ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш.ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСЫ

КОЩАНОВА ГУЛАШ РАХМЕТҚЫЗЫ

АЛГЕБРА ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯ

Оқу құралы

Ақтау 2011

ӘОЖ 378(075.8).51
ББК 22.147.я73
Қ 65

Пікір берушілер:
Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті профессоры, ф.-м.ғ.д. С.Т. Мұхамбетжанов;
Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті профессоры, ф-м.ғ.к. М.Ш.Тілепиев;
С. Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің доценті, ф-м.ғ.к. Е. Ақжігітов

Кощанова Г.Р. Алгебра және геометрия : Оқу құралы / Г.Р. Кощанова - Ақтау, Ш.Есенов атындағы КМТжИУ, 2011. - 151 б.

ISBN 978-601-7276-37-9

Бұл оқу құралы Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінде ақпараттық жүйе, есептеуіш техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету мамандықтарында оқитын «Алгебра және геометрия» пәнінің бағдарламасына сәйкес жасалған.

ӘОЖ 378(075.8).51
ББК 22.147.я73

Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің Оқу-әдістемелік Кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылды

ISBN 978-601-7276-37-9

Кіріспе

«Есептеу жүйесі және бағдарламамен қамтамасыз ету», «Ақпараттық жүйелер» мамандықтарына арналған алгебра және геометрия курсының типтік бағдарламасына сәйкес теориялық материалдар баяндалған.

Оқу құралын жазудағы мақсат – кредиттік технология бойынша оқитын техника мамандықтарының студенттеріне «Алгебра және геометрияның» негізгі бөлімдерінің теориясын қысқаша беріп, есептерді шығару әдістерімен таныстыру.

Сызықтық және векторлық, аналитикалық геометрия бөлімдері қарастырылған.

Сол сияқты аталған бөлімдері бойынша студенттердің оқытушымен өзіндік жұмыстарына дайындалуға қажетті есептерді шешу әдістері, жолдары жүйелі түрде мазмұндалып, есептердің накты шығару тәсілдері көрсетілген.

Теорияны сапалы игеру үшін студенттерге студенттердің өзіндік жұмыс тапсырмалары және оларды орындау үлгілері берілген.

Сонымен қатар, студенттердің өз бетінше дайындалуына аралық бақылауларының тестері берілген.

Жоғары оқу орнында оқитын студенттердің теориялық және практикалық білімін қалыптастыру мақсатында ұсынылып отырған оқу құралының тигізетін пайдасы зор.

Оқу құралын жазуда студенттердің жеке жұмыс жасауларына, есеп шығаруларына көп көңіл бөлінді.

Оқу құралы негізгі үш бөлімнен тұрады. 1-ші бөлімде теориялық материалдар, 2-ші бөлімде өзіндік жұмыс тапсырмалары, 3-ші бөлімде студенттердің өз бетінше дайындалуына аралық бақылауларының тестері берілген.

1-ші бөлім. Теориялық материалдар

1. СЫЗЫҚТЫ АЛГЕБРА
1.1. Анықтауыштар
1.1.1. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар

1.1-анықтама. Екінші ретті анықтауыш деп 1 санын айтады, ол мына таңбамен белгіленеді

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \qquad (1.1)$$

мұндағы a_{ij} $(i = 1,2,\ j = 1,2)$ сандары – екінші ретті анықтауыш элементтері. Анықтауыштың, мысалға, a_{21} элементі «a екі бір» деп оқылады. Екінші ретті анықтауыш екі жатық және екі тік жолдардан тұрады, a_{ij} анықтауыш элементінің бірінші i индексі жатық жолының нөмірін, ал екінші j индексі тік жолының нөмірін анықтайды. Анықтауыштың жоғарғы сол элементі (a_{11}) мен төменгі оң элементі (a_{22}) осы анықтауыштың негізгі диагоналын, ал жоғарғы оң элементі (a_{12}) мен төменгі сол элементі (a_{21}) қосалқы диагоналын білдіреді.

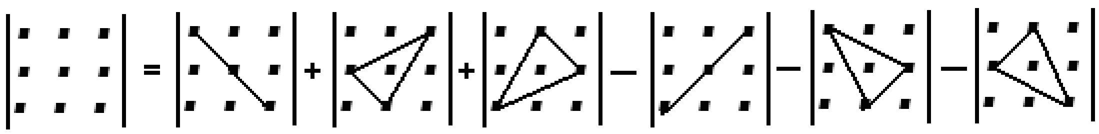
Екінші ретті анықтауышты есептеу үшін оның негізгі диагональ элементтерінің көбейтіндісінен ($a_{11} \cdot a_{22}$) қосалқы диагональ элементтерінің көбейтіндісін ($a_{21} \cdot a_{12}$) шегеру жеткілікті ((1.1) - формуласымен есептеледі).

