ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш. ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ
ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР ИНСТИТУТ

«ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМИ МАМАНДЫҚТАР» КАФЕДРАСЫ

КУЛИМАНОВА М.Р.

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІҢ ӘДІСТЕМЕЛІК НЕГІЗДЕРІ

Ақтау 2010

ӘОЖ 517(075)

М.Р. Кулиманова Математикалық есептерді шешудің әдістемелік негіздері / Әдістемелік нұсқау – Ақтау: ҚазМТжИУ, 2010. – 47 бет.

Пікір жазған: ф-м.ғ кандидаты, доцент Э.У. Уразмагамбетова

Әдістемелік нұсқау математика мамандықтарында оқитын жоғары оқу орындары студенттеріне арналып жазылған.

Әдістемелік нұсқауда математиканы оқыту әдістемесі мен негізгі математика курстарының негізгі бөлімдері қамтылған және студенттердің өз білімдерін тексеруге арналған тапсырмалар берілген.

Ұсынылып отырған әдістемелік нұсқауда алгебра, аналитикалық геометрия, математикалық талдау материалдары қамтылған.

Баспаға Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг универститетінің оқу әдістемелік кеңесінің шешімімен ұсынылған.

КІРІСПЕ

Бүгінгі таңда ғылым мен техниканың, ЭЕМ – нің қаркынды дамуына зор үлес косатын болашақ математика мамандарын дайындауда «Математикалық есептерді шешу практикумы» пәнінің маңызы зор. Бұл пән математиканы оқыту әдістемесі мен негізгі математика курстарын байланыстырушы пән. Пәннің негізгі мақсаты мектеп математика курсы бойынша алған білімдерін кеңейтіп, тереңдетіп, студенттердің математикадан есептер шығаруда икемділігін, машығын, білімі мен біліктілігін қалыптастыру.

Математика мамандықтары студенттерінің жалпы математикалық дайындығын қамтамасыз етуде «Есептерді шешудің әдістемелік негіздері» пәнінің алатын орны ерекше. Студенттерді іргелі, негізгі математикалық пәндерді оқып білуге дайындайды. Сонымен қатар студенттердің мектеп математика курсы бойынша алған білімдерін, машықтарын, икемдіктерін жүйелеуді; стандарт және стандарт емес математикалық есептерді шешу техникасында тәжірибелік дағдыларды игеруді; оқу-танымдық белсенділігін дамыту мен қалыптастыруды мақсат етеді.

I Алгебра

1.1Теңбе-тең түрлендірулер. Рационал және иррационал өрнектерді теңбе-тең түрлендіру. Көрсеткіштік және логарифмдік өрнектерді теңбе-тең түрлендіру.

Математика курсының алгебралық есептерін шешуде құрамында ең болмағанда бір айнымалысы бар көпмүшені екі немесе бірнеше көпмүшелердің, немесе көпмүше мен бірмүшенің көбейтіндісі түрінде жазуға болады. Көпмүшелерді көбейткіштерге жіктеуде әр түрлі әдістерді пайдаланады, атап айтқанда ортақ көбейткішті жақша сыртына шығару; көпмүшенің ұқсас мүшелерін топтау; ауыстыру; қысқаша көбейту формуларын пайдалану және т.б. әдістер.

Мысалы:

1. $A = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2\ b$ көпмүшесін көбейткіштерге жіктеу керек.

$A = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc - (b^2 + c^2 - a^2)).$

$(2bc + b^2 + c^2 + a^2 = (2bc - b^2 - c^2 + a^2)\cdot(2bc + b^2 + c^2 - a^2) = (a^2 - (b-c)^2)\cdot((b+c)^2 - a^2) =$

$= (a^2 - (b-c)^2)\cdot((b+c)^2 - a^2) = (\_\, a - b + c)(b + c - a)(b + c + a) =$

$(a - b + c)(a + b + c)\cdot(a + b + c)(b + c - a).$

1-анықтама. Бүтін көрсеткішті дәреже, көбейту, азайту, қосу, бөлу, амалдарымен берілген өрнекті рационал өрнек дейді. Рационал өрнекті $\frac{P(X}{Q(X)}$ түрінде жазады. $P(X)$ және $Q(X)$-функциялар. $Q(x) \neq 0$

2–анықтама. Егер жоғарыда аталған амалдармен қоса түбір таңбалы амалдар да берілсе, онда ол өрнекті иррационал өрнек деп атайды. Мысалы, $2a + 3b^2 - 5cd + \frac{1}{2}a^3 -$ бүтін рационал өрнек, ал $\frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 + y + x} -$ бөлшек-рационал өрнек, $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$ – иррационал өрнек.

3-анықтама. Алгебралық өрнектің мәні болатын айнымалының мәндерін айнымалының мүмкін мәндері деп атайды. Айнымалының барлық мүмкін мәндерінің жиыны өрнектің анықталу облысы деп аталады. Мысалы, $\frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+2)}$ өрнегі $x \neq 1, x \neq -2$болғанда анықталған.

4-анықтама. Айнымалының барлық мүмкін мәндерінде тура болатын теңдікті теңбе-теңдік деп атайды.

5-анықтама. Егер екі өрнек жеке-жеке бір ғана өрнекке теңбе-тең болса, онда олар өзара теңбе –тең болады.

6-анықтама. Бір өрнекті оған теңбе-теңбе өрнекпен ауыстыру оны теңбе-тең түрлендіру деп атайды. Кез келген рационал өрнектерді түрлендіру рационал бөлшектерді қосуға, азайтуға, көбейтуге, бөлуге және дәрежелеуге келтіріледі.

Теңбе-тең ұғымы салыстырмалы ұғым. Бір сан жиынында екі өрнек теңбе-тең, ал екіншісінде теңбе-тең болмауы мүмкін.

Кейбір түрлендірулер барысында өрнектің анықталу облысы өзгеруі мүмкін, сондықтан өрнекті түрлендіргеннен шыққан жаңа өрнек пен берілген өрнек қандай жиында теңбе-тең болатындығын анықтау кажет. Мысалы, $P(x)=\dfrac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}$ өрнегі $x\neq -2$ болғанда анықталған. Алғашқы өрнек пен соңғы өрнек: $(-\infty;-2)U(-2;1)U(1;+\infty)$ жиынында анықталған.

7-анықтама. Айнымалыдан түбір табу, немесе айнымалыны рационал дәрежеге шығару амалдарымен берілген алгебралық өрнекті осы айнымалыға қатысты иррационал өрнек деп атайды.

Егер $a\geq 0$ және $n\varepsilon N, n\neq 1$болса, онда $X^n=a$

Теңдік орындалғанда тек бір ғана оң X саны болады. Осы X санын оң a санының $n-$ші дәрежелі арифметикалық түбірі деп атайды да, $X\sqrt[n]{a}$ деп белгілейді.

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a|, \text{егер n - жуп сан болса}\\ \text{a, егер n - так сан болса}\end{cases}$$

Түбірдің қасиеттері:

Егер $a\geq 0,\quad b\geq 0$ болса, онда

1^0. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

2^0. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\quad b\neq 0$

Ескерту. Егер $a\geq 0, b\geq 0$болса, онда $1^0,2^0$қасиеттері: $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{|a|}\cdot\sqrt[n]{|b|}$;

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ түрінде болады.

3^0. $(\sqrt[n]{a^m})^k=\sqrt[n]{a^{mk}}$

4^0. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^m}}=\sqrt[n\cdot k]{a^m}$

$$5^0.\ \sqrt[mk]{a^{mk}}=\begin{cases}\sqrt[n]{|a^k|}, \textit{егер}, m-\textit{жуп сан болса},\\ \sqrt[n]{a^k}, \textit{егер}, m-\textit{так сан болса}\end{cases}$$

Ескерту. Егер түбір көрсеткіштері тақ сан болса, онда 1^0-5^0 қасиеттер $a\prec 0, b\prec 0$және$ab\succ 0$үшін орындалады.

Иррационал өрнек әріптермен берілсе және оның сан мәндерінің жиыны берілмесе, онда алдын-ала иррационал өрнектің анықталу облысын нақты сандар жиынында анықтаймыз. Иррационал өрнектерді түрлендіруде түбірдің анықтамасын, қасиеттерін пайдаланамыз, сонымен қатар бөлшектің алымын, бөлімін иррационалдықтан құтқаруды, күрделі квадрат түбірлерді түрлендіруді, рационал көрсеткішті дәрежеге амалдар қолдануды және т.б. пайдаланамыз.

Көрсеткіштік және логарифмдік өрнектерді түрлендіруде олардың анықтамаларын, негізгі қасиеттерін білу керек, себебі олар есеп шығару барысында пайдаланады.

1.2. Теңсіздіктерді дәлелдеу.

Берілген жиында теңсіздіктердің дұрыстығын дәлелдейміз. Егер есептің шартында жиын көрсетілмесе, онда теңсіздіктегі айнымалылар кез келген нақты мәндерді қабылдауы мүмкін.

Теңсіздіктерді анықтаманың көмегімен, синтетикалық әдіспен, қарсы жору әдіспен, математикалық индукция әдісімен дәлелдеуді қарастырамыз.

Теңсіздіктің анықтамасы бойынша, егер $a-b\succ$ болса, онда $a\succ b$ болады деп есептеледі. Осы әдісті $f(x)\prec g(x)\geq g(x), f(x)\leq g(x)$ теңсіздіктерін дәлелдеуді пайдаланады. Күрделі есептер, яғни теңсіздіктер және тағы басқалардың көмегімен тиімді шешуге болады. Мысалы, маңызды ұғым Коши теңсіздігін студенттерге мектеп математика курсынан белгілі сандардың арифметикалық және геометриялық орталары ұғымы арқылы түсіндіреміз.

$a_1\succ 0, a_2\succ 0,...a_n\succ 0$ болсын, арифметикалық ортасы:

$$A_n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n};$$

ал геометриялық ортасы: $G_n=\sqrt{a_1}\cdot a_2\cdot a_3\cdot ...\cdot a_n$

$A_n\geq G_n$ (әрқашан). Егер $n=2$ болса $\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1\cdot a_2}$ – Коши теңсіздігі (1).

$$a_1+a_2\geq 2\sqrt{a_1\cdot a_2}$$
$$(\sqrt{a_1})^2+(a_2)^2-2\sqrt{a_1\cdot a_2}\geq 0.$$
$$\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\geq 0 \text{ (ақиқат).}$$

Егер $a_1=a$ және $a^2=\frac{1}{a}$ десек, (1)-ден $a+\frac{1}{a}\geq 2, a\succ 0.$(2) ал $a\prec 0,$ онда $a+\frac{1}{a}\leq -2.$ (3)

1-анықтама. Кейбір теңсіздіктердің ақиқаттылығына сүйеніп, берілген теңсіздікті дәлелдеуді синтетикалық әдіс деп атайды.

Негізгі (тірек) теңсіздіктеріне А) $a^2\geq 0$; Ә) $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab,(a\geq 0,b\geq 0)}$; Б) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 0, ab\succ 0$; В) $ax^2+bx+c\succ 0,\quad a\succ 0$ және $b^2-4ac\prec 0.$ жатады. **Мысалы.** Теңсіздікті дәлелде: $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd},\ a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, d\geq 0.$ **Дәлелдеуі.** Негізгі (тірек) етіп Коши теңсіздігін аламыз.

$\dfrac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geq\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}$; ал $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ және $\frac{c+d}{2}\geq\sqrt{cd}$ олай болса,

$\dfrac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geq\sqrt[4]{abcd}$, бірақ $\dfrac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}=\frac{a+b+c+d}{4}$ сонымен $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$.

Дәлелдеуді талдап, теңсікдіктегі теңдік таңбасы $a=b, c=d$ және $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$ болғанда ғана, яғни $a=b=c=d$ болғанда ғана орындалады деген қорытындыға келтіреміз.

Қарсы жору әдісімен келесі теңсіздікті дәлелдейік.

2. Теңсіздікті дәлелде: $\sqrt{(a+c)\cdot(b+d)}^{1} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd},\ a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, d\geq 0.$

Дәлелдеуі. Қарсы жорып, теріс емес a,b,c,d мәндерінің жиыны бар болсан, берілген теңсіздік үшін, яғни

$$\sqrt{(a+c)\cdot(b+d)\prec\sqrt{ab}+\sqrt{cd}} \text{ орындалсын.}$$

Осы теңсіздіктің екі жақ бөлігі де теріс емес, онда оларды квадрат дәрежеге дәрежелейміз:

$(a+c)\cdot(b+d)\prec ab+cd+2\sqrt{abcd}$ болады, бұдан $Bc+ad\prec 2\sqrt{abcd},\ \frac{bc+ad}{2}\prec\sqrt{(ab)\cdot(cd)}$

Коши теңсіздігіне қайшы. Олай болса біздің жоруымыз дұрыс емес. Ендеше, берілген теңсіздік ақиқат.

2-анықтама. Индукция деп дербес пікірлерден қандай да бір жалпылама қорытындыға келтіретін пайымдаулар әдісін атайды.

Математикалық индукция әдісі былайша тұжырымдалады: $n\in N$ санына тәуелді пікір $A(n)$ кез келген n үшін:

1) $n=1$ үшін ақиқат;

2) $n=k$ үшін де ақиқат болатындығынан (k-кез келген натурал сан) оның келесі

3) $n=k+1$ саны үшін де ақиқаттығы шығатын болса, онда $A(n)$ пікірі кез келген натурал n үшін ақиқат болады.

Алдымен, дәлелденетін пікір $n=1$ үшін дәлелденеді (тексерілді). Мұна индукция базисі деп атайды. Индукцияның келесі дәлелденетін бөлігін индукциялық қадам деп атайды, мұнда $n=k$ үшін $A=(n)$ тұра деп ұйәарылып, $n=k+1$ үшін $A(n)$ тура болатындығы, яғни $A=k\Rightarrow A(k+1)$ екендігі дәлелденеді.

