) $3\vec{i} - 2\vec{j}$; E) $3\vec{i} + 3\vec{j}$.

20. u = x y z функциясының (1,2,3) нүктедегі градиентін табу керек?

A) $6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$; B) $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$; C)1; D) $2\vec{k} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$; E) 0.
21. Егер $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ болса, онда қатар

A) Жинақсыз; B) Жинақты; C) абсолютті жинақты;
D) шексіз; E) шартты жинақты.
22. $a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$ қатарының алғашқы төрт мүшесін жазыңыз.

A) $-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{3}{8};\frac{1}{4}.$; B) $-\frac{1}{2};1;\frac{3}{8};\frac{1}{4}.$; C) 1;2;3;4.; D) $-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{8};-\frac{1}{4}.$; E) $\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{8};-\frac{1}{4}.$.

23. $\frac{1}{3}+(\frac{2}{5})^2+(\frac{3}{7})^3+...+(\frac{n}{2n+1})^n$ қатарын жинақтылыққа зерттеу керек
A) жинақсыз; B) жинақты; C) абсолютті жинақты; D) шексіз; E) шартты жинақты.

24. Коши белгісі бойынша $\frac{2}{1}+(\frac{3}{3})^2+(\frac{4}{5})^2+...+(\frac{n+1}{2n-1})^n+...$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

A) Жинақты; B) Жинақсыз; C шартты жинақты; D) абсолют жинақты; E) шексіз.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоникалық қатары

A) Жинақты; B) Жинақсыз; C) абсолют жинақты;
D) шартты жинақты; E) дұрыс жауабы жоқ;

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{n+1}$ қатарын жинақтылыққа зерттеу керек

A) шартты жинақталады; B) бірқалыпты жинақталады
C) абсолютті жинақталады; D) жинақталады; E) жинақталмайды.

27. Қатар жинақтылығының қажетті шарты

A) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$; B) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$; C) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 1$;
D) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \infty$; E) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\ell$, $\ell<1$ болғанда қатар жинақталады. Бұл қатар жинақтылығының ...

A.) Даламбер белгісі; B) Коши белгісі; C) Лейбниц белгісі;
D) Вейерштрасс белгісі; E) Интегралдық белгі.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\ell$, $\ell<1$ болғанда қатар жинақталады. Бұл-қатар жинақтылығының ...

A) Даламбер белгісі; B) Коши белгісі; C) Лейбниц белгісі;
D) Вейерштрасс белгісі; E) Интегралдық белгі.

30. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+...$ қатарының жалпы мүшесін табу керек

A) $\frac{1}{2n}$; B) $\frac{1}{2^n}$; C) $\frac{1}{2n-1}$; D) $\frac{1}{n}$; E) $\frac{1}{n!}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ қатарының U_5 мүшесін жазу керек

A) 1/110; B) 1/20; C) 1/120; D) 1/160; E) 1/170.

32. Егер таңбасы ауыспалы $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$, $a_n \geq 0$, қатарының мүшелері $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ...$ және $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ болса, онда берілген қатар жинақталады

Бұл –

A) Даламбер белгісі; B) Коши белгісі; C) Лейбниц белгісі;
D) Вейерштрасс белгісі; E) Интегралдық белгі.

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$ дәрежелік қатарының жинақталу интервалын табу керек.

A) $[-2;2)$; B) $[0:1)$; C) $[-1:1]$; D) (0;1); E) (1; 2).

34. $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...$ дәрежелік қатары қандай функция үшін Тейлор қатары болады?

A) Sin x; B) cos x; C) sh x; D) ch x; E) e^x.

35. $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+...$ дәрежелік қатары қандай функция үшін Тейлор қатары болады?

A) Sin x; B) cos x; C) sh x; D) ch x; E) e^x.

36 $f(x)=$ cosx функциясын Маклорен қатарына жіктеу керек.

A) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$; B) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...$; C) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$;
D) $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...$; E) $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+...$

37. Оң мүшелі $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ қатарларының мүшелері $a_n \leq b_n$ шартын қанағаттандырады. Егер $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ қатары жинақталса,онда...;

A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақталады; B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақталмайды;

C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ шартты жинақталады; D) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ бірқалыпты жинақталады;

E) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютті жинақталады.

38. $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + ...$ қатары жинақталады, егер**:**

A) $|q| \geq 1$; B) $|q| < 1$; C) $|q| = 1$; D) $|q| > 1$; E) $q = \infty$.

39. f(x) = e^{-x} функциясын x- тің дәрежесі бойынша қатарға жіктеу керек.

A) x - $\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$; B) $\frac{x^2}{1!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + ...$

C) 1-x + $\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...$; D) $x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + ...$

E) $1 + \frac{1}{x} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + ...$

40. $\frac{3x+1}{x^2+x+1} + (\frac{3x+1}{x^2+x+1})^2 + ... + (\frac{3x+1}{x^2+x+1})^n + ... +$ функционалдық қатары x=3 нүктеде жинақтала ма?

A) Жинақты; B) Жинақсыз; C) Абсолют жинақты;
D) Шартты жинақты; E) Бірқалыпты жинақталады.

Жауаптары

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	C	A	C	A	E	B	D	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	D	A	B	D	C	D	E	A
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	A	B	A	B	E	B	A	B	C
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	C	A	E	A	D	E	B	C	A

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Берман Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа. – Москва: Наука, 1985.-384 с.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М., Наука, 1980.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть1,2. - М., Высшая школа, 1998.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнении по математическому анализу. - М., Наука, 1985.

5. Пискунов Н. С. Дифференциальные и интегральные исчисления. Часть I, II. - 1972.

6. Сборник индивидуальных задании по высшей математике. Под ред. Рябушка А. П. - Минск, 2001.

7. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – Москва: Наука, 1996.-736 с.

МАЗМҰНЫ

Жоспар 2011 ж., реті.

Мұрат Шәпенұлы Тілепиев,
Элеонора Ұзақбайқызы Уразмағамбетова,

**МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУДАН
ЕСЕПТЕР ЖИНАҒЫ**
3-бөлім

Оқу құралы

Пішімі 60x84 1/12
Көлемі 79 бет 5,9 шартты баспа табағы
Таралымы 20 дана.
Ш.Есенов атындағы КМТжИУ
Редакциялық - баспа бөлімінде басылды.
Ақтау қаласы, 32 ш/а.