1.2-анықтама. Үшінші ретті анықтауыш деп

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$
$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \qquad (1.2)$$

санын айтады, мұндағы a_{ij} $(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,3})$ анықтауыш элементтері, i жатық, ал j тік жолдарының нөмірін анықтайды. Үшінші ретті анықтауыш үш жатық және үш тік жолдардан тұрады, a_{11}, a_{22}, a_{33} - анықтауыштың негізгі диагоналының элементтері.

Үшінші ретті анықтауыштың мәні үшбұрыштар немесе Саррюс ережесі деп аталатын сұлба бойынша бірінші үш қосылғыш “+” таңбасымен, ал екінші үш қосылғыш “-” таңбасымен алынып, былай есептелінеді:



Үшінші ретті анықтауыштың есептелуіндегі әр қосылғыш (алты қосылғыш бар) үш көбейткіштен, әр көбейткіш осы анықтауыштың жатық немесе тік жолдарының тек бір ғана элементінен анықталған.

Төртінші және одан да жоғарғы ретті анықтауыштарды есептеу үшін анықтауыштың қасиеттерін білу қажет.

1.1.2. n- ші ретті анықтауыш және оның қасиеттері

1.3-анықтама. n- ші ретті анықтауыш деп

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots\dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_k]} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \dots \cdot a_{nj_n} \qquad (1.3)$$

қосындыны айтады, мұндағы қосу белгісі 1, 2, 3, …, n сандарынан анықталған барлық алмастырулар бойынша алынған (барлық алмастыру саны n!- ға тең), $a_{ij}\,(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n})$ анықтауыштың элементтері және ол i- жатық пен j- тік жолдарының қиылысуында орналасқан. n-ші ретті анықтауыш n жатық және n тік жолдардан тұрады, бірінші i индексі жатық жолдың, ал екінші j индексі тік жолдың нөмірін көрсетеді. Барлық элемент саны n^2-қа тең, ал оның $\frac{n!}{2}$ қосылғышының (мүшесінің) таңбасы плюс, қалғаны минус таңбасымен алынған, яғни плюс пен минус таңбасымен алынған қосылғыштардың саны тең. Әр қосылғыш осы анықтауыштың n элементінің көбейтіндісінен, ал әр көбейткіш анықтауыштың жатық және тік жолдарының тек бір ғана элементінен анықталады.

Екінші ретті анықтауыштың қасиеттері кез келген анықтауыштарға да орындалады, сондықтан біз оның қасиеттерін тек екінші ретті анықтауыш үшін дәлелдейік.

1-қасиет. Анықтауыштың жатық (тік) жолдарын оның сәйкес тік (жатық) жолдарымен орын алмастырсақ (транспонирлесек), онда оның мәні өзгермейді:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_2 .$$

Дәлелдеуі: Δ_1 анықтауышында бірінші жатық жолын бірінші тік жолымен орын алмастырайық, сонда Δ_2 анықтауышын аламыз. Осы анықтауыштарды тікелей есептеу арқылы олардың өзара тең екендігіне оңай көз жеткізуге болады.

2-қасиет. Анықтауыштың екі тік (жатық) жолдарының сәйкес элементтерінің орнын алмастырсақ, онда оның тек таңбасы қарама- қарсы таңбаға өзгереді.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = \Delta_2 .$$

Дәлелдеуі. Шынында

$$\Delta_1 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22} = -\Delta_1 .$$

3-қасиет. Анықтауыштың бір тік (жатық) жолының барлық элементтерін k санына көбейтсек, онда анықтауыш мәні k есе артады.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & k\,a_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\,\Delta .$$

Дәлелдеуі. $\Delta = a_{11}k\,a_{22} - ka_{12}\,a_{22} = k\left(a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{22}\right) = k\,\Delta.$

1–салдар. Анықтауыштың тік (жатық) жолының әр элементіндегі ортақ көбейткішті анықтауыш таңбасының алдына шығаруға болады.

2-салдар. Анықтауыштың екі тік (жатық) жолының сәйкес элементтері пропорционал болса, онда ол нөлге тең болады.