Математикалық индукция принципі негізінде Бернулли теңсіздігін дәлелдеуге болады: $x\succ -1$ және кез келген натурал n үшін $(1+x)^n\geq 1+nx,$ (3) орынды.

(3)-те $x=0$ немесе $n=0$ болғанда теңсіздікке айналады.

(3)-тен басқа құрамында екі теңсіздігі бар Бернулли теңсіздігі бар: егер $p\prec 0$ немесе $p\succ 1$ болса, онда $(1+x)^p\geq 1+px,$ (4)

егер $p\prec 0\prec 1,$ онда $(1+x)^p\leq 1+px,\ x\succ -1.$ (5)

(4) және (5) теңсіздіктер $x=0$ болғанда теңдік орындалады.

(3) теңсіздікті $(1+x)^n\geq 1+nx$ дәлелдейік. Дәлелдеуі. 1) $n=1$ болғанда (3) теңбе теңдікке айналады $1+x=1+x$

2). $n=k$ үшін ақиқат, яәни $(1+x)^k\geq 1+kx.$ (6) .

3) $n=k+1$ үштін де орындалады делік, яғни $(1+x)^{k+1}\geq 1+kx+x.$ (7).

$(1+x)^{k+1}=(1+x)(1+x)^k$. даудан,

(6) дан $(1+x)^{k+1} \geq (1+x)(1+kx) = 1+kx+x+kx^2$. шығады. $kx^2 \geq 0$, онда (7) теңсіздік шығады. Олай болса, математикалық индукция принципі негізінде (3) Бернулли теңсіздігі кез келген натурал n үшін дұрыс.

2. $a=\sqrt{5}+\sqrt{30}+\sqrt{50}$, $b=\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{60}$ сандарын салыстырындар.

Шешуі. a және b сандарын кемімен, артығымен бағалаймыз.

$$2 \prec \sqrt{5} \prec 3, \qquad 3 \prec \sqrt{10 \prec 4}$$
$$5 \prec \sqrt{30 \prec 6} \qquad 4 \prec \sqrt{20 \prec 5}$$
$$+** \frac{7 \prec \sqrt{50 \prec 8}}{14 \prec \sqrt{5}+\sqrt{30}+\sqrt{50 \prec 17}} \qquad \frac{7 \prec \sqrt{60 \prec 8}}{14 \prec \sqrt{10+ \prec \sqrt{20}+\sqrt{60} \prec 17}}$$

Алынған мәндерін салыстыру мүмкін емес, бірдей. Енді a,b сандарын 0,1 дейінгі дәлдікпен салыстырамыз.

$$2{,}2 \prec \sqrt{5} \prec 2{,}3 \qquad 3{,}1 \prec \sqrt{10} \prec 3{,}2$$
$$5{,}4 \prec \sqrt{30 \prec 5{,}5} \qquad 4{,}1 \prec \sqrt{20} \prec 4{,}5$$
$$\frac{7 \prec \sqrt{50} \prec 7{,}1}{14{,}6 \prec \sqrt{5}+\sqrt{30}+\sqrt{50} \prec 14{,}9} \qquad \frac{7{,}7 \prec \sqrt{60} \prec 7{,}8}{15{,}2 \prec \sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{60} \prec 15{,}5}$$

Сонымен $a \in (14{,}6\,;14{,}9)$, ал $b \in (15{,}2{,}15{,}5)$, $a \prec b$ болады.

3. Сандарды салыстыр: $\log_2 3 - \log_5 8 = \log_2 3 - \dfrac{\log_2 8}{\log_2 5} = \dfrac{\log_2 3 \cdot \log_2 5 - 3}{\log_2 5} \succ 0,$ олай болса $a \succ b$.

2-тәсіл. a және b сандарын 1-ге дейінгі дәлдікпен бағалаймыз.

$\log_2 2 \prec \log_2 3 \prec \log_2 4,$ яғни $1 \prec a \prec 2$

$\log_5 5 \prec \log_5 8 \prec \log_5 25,$ яғни $1 \prec b \prec 2.$

$a,b \in (1;2)$ a,b сандарының әрқайсынан осы аралықтан (интервалдың) ортасымен, $\dfrac{3}{2}$ санымен саластырамыз.

$\log_2 3 \succ \dfrac{3}{2}$ делік, сонда $3 \succ 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 3^2 \succ 2^3 \Leftrightarrow 9 \succ 8$ $a \succ \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 9 \succ 8,$ онда

$a \succ \dfrac{3}{2}$ – теңсіздігі тура.

Енді $b \succ \dfrac{3}{2}$ десек, $\log 8 \succ \dfrac{3}{2} \Rightarrow 8 \succ 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 8^2 \succ 5^3 \Rightarrow 64 \succ 125$

Енді $b > \dfrac{3}{2}$ десек, $\log_5 8 > \dfrac{3}{2} \Rightarrow 8 > 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 8^2 > 5^3 \Rightarrow 64 > 125$. Соңғы теңсіздік дұрыс емес, қате, $b > \dfrac{3}{2}$ дегеніміз қате, олай болса, $b < \dfrac{3}{2}$. Сонымен, $a > \dfrac{3}{2}, b < \dfrac{3}{2},$ $a > b$ болады.

1.3 Теңдеулер, теңдеулер мен теңсіздіктер жүйелерін шешу. Рационал теңдеулер. Айнымалысы модуль таңбасына тәуелді теңдеулер.

1 – анықтама. Егер екі теңдеудің түбірлерінің жиыны бірдей мәндес теңдеулер деп атайды.

Мысалы, $\log_3 x = 0$ және $\sqrt{x} = 1$ (әрқайсысының бір әана $x = 1$ түбірі бар) теңдеулері мәндес теңдеулер.

2 – анықтама. Егер бірінші теңдеудің екінші теңдеудің де шешімі болса, онда екінші теңдеуді бірінші теңдеудің салдары деп атайды.

Оны мына түрде $(f(x) = q(x)) \Rightarrow (f_1(x) = q_1(x))$

3 – анықтама. Егер $f(x) = q(x)$ және $f_1(x) = q_1(x)$ теңдеулері мәндес болса, онда олардың әрқайсысы екіншісінің салдары болады.

Бұл жаәдайда

$$(f(x) = q(x)) \Leftrightarrow (f_1(x) = q_1(x))$$

түрінде жазады.

4 – анықтама. $\mathrm{P}(x) = 0$ және $\dfrac{\mathrm{P}(x)}{Q(x)} = 0, \quad Q(x) \neq 0$ түріндегі теңдеулерді рационал теңдеулер деп атайды, мұндағы $\mathrm{P}(x), Q(x)$ - көпмүшелер.

Бүтін рационал теңдеулерді шешу барысында орындалатын түрлендірулер бастапқы теңдеуге мәндес теңдеулерді шешуге келтіріледі. Сондықтан табылған түбірлерді тексере бермейді. Ал, бөлшек – рационал теңдеулерді шешуде теңдеудің екі жағын да бір ғана өрнекке $Q(x)$-ке көбейтсек, бөгде түбір пайда болуы мүмкін. Сондықтан бөлшек – рационал теңдеуді шешуде, оның табылған түбірлерін теру қажет.

Рационал (және басқа да) теңдеулерді шешуде негізгі әдістер: 1) көбейткіштерді жіктеу; 2) жаңа (көмекші) айнымалы енгізу.

Көбейткіштерге жіктеу әдісі, негізінен, егер $f(x) = 0$ болса, $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$ көбейткіштерге жіктелсе, онда $f(x) = 0$, (1) теңдеуінің шешімі $f_1(x) = 0; \ f_2(x) = 0; \ldots; f_n(x) = 0$, (2) теңдеулер жиынтығының шешімі болады. Керісінше ұйғарым дұрыс емес: (2) теңдеулер жиынтығының кез келген шешімі (1) теңдеуге шешім бола бермейді.

1. Теңдеуді шешіңдер: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x} \cdot \left(\dfrac{x+2}{x^2 - 1} + 2 \right) = 0,$ (3)
2.

Шешуі. (3) теңдеу $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x} = 0, \\ \dfrac{x+2}{x^2 - 1} = 0. \end{array} \right.$ (4)

теңдеулер жиынтығын шешуге келтіріледі. (4) теңдеулер жиынтығының шешімі: $x_1 = 1, x_2 = 2, \quad x_3 = 0, x_4 = -\dfrac{1}{2}$.

Бірақ $x=1$ болғанда, $\frac{x+2}{x-1}$ өрнегі анықталмаған, ал $x=0$ болғанда $\frac{x^2-3x+2}{x}$ өрнегі анықталмаған.

Сонымен, $x=1, x=0$ мәндері берілген теңдеудің түбірлері болмайды.

Жауабы: $x=2; \quad x=-\frac{1}{2}$.

Жалпы, берілген (1) теңдеуді көбейткіштерге жіктегенде пайда болған (2) теңдеулер жиынтығының табылған түбірлерінің (1) теңдеудің анықталу облысына енетін түбірлері ғана шешімі болады.

3. Теңдеуді шешіңдер: $(x^2+x-2)(x^2+x-3)=12$

Шешуі. $x^2+x=y$- мен белгілейміз, $(y-2)(y-3)=12$ немесе $y^2-5y-6=0$.

$y_1=6$ және $y_2=-1$ түбірлерін белгілеуге апарып қоямыз, берілген теңдеумен мәндес теңдеулер жиынтығын шешеміз:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x=6, \\ x^2+x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-6=0, \\ x^2+x-1=0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_1=2; \quad x_2=-3 \\ \text{теңдеуінін шешімі жок} \end{array}\right.$$

Берілген теңдеудің түбірлері $x_1=2$ және $x_2=-3$ сандары болады.

Жауабы: $x_1=2; \quad x_2=-3$.

Айнымалысы модуль таңбасына тәуелді теңдеулерді шешуде көбінесе, келесі: 1) модульді анықтамасы бойынша ашу; 2) теңдеудің екі жағын да квадраттау; 3) аралықтарға бөлу әдістерін пайдаланады.

$|f(x)|=q(x)$, (5) теңдеуін өзімен мәндес теңдеулер жүйесінің жиынтығымен ауыстыру әдісімен шешеді.

1-тәсіл. $|f(x)|=q(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)=q(x), \\ f(x)\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x)=q(x), \\ f(x)<0 \end{cases} \end{array}\right.$

2-тәсіл. $|f(x)|=q(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)=q(x), \\ q(x)\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x)=q(x), \\ q(x)\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

3-тәсіл. Егер (5) теңдеудің екі жаәындаәы өрнектердің таңбасы бірдей болса, онда (5) теңдеуі келесі теңдеумен мәндес.

$$(|f(x)|)^2=(q(x))^2.$$

$|f(x)|=b, \quad b\in R, \quad$ (6) теңдеуінің

а) $b<0$ болғанда шешімі болмайды;

ә) $b=0$ болғанда, $f(x)=0$ теңдеуімен мәндес;

б) $b>0$ болғанда (6) теңдеу $\left[\begin{array}{l} f(x)=b, \\ f(x)=-b \end{array}\right.$ теңдеулер жиынтығымен мәндес.

$$f(|x|)=q(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)=q(x),\\ x\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(-x)=q(x),\\ x<0\end{cases}\end{array}\right. \qquad (7)$$

$$h(|f(x)|)=q(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}h(f(x))=q(x),\\ f(x)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}h(-f(x))=q(x),\\ f(x)<0\end{cases}\end{array}\right. \qquad (8)$$

мұндағы h, f, g - функциялар.

3. Теңдеуді шешіңдер: $\left|x-|4-x|\right|-2x=4$

Шешуі.

$$\left|x-|4-x|\right|-2x=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-x\ge 0,\\ |x-(4-x)|-2x=4,\end{cases}\\ \begin{cases}4-x<0,\\ |x+(4-x)|-2x=4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 4,\\ |2x-4|-2x=4\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ -2x=0\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{шешімі жок}$$

ал $$\begin{cases}x\le 4,\\ |2x-4|-2x=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 4,\\ 2x-4\ge 0\\ (2x-4)-2x=4,\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 4,\\ 2x-4<0,\\ -(2x-4)-2x=4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 4,\\ x\ge 2,\\ -4=4,\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 4,\\ x<2,\\ -4x=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow x=0$$

Берілген теңдеудің түбірі $x=0$.

Жауабы: $x=0$.

1.4 Рационал теңдеулер жүйесі.
1.5Рационал теңдеулер жүйесін шешудің негізгі әдістері

1 – анықтама. Егер екі жүйенің шешімдерінің жиыны бірдей болса, онда оларды мәндес теңдеулер жүйесі деп атайды.

1 – анықтама. Екінші жүйе бірінші жүйенің салдары және бірінші жүйе екінші жүйенің салдары болса, онда бұл екі жүйе мәндес.

Жүйені шешуде оны түрлендіріп, бастапқы жүйенің салдары болатын жүйеге келтіреміз, жаңа жүйенің табылған шешімін міндетті түрде алғашқы жүйедегі айнымалының орнына апарып қойып тексереміз.

Теңдеулер жүйесін шешуде пайдаланатын теоремаларды қарасырайық.

1 – теорема. Егер $f_1'(x;y)=q_1'(x;y)$ теңдеуі $f_1(x;y)=q_1(x;y)$ теңдеуімен мәндес (немесе оның саладры), ал $f_2'(x;y)=q_2'(x;y)$ теңдеуі $f_2(x;y)=q_2(x;y)$ теңдеуімен мәндес (немесе салдары) болса, онда

$$\begin{cases} f_1'(x;y)=q_1'(x;y) \\ f_2'(x;y)=q_2'(x;y) \end{cases}$$

жүйесі

$$\begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y) \\ f_2(x;y)=q_2(x;y) \end{cases}$$

жүйесімен мәндес (немесе оның салдары)

2– теорема. Егер $f(x;y)=q(x;y)$ теңдеуі $f_1(x;y)=q_1(x;y)$ және $f_2(x;y)=q_2(x;y)$ теңдеулерінің салдары болса, онда келесі жүйелердің

$$\begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ f(x;y)=q(x;y) \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} f_2(x;y)=q_2(x;y) \\ f(x;y)=q(x;y) \end{cases}$$

әрқайсысы

$$\begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ f_2(x;y)=q_2(x;y) \end{cases} \qquad (1)$$

(1) жүйенің салдары, ал $\begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ f_2(x;y)=q_2(x;y), \\ f(x;y)=q(x;y) \end{cases}$

жүйесі (1) жүйемен мәндес болады.

