УДК 517.958

ДИСКРЕТНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ 2-ОЙ И 3-ЕЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кулжагарова Б.Т.

Бұл жұмыста оң коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулердің 2-ші және 3-ші шекаралық есептерін сандық әдіспен шешу жолының жаңа түрі келтірілген. Бұл жаңа әдіс дискреттік жіктеу әдісі деп аталынған.

In the given work the new way of solving the second order linear differential equation's second and third regional problems by using the numerical method is offered. This new method is called method of discrete factorization.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dt}(k(t)\frac{dy}{dt})-q(t)y(t)=f(t),0\le t\le 1, \tag{1}$$

со следующими краевыми условиями:

$$k(0)y'(0)-\alpha_0 y(0)=\beta_0, \tag{2}$$

$$k(1)y'(1)-\alpha_1 y(1)=\beta_1, \tag{3}$$

где $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1$ - действительные числа.

Уравнение (1) моделирует одномерное стационарное состояние теплопроводности, а также одномерное состояние диффузии. Такого сорта задачи имеют важные приложения во многих физических задачах.

Уравнение (1) описывает установившееся распределение температуры $y(t)$ в теплопроводящем стержне. В этом случае $k(t)$ - коэффициент теплопроводности, $k(t)\frac{dy}{dt}$ - плотность потока тепла, $q(t)$ - коэффициент теплоотдачи.

Уравнение (1) также описывает установившееся распределение плотности нейтронов в реакторе. В такой трактовке $y(t)$ - полный поток нейтронов, $k(t)$-коэффициент диффузии, $q(t)$- сечения поглощения, $f(t)$– плотность источников нейтронов. Также уравнение (1) описывает и стационарные процессы диффузии газов (растворов) в пористых средах. Поэтому уравнение (1) часто называют одномерным уравнением диффузии.

Для исследования вопросов численного решения данной краевой задачи разобьем отрезок $[0;1]$ на N равных частей и введем ряд обозначений:

$$h=\frac{1}{N},\ t_n=\frac{n}{N},\ y(t_n)=y_n,\ k(t_n)=k_n,\ q(t_n)=q_n,\ \ f(t_n)=f_n,$$

$$n=0,1,...N,\ \text{где}\ t_0=0,\ t_N=1.$$

Выведем рекуррентные формулы для решения краевой задачи (1)-(3) до второго порядка точности, в случае положительной $q(t)$. Ранее полученные рекуррентные формулы первого порядка точности опубликованы в работах [1]-[2].

Разложим функцию $g(t)$ по формуле Тейлора до 3-го порядка включительно, т.е.

$$g(t)=1+a_n\int_{t_{n-1}}^{t}\frac{dx}{k(x)}+\int_{t_{n-1}}^{t}\frac{1}{k(\tau)}\left[\int_{t_n}^{t}q(x)dx\right]d\tau+O(t-t_{n-1})^3 .$$

Продифференцировав выражение для $g(t)$, получим:

$$k(t)g'(t)=a_n\int^{t}q(x)g(x)dx.$$

Снова разложив это выражение до порядка $O(h^3)$, имеем:

$$k(t)g'(t)=a_n+\int_{t_n}^{t}q(x)\left[1+a_n\int_{t_{n-1}}^{t}\frac{d\tau}{k(\tau)}\right]dx+O(t-t_{n-1})^3.$$

Следовательно,

$$g_n=1+l_na_n+l_n\mu_n+O(h^3),$$

$$k_ng'_n=a_n+\mu_n+a_nl_n\mu_n+O(h^3)=a_n(1+l_n\mu_n)+\mu_n+O(h^3)$$

$$k_{n-1}g'_{n-1}=a_n .$$

Используем эти значения в следующей цепочке равенств:

$$\left[k_ny'_n-\frac{g'_n}{g_n}k_ny_n\right]-\frac{g_{n-1}}{g_n}\left[k_{n-1}y'_{n-1}-\frac{g'_{n-1}}{g_{n-1}}k_{n-1}y_{n-1}\right]=\frac{-\int_{t_{n-1}}^{t_n}f(t)g(t)}{g_n}$$

$$\left[k_ny'_n-\frac{a_n(1+l_n\mu_n)+\mu_n}{1+l_n\mu_n+l_na_n}y_n\right]-\frac{1}{1+l_n\mu_n+l_na_n}\left[k_{n-1}y'_{n-1}-a_ny_{n-1}\right]=\frac{\delta_n(1+a_nl_n)}{1+l_n\mu_n+l_na_n}+O(h^3).$$