4-қасиет. Анықтауыштың k-ші жатық (тік) жолының элементтері екі қосылғыштан тұрса, яғни $a_{kj} = в_{kj} + c_{kj}$, $j = \overline{1,k}$, онда ол анықтауыш мәні екі анықтауыштың мәндерінің қосындысына тең болады.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & в_{12} \\ a_{21} & в_{22} \end{vmatrix} = \Delta + \Delta_1 .$$

Дәлелдеуі. Шынында

$$\Delta = \begin{vmatrix} à_{11} & à_{12} \\ à_{21} & à_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} à_{11} & b_{12} \\ à_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}b_{22} - b_{12}\,a_{21}.$$

$$\Delta_2 = a_{11}\left(a_{22} + b_{22}\right) - \left(a_{12} + b_{12}\right)a_{21} = \left(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}\right) + \left(a_{11}\,b_{22} - b_{12}\,a_{21}\right) = \Delta + \Delta_1 .$$

3-салдар. Анықтауыштың кез-келген тік (жатық) жолының барлық элементтерін k санына көбейтіп, екінші бір тік (жатық) жолының сәйкес элементтеріне коссақ, онда оның мәні өзгермейді.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + k\,a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + k\,a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

Дәлелдеуі: $\Delta = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k\,a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + k\,a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = (\,a_{11} + k\,a_{12}\,)a_{22} - a_{12}(\,a_{21} + k\,a_{22}\,) = (\,a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}\,) +$$

$$+ k(\,a_{12}\,a_{22} - a_{12}\,a_{22}\,) = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = \Delta .$$

1.1.3. Минор және алгебралық толықтауыштар

1.4-анықтама. n-ші ретті анықтауыштың $a_{i j}$ элементінің $M_{i j}$ миноры деп, осы анықтауыштың i-ші жатық, j-ші тік жолдарынсыз алынған (n-1)-ші ретті анықтауышты айтады.

1.5-анықтама. Анықтауыштың $a_{i j}$ элементінің $A_{i j}$ алгебралық толықтауышы деп, $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынған осы элементтің минорын айтады, яғни

$$A_{i j} = (-1)^{\,i+j} M_{i j} \tag{1.4}$$

1.1-теорема. Егер Δ анықтауышының j-ші тік (жатық) жолының $a_{i j}$ элементінен өзге барлық элементтері нөлге тең болса, онда Δ анықтауыштың мәні $a_{i j}$ элементі мен оның $A_{i j}$ алгебралық толықтауышының көбейтіндісіне тең болады.

$$\Delta = A_{i j} \cdot a_{i j} = (-1)^{i+j} a_{i j} M_{i j}.$$

Дәлелдеуі. Үшінші ретті анықтауыш үшін

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} = a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) == a_{11} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11}.$$

Теорема дәлелденді.

1.2-теорема (анықтауышты тік немесе жатық жолдары арқылы жіктеу).

Анықтауыштың кез-келген тік (жатық) жолдарының элементтері мен оның алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы осы анықтауыштың мәніне тең болады.

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} a_{i j} A_{i j},\ j = \overline{1,n} \quad \Big(\Delta = \sum_{j=1}^{m} a_{i j} A_{i j}, i = \overline{1,n} \Big).$$

Дәлелдеуі. Үшінші ретті анықтауышты бірінші тік жолы арқылы жіктейік, сонда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}.$$

Осы теңдікті дәлелдейік

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) =$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{21}\cdot(-1)^{2+1}M_{21} + a_{31}\cdot(-1)^{3+1}M_{31} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}.$$

Теорема дәлелденді.

1-мысал. $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеу керек.

Шешуі. $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 5 - (-3)\cdot(-2) = 14.$

2-мысал. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеу керек.

Шешуі. Саррюс ережесі бойынша, яғни (1.2) формуланы пайдалансақ, онда

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-6) + 3\cdot 4\cdot 1 + (-1)\cdot(-5)\cdot(-3) - 3\cdot 2\cdot(-3) - 2\cdot(-5)\cdot 1 -$$
$$-(-1)\cdot 4\cdot(-6) = -23.$$

3-мысал. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ анықтауышын екінші баған элементтері арқылы жіктеп есептеу керек.

Шешуі.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \grave{A}_{12} + 2\cdot \grave{A}_{22} + 1\cdot \grave{A}_{32} =$$
$$= -(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -23.$$

4-мысал. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышының $\grave{a}_{21}$ элементінің минорын есептеу керек.

Шешуі. $a_{21} = -5, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$

1.2. Матрица

1.2.1. Негізгі ұғымдар

1.6-анықтама. m жолдан n бағаннан тұратын, тік бұрышты сандар кестесі $m \times n$ өлшемді матрица деп аталады. ол былай белгіленеді:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left[a_{ij}\right], \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.5}$$

a_{ij} $\left(i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}\right)$, сандары матрицаның элементтері деп аталады, бірінші индекс i - матрицаның жатық жолының, ал екінші индекс j – тік жолының нөмірін анықтайды.