Дербес жағдайда (1) жүйенің салдарлары мынадай жүйелер болады:

$$\begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ f_1(x;y)\pm f_2(x;y)=q_1(x;y)\pm q_2(x;y) \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} f(x;y)=q_1(x;y), \\ f_1(x;y)\cdot f_2(x;y)=q_1(x;y)\cdot q_2(x;y) \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ (f_2(x;y))^2=(q_2(x;y))^2 \end{cases} \qquad (4)$$

Егер бір мезгілде $f_2(x;y)$ және $q_2(x;y)$ екі өргенін нөлге айналдыратын $(x;y)$ қос салдары болмаса, онда

$\dfrac{1}{f_2(x;y)}=\dfrac{1}{q_2(x;y)}$ теңдеуі $f_2(x;y)=q_2(x;y)$ теңдеуі мәндес. Олай болса (1) жүйемен келесі жүйе

$$\begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ \dfrac{1}{f_2(x;y)}=\dfrac{1}{q_2(x;y)} \end{cases}$$

мәндес. Оның салдары, өз кезегінде

$$\begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ f_1(x;y)\cdot\dfrac{1}{f_2(x;y)}=q_1(x;y)\cdot\dfrac{1}{q_2(x;y)} \end{cases}$$

жүйесі болады. Сонымен мынадай қорытындыға келеміз:

Егер бір мезгілде $f_2(x;y)$ және $q_2(x;y)$ екі өрнегін нөлге айналдыратын $(x;y)$ қос саны болмаса, онда

$$\begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ \dfrac{f_1(x;y)}{f_2(x;y)}=\dfrac{q_1(x;y)}{q_2(x;y)} \end{cases} \qquad (5)$$

жүйесі (1) жүйенің салдары болып табылады.

Есеп шығаруда пайдалы келесі ұйғарымдарды атап өтейік:

1. (2) жүйе (1) жүйемен мәндес.
2. Егер $f_1(x;y)=q_1(x;y)$ теңдеуінің екі жағын да бір мезгілде нөлге айналдыратын $(x;y)$ қос саны болмаса, онда (3) жүйе (1) жүйемен мәндес.
3. Егер кез келген x,y үшін (1) жүйенің анықталу облысында $f_2(x;y)\cdot q_2(x;y)\geq 0$ теңсіздігі орындалса, онда (4) жүйе (1) жүйемен мәндес.
4. Егер (1) жүйенің екінші теңдеуінің екі жаәын да бір мезгілде нөлге айналдыратын $(x;y)$ қос саны болмаса, онда (5) жүйе (1) жүйемен мәндес.

Енді 1 –теорема мен 2 – теоремадан шығатын таәы бір теореманы атап өтейік.

2 –теорема. Егер $\left[\begin{array}{l} f_{21}(x;y)=q_{21}(x;y) \\ f_{22}(x;y)=q_{22}(x;y) \\ f_{2k}(x;y)=q_{2k}(x;y) \end{array}\right.$

теңдеулер жиынтығы $f_2(x;y)=q_2(x;y)$ теңдеуімен мәндес (немесе оның салдары) болса, онда келесі теңдеулер жүйесінің жиынтығы

$$\begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ f_{21}(x;y)=q_{21}(x;y); \end{cases} \quad \begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ f_{22}(x;y)=q_{22}(x;y); \end{cases} \ldots\ldots; \begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ f_{2k}(x;y)=q_{2k}(x;y); \end{cases}$$

(1) теңдеулер жүйесімен мәндес (немесе оның салдары) болады.

Дербес жағдайда,

$$\begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y) \\ f_{21}(x;y)\cdot f_{22}(x;y)\cdot\ldots\cdot f_{2k}(x;y)=0 \end{cases}$$

жүйесінің салдары

$$\begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ f_{21}(x;y)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ f_{22}(x;y)=0;......; \end{cases} \quad \begin{cases} f_1(x;y)=q_1(x;y), \\ f_{2k}(x;y)=q_{2k}(x;y) \end{cases}$$

жүйелер жиынтығы болады.

Теңдеулер жүйесін шешудің негізгі үш әдістері: 1) жүйені сызықтық түрлендіру (немесе алгебралық қосу әдісі); 2) ауыстыру әдісі; 3) айнымалыны ауыстыру (көмекші айнымалы енгізу) әдісі.

Есептер шығару барысында осы әдістерді пайдаланамыз.

3– анықтама. Екі айнымалысы бар біртектес екі теңдеулер жүйесі деп

$$\begin{cases} a_0x^n + a_1x^ny^{-1} + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = c, \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y + b_2x^{n-2}y^2 + ... + b_{n-1}xy^{n-1} + b_ny^n = d \end{cases}$$

түрінде берілген жүйені айтады (екі еңдеудің де сол жақ бөлігі n-ші дәрежелі екі айнымалысы бар көпмүше). Біртектес жүйелерді екі әдісті қиыстыру арқылы шешеді. Сызықтық түрлендіру және жаңа айнымалы енгізу.

4 – анықтама. Екі айнымалысы бар өрнектегі айнымалының біреуін екіншісімен және екіншісін бірінші айнымалысымен ауыстырғаннан өрнек өзгермейді. Мұндай өрнектерді симметриялы өрнектер деп атайды.

Мысалы, $f(x;y)=x^3+x^3y^3+y^3=17; \quad x+xy+y=5$

5 –анықтама. Барлық симметриялы теңдеу болатын теңдеулер жүйесін симметриялы теңдеулер жүйесі деп атайды.

6 –анықтама. Екі айнымалысы бар негізгі симметриялы көпмүшелер деп $x+y$ және $x \cdot y$ -ті есептейді.

Симметриялы көпмүшенің басқа мүшелері оның негізгі мүшелері арқылы өрнектеледі. $x+y=u, \quad xy=v$ арқылы ауыстырып есептерді шығарады.

Мысалы:

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v; \qquad x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=u^2-v$

Теңдеулер мен оның жүйелерін құруға берілген есептер

Теңдеулер (немесе теңдеулер жүйесін) құруға берілген есептерді шешу бірінші кезеңнен тұрады:

1) Есептің шартын талдау. Егер есепте параметрлер болса, олардың бір – біріне тәуелді немесе тәуелсіз есепте сипатталып отырған құбылыс, процесс, оқиға іске асуы үшін олар қандай мәндер қабылдай алады, тәуелді параметрлер арасында қандай байланыс болуы керек? (Параметрлер үшін мүмкін мәндерінің облысын тағайындау). Есепте қанша және қандай белгісіздер бар? Сипатталып отырған құбылыс іске асуы үшін белгісіздер қандай мәндер қабылдай алады, белгісіздер мен парамертлер арасында қандай байланыс болуы керек?

Есеп шартының барлық талдауы ауызша, ал белгісіздер үшін мүмкін мәндер облысын анықтау әдетте теңдеуді құрумен бірге жүргізіледі.

2) Теңдеу (немесе теңдеулер жүйесін) құру. Теңдеуді құру үшін негізгі белгісізді (немесе жүйе құру керек болған жағдайда негізгі белгісіздерді) таңдап алу және белгілеу.

Қалған белгісіздерді таңдап алынған параметрлар арқылы өрнектеу. Теңдеуді (немесе жүйені) құруды толық түсіндіру.

3) Құрылған теңдеуді (немесе жүйені) шешу.

4) Зерттеу.

Әр теңдеудің (немесе жүйенің) табылған шешімінің белгісіздің мүмкін мәндер облысында жататын, жатпайтындығын анықтау керек. Егер шешім белгісіздің мүмкін мәндер облысында жатса, параметрлердің барлық мәндері үшін жата ма, барлық мәндері үшін орындалмаса, параметрлердің қандай мәндері үшін әр шешім белгісіздің мүмкін мәндер облысында жататындыәын, қандай мәндері үшін мүмкін мәндер облысында жатпайтындығын табу.

Зерттеу қорытындысында теңдеудің (немесе жүйенің) табылған шешімдерінің қандай жағдайларда есеп сұрағына жауап бола алатындығын көрсету керек.

5) Тексеру (міндетті емес кезең).

6) Жауап.

Әр уақытта көрсетілген схемаға сүйену міндетті емес, пайда кезеңдердің орнын ауыстырған қолайлы болады. Мысалы, тәжірибеде бірінші кезеңді екінші кезеңнен кейін, тіпті кейде оны үшінші кезеңнен кейін орындайды.

Сандық қатыстарға берілген есептер мазмұнына теориялық арифметика материалдары енетін есептер жатады. Бірлік, ондық, жүздік т.с.с. разрядтар белгісіз ретінде алынып, сол арқылы көп таңбалы сандар табылады.

Арифметикалық, геометриялық прогрессияға берілген есептер, негізінен осы прогрессиялардың анықтамасына, қасиеттеріне, n-ші мүшесін, қосындысын т.б. табуға араласқан есептер болып келеді.

Бірлесіп істелетін жұмысқа берілген есептердің мазмұны, негізгі компоненттері жұмыс (орындалатын жұмыс көлемі), уақыт (барлық жұмысты орындауға кететін уақыт) және еңбек өнімділігі (бірлік уақытта орындалатын жұмыс шамасы) болып табылады.

Мұндай есепте барлық орындайтын жұмыс көлемін 1 деп есептейді. Барлық жұмысты орындауға кететін уақытты - (t)-мен, бірлік уақытта орындалатын жұмыс өнімділігін V-мен белгілесек, онда оны $V=\frac{1}{t}$ түрінде жазамыз.

Қорытпа мен қоспаға берілген есептер шартында құрамында екі немесе бірнеше заттардың қорытпасы немесе қоспалары туралы айтылады. Осындай есептерді шешу аралас қоспа, қорытпа, процентті мазмұнды, “сынама” т.б. ұғымдармен байланысты және келесі жорамалға негізделген:

1. Қарастырылатын қоспа (қорытпа, ерітінді) біртекті.
2. Сыйымдылық бірлігі ретінде алынған литр мен масса бірлігі арасындағы айырмашылық жасалмайды, яғни көлемдері V_1 және V_2 екі ерітіндінің қосындысы қоспа болады, көлемі V_1+V_2 - тең.

1.6 Иррационал теңдеулер және теңдеулер жүйесі.

1–анықтама. Айнымалысы түбір таңбасының астында болатын, немесе айнымалысы бөлшек дәрежеге шығару амалдарымен берілген теңдеулерді иррационал теңдеулер деп атайды.

Мысалы. $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-5}=\sqrt{x}$. т.б.

Иррационал теңдеудің құрамындағы барлық түбірлер арифметикалық түбір болуы қажет, түбір таңбасы астындағы өрнектң және өзінің мәні теріс сан болмауы тиіс. Иррационал теңдеулерді нақты сандар жиынында шешеді.

Иррационал теңдеулерді шешудің негізгі әдістеріне:1) Теңдеудің екі жаәын да бірдей дәрежеге дәрежелеу; 2) Жаңа айнымалы енгізу; 3) әр түрлі жасанды әдістерді қолданып шешу әдістері жатады.

Иррационал теңдеудің екі жағын да түбірден құтылу үшін дәрежеге дәрежелегенде бөгде түбір пайда болуының себептері:

1. Түрлендіргеннен кейін теңдеудің анықталу облысының кеңеюінен;
2. Теңдеудің екі жағын да жұп дәрежеге дәрежелегенде абсолют шамалары тең, бірақ таңбалары әр түрлі, бір жағы оң, екінші жағының таңбасы теріс болуынан.

Иррационал теңдеуді оның салдарымен ауыстыру жолымен оны шешуде (түбірлерін ескереміз):

1. Берілген теңдеудің анықталу облысын табамыз.
2. Теңдеуден оның салдарына көшеміз.
3. Жаңа теңдеудің түбірін табамыз.
4. Осы табылған түбірлер берілген теңдеудің түбірі болатын, болмайтындығын тексереміз.

Тексеруде:

а). Табылған әрбір түбір берілу теңдеудің анықталу облысына жататын, жатпайтындығын анықтаймыз. Анықталу облысына жатпайтын түбір бөгде түбір

ә). Берілген теңдеудің анықталу облысына жататын табылған әрбір түбірді, берілген теңдеуді шешуде теңдеудің екі жағын да жұп дәрежеге дәрежелегенде шыққан теңдеуге апарып қойып тексереміз, сонда теңдеудің екі жағы да бірдей таңбалы болса, онда ол берілген теңдеудің түбірі болады, егер теңдеудің екі жағының таңбасы әр түрлі болса, онда ол берілген теңдеуге бөгде түбір болады.

Қорытынды. Иррационал теңдеулерді шешу үшін:

1. $\sqrt{f(x)}=q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} q(x)\ge 0, \\ f(x)=q^2(x). \end{cases}$

2. $q(x)\sqrt{f(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} q(x)\ge 0, \\ f(x)\cdot q(x)=0. \end{cases}$

3. $\sqrt{f(x)}=\sqrt{q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ f(x)=q(x) \end{cases}$

4. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{q(x)}=\varphi(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ q(x)\geq 0,\\ \varphi(x)\geq 0,\\ f(x)+q(x)+2\sqrt{f(x)\cdot q(x)}=\varphi(x)\end{cases}$

5. $|f(x)|=q(x)\Leftrightarrow\begin{cases}q(x)\geq 0,\\ f^2(x)=q^2(x).\end{cases}$ 6. $|f(x)|=f^2(x).$

7. $\sqrt[n]{a-f(x)}+\sqrt[n]{b+f(x)}=q(x)\Leftrightarrow\begin{cases}U+V=q(x),\\ U^n+V^n=a+b.\end{cases}$

(мұндағы $U=\sqrt[n]{a-f(x)},\ V=\sqrt{b+f(x)}$)
Ескеру қажет.