Потребуем выполнения рекуррентных равенств:

$$a_n=\frac{a_{n-1}(1+l_n\mu_n)+\mu_n}{1+l_n\mu_n+l_na_{n-1}}$$

для любого $n=1,2,...,N$. Тогда, предыдущее равенство можем записать иначе:

$$\left[k_ny'_n-\frac{a_n(1+l_n\mu_n)+\mu_n}{1+l_n\mu_n+l_na_n}y_n\right]-\frac{1}{1+l_n\mu_n+l_na_n}\times$$

$$\times\left[k_{n-1}y'_{n-1}-\frac{a_{n-1}(1+l_n\mu_n)+\mu_n}{1+l_n\mu_n+l_na_n}y_{n-1}\right]=\frac{\delta_n(1+a_nl_n)}{1+l_n\mu_n+l_na_n}+O(h^3).$$

Обозначим выражение для "потока" через:

$$-k_n y'_n - \frac{a_n(1+l_n\mu_n)+\mu_n}{1+l_n\mu_n+l_n a_n} y_n = v_n,$$

и получим следующую рекуррентную формулу:

$$v_n = \frac{v_{n-1}+\delta_n(1+a_n l_n)}{1+l_n\mu_n+l_n a_n} + O(h^3).$$

По формуле Тейлора, разложение функции $y(t)$ в точке t_{n-1} имеет вид:

$$y_{n-1} = y_n - hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n = y_n - hy'_n + \frac{h^2}{2}(q_n y_n - f_n) + O(h^3).$$

Разрешив его относительно y'_n, имеем:

$$y'_n = \frac{y_n(1+\frac{h^2}{2}q) - y_{n-1} - \frac{h^2}{2}f_n}{h} + O(h^2).$$

Подставляя в выражение для "потока" получим:

$$\frac{k_n y_n\left(1+\frac{h^2}{2}q_n\right) - k_n y_{n-1} - \frac{h^2}{2}f_n k_n}{h} - \frac{a_n(1+l_n\mu_n)+\mu_n}{1+l_n\mu_n+l_n a_n} y_n = v_n + O(h^2),$$

или:

$$k_n y_n\left(1+\frac{h^2}{2}q_n + l_n\mu_n + l_n a_n\right) - k_n(1+l_n\mu_n+l_n a_n)y_{n-1} - k_n\frac{h^2}{2}f_n -$$

$$-h(a_n+\mu_n)y_n = h(1+l_n a_n)v_n + O(h^3).$$

Отсюда находим явное выражение для

$$y_{n-1} = \frac{y_n\left[k_n(1+\frac{h^2}{2}q_n + l_n\mu_n + l_n a_n) - ha_n - h\mu_n\right] - h(1+l_n a_n)v_n - \frac{h^2}{2}k_n f_n}{k_n(1+l_n\mu_n+l_n a_n)} + O(h^3).$$

Упростив последнее, имеем:

$$y_{n-1} = \left(1 - \frac{ha_n + h\mu_n - \frac{h^2}{2}q_n k_n}{k_n(1+l_n\mu_n+l_n a_n)}\right) y_n - \frac{h(1+l_n a_n)v_n + \frac{h^2}{2}k_n f_n}{k_n(1+l_n\mu_n+l_n a_n)} + O(h^3).$$

Отбрасывая все члены порядка $O(h^3)$, соберем алгоритм в компактную схему:

Формулы прямой прогонки:

$$a_n = \frac{a_{n-1}(1+l_n\mu_n)}{1+l_n\mu_n + l_n a_{n-1}}, \quad a_0 = \alpha_0, \quad n = 1,\dots, N,$$

$$v_n = \frac{v_{n-1} + \delta_n(1+a_n l_n)}{1+l_n\mu_n + l_n a_n}, \quad v_0 = \beta_0, \quad n = 1,\dots, N.$$