1.7-анықтама. Егер матрицаның жолдарының саны оның бағандарының санына тең болса, яғни $m = n$, онда матрицаны n-ретті квадрат матрица деп атайды. n-ретті квадрат матрицаның $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементтері оның бас диагаганалын, ал $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ - қосалқы диаганалын құрайды.

1.8-анықтама. Квадрат матрица элементтерінен құралған анықтауышты матрица анықтауышы деп атап, $\det A$ немесе $\Delta(A)$ деп белгілейді.

Ескерту. Квадрат емес матрица анықтауышы болмайды, себебі анықтауыштар тек квадратты кесте түрінде беріледі.

1.9-анықтама. Егер $\Delta(A) \neq 0$, онда A матрица ерекше емес матрица деп, ал егер $\Delta(A) = 0$ болса, онда ол ерекше матрица деп аталады.

1.10-анықтама. Егер A матрицаның жолдары A^T матрицаның бағандары болып келсе, онда A^T матрицасын A матрицасының транспонирленген матрицасы деп атайды.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

1.11-анықтама. Егер квадрат A матрица элементтері үшін $a_{ij} = a_{ji}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ теңдігі орындалса, онда A матрицасын симметриялы деп, ал $a_{ij} = -a_{ji}$ теңдігі орындалса, онда қиғаш симметриялы деп атайды.

1.12-анықтама. Егер квадрат матрицаның негізгі диагоналының элементтерінен өзге элементтері нөлге тең болса, онда ол матрица диагоналды матрица деп аталады.

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

1.13-анықтама. Егер диагоналды матрицаның барлық элементтері бірге тең болса, онда ол бірлік матрица деп аталады және ол E символымен белгіленеді.

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

1.14-анықтама. Егер негізгі диагоналынан төмен орналасқан (жоғары орналасқан) элементтері нөлге тең болса, онда квадратты матрица жоғары (төменгі) үшбұрышты матрица деп аталады.

1.15-анықтама. Егер матрица бір тік (жатық) жолдан анықталса, онда ол матрица тік (жатық) жолды матрица деп аталады.

$$A_{m\times 1}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}, \qquad A_{1\times n}=[a_1, a_2, \dots, a_n] \tag{1.9}$$

1.16-анықтама. Бірдей ретті A және B матрицаның сәйкес элементтері тең болса, яғни $a_{ij}=b_{ij}$, $\left(i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}\right)$, онда A және B тең матрицалар деп аталады.

1.2.2. Матрицаларға амалдар қолдану

а) матрицаларды қосу. Бірдей ретті $A=(a_{ij})$ мен $B=(b_{ij})$ матрицаларының алгебралық қосындысы деп сол ретті $C=\left(c_{ij}\right)$ матрицасын айтады: $C=A\pm B$ және оның кез келген элементтері мына формуладан анықталады

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k}; \tag{1.10}$$

Матрицаларды қосудың қасиеттері:

1. $A+B=B+A$
2. $\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$
3. $A+0=A$
4. $A-A=0$

ә) матрицаларды санға көбейту. Кез келген A матрицаның α санына көбейтіндісі деп C матрицаны айтады: $C=\alpha\cdot A$ немесе $C=A\cdot\alpha$ және оның кез келген элементтері мына формуладан анықталады:

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k}. \tag{1.11}$$

Матрицаны санға көбейткенде мына қасиеттер орындалады:

1. $1 \cdot A = A \qquad (-1) \cdot A = -A \qquad o \cdot A = 0$
2. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) \quad \alpha, \beta \in R$
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad \alpha, \beta \in R$
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad \alpha \in R$

б) матрицаны матрицаға көбейту. Берілген $m \times n$-ретті A матрицаның $n \times k$- ретті B матрицаға көбейтіндісі деп, $m \times k$- ретті C матрицаны айтады: $C = A \cdot B$. Ал оның кез келген элементтері $c_{i\,j}$ мына формуладан анықталады

$$c_{i\,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k}. \tag{1.12}$$

A матрицасын B матрицасына көбейту үшін A матрицасының тік жол саны B матрицасының жатық жол санына тең болуы қажет, басқаша жағдайда көбейту мүмкін емес.

5-мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Шешуі: $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 6 + 3 & 2 + 4 + 3 \\ 2 + 3 + 1 & 4 + 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$

Жалпы жағдайда $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Матрицаны көбейтудің қасиеттері:

1. $AE = EA = A$
2. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$
3. $(AB)C = A(BC)$
4. $(A + B)C = AC + BC$
5. $A(B + C) = AB + AC.$

6-мысал. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $AB = C$ матрицасын табу керек.