Иррационал теңдеулер жүйесін әр түрлі әдістермен шешеді.

1. Жүйені шешіңдер: $\begin{cases}\sqrt[4]{U+V}-\sqrt[4]{U-V}=2,\\ \sqrt{U+V}-\sqrt{U-V}=8.\end{cases}$

Шешуі. $AO:$ $\begin{cases}U+V\geq 0,\\ U-V\geq 0.\end{cases}$

$$\begin{cases}\sqrt[4]{U+V}-\sqrt[4]{U-V}=2,\\ \sqrt{U+V}-\sqrt{U-V}=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{U+V}-\sqrt[4]{U-V}=2,\\ \left(\sqrt[4]{U+V}-\sqrt[4]{U-V}\right)\left(\sqrt[4]{U+V}+\sqrt[4]{U-V}\right)=8\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{U+V}-\sqrt{U-V}=2,\\ 2\left(\sqrt[4]{U+V}-\sqrt[4]{U-V}\right)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{U+V}-\sqrt[4]{U-V}=2,\\ \sqrt[4]{U+V}+\sqrt[4]{U-V}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt[4]{U+V}=6,\\ -2\sqrt[4]{U-V}=-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{U+V}=3,\\ \sqrt[4]{U-V}=1\end{cases}$ Осыдан $\begin{cases}U+V=81,\\ U-V=1,\end{cases}$ $\begin{cases}U=41\\ V=40\end{cases}$

Жауабы: (41;40)

1.7 Көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулер, олардың жүйелері.

Көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулерді шешу үшін көрсеткіштік $y=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$ функциясы мен логарифмдік $y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$ функцияларының қасиеттерін білу керек.

1–Теорема. Егер $a>0, a\neq 1$ болса, онда $a^{f(x)}=a^{q(x)}$ теңдеуі $f(x)=q(x)$ теңдеуімен мәндес.

Көрсеткіштік теңдеудің көпшілігі теңдеудің екі жақ бөлігін бірдей негізге келтіру әдісімен шешіледі. Негізгі екі әдісті: 1) $a^{f(x)}=a^{q(x)}$ теңдеуінен $f(x)=q(x)$

теңдеуіне келтіру; 2) Жаңа айнымалы енгізу әдістері пайдаланылады. Кейбір жағдайда жасанды әдіспен шешуге тура келеді.

I. $f\left(a^x\right)=0$ теңдеуін шешу, $a^x = y$-пен ауыстырып, оған мәндес жай көрсеткіштік теңдеулер жиынтығын

$$\left[\begin{array}{l} a^x = y_1, \\ a^x = y_2, \\ a^x = y_k \end{array}\right.$$

шешуге келтіріледі, мұндағы $y_1, y_2,....., y_k$ $f(y)=0$ теңдеуінің барлық түбірлері.

II. $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0,\quad A, B, C$- сандар, $a>0, a\neq 1,$ теңдеуі оған мәндес $\left[\begin{array}{l} a^x = y_1, \\ a^x = y_2 \end{array}\right.$ теңдеулер жиынтығын шешуге келтіреді, мұндағы y_1, y_2 - $Ay^2 + By + C = 0$ теңдеуінің түбірлері.

III. $a^{f(x)} = b,\quad a>0, a\neq 1, b>0$ теңдеуін шешу $f(x)\log_a b$ теңдеуін шешуге келтіреді.

IV. $\alpha a^{f(x)} + \beta b^{f(x)} + \gamma c^{f(x)} = 0,\quad (\alpha \neq 0, \beta, \gamma$ -нақты сандар, $f(x)$- функция, ал негіздері a, b, c үшін, $b^2 = a\cdot c$ орындалады).

теңдеуін шешу $\left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} = y_1, \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} = y_2 \end{array}\right.$ теңдеулер жиынтығын шешуге келтіреді, y_1, y_2- $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ теңдеуінің түбірлері.

V. $\alpha\cdot a^{f(x)} + \beta\cdot b^{f(x)} + \gamma\cdot c^{f(x)} = 0,\quad (\alpha, \beta, \gamma$ -нақты сандар, $a>0, b>0, a\cdot b = 1)$ $a^{f(x)} = y$ пен белгілейміз. Сонда

$$ay^2 + cy + \beta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^{f(x)} = y_1, \\ a^{f(x)} = y_2 \end{array}\right.$$ жиынтықты шешуге келеді.

y_1, y_2 - $ay^2 + cy + \beta = 0$ теңдеуінің түбірлері.

$a>0,\ a\neq 1,\ \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b.$

$\log_x A = B,\quad A>0$ теңдеуінің

а) $A=1$ және $B\neq$ болғанда бір ғана $x = A^{\frac{1}{B}}$ түбір болады;
ә) $A=1$ және $B=0$ болғанда бірге тең емес, кез келген оң сан шешімі;
б) $A\neq 1$ және $B=0$ болғанда шешімі болмайды.

$f(\log_a x) = 0,\quad a>0, a\neq 1$ теңдеуі

$$\left[\begin{array}{l}\log_a x = y_1,\\ \log_a x = y_2\\ \log_a x = y_n\end{array}\right.$$ теңдеулер жиынтығымен мәндер,

$y_1, y_2, ..., y_n \quad - f(y) = 0$ теңдеуінің түбірлері.

$f(\log_x A) = 0, \quad A > 0$ теңдеуі

$$\left[\begin{array}{l}\log_x A = y_1\\ \log_x A = y_2\\ \log_x A = y_n\end{array}\right.$$ теңдеулер жиынтығымен мәндес, $y_1, y_2, ..., y_n \quad - f(y) = 0$
теңдеуінің түбірлері.

I. $\log_a f(x) = \log_a q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} q(x) > 0, \\ f(x) = q(x). \end{cases}$ II. $\log_a f(x) = \log_a q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = q(x). \end{cases}$

III. $\log_{f(x)} A = \log_{q(x)} A \Leftrightarrow \begin{cases} q(x) > 0, \\ q(x) \neq 1, \\ f(x) = q(x). \end{cases}$ IV. $\log_{f(x)} A = \log_{q(x)} A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ f(x) = q(x) \end{cases}$

ауыстыруға болады, осыны есептер шығару барысында пайдаланады.

Көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулер жүйесін шешуде алгебралық теңдеулер жүйесін шешу барысында әдістер пайдаланылады. Теңдеулер жүйесін түрлендіруде жүйенің әрбір теңдеуі қарапайым түрге келтірілуін қадағалау керек.

1. Жүйені шешіңдер: $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5 \end{cases}$

Шешуі. $AO: \begin{cases} x - y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \lg 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x^2 - y^2) = \lg 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lg(x+y) = \lg 50, \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ (x-y)(x+y) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$x = 4{,}5; \quad y = 0{,}5$

Жауабы: $(4{,}5;\ 0{,}5)$

3. Жүйені шешіңдер: $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12 \end{cases}$

Шешуі. $\frac{3^x \cdot 4^y}{2^x \cdot 3^y}=\frac{12}{6}$, $\frac{3^{x-y}}{2^{x-2y}}=2$, $3^{x-y}=2^{1+x-2y}$ бұл теңдік $\begin{cases} x-y=0 \\ 1+x-2y=0 \end{cases}$ болғанда болуы мүмкін.

$\begin{cases} x-y=0 \\ 1+x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y, \quad 1+y-2x=0, \quad y=1$. Олай болса, $x=y=1$.

Жауабы: $(1;1)$.

1.8 Рационал теңсіздіктерді шешу

Бұрын, біз қарапайым сандық функцияларға

$$y=\mathrm{P}_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+....+a_{n-1}x+a_n$$

көпмүшесін және $y=\mathrm{P}_n(x)=\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ екі көпмүшенің қатынасын қарастырайық.

1 – анықтама. Егер $\mathrm{P}_n(a)=0$ болса, a саны $y=\mathrm{P}_n(x)$ функциясының нөлі, немесе $\mathrm{P}_n(x)$ көпмүшенің түбірі деп аталады.

Көпмүшенің нөлдері (түбірі) оның дәрежесінен артық емес.

2 –анықтама. Рационал функциялардан тұратын теңсіздікті рационал теңсіздіктер деп атайды.

$\frac{\mathrm{P}_n(x)}{Q_m(x)}>0$ немесе $\frac{\mathrm{P}_n(x)}{Q_m(x)}<0$, $\frac{\mathrm{P}_n(x)}{Q_m(x)}\geq 0$ немесе $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\leq 0$ теңсіздіктері - рационал теңсіздіктер.

Рационал теңсіздіктерді аралық (интервалдар) әдісімен шешу тиімді.

Рационал теңсіздіктерді шешу үшін:

1. Функцияны канондық түрде көбейткіштерге жіктеу керек (яғни x-тің барлық коэффициенттері оң сандар).
2. Функцияның барлық нөлдерін (түбірлерін(тауып, оны сан өсінде өсу ретімен белгілеп, салу керек. басталады (толқын түрінде) және функцияның түбірінен өткенде кезекпен ауысып тұрады.
3. Егер функцияның көбейткіштерге жіктелуі канондық түрде болмаса, онда функция таңбасы оң төменгі жағынан басталады және функция түбірінен өткенде таңба кезекпен ауысып отырады.
4. Егер $R(x)>0$ функцияның оң мәндерін білу керек болса, онда сан өсінің жоғары жағындағы аралықтарды жазамыз. Ал, егер $R(x)<0$ мәндерін білу үшін сан өсінің төменгі жағындағы аралықтарды жазамыз.
5. Қайталама (еселік) түбірді анықтаймыз: егер функцияның жұп рет қайталама түбірі болса, онда функция өзінің таңбасын осы түбірден өткенде екі рет қарсы таңбаға өзгертеді, егер қайталама түбір тақ рет болса, онда осы түбірден өткенде функция таңбасын қарама – қарсы таңбаға өзгертеді.

1. Теңсіздікті шешіңдер: $\dfrac{x^2+7x+10}{(x+3)^2}\le 0$

Шешуі. $x^2+7x+10=0$ $\qquad$ $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$

$\left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=-5 \end{array}\right.$ $\qquad$ $\dfrac{(x+2)(x+5)}{(x+3)^2}\le 0,\ \ x=-3$ қайталама түбір,

екі рет қайталайды.

Жауабы: $[-5;-3)\cup(-3;-2]$

Модуль таңбасына тәуелді теңсіздіктерді шешу үшін, алдымен модульдің анықтамасын еске түсірейік.

3 –анықтама. x нақты санның модулі, немесе абсолюттік шамасы деп $x\ge 0$ боләанда x санының өзін айтады, егер $x<0$ болса $(-x)$ санын айтады, оны $|x|$ белгілейді. Сонымен $|x|=\begin{cases} x, \text{егер } x\ge 0 \\ -x, \ \text{егер} x<0 \end{cases}$

Модуль таңбасына тәуелді теңсіздіктерді шешуде тиімді қасиеттерді атап өтейік.

I. $|\alpha|<\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha<\beta \\ \alpha>-\beta \end{cases}$ $\qquad$ II. $|\alpha|>\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha>\beta, \\ \alpha<-\beta \end{array}\right.$

III. $|\alpha|<\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \beta>0, \\ \alpha^2<\beta^2 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} \beta>0 \\ (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)<0 \end{cases}$

IV. $|a|>\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \beta\ge 0 \\ \alpha^2>\beta^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \beta<0 \\ \forall\alpha \end{cases} \end{array}\right.$ немесе $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \beta\ge 0, \\ (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \beta<0 \\ \forall\alpha \end{cases} \end{array}\right.$

V. $|\alpha|>|\beta| \Leftrightarrow \alpha^2>\beta^2$; $\qquad$ VI. $|\alpha|<|\beta| \Leftrightarrow \alpha^2<\beta^2$

Теңсіздікті шешіңдер:

1. $|x-2|>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2>2, \\ x-2<-2 \end{array}\right.$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l} x>4, \\ x<0 \end{array}\right.$

Жауабы: $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$

2. $|x+2|-|x|>0$

Шешуі. 1-тәсіл. $|x+2|>x$ $\qquad$ $\left[\begin{array}{l} x+2>|x|, \\ x+2<-|x| \end{array}\right.$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l} |x|<x+2, \\ |x|<-x-2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<x+2 \\ x>-x-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-x-2, \\ x>x+2 \end{cases} \end{array}\right.$ $\qquad$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<2, \\ x>-x-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1, \\ 0>2 \end{cases} \end{array}\right.$ $\qquad$ $\begin{cases} \forall x \\ x>1 \end{cases}$

Жауабы: $(-1;+\infty)$

2 –тәсіл. $|x+2|>|x| \Leftrightarrow (|x+2|)^2 > (|x|)^2;$ $\quad (x+2)^2 - x^2 > 0, \quad |x|^2 = x^2$

$(x+2+x)(x+2-x) > 0;$ $\quad 2(x+1)\cdot 2 > 0 \Rightarrow x > -1$

Жауабы: $(-1;+\infty)$

1.9 Иррационал теңсіздіктер. Көрсеткіштік және логарифмдік теңсіздіктер

Иррационал теңсіздіктерді шешуде иррационал теңдеулерді шешудегі әдістер қолданылады: теңсіздіктің екі жағында бірдей натурал дәрежеге шығару; жаңа айнымалы енгізу және т.б.