Формулы обратной прогонки:

$$y_{n-1} = \left(1 - \frac{ha_n + h\mu_n - \frac{h^2}{2}q_n k_n}{k_n(1+l_n\mu_n + l_n a_n)}\right) y_n - \frac{h(1+a_n\mu_n)v_n + \frac{h^2}{2}k_n f_n}{k_n(1+l_n\mu_n + l_n a_n)}, \; n = N, N-1,\dots,1$$

$$y_N = \frac{v_N - \beta_1}{\alpha_1 - a_N}, \; \alpha_1 \neq a_N.$$

Для вычисления потока:

$$k_n y'_n = v_n + \frac{a_n(1+l_n\mu_n) + \mu_n}{1+l_n\mu_n + l_n a_n} y_n = v_n,$$

где $\mu_n = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} q(t)dt \geq 0, \quad l_n = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{dt}{k(t)}, \; \delta_n = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt.$

Теперь проверим, что полученные рекуррентные формулы в действительности аппроксимируют исходную краевую задачу. Из выражения для a_n формул прямой прогонки имеем:

$$a_n - a_{n-1} + a_n l_n \mu_n + a_n a_{n-1}\mu_n = a_{n-1} l_n \mu_n + l_n.$$

Поделив обе части этого равенства на h получим:

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{h} + \frac{l_n\mu_n}{h}\left(a_n - a_{n-1}\right) + \frac{\mu_n}{h} a_n a_{n-1} = \frac{l_n}{h}.$$

Переходим к пределу при $h \to 0$ и получим уравнение

$$a'(t) + q(t)a^2(t) = \frac{1}{k(t)}.$$

Аналогично из формулы для v_n имеем:

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{h} + \frac{\mu_n}{h} v_n b_n + \frac{l_n}{h} v_n a_n = -\frac{\delta_n}{h} + \frac{\delta_n}{h} l_n a_n.$$

В пределе при $h \to 0$ получится дифференциальное уравнение:

$$v' + \frac{1}{k(t)} a(t) v(t) = -f(t).$$

А из формулы обратной прогонки и для вычисления потока, в пределе при $h \to 0$ получим уравнение

$$k(t) y'(t) - a(t) y(t) = v(t).$$

Эквивалентность системы из последних полученных трех уравнений и исходной краевой задачи было показано ранее в работе [3].

Теперь убедимся в том, что счет по формулам прямой прогонки есть устойчивый численный процесс при:

$$\alpha_0 \geq 0 \quad .$$

Действительно, при $\alpha_0 \geq 0$ коэффициент при a_{n-1}, v_{n-1} удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 < \frac{1}{1 + l_n \mu_n + l_n a_{n-1}} < 1 \ \text{ для всех } \ n = 1....N,$$

то есть формулы прямой прогонки являются устойчивыми, если $\alpha_0 \geq 0$.

Формула обратной прогонки устойчива для счета, если

$$\left| 1 - \frac{h a_n + h \mu_n - \frac{h^2}{2} q_n k_n}{k_n (1 + l_n \mu_n + l_n a_n)} \right| < 1 \ \text{ для всех } \ n = 1.....N$$

или должно выполняться следующее двойное неравенство:

$$0 \leq \frac{h a_n + h \mu_n - \frac{h^2}{2} q_n k_n}{k_n (1 + l_n \mu_n + l_n a_n)} \leq 2.$$

Такое неравенство выполняется, по крайней мере, для $k_0 < k_n \leq 2$ и для всех $\mu_n \geq 0$.

Литература:

1 Утемаганбетов З.С., Кулжагарова Б.Т. О методе дискретной факторизации для решения 2-ой и 3-ей краевой задачи для одномерного уравнения диффузий // Вестник КазГУ. Серия мат-ка, мех-ка, инф-ка. - 2000. - №1(20). - С.135-143.

2 Утемаганбетов З.С., Кулжагарова Б.Т. О методе дискретной факторизации для 3-ей краевой задачи одномерного уравнения диффузии // Мат-лы 2-ой международной научно-технической конф. «Проблемы и перспективы развития нефтегазовой отрасли Казахстана в 21 веке». - Актау, 2001. - С.312-313.

3 Кулжагарова Б.Т. Методы простой факторизации и устранения неустойчивости // Вестник КазГУ. Серия мат-ка, мех-ка, инф-ка. - 1999. - №3(17). - С.117-122.