Шешуі:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+0+10 & 4+0+3+0 \\ 1+9+0+5 & 2+6+6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}.$$

1.2.3. Кері матрица

Бізге n-ші ретті A мен B матрицалары берілсін.

1.17-анықтама. Егер A мен B матрицалары үшін AB мен BA көбейтінділері бар және $AB = BA = E$ болса, онда B матрицасын A матрицасының кері матрицасы деп атап, былай белгілейді: $B = A^{-1}$, яғни $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, мұндағы $E - n$-ші ретті бірлік матрица.

1.3-теорема (кері матрицаның бар болуы). Кез келген квадратты A матрицаның кері A^{-1} матрицасы бар болуы үшін матрица ерекше емес ($\Delta(A) \neq 0$) матрица болуы қажетті әрі жеткілікті және ол мына төмендегі

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}\, A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12}\, A_{22} \ldots A_{n2} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ A_{1n}\, A_{2n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

формуласымен анықталады, мұндағы A_{ij} берілген A матрицаның элементтерінің алгебралық толықтауыштары, $\Delta(A)$ - берілген A матрицасының анықтауышы.

$\Delta(A) = 0$ жағдайда A матрицасының кері матрицасы жоқ, яғни кері матрицасы болмайды.

7-мысал. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$-матрицасының кері матрицасын табу керек.

Шешуі. Алдымен матрицаның анықтауышын есептейді.

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$, олай болса, кері матрица табылады.

Ол мына формуламен анықталады:

$$A^{-1} = 1/\Delta = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6,$ $\qquad$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6,$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-(-4-2)=6,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(4+2)=-6,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4-1=3, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-(-4-2)=6,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2+4=6,$$

Олай болса, $A^{-1}=\dfrac{1}{27}\begin{pmatrix}6 & 6 & 3\\ -6 & 3 & 6\\ 3 & -6 & 6\end{pmatrix}=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$

1.2.4. Матрица рангысы

Біз $m\times n$-ші ретті A матрицасын қарастырайық.

Берілген $m\times n$-ші ретті матрицадан k ретті $C_m^k\cdot C_n^k$- минор құруға болады, мұндағы $k\le n,\ k\le m$ $\left(C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}\right)$.

Бұл минорлардың кейбіреулері нөлге тең, ал кейбіреулері нөлден өзгеше.

1.18-анықтама. A матрицаның нөлге тең емес минорларының ең жоғарғы реті оның рангісі деп аталады және ол $rang\,A$ немесе $r(A)$ деп белгіленеді.

Сонда, егер матрицаның рангісі r-ге тең болса, онда барлық r-ші ретті минорлардың кем дегенде біреуінің мәні нөлге тең емес, ал r- ден жоғарғы ретті минорлардың барлығының мәні нөлге тең. Берілген матрицаның рангісін табу үшін жоғарыдағыдай барлық минорларды есептемей табу әдістеріне тоқталайық. Матрицаның рангісін табу үшін элементар түрлендірулер, көмкерілген минорлар әдістері қолданады.

Элементар түрлендірулер деп мына түрлендірулерді айтады:

1) матрицаны транспонирлеу, яғни барлық тік жолдарын сәйкес жатық жолдарымен орын ауыстыру;
2) екі тік (жатық) жолдарының орнын ауыстыру;
3) кез келген тік (жатық) жол элементтерін $\lambda\ne 0$ санына көбейту;
4) кез келген тік (жатық) жолының элементтерін $\lambda\ne 0$ санына көбейтіп, келесі кез келген тік (жатық) жолының сәйкес элементтеріне қосу.

Элементар түрлендіру жасап түгелдей нөлден тұратын тік (жатық) жолы бар матрица алуға болады. Мұндай тік (жатық) жолды алып тастағаннан матрица рангісі өзгермейді. Элементар түрлендіру жасап кез келген матрицаны

$$\begin{pmatrix}100\ldots0\\ 010\ldots0\\ \ldots\ldots\ldots\\ 000\cdots1\end{pmatrix}$$

диагоналы 1- ден, ал қалған элементтері 0- ден тұратын матрица түріне келтіруге болады. Диагональ бойындағы 1-лер саны матрицаның рангісіне тең болады.

8-мысал. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1\\ 2 & -3 & -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$ матрицасының рангын табу керек.