Теңсіздікті шешуде:

1) Берілген теңсіздіктің анықталу облысын табу керек;
2) Теңсіздіктердің мәндестігі туралы сөйлемдерді басшылыққа алу керек;
3) Табылған түбірді берілген таңдаудың анықталу облысына жататындарын анықтаймыз, анықталу облысына жатпайтындар шешім болмайды. Есеп шығаруда қажетті

Негізгі қасиеттері:

1. Егер $\sqrt{a} < b,$ онда $\begin{cases} b \ge 0, \\ a \ge 0, \\ a < b^2 \end{cases}$

2. Егер $\sqrt{a} > b,$ онда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \ge 0, \\ a > b^2 \end{cases} \\ \begin{cases} b < 0 \\ a \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$

3. Егер $a\sqrt{b} \le 0,$ онда $\begin{cases} ab^2 \le 0, \\ b \ge 0. \end{cases}$

4. Егер $a\sqrt{b} \ge 0,$ онда $\begin{cases} ab^2 \ge 0, \\ b \ge 0. \end{cases}$

5. Егер $\sqrt{a} > \sqrt{b},$ онда $\begin{cases} b \ge 0, \\ a > b, \end{cases}$

6. Егер $\sqrt{a} < \sqrt{b},$ онда $\begin{cases} a \ge 0, \\ a < b \end{cases}$

7. Егер $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c},$ онда $\begin{cases} a \ge 0, \\ b \ge 0, \\ c \ge 0, \\ a + 2\sqrt{ab} + b > c. \end{cases}$

8. Егер $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{c},$ онда $\begin{cases} a \ge 0, \\ b \ge 0, \\ c \ge 0, \\ a + 2\sqrt{ab} + b < c. \end{cases}$

Теңсіздікті шешіңдер:

$$1.\ \sqrt{x^2-3x+2} > x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3\ge 0, \\ x^2-3x+2 > (x+3)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+3<0, \\ x^2-3x+2\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge -3, \\ x<-\dfrac{7}{9} \end{cases} \\ \begin{cases} x<-3 \\ (x-1)(x-2)\ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Жауабы: $\left(-\infty;\ -\dfrac{7}{9}\right)$

2. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}} > \sqrt{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ 4-\sqrt{1-x} > 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ \sqrt{1-x} < 2+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ 2+x\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \\ 1-x<(2+x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ x\ge -2 \\ x\le 1 \\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Жауабы: $\left(\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2};\ 1\right]$

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $\text{a}>0,\ \text{a}\ne 1$. Көрсеткіштік теңсіздіктерін келесі теоремаларға сүйеніп шешеді.

1 – теорема. Егер $a>1$ болса, онда $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ теңсіздігі $f(x)>g(x)$ теңсіздігімен мәндес.

2 – теорема. Егер $0<a<1$ болса, онда $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ теңсіздігі $f(x)<g(x)$ теңсіздігімен мәндес.

Теңсіздіктерді шешіңдер: 3. $4^x-2^{2(x-1)}+8^{\frac{2}{3}(x-2)}>52$

Шешуі: $4^x-4^{x-1}+4^{x-2}>52,\ 4^x-\dfrac{4^x}{4}+\dfrac{4^x}{16}>52,\ 13\cdot 4^x>16\cdot 52,\ 4^x>4^3 \Leftrightarrow x>3.$

Жауабы: $(3;\ +\infty)$

4. $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{3(2x-7)}\cdot 12{,}25^{\frac{4x+1}{2}}\ge 1$

Шешуі: Есеп шартынан

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)}\cdot\left(\frac{49}{2}\right)^{\frac{4x+1}{2}}\ge 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)}\ge\left(\frac{2}{7}\right)^{4x+1} \Leftrightarrow 3(2x-7)\le 4x+1,\ \ \text{x}\le 11.$$

Жауабы: $(-\infty;\ 11)$

5. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$

Шешуі: $4\cdot 2^x-8\cdot 2^x-16\cdot 2^x>5\cdot 5^x-25\cdot 5^x,\ -20\cdot 2^x>-20\cdot 5^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x<1,$

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^x<\left(\dfrac{2}{5}\right)^0,\ \ \text{x}>0.$

Жауабы: $(0;+\infty)$

(1) $\ell og_a f(x) > \ell og_a g(x),$ $\mathrm{a} > 0,$ $\mathrm{a} \neq 1$ логарифмдік теңсіздіктерін шешуде келесі теоремаларәа мәндес.

3 – теорема. Егер $a > 1$ болса, онда $\ell og_a f(x) > \ell og_a g(x)$ теңсіздігі

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \qquad (2)$$

теңсіздіктер жүйесімен мәндес.

3 – теорема. Егер $0 < a < 1$ болса, онда $\ell og_a f(x) > \ell og_a g(x)$ теңсіздігі
4

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \qquad (3)$$

теңсіздіктер жүйесімен мәндес.

Ескерту. 1) (2) жүйедегі бірінші теңсіздікті жазбауға болады, өйткені ол екінші және үшінші теңсіздіктерден шыәады. Осы сияқты (3) жүйедегі екінші теңсіздікті жазбауға болады.

2) (2) және (3) жүйедегі алғашқы екі теңсіздіктері (1) теңсіздіктің анықталу облысын анықтайды.

3) Логарифмдік теңсіздіктерді шешуде, тәжірибе көрсеткендей берілген теңсіздіктің анықталу облысын табу міндетті емес, өйткені берілген теңсіздіктің салдары болатын теңсіздіктер жүйесінде теңсіздіктің анықталу облысы бірге қаралады.

6. $\ell g(x-2) + \ell g(27-x) < 2$

Шешуі:

$$\ell g(x-2) + \ell g(27-x) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ 27-x > 0, \\ \ell g(x-2)\cdot(27-x) < \ell g 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < 27, \\ -x^2 + 29x - 54 < 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < 27, \\ x^2 - 29x + 154 > 0, \end{cases} \qquad \mathrm{x}^2 - 29x + 154 = 0; \quad \left| \begin{array}{l} \mathrm{x} = 22 \\ x = 7 \end{array} \right. \quad \begin{cases} \mathrm{x} > 2, \\ x < 27 \\ (x-22)(x-7) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 < x < 27 \\ (-\infty; 7) \cup (22; +\infty) \end{cases} \Rightarrow (2; 7) \cup (22; 27);$$

Жауабы: $(2; 7) \cup (22; 27);$

7. $\ell og_{x-3}(2x-5) > \ell og_{x-3}(30-6x)$

Шешуі:

$$\ell og_{x-3}(2x-5) > \ell og_{x-3}(30-6x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3>1 \\ 2x-5>30-6x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x-3<1 \\ 0<2x-5<30-6x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x>4 \\ x>4\frac{3}{8} \\ x<5 \end{cases} & \left(4\frac{3}{8};5\right) \\ \begin{cases} 3<x<4 \\ x>2.5 \\ x<4\frac{3}{8} \end{cases} & (3;4) \end{array}\right.$$

Жауабы: $(3;4)\cup\left(4-;27\right)$;

1.10 Параметрлі теңдеулер, теңдеулер және теңсіздіктер жүйелерін шешу

$F(x;a)=0$ (1) теңдеуі берілсін

Егер осы теңдеуді қанағаттандыратын $(x;a)$ қос санын табу сауалы қойылса, онда (1) теңдеуі екі айнымалысы (x және a) бар теңдеу. Бірақ, (1) теңдеуге сауалды басқаша қоюға болады. Егер а-ға қандай да бір белгілі мәндерді беруге болатын болса, онда (1) теңдеуді бір айнымалысы бар (x) теңдеу ретінде қарауға болады. Осы теңдеудің шешімі а-ның таңдалған мәнімен анықталады.

1-анықтама. Егер қандай да бір А сандар жиынында а-ның әрбір мәні үшін (1) теңдеуді шешу мәселесі қойылса, онда (1) теңдеуді x айнымалысы бар және а параметрлі теңдеу деп атайды, ал А – параметрдің өзгеру облысы.

2-анықтама. x айнымалысы бар және а параметрлі (1) теңдеуді шешу– нақты сандар жиынында параметрдің барылқ нақты мәндерінде (1) теңдеуден шыққан теңдеулер тобын (класын) шешу.

Мысалы, $2a(a-2)x=a-2$ теңдеуінде а параметрдің өзгеру облысы $A=\{-1;0;1;2;3\}$жиыны. Осы теңдеуден теңдеулер тобын (класын) жазайық:

$$\left\{\begin{array}{ll} 6x=-3, & \text{a = -1} \\ 0\cdot x=-2, & \text{a = 0} \\ -2x=-1, & \text{a = 1} \\ 0\cdot x=0, & \text{a = 2} \\ 6\cdot x=1, & \text{a = 3} \end{array}\right\}$$

Параметрлі теңдеуде шешуде, параметрдің мәндерінің жиынын бірнеше бөлік жиындарға бөліп қарастырған дұрыс.

1. Теңдеуді шешіңдер: $x^4+x^3-3ax^2-2ax+2a^2=0,\ a>0$

Шешуі. Берілген теңдеуді $2a^2-(3x^2+2x)a+x^4+x^3=0$ түрінде жазамыз. Осы теңдеуден а-ны табамыз.

$a=\dfrac{x^2}{2}$, $a=x^2+x$ тең. $x^2+x-a=0$ және $x^2=2a$ теңдеулерінен $x_{1,2}=\pm\sqrt{a};\ x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

Жауабы: $x_{1,2}=\pm\sqrt{a};\ x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

2. а-ның қандай мәндерінде $x^3+6x^2+11x+a=0$ теңдеуінің түбірлері арифметикалық прогрессия құрайды?

Шешуі: $x_1=p-d,\ x_2=p,\ x_3=p+d$ берілген теңдеудің түбірі, арифметикалық прогрессия құрайтын, d – прогрессияның айырмасы болсын. Сонда келесі теңдік орында болады.

$$x^3+6x^2+11x+a=(x-p+d)(x-p)(x-p-d)$$
$$x^3+6x^2+11x+a=x^3-3px^2+3p^2x-d^2x-p^3$$

x^2-тың коэффициенттерін теңестіріп $6=-3p,\ p=-2$ табамыз.

$x_2=p;\ x_2=-2$ - ні берілген теңдеуге апарып қойып, параметр $a=6$ таптық.

Жауабы: $a=6$

3. Теңдеуді шешіңдер: $\dfrac{x}{a(x+1)}-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{3-a^2}{a(x-1)(x+2)}$ (2)

Шешуі: $a=0$ боләанда теңдеудің мағынасы болмайды, сондықтан түбірі болмайды. Егер $a\neq 0$ болса, онда теңдеу түрлендіруден кейін $x^2+2(1-a)x+a^2-2a-3=0,$ (3) түріне келеді.

Осы теңдеуден $\dfrac{D}{4}=(1-a^2)-(a^2-2a-3)=4.\ x_1=a+1,\quad x_2=a-3$

(2) теңдеуден (3) теңдеуге өткенде (2) теңдеудің анықталу облысы кеңейеді, бөгде түбір болуы мүмкін. Сондықтан тексеру қажет.

Тексеру. Табылған х-тен $x_1+1=0,\ x_1+2=0,\ x_2+1=0,\ x_2+2=0$ шығарып тастаймыз.

Егер $x_1+1=0,\ (a+1)+1=0,$ онда $a=-2$. $a=-2$ болғанда $x_1-(2)$ теңдеуге бөгде түбір.

Егер $x_1+2=0,\ (a+1)+2=0,$ онда $a=-3$. $a=-3$ болғанда $x_1-(2)$ теңдеуге бөгде түбір.

Егер $x_2+1=0,\ (a-3)+1=0,$ онда $a=2$ Бұл жағдайда $x_2-(2)$ теңдеуге бөгде түбір.

Егер $x_2+2=0,\ (a-3)+2=0,$ онда $a=1$. $a=1$ болғанда $x_2-(2)$-ге бөгде түбір.

1) егер $a=-3,$ онда $x=-6;$

2) егер $a=-2$, онда $x=-5;$

3) егер $a=0$, онда түбірі жоқ;

4) егер $a=1$, онда $x=2;$

5) егер $a = 2$, онда $x = 3$;

6) егер $\begin{cases} a \neq -3, \\ a \neq -2, \\ a \neq 0, \\ a \neq 1, \\ a \neq 2, \end{cases}$ онда $\begin{matrix} x_1 = a+1, \\ x_2 = a-3 \end{matrix}$

4. $\begin{cases} -4x + ay = 1 + a \\ (6+a)x + 2y = 3 + a, \end{cases}$ (4) жүйесінің шешімі болмайтын параметр а-ның барлық мәндерін табыңдар.

Шешуі: Теңдеулер жүйесі:

$$\frac{-4}{6+a} = \frac{a}{2} \neq \frac{1+a}{3+a} \qquad (5)$$

орындаләанда ғана үйлесімсіз.

$\frac{-4}{6+a} = \frac{a}{2}$ теңдеуінен $a_1 = -2;\ \mathrm{a}_2 = -4$

$\frac{a}{2} = \frac{1+a}{3+a}$ теңдеуінен $a = -2;\ \mathrm{a}_2 = -4$

Ал $\frac{a}{2} \neq \frac{1+a}{3+a}$ жарты, егер $\begin{cases} a \neq 1; \\ a \neq -2 \end{cases}$ болса орындалады.

$\begin{cases} a = -2;\ \mathrm{a} = -4 \\ a \neq 1 \\ a \neq -2 \end{cases}$ жүйесінен, (5) шарты $a = -4$ теңдігіне мәндес. (4) $a = -4$ болғанда шешімі болмайды.

5. $\frac{7x - 11}{a+3} > (1 - 3a)\frac{x}{4}$, (6) теңсіздігін шешіңдер.

Шешуі $a + 3 = 0,\ \mathrm{a} = -3$. Келесі үш жағдайда қарастырамыз.

1) $a < -3$; 2) $a = -3$; 3) $a > -3$.

1) $a < -3$. Бұл жаәдайда $a + 3 < 0$ және (6) теңсіздік $4(7x - 11) < (a+3)(1+3a)x$ теңсіздігімен мәндес.

$$(3a^2 + 10a - 25)x > -44, \qquad (7)$$

$3a^2 + 10a - 25 = 0$ делік, $a = \frac{5}{8};\ \mathrm{a} = -5$. (бақылау нүктелері) (7) теңсіздіктің шешімін келесі жағдайларда қарастырамыз.

$$\begin{cases} a < -5;\ \mathrm{a} > \frac{5}{3}, \\ a < -3; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -5;\ \mathrm{a} = \frac{5}{3}, \\ a < -3; \end{cases} \quad \begin{cases} -5 < a < \frac{5}{8}, \\ a < -3, \end{cases}$$

$a < -5;\ \mathrm{a} = -5;\ -5 < \mathrm{a} < -3.$

Бірінші жағдайда $3a^2 + 10a - 25 > 0$, және (7) теңсіздіктен $x > -\frac{44}{3a^2 + 10a - 25}$.

Екінші жағдайда (7) теңсіздік 0. $x > -44$ (кез келген х үшін). Ақырында, $-5 < a < -3$, онда $3a^2 + 10a - 25 < 0$ және (7) теңсіздіктен $x < -\frac{44}{3a^2 + 10a - 25}$.

2) $a=-3$ жағдайын қарастырамыз: бұл жаәдайда (6) теңсіздіктің шешімі болмайды.

3) $a>-3$ жағдайда $a+3>0$ және (6) теңсіздік $4(7x-11)<(a+3)(1+3a)x$, немесе

$$(3a^2+10a-25)x<-44, \tag{8}$$

(7) теңсіздік үшін а параметрінің бақылау мәндері $a=\frac{5}{3}$ және $a=-5.$ Ал $a>-3$ болғанда бақылау мәні $a=\frac{5}{3}.$ (8) теңсіздікті шешуде келесі жағдайлар қарастырылуы керек: $a>\frac{5}{3};\ \mathrm{a}=\frac{5}{3};\ -3<\mathrm{a}<\frac{5}{3}.$ Бірінші жағдайда: $x<-\frac{44}{3a^2+10a-25}$, екінші жағдайда (8)-дің үшіншісінде $x>-\frac{44}{3a^2+10a-25}.$

Жауабы: 1) егер $a=-3;\ \mathrm{a}=\frac{5}{3},$ онда теңсіздіктің шешімі болмайды; 2) егер $a<-5;\ -3<\mathrm{a}\frac{5}{3},$ онда $x>-\frac{44}{3a^2+10a-25}$; 3) егер $-5<a<-3,\ \mathrm{a}>\frac{5}{3},$ онда $x<-\frac{44}{3a^2+10a-25}$; 4) егер $a=-5,$ онда $-\infty<x<+\infty.$

II Тригонометрия

2.1 Тригонометриялық өрнектерді теңбе-тең түрлендіру. Тригонометриялық теңдеулер, теңдеулер мен теңсіздіктер жүйесін шешу

Тригонометриялық есептерді шешу үшін тригонометриялық функциялардың қасиеттерін, тригонометриялық формулаларды, тригонометриялық теңдеулерді шешуді білу керек.

Тригонометриялық және кері тригонометриялық функцияларды байланыстыратын негізгі формулалар:

$$\sin(\arcsin x)=\cos(\arccos x)=x(-1\le x\le 1).$$
$$tg(arctgx)=ctg(arcctgx)=x(x\ne 0).$$
$$\sin(\arccos x)=\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}\quad(-1\le x\le 1)$$
$$tg(arcctgx)=ctg(arctgx)=\frac{1}{x}(\mathrm{x}\ne 0).$$

$\arcsin(\sin x)=x$ қатысы барлық уақытта ақиқат емес, мысалы: $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\ne\frac{5\pi}{6}.$

$$\left.\begin{aligned} &\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};\\ &\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}=arcctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};\\ &arctgx=arcctg\frac{1}{x}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right\}\ x>0$$

$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2};\ \mathrm{arctgx}+\mathrm{arcctgx}=\frac{\pi}{2}.$ Тригонометриялық теңдеулерді шешу әдістері әр түрлі. Олай болса, мұны шешу үшін тригонометриялық функциялардың қасиеттерін өрнектейтін формулаларды білу керек. Бір тригонометриялық теңдеу шешімдерінің әр түрлі жиындарының бүтін санды параметрлерін бірнеше әріппен де, сондай-ақ бір ғана әріппен де өрнектеуге болады. Егер тригонометриялық теңдеулер шешімдерінің жиыны өзара салыстырылатын болса, онда бүтін санды параметрлерін бірнеше әріппен өрнектеп жазған ыңғайлы болады. Кез келген күрделі тригонометриялық теңдеулерді шешу жай тригонометриялық теңдеулерді шешу түріне, яғни $\sin x=a,\ \cos\mathrm{x}=\mathrm{a},\ \mathrm{tgx}=\mathrm{a}$ және $ctgx=a$ теңдеулерін шешуге келтіріледі.

Тригонометриялық теңдеуді шешудің негізгі әдістері:

1. Берілген тригонометриялық теңдеу қандай да бір тригонометриялық функцияға қатысты алғанда алгебралық теңдеуді шешуге келтіріледі.

2. Берілген тригонометриялық теңдеудің сол жақ бөлігі көбейткіштерге жіктеледі, яғни $f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots\cdot f_n(x)=0$ түріне келтіріліп, шешіледі.

Жиі кездесетін кейбір тригонометриялық теңдеулердің түрлері.

1. Негізгі формулалар арқылы алгебралық теңдеуге келтірілетін теңдеулер.

$$3-\cos^2 x-3\sin x=0$$

2. $f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots\cdot f_n(x)=0$ көбейтіндісіне келтірілетін теңдеулер.

$$\sin x-1=\sin x\cdot\cos x-\cos x$$

Егер, бұл теңдеудің сол жақ бөлігі көбейткіштерге жіктелсе, онда әрбір көбейткішті нөлге теңестіру керек. Теңдеулердің шешімі берілген теңдеулердің анықталу облысына енетін сандар болады.

3. Тригонометриялық функцияларға, яни $\sin x, \cos\mathrm{x}, \mathrm{tgx}, \mathrm{ctgx}$ қатысты алғанда біртектес теңдеулер.

$$a\sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c\cdot\cos^2 x=0(a\neq 0,\mathrm{b}\neq 0,\mathrm{c}\neq 0)$$

4. Қосу формулаларының көмегімен шешілетін теңдеулер.

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$$

5. Көмекші аргумент енгізу әдісімен шешілетін теңдеулер. $a\sin x+b\cos x=c.\ (\mathrm{a}\neq 0,\mathrm{b}\neq 0,\mathrm{c}\neq 0).$

$$\sqrt{a^2+b^2}\neq 0,\quad \cos\varphi=\frac{\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{a}^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2+b^2}.$$

Берілген теңдеу $\cos x \cdot \cos\varphi + \sin x \cdot \sin\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ теңдеуін шешуге келтіріледі.

6. Тригонометриялық функциялардың қосындысын көбейтіндіге түрлендіру арқылы теңдеуді шешу. Түрлендіру барысында келтіру формулалары да пайдалынады.

$$\sin 2x + \sin(\pi - 8x) = \sqrt{2}\cos 3x$$

7. Тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін қосындыға түрлендіру арқылы шешу.

$$\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$$

8. Тригонометриялық функциялардың дәреже көрсеткішін төмендету формуласын пайдаланып түрлендіру арқылы шешу.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$$

9. $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$ түріндегі теңдеуді шешу.

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{2\sin x} - \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0$$

Мысалдар арқылы, тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктер жүйесін қарастырайық.

1. Жүйені шешіңдер: $\begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ \cos(x - y) = 0 \end{cases}$

Шешуі: $\begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ \cos(x - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = k\pi, \ \mathrm{k} \in \mathrm{Z} \\ x - y = \pi + 2m\pi, \ \mathrm{m} \in \mathrm{Z}; \end{cases} \begin{cases} x = (2m + k + 1)\dfrac{\pi}{2} \quad \mathrm{k} \in \mathrm{Z} \\ y = (k - 2m - 1)\dfrac{\pi}{2}, \ \mathrm{m} \in \mathrm{Z} \end{cases}$

Параметрді бір әріппен белгілеуге болмайды, сондықтан k және m әріптерімен белгіледік. Егер бір ғана әріппен белгілесек шексіз шешімдерінің жиынын жоғалтқан болар едік.

Жауабы: $x = (2m + k + 1)\dfrac{\pi}{2}; \ \ \mathrm{y} = (\mathrm{k} - 2\mathrm{m} - 1)\dfrac{\pi}{2}, \ \ \mathrm{k}, \mathrm{m} \in \mathrm{Z}$

2. Жүйені шешіңдер: $\begin{cases} x + y = \alpha \\ tgx + tgy = m \end{cases}$

Шешуі:

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ tgx + tgy = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \alpha \\ \dfrac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y} = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \alpha \\ \dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos(x - y)} = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \alpha \\ \cos(x - y) = \dfrac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha, \end{cases}$$

бұдан $x - y = 2\pi n + \arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right)$ немесе $y - x = 2\pi n - \arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right)$ $n \in Z$.

Бұлардың әрқайсысын $x + y = \alpha$ теңдеуімен бірге қарастырсақ, екі жүйені аламыз.

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = 2\pi n + \arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right) \end{cases} \quad \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$$

және

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ y - x = 2\pi n + \arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right) \end{cases} \quad \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$$

Дегенмен, осы екі жүйенің бір-бірінен айырмашығы белгісіздердің орындарында ғана, сондықтан бір жүйені шешу жеткілікті.

$$x_1(= y_2) = \pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right),$$

$$y_1(= x_2) = -\pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right), \quad \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$$

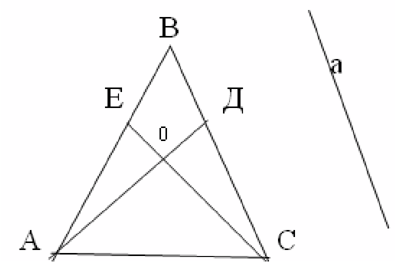
Жауабы: $x_1(= y_2) = \pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right),$

$$y_1(= x_2) = -\pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right), \quad \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$$

III Геометрия. Планиметрия.

3.1 Планиметриядағы негізгі аксиомалар мен түсініктер. Үшбұрыш, төртбұрыш, тік төртбұрыш, параллелограм, ромб, квадрат, көпбұрыш және олардың параметрлері мен аудандары. Синустар, косинустар теоремалары және т.б.

Планиметриялық есептерді үшбұрыштың элементтерінің арасындағы негізгі метрикалық қатынастарды пайдаланып шығару – қарапайым есептерді шешу түріне жатады. $\Delta \mathrm{AB}C$-ны қарастырайық, келесі белгілеулерді енгізейік:



$a = BC$; b = AC, c = AB. $R - \Delta ABC$ -ға сырттай сызылған шеңбердің радиусы, r -іштей сызылған шеңбердің радиусы, $h_a - BC$ қабырғасына түсірілген биіктік, $s - \Delta ABC$ -ның ауданы.

Сонда, 1. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (синустар теоремасы)

2. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (конустар теоремасы)

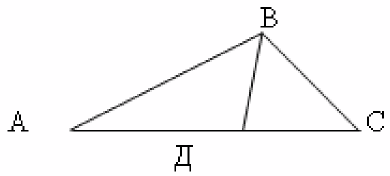
3. $S_\Delta = \frac{1}{2}h_a \cdot a,\ S_a = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin A,\ S_\Delta = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot z = p \cdot z$

4. $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Герон формуласы)

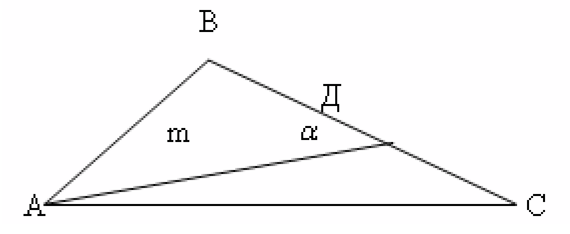
5. $S_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

$\Delta -$ң биссектрисасының қасиеті: Үшбұрыштың бұрыштың биссектрисасы қарсы жатқан қабырғаны іргелес жатқан қабырғаларға пропорциялар кесінділерге бөледі .

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC.}$$



Үшбұрыштың медианаларының формуласы косинустар теоремасының көмегімен алуға болады.



$AD = M_a,\ \angle BDA = \alpha, AB = C, AC = b, BC = a$

1) $\Delta\ ABCD -$дан косинустар теоремасы бойынша:

$C^2 = \frac{a}{4} + m_a^2 - 2am_2 \cdot \cos\alpha$;

2) $\Delta ADC -$дан:

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - am_\omega \cos(\pi - \alpha) = \frac{a^2}{4} + m_a^2 + am_a \cos\alpha.$$

1) мен 2)-ні қосып, m_a – ны табамыз: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}$

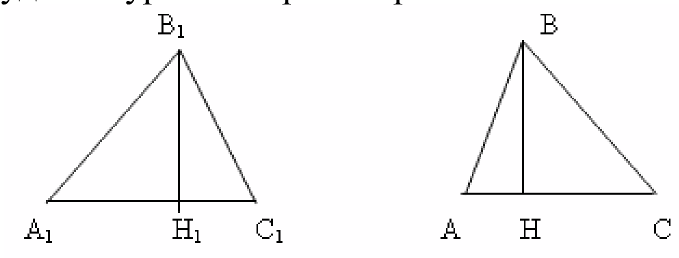
Теорема. Үшбұрыштың медианалары бір нүктеде қиылысады және қиылысу нүктесі үшбұрыш төбесінен. Есептегенде 2 : 1 болады. Қиылысу нүктесін оның ауырлық центрі деп атайды.