Шешуі. Бұл матрицаның рангі 1 ден 4-ке дейінгі мәндерді қабылдайды. А матрицасына элементар түрлендірулер жүргіземіз. Бірінші бағанның $a_{11}=1$ элементінен басқа элементтерді нөлге айналдырамыз. Сондықтан 1-ші жолды 2-ші жолға қосып екінші жолға, 1-ші жолды -2 -ге көбейтіп 2-ші жолға қосып үшінші жолға жазамыз:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Енді 2-ші жолды -1-ге көбейтіп 3-ші жолға қосып 3-ші жолға және 2-ші жолды 4-ші жолға қосып 4-ші жолға жазамыз:

$$\approx\!\!\!\!\!A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Нөлдік жолдарды алып тастаймыз. Сонда 2×5 өлшемді матрица аламыз:

$$\overset{\approx}{\tilde{A}}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Оның миноры $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0,$ сондықтан, $r(\overset{\approx}{\tilde{A}})=r(A)=2.$

Көмкерген минорлар әдісі

1.19-анықтама. Матрицаның сызықты тәуелсіз жатық (тік) жолдарының ең үлкен саны *матрицаның рангісі* деп аталады.

Берілген матрицаның рангісін көмкерген минорлар әдісімен табу үшін:

- нөлге тең емес бірінші ретті кез келген минорды алу;
- содан соң осы минорды көмкерген екінші ретті минорды есептеу;
- егер мұндай екінші ретті минорлардың бірі нөлге тең болмаса, онда осы минорды көмкерген үшінші ретті минорларды есептеу;
- егер мұндай үшінші ретті минорлардың бірі нөлге тең болмаса, онда осы минорды көмкерген келесі минорларды есептеу;

- осылайша нөлге тең емес көмкерген минорларды есептей келе нөлге тең емес r ретті минорды анықтаймыз.
- r ретті минорды көмкерген $r+1$ ретті минорлардың барлығы нөлге тең болса, онда берілген матрицаның рангісі r-ге тең.

9-мысал. $A=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ матрицасының рангісін көмкерген

минорлар әдісімен табу керек.

Шешуі. Алдымен нөлге тең емес кез келген бірінші ретті минор аламыз. Ондай 19 минор бар (нөлге тең емес элементтер саны). Бірінші ретті минор ретінде 2-ні алайық. Осы минорды көмкерген бірнеше минор бар. Нөлге тең емес

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

екінші ретті минорды қарастырайық. Енді осы минорды көмкерген үшінші ретті минорларды ғана есептейік:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

Демек, нөлге тең емес екінші ретті минорды көмкерген үшінші ретті барлық минорлардың мәні нөлге тең. Олай болса, $rangA=2$ болады.

1.3. Сызықты теңдеулер жүйесі

1.3.1. Негізгі ұғымдар

1.20-анықтама. n белгісізі бар m сызықты теңдеулер жүйесі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.14}$$

мұндағы a_{ij}- жүйенің коэффициенттері, нақты сандар, x_i- белгісіз шамала, $в_i$- бос мүшелер, $i=\overrightarrow{1,m}$, $j=\overrightarrow{1,k}$, a_{ij} - коэффициенттері екі индекспен берілген, бірінші индексі i теңдеу нөмірін, ал екінші индекс j белгісіз нөмірін көрсетеді. $b_i \neq 0$ болса, онда жүйе біртекті емес жүйе деп аталады.

Сызықты теңдеулер жүйесінің коэффициенттерінен анықталған мына матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

жүйе матрицасы,

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

жүйенің кеңейтілген матрицасы деп аталады.

1.21-анықтама. Егер $õ_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_n = \alpha_n$ - сандар жиыны (1.14) теңдеулер жүйесіндегі теңдеулердің барлығын қанағаттандырса, онда осы сандар жиыны сызықты теңдеулер жүйесінің шешімі деп аталады.

1.22-анықтама. Егер (1.14) сызықты теңдеулер жүйесінің кем дегенде бір шешімі бар болса, онда ол үйлесімді жүйе, ал егер бірде-бір шешімі болмаса (жоқ болса), онда ол үйлесімсіз жүйе деп аталады.

1.23-анықтама. Тек бір ғана шешімі бар жүйе анықталған жүйе деп, ал кем дегенде екі шешімі бар жүйе анықталмаған жүйе деп аталады.

1.3.2. Крамер ережесі

n белгісізі бар біртекті емес n сызықты теңдеулер жүйесі берілсін

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.17}$$

Берілген жүйенің белгісіздер саны теңдеулер санына тең, жүйенің негізгі матрицасы n жатық, n тік жолдардан тұрады.

$$À = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

А матрицасының анықтауышы берілген сызықты теңдеулер жүйесінің анықтауышы деп аталады. (1.17) жүйенің анықтауышы нөлге тең болмасын, яғни $\Delta(A) \neq 0$.

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1;k-1}\ a_{1k}\ a_{1,k+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2,k-1}\ a_{2k}\ a_{2,k+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots a_{n,k-1}\ a_{nk}\ a_{n,k+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.19)$$

анықтауышының бірінші тік жолының элементтері x_1 белгісіздің коэффициенттері, ал екінші тік жолының элеметтері x_2 белгісіздің коэффициенттері, т.с.с.