Параллель түзулер бұрыштың қабырғаның пропорционал кесінділерге бөледі.

Теорема. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы оның іргелес емес екі бұрышының қосындысына тең.

Анықтама. Үшбұрыштың биіктіктері бір нүктеде қиылысады, оны үшбұрыштың орт центрі деп атайды.

Үшбұрыштың ауданы туралы теоремалар.



Екі үшбұрышты қарастырайық: ΔABC және $\Delta A_1B_1C_1$

1. Егер екі үшбұрыш ұқсас болса, онда $\frac{S_\Delta ABC}{S_\Delta A_1B_1C_1} = \frac{(AB)^2}{(A_1B_1)^2}$ болады.

2. Егер екі үшбұрыштың табандары $AC = A_1C$ болса, онда олардың аудандарының қатынысы биіктіктерінің қатынасындай болады. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{BH}{B_1H_1}$

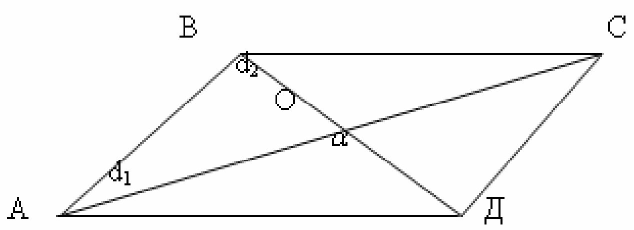
3. Егер екі үшбұрыштың биіктіктері тең болса, онда олардың аудандарының қатынасы табандарының қатынасындай. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AC}{A_1C_1}$

Төртбұрыштар

Дөңес төртбұрыштың ауданы: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\alpha,$ α – диагональдарының арасындағы бұрыш.

Тік төртбұрыштың ауданы: $S = a \cdot b$ ($a_1 b$ – қабырәалары). $s = d^2 \sin\alpha \cdot$ (α – диоганалдарының арасындағы бұрыш, d – диагоналі)

Параллелограмның қасиеттері



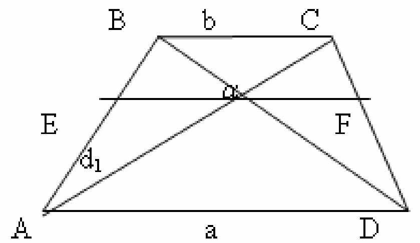
1. $AB = CD$ және $AD = BC$
2. Диагоналдарының қиылысу нүктесі 0 – оның симметрия центрі.
3. Қарама-қарсы бұрыштары тең: $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$
4. Іргелес жатқан бұрыштарының қосындысы 2α немесе 180°
5. $2(a^2 + b^2) = D_1^2 + D_2^2$.

Параллелограманың ауданы: $S = a \cdot h(h - \text{биіктігі})$ $S = a \cdot b \cdot \sin A$; $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$ (α -диагоналдарының арасындағы бұрыш)

Ромбының диагоналдары өзара перпендикуляр., бұрыштарының биссектрисасы және ромбының симметрия осьтері болады.

Ромбының қабырғасының: $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$ тең.

Ромбының ауданы: $S = a \cdot h$ ($h -$ биіктігі); $S = a^2 \cdot \sin A$; $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$



Трапецияның екі қабырғасы параллель төртбұрыш. $АД \parallel BC$, $АД$ және BC трапецияның табандары, ал $AB, СД$ – бүйір қабырғалары.

Трапецияның бүйір қабырғасындағы іргелес жатқан бұрыштарының қосындысы $180^\circ \cdot \angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle C + \angle Д = 180^\circ$

Егер $AB = CD$ болса, ол тең бүйірлі трапеция. Тең бүйірлі трапецияның қасиеттері.

1. Табандарындағы бұрыштары тең $(\angle A = \angle D, \angle B = \angle C)$.
2. Оның диагоналдары тең.
3. Тең бүйірі трапецияға ғана сырттай теңбер сызуға болды.

Трапецияның орта сызыәы 1) $EF \parallel AD \parallel BC$

2) $EF = \frac{a+b}{2}$

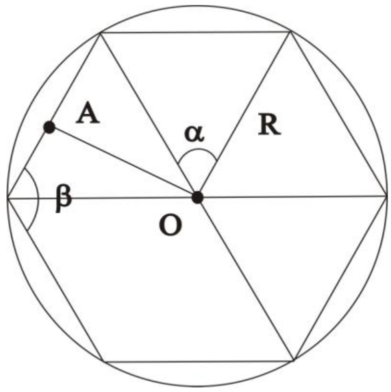
2) Трапецияның орта сызығы оның екі табанын қосатын кез келген кесіндіні тең екіге бөледі. Трапецияның ауданы: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ ($h -$ биіктігі). $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$.

Дөңес n бұрышты көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы: $C = 180^\circ (n-2)$

Дұрыс n бұрышты көпбұрыштың ішкі бұрыштың қосындысы. $C' = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n} \cdot$ (n -қабырғаларының саны) $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$; $\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$;

Қабырғасы: $a = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n} = 2k \cdot tg\frac{180^\circ}{n}$

Периметрі: $p = a \cdot n$



Сырттай сызылған шеңбердің радиусы арқылы көпбұрыштың қабырғаларын өрнектеу.

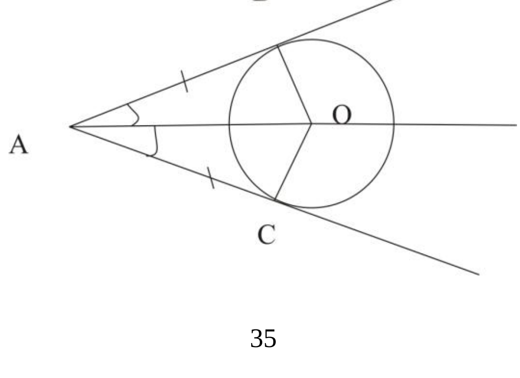
$a_3 = R\sqrt{3}$; $a^4 = R\sqrt{2}$; $a_6 = R$; $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $a^{10} = R \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, Дұрыс көпбұрыштың ауданы: $s = \frac{1}{2}a \cdot n \cdot OA$ ($OA-$апофема) $S = \frac{1}{2}a \cdot n \cdot z(OA-$апофемасы, немесе іштей сызылған шеңбердің радиусы). $S = p \cdot z$

3.2. Щеңбер дөңгелек. Жана мен қиюша. Доға мен хорда. Іштей және сырттай сызылған шеңбер

Планиметриялық есептерді шығару үшін денелер туралы негізгі ұғымдарды қасиеттерін т.б. білу керек.

Центрі 0 нүктесінде, радиусы R щеңбер. $OC = OД = R$ $AB-$диаметр, $CД-$хорда, $KL-$жанама, $P-$жанасу нүктесі.

Аныктама. Щеңбердің екі радиусы және доғасымен шектелген фигура щеңбер секторы деп аталады. Сегмент –хорда және оған сәйкес доғамен шектелген дөңгелектең бөлігі(суретте боялған). Дөңгелек секторы-$\Delta COД$ мен сегменттен турады. Щеңберге жанаманың қасиеттері.



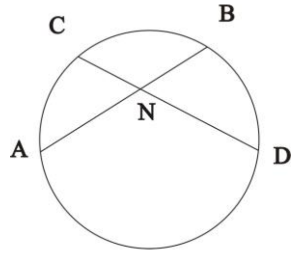
1. Жанасу нүктесі арқылы жүргізілген жанама щеңбердің радиусы на перпендикуляр. $OB \downarrow AB$.
2. Егер щеңбердің тыс жатқан бір A нүктесін щеңберге екі жанама жүргізілсе $(B,C-$жанасу нүктелері$)$ онда 1) $AB = AC$; 2) щеңбердің центрі $\angle BCA-$ның биссектрисаның бойында жатады.

Щеңбердегі метрикалық қатыстар.

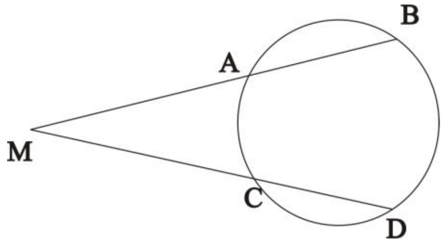
1. Егер AB және $CД$ -щеңбердің хордалары және $AB, CД$ түзулері бір E нүктесінде қиылысатын болса, онда

$NA \cdot NB = NC \cdot NД$ (3 –сурет, а,ә)

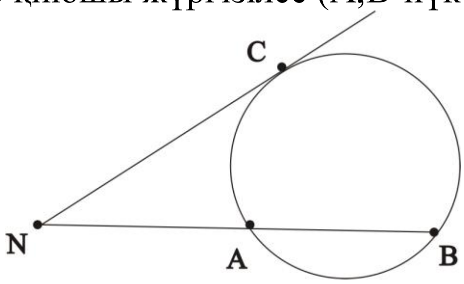
а)



ә)

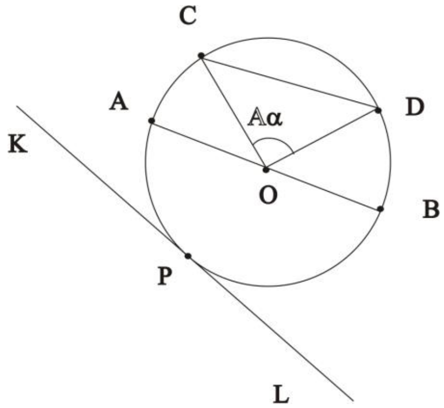


Егер шеңберден тыс жатқан бір N нүктесінен шеңберге NC жанама мен (С-жанасу нүктесі) шеңберге қиюшы жүргізілсе (А,В-нүктесінде қиылысады)



(4сурет)

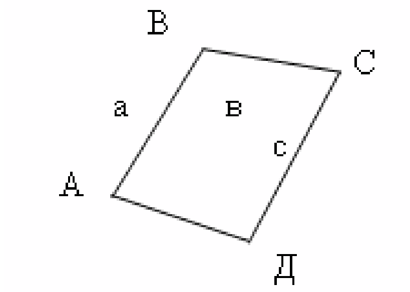
Доға ұзындығы. Дөңгелек пен оның бөліктерінің ауданы.
Щеңбер ұзындығы: $l = 2PR$
Доға ұзындығы: $l = R \cdot \alpha$ (1 сурет)



(егер центрлік бұрыш $СОД$ радианмен берілсе);

$$S = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$$

(центрлік бұрыш радианмен берілген).
Егер координат жазықтығында XOY центрі $(a;b)$ нүктелерде болатын, радиусы $R-$ге тең щеңбердің теңдеуі $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$
Егер щеңбердің центрі координата бас нүктесінде жатса, радиусы $R-$болса, онда оның теңдеуі $x^2+y^2=R^2$ түрінде болады.
Шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың:
1. $\angle A+\angle C=\angle B+\angle Д=180^0$
2. $a\cdot c+вс=d_1d_2(d_1,d_2-диогоналдары)$



Щеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың: $AB+СД+BC$. Есептер шығаруға қажет планиметриядағы фигуралардың анықтамалары мен қасиеттерін, аудандарын және т.б. табу формулаларын қарастырдық.

3.3 Стереометрия. Көпжақтар және олардың ауданы, көлемі

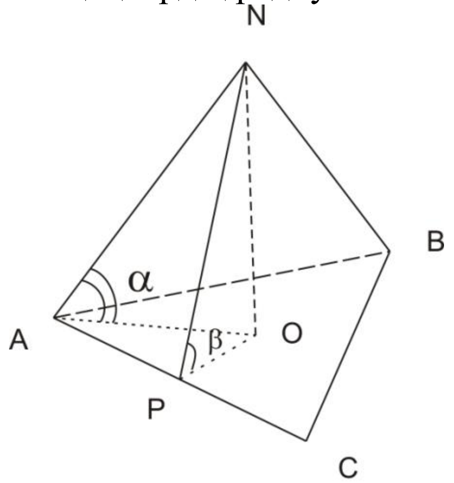
Стереометриялық есептерді шешу үшін қажетті теоремаларды: түзу мен жазықтықтық параллельдік белгісі туралы; түзулер мен жазықтықтың перпендикулярлығы туралы; жазықтықтардың перпендикулярлығы туралы; үш перпендикуляр туралы, теоремаларды білу керек.

1-анықтама. Көпжақ деп саны шекті жазықтықтармен щектелген денені атайды. Көпжақтың шекарасы оның беті деп аталады.

Пирамиданың негізгі компоненттері. NBC-пирамидасы 1-суретте кескінделген.
$\Delta ABC-$табаны; $N-$нүктесі-төбесі;

$NA,\ NB,\ NC -$ бүйір қырлары; $NAC,\ NBC -$ пирамиданың апофемасы, немесе бүйір жағының биіктігі $(NP \downarrow AC)$.

$\angle NAO = \alpha$ -пирамиданың бүйір қырымен табан жазықтығының арасындағы бұрыш; $\angle NPO = \beta -$ екі жақты бұрыштың сызықтық бұрышы, ABC және NAC жазықтығы мен жасалған бұрыш; $AC -$ екі жақты бұрыштың қыры; $NP \downarrow AC$ және $OP \downarrow AC$, $R -$ табанына $(\Delta ABC -$ ға$)$ сырттай сызылған щеңбердің радиусы; $z -$ табанына іштей сызылған щеңбердің радиусы.



Пирамиданың бүйір бетінің ауданы бүйір жақтарының аудандарының қосындысына тең. Ал толық беттің ауданы бүйір бетінің ауданы мен табанының ауданының қосындысына тең: $S_{\delta\,\delta} + S_{\text{т}}$.

Көлемі: $V = \frac{1}{3} S_{\text{т}} \cdot h$

Пирамида биіктігінің төрт жағдайы.