Осы анықтауыштың кез келген тік жолының (мысалы, k-ші тік жолының - x_k белгісізінің коэффициенттерін) элементтерін (1.17) жүйенің сәйкес бос мүшелерімен орын алмастырғанда алынған анықтауышты Δ_k таңбасымен белгілейік

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1;k-1}\ b_1\ a_{1,k+1}\ldots\ a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2,\ k-1}\ b_2\ a_{2,k+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{n,\ k-1}\ b_n\ a_{n,k+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix},\ k=\overrightarrow{1,n}. \qquad (1.20)$$

1.4-теорема (Крамер теоремасы). Егер (1.17) біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесінің негізгі матрицасының анықтауышы нөлге тең болмаса, онда ол анықталған жүйе (үйлесімді жүйе). Бұл жүйенің шешімі Крамер формуласымен анықталады:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad \ldots,\quad x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (1.21)$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad \Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix} \qquad (1.22)$$

10-мысал. Крамер формуласы арқылы берілген жүйенің шешімдерін табыңдар

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=9, \\ -x_1+x_2+2x_3=3. \end{cases}$$

Шешуі: Негізгі матрицаның анықтауышын және Δ_1, Δ_2, Δ_3-дерді есептейік

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6+4-1+6-1-4=10,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 30 + 18 + 3 - 18 - 5 - 18 = 10,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 12 - 5 + 18 - 3 - 20 = 20,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 10 - 9 + 15 - 9 - 6 = 10.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{10} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{10}{10} = 1.$$

Сонымен жүйенің шешімі (1, 2, 1).

Кронекер – Капелль теоремасы

1.5-теорема. Біртекті емес (1.17) сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді болуы үшін жүйенің матрицасының рангісі оның кеңейтілген матрицасының рангісіне тең болуы, яғни $rang\,A = rang\,A'$, қажетті әрі жеткілікті.

Теоремадан мынадай қорытынды аламыз:

а) егер $rang\,A' = r = n$, онда (1.17) жүйенің тек бір ғана шешімі бар;

б) егер $rang\,A = rang\,A' = r < n$ болса, онда (1.17) жүйенің шексіз көп шешімі бар және ол шешімдер r теңдеуден тұратын жүйеден анықталады.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \tag{1.23}$$

мұндағы $x_{r+1,}\ldots,x_n$ белгісіздер бос мүшелер, олар кез келген тұрақты сандарды қабылдайды. (1.17) жүйеден анықталған $x_1, x_2, \ldots, x_r$ шешімдері жүйенің жалпы шешімі деп аталады.

1.3.3. Гаусс әдісі

Гаусс әдісі сызықты теңдеулер жүйесін шешудегі универсалды әдістердің бірі деп есептелінеді. Бұл әдіс кейде айнымалыларды біртіндеп жою әдісі деп те аталынады.

$$A \cdot X = B \tag{1.24}$$

теңдеулер жүйесін қарастырайық. Мұндағы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (1.25)$$

Осы теңдеулер жүйесінің кеңейтілген матрицасының жолдарына элемен-тарлы түрлендіру арқылы оны *сатылы* матрица түріне келтіруге болады. Мысалы, бір айнымалыны таңдап аламыз (көбінесе x_1) және оны осы айнымалының алдындағы коэффициенттерді және сол айнымалы бар теңдеуді шешуші деп атаймыз. Егер шешуші коэффициент бірден өзге болса, онда шешуші теңдеудегі барлық коэффициенттерді осы шешуші коэффициентке бөліп, қалған барлық теңдеулерден шешуші айнымалыны жоямыз. Содан кейін келесі шешуші айнымалыны таңдап аламыз (көбінесе x_2), шешуші теңдеуді шешуші коэффициентке бөлеміз және қалған теңдеулерден осы шешуші айнымалыны жоямыз. Осы процесті әрі қарай жалғастырамыз. Осы процесс кезінде $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$ түріндегі теңдеу кездессе, мұндай теңдеуді немесе кеңейтілген матрицадағы осыған сәйкес барлығы нөлден тұратын жолды алып тастауға болады. Себебі бұл теңдеуді кез келген $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сандар жиыны қанағаттандырады. $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b,\ (b\neq 0)$, түрдегі теңдеу немесе кеңейтілген матрицада барлық элементтері нөлден тұратын, бірақ соңғы элементі нөл емес жол кездесуі мүмкін. Онда бұл теңдеудің сонымен қатар берілген теңдеулер жүйесінің шешімі жоқ, яғни жүйе үйлесімсіз.