1. Егер пирамиданың барлық бүйір қырлары тең болса, онда пирамида биіктігі пирамида төбесін оның табанына сырттай сызылған щеңбер центрімен қосады.
2. Егер пирамиданың барлық бүйір жақтары табан жазықтығымен бірдей β бұрышын жасаса, онда пирамида биіктігі пирамида төбесін табанына іштей сырылған щеңбер центрімен қосады, бұл жағдайда пирамиданың бүйір бетінің ауданы $S_{\delta_{\delta=}} = \frac{S_{\text{т}}}{\cos\beta}$ формуласымен анықталады.
3. Егер пирамиданың бір бүйір жағы табан жазықтығына перпендикуляр болса, онда пирамиданың биіктігі осы жағдайда болады.
4. Егер пирамиданың екі бүйір жағы табан жазықтығына перпендикуляр болса, онда оның биіктігі осы екі бүйір жағынан қыры болады.

   Дұрыс пирамиданың бүйір бетінің ауданы:

   $S_{\delta.\delta} = \frac{1}{2} p_{\text{т}} \cdot l$ $(P_{\text{т}}$ -табанынан периметрі, $l -$ апофемасы$)$

   $S_{\text{т}.\delta.} = S_{\text{т}} + S_{\delta.\delta.} = S_{\text{т}} + \frac{1}{2} P_{\text{т}} \cdot l$

$V = \frac{1}{3} S_{\text{Т}} \cdot h.$

Куб. Жағының диагоналі. $d_1 = a\sqrt{3}$

Кубтың диагоналі: $d = a\sqrt{3}.$

Көлемі $V = a^3$.

Тік бұрышты параллелепипедтің диагоналі: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $(ABC -$ оның үш өлшемі, қырлары$)$

$S_{\delta.\delta.} = p \cdot h$ $(P -$ табанының периметрі$)$; $V = S_{\text{Т}} \cdot h$ $(S_{\text{Т}} -$ табанының ауданы$)$; $S_{\text{Т}.\delta} = 28_{\text{Т}} + p \cdot h.$

3.4 Дөңгелек денелер. Олардың көлемі (Айналу денелері).

Цилиндірдің бүйір бетінің ауданы: $S_{\delta.\delta} = 2\pi R + h$ $(h -$ биіктігі$)$.

$S_{\delta.\delta} = \pi Rl;\ V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$

Қисық конус. Қисық конустың жасаушысы: $l = \sqrt{h^2 + (R - R_1)^2},$ $(R -$ төменгі, $R_1 -$ жоғарғы табандарының радиусы, h - қисық конустың биіктігі$)$ $H = \dfrac{h \cdot R}{R - R_1}$ $(H -$ конустың биіктігі$)$

$S_{\delta.\delta.} = \pi(R + R_1) \cdot l;\ S_{\text{Т}.\delta.} = \pi\left(R^2 + Rl + R_1 l\right).$

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + R_1^2 + RR_1\right)$$

Шар

Шар беті: $S = 4\pi R^2;$ немесе $S = \pi D^2$ (D-диаметр).

Шар көлемі: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ Шар радиусы: $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$

Сырттай сызылған шар.
Шар және пирамида.

Пирамиданың табанына сырттай шеңбер сызуға болатын болса, онда пирамидаға сырттай шар сызуға болады.

Сырттай сызылған шардың центрін табу үшін :

1). Табанына сырттай сызылған шеңбердің центрі арқылы, табан жазықтығына перпендикуляр түзу жүргізу керек.

2). Пирамиданың кез келген бір бүйір қырының ортасы арқылы осы қырына перпендикуляр жазықтық жүргізу керек.

3). Жүргізілген түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін табамыз. Осы нүкте сырттай сызылған шардың центрі болады.

Дербес жағдайы. Егер пирамиданың бүйір қырлары тең болса, онда сырттай шар сызуға болады және оның центрі пирамида биіктігінің бойында жатады. Олай болса,

$R = \frac{b^2}{2h}$, R - сырттай сызылған шардың радиусы, b- пирамиданың бүйір қыры, h – пирамиданың биіктігі.

Шар және призма.

Призма тік призма және оның табанына сырттай шеңбер сызуға болатын болса , онда призмаға сырттай шар сызуға болады.

Шар центрі – призманың табандарына сырттай сызылған шеңбердің центрін қосатын кесіндінің ортасы болады.

$$R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}},$$

R – сырттай сызылған шардың радиусы, r – призманың табанына сырттай сызылған шеңбердің радиусы, h- призманың биіктігі.

Шар және цилиндр

Целиндрге сырттай шарды барлық уақытта сызуға болады. Шардың центрі цилиндрдің осьтік қимасының симметрия центрінде болады.

Шар және конус.

Конусқа шарды барлық уақытта сызуға болады. Конустың осьтік қимасына сырттай сызылған шеңбердің центрі шардың центрі шардың центрі болады.

$$R = \frac{l^2}{2h},$$

R-шардың радиусы, l – конустың жасаушысы, h- биіктігі.

Шар және қиық конус.

Қиық конусқа барлық уақытта сырттай шар сызуға болады. Конустың осьтік қимасына сырттай сызылған шеңбердің центрі шар центрі болады.

Іштей сызылған шар.
Шар және пирамида.

Іштей сызылған шардың центрі – пирамиданың барлық екі жақты бұрыштары үшін сызылған биссектриса жазықтықтарының қиылысу нүктесі, егер осы биссектриса жазықтықтарының ортақ нүктесі болмаса, онда іштей шар сызуға болмайды.

Дербес жағдайы – пирамиданың бүйір қырлары табан жазықтығына бірдей көлбеген, ендеше іштей шар сызуға болады, оның центрі пирамида биіктігінде жатады. Осы нүкте – пирамиданың апофемасы және оның табан жазықтығындағы проекциясының арасындағы бұрыштың биссектрисасы мен пирамида биіктігінің қиылысу нүктесі, шардың центрі.

Шар және тік призма

Призманың табанына іштей шеңбер сызуға болатын болса және осы шеңбердің диаметрі призманың биіктігіне тең болса, онда призмаға іштей шар сызуға болады.

Шардың центрі призманың табандарына іштей сызылған шеңбердің центрін қосатын кесіндінің ортасы болады.

$$r = r' = \frac{1}{2}h,$$

r- іштей сызылған шеңбердің радиусы, h - призманың биіктігі.

Шар және цилиндр.

Цилиндрдің осьтік қимасы квадрат болғанда ғана оған іштей шар сызуға болады. Шардың центрі цилиндрдің осьтік қимасының симметрия центрі болады.

Шар және конус.

Корпусқа барлық уақытта іштей шар сызуға болады. Конустың осьтік қимасына іштей сызылған шеңбердің центрі – шардың центрі.

Шар және қиық конус.

$R_1 + R_2 = l$ болғанда ғана қиық конусқа іштей шар сызуға болады. R_1, R_2 - табанының рдиустары, l - жасаушысы. Шардың центрі конустың табандарының центрін қосатын кесіндінің ортасы болады.

$$r = \frac{1}{2}h,$$

r - іштей сызылған шардың радиусы, h - қиық конустың биіктігі.

Тапсырмалар

1. Көбейткіштерге жіктеңдер.
2.

а). $a^4 + 2a^3 - 2a - 1;$ ә). $a^6 + 1;$ б). $\left(a^2 + b^2\right)^3 - \left(b^2 + c^2\right)^3 - \left(a^2 - c^2\right)^3;$
в). $a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc$

Өрнектерді ықшамдаңдар.

$$\frac{a-c}{a^2+ac+c^2} \cdot \frac{a^3-c^3}{a^2b+bc^2} \cdot \left(1 + \frac{c}{a-c} - \frac{1+c}{c}\right) / \frac{c(1+c)-a}{bc};$$

2. Теңбе-теңдікті дәлелдендер.

А) $a^2\dfrac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\dfrac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}=d^2.$

Б) $\dfrac{a^2+b^5+c^5}{7}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{5}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$, егер $a+b+c=0$

4. $n\geq 2,$ теңбе теңдікті дәлелдеңдер. $1\cdot 2+2\cdot 3+_{...}+(n-1)n=\dfrac{n(n^2-1)}{3}$

5. Теңбе –теңдікті дәлелдеңдер. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}}=-\sqrt[3]{3}.$

6. Өрнекті ықшамдаңдар.

$$\frac{4^2-b^2}{a^6-8b^6}\cdot\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}.\frac{a^4+2a^2b^2+4b^2}{4a^2+4ab+b^2}\cdot\sqrt{a^2+2b\sqrt{a^2b^2}};\quad \left(a=4\!\big/\!3, b=0{,}25\right)$$

7. Өрнекті ықшамдаңдар.

$$\frac{\left(25^{\frac{1}{2\log_{49}25}}+2\log_2\log_2 a^{2\log_a^4}\right)\cdot 4^{-\frac{2}{\log_3 4}}-a^2}{1-a}$$

8. $x^2+4y^2=12x$ теңдігінен $x\succ 0, y\succ 0$ болғанда $\lg(x+2y)-2\lg 2=0{,}5(\lg x+\lg y)$ шығатындағын дәлелдеңдер.

9. Егер $4x^x+4^{-x}=23$ болса, 2^x+2^{-x} қосындысы неге тең.

10. $\dfrac{a+b+c+d}{4}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$

11. Егер $abc\neq 0,\quad ab+ac+bc\neq 0,$ онда $\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leq\sqrt[3]{abc}$

12. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+....+\dfrac{1}{3n+1}>1,\quad n\geq 1$

13. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24},\quad n\geq 2$

Теңдеулерді шешіңдер:

1. $8x^4+x^3+64x+8=0$
2. $(x+3)^3-(x+1)^3=56$
3. $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2{,}9$
4. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4$
5. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6;$
6. $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47$
7. $|2x+1|-|3-x|=|x-4|;$
8. $7-4x=|4x-7|;$
9. $|x-2|=3|x-3|$
10. $|x^2-1|+|x+1|=0$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер.

1. $\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x + 6y = 54 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 - 24x + 12y = 189 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 70, \\ x\sqrt{xy} + y^2 = 105 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + x + y = 57, \\ \dfrac{(x+y)^5 + (x-y)^5}{(x+y)^5 - (x-y)^5} = \dfrac{1025}{1023} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^3 + yx = 3, \\ y^2 + z^2 + yz = 7, \\ z^2 + x^2 + xz = 19 \end{cases}$

Қолданылған әдебиеттер:

1. Антонов Н.П., Выгодский М.Я. и др. Сборник задач по элементарной математике. Москва. «Наука», 1979.
2. Аверьянов Д.И. и др. Большой справоұник Математика. Москва, 1998
3. Литвиненко В.Н., Мордович А.Г. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия.-М., "Просвещение",1995.
4. Цыпкин А.Г.Справочник по математике.М., "Наука" 1999.
5. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под.ред.М.И.Сканави.- М., "Просвещение",1998.
6. Аскарова М.Теңдеулер, теңсіздіктер және олардың системасын шешу. Алматы. "Рауан" 1993.
7. Аскарова М. Векторлар және оларға амалдар қолдану.Алматы, 1981.
8. Аскарова М. Туынды және интеграл.Алматы, «Мектеп» 1987.
9. Аскарова М. және басқалар. Семестровые задания по математике. Алма-Ата, 1975.
10. Аскарова М. Методические указания к методике обучения решению уравнений, неравенств и их систем. Алма-Ата, 1975.
11. Асқарова М. Тригонометриялық теңдеулерді шешу әдістері. Алматы, 1987.
12. Аскарова М. Методы решения задач по математике. Алгебра.Алматы, 1987.
13. Веребейчик И.Я. Математика. 1-3 часть СПБ, 2005.
14. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. М. «Наука», 1967.

Мазмұны

Кіріспе...3

I Алгебра..4
1.1 Теңбе-тең түрлендірулер. Рационал және иррационал өрнектерді теңбе-тең түрлендіру. Көрсеткіштік және логарифмдік өрнектерді теңбе-тең түрлендіру..4
1.2. Теңсіздіктерді дәлелдеу...6
1.3 Теңдеулер, теңдеулер мен теңсіздіктер жүйелерін шешу. Рационал теңдеулер. Айнымалысы модуль таңбасына тәуелді теңдеулер..........................9
1.4. Рационал теңдеулер жүйесі. Рационал теңдеулер жүйесін шешудің негізгі әдістері...11
1.5 Теңдеулер мен оның жүйелерін құруға берілген есептер 11
1.6 Иррационал теңдеулер және теңдеулер жүйесі 16
1.7 Көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулер, олардың жүйелері 17
1.8 Рационал теңсіздіктерді шешу 20
1.9 Иррационал теңсіздіктер. Көрсеткіштік және логарифмдік теңсіздіктер 22
1.10 Параметрлі теңдеулер, теңдеулер және теңсіздіктер жүйелерін шешу 25
II Тригонометрия...28
2.1 Тригонометриялық өрнектерді теңбе-тең түрлендіру. Тригонометриялық теңдеулер, теңдеулер мен теңсіздіктер жүйесін шешу................................28
III Геометрия. Планиметрия..31
3.1. Планиметриядағы негізгі аксиомалар мен түсініктер. Үшбұрыш, төртбұрыш, тік төртбұрыш, параллелограм, ромб, квадрат, көпбұрыш және олардың параметрлері мен аудандары.
Синустар, косинустар теоремалары және т.б...31
3.2. Щеңбер дөңгелек. Жана мен қиюша. Доға мен хорда.
Іштей және сырттай сызылған шеңбер..35
3.3. Стереометрия. Көпжақтар және олардың ауданы, көлемі............................37
3.4 Дөңгелек денелер. Олардың көлемі (Айналу денелері)................................39
Тапсырмалар...41
Қолданылған әдебиеттер..44

Пішімі 60х84 1/12
Көлемі 47 бет 3,9 шартты баспа табағы
Таралымы 20 дана.
Ш.Есенов атындағы КМТжИУ
Редакциялық - баспа бөлімінде басылды.
Ақтау қаласы, 32 ш/а.