Сонымен кеңейтілген матрицаның жолдарына элементарлы түрлендіру арқылы оны сатылы матрицаға келтіреміз:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2k} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{kk} & \dots & c_{kn} & d_k \end{array}\right)$$

Бұл матрицаға мынадай теңдеулер жүйесі сәйкес келеді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad ñ_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases}$$

мұндағы $k\le m,\quad a_{11}\neq 0,\quad c_{ii}\neq 0,\quad i=\overline{2,k}.$ Осы теңдеулер жүйесінің соңғы теңдеуінен x_k белгісізді басқа $(x_{k+1},\ldots,x_n)$ арқылы өрнектейміз. Содан кейін x_k-ы жүйенің соңғы теңдеудің алдыңғы теңдеуіне қойып x_{k-1} белгісізді $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ арқылы өрнектейміз, содан кейін $x_{k-2},\ldots,x_2, x_1$ белгісіздерді осылай табамыз. Сонымен $\left(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\right)$ бос айнымалыларға кез келген мәндер беріп, жүйенің шексіз көп шешімдерін аламыз.

11-мысал. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешуі. Бұл жүйенің кеңейтілген матрицасын құрып, оған элементарлы түрлендірулер қолданамыз.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-4)C_1 + C_2 \\ (-2)C_2 + C_3 \\ (-4)C_1 + C_4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ C_2 : 3 \\ C_3 : 5 \\ C_4 : 5 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (-1)C_2 + C_3 \\ (-1)C_1 + C_4 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Осыдан

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_3 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array}$$

Айнымалыларды бірте-бірте жою жүйені элементар түрлендіру арқылы жасалады. Элементар түрлендірулер матрицаның рангісін өзгертпейді.

Оған келесі түрлендірулер жатады:

а) екі теңдеудің орнын алмастыру;

ә) нөлден өзге санға теңдеудің екі жағын да көбейту;

б) кез келген $c \neq 0$ санға көбейтілген бір теңдеудің екі жағын да басқа теңдеуге сәйкесінше қосу.

1.3.4. Матрица әдісі

n белгісізі бар біртекті емес n сызықты теңдеулер жүйесі берілсін.

$$\begin{cases} a_n\, x_1 + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + \cdots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}\, x_1 + \cdots + a_{nn}\, x_n = b_n \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

мұндағы A - жүйе матрицасы, $\Delta(A) \neq 0$, X -белгісіз, $n \times 1$ өлшемді матрица, B - бос мүше, $n \times 1$ өлшемді матрица.

Матрицаларға қолданылатын амалдарға сүйене отырып A мен X матрицалардың көбейтіндісі (бұл көбейтінді анықталған – бар) мына матрицаға тең деп аламыз. Сонда

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{nn}\, x_n \end{pmatrix}$$

$A\,X$ пен B матрицаларының теңдігінен мына теңдеуді аламыз.

$$A \cdot X = B. \tag{1.24}$$

Бұл теңдеу берілген жүйенің матрица түріндегі теңдеуі деп аталады.

Берілген жүйенің матрицасы ерекше емес $(\Delta(A) \neq 0)$ матрица, олай болса оның кері матрицасы бар.

Енді (1.24) теңдеуінің шешімін табу үшін осы теңдеуді солдан оңға қарай A матрицасының кері матрицасына көбейтейік $A^{-1}A\;X = A^{-1} \cdot B$, мұндағы $A^{-1} \cdot A = E$ және $E \cdot X = X$. Олай болса

$$X = A^{-1}B \tag{1.26}$$

болады, мұндағы $A^{-1}B$ - көбейтіндісі бар.

12-мысал. Жүйені матрица әдісімен шешу керек. $\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ 2x - y - 5z = -15. \\ 5x + y + 4z = 19 \end{cases}$

Шешуі.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -15 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad \Delta_A = -105.$$

Кері A^{-1} матрицаны табамыз.:

$A_{11} = 1,\ A_{12} = -33,\ A_{13} = 7,\ A_{21} = -13,\ A_{22} = 9,\ A_{23} = 14,\ A_{31} = -16,\ A_{32} = 3, A_{33} = -7.$

$$A^{-1} = -\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 1 & -13 & -16 \\ -33 & 9 & 3 \\ 7 & 14 & -7 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}B = -\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 1\cdot 4 - 13(-15) - 16\cdot 19 \\ -33\cdot 4 + 9(-15) + 3\cdot 19 \\ 7\cdot 4 + 14(-15) - 7\cdot 19 \end{pmatrix} = -\frac{1}{105}\begin{pmatrix} -105 \\ -210 \\ -315 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$x = 1;\quad y = 2;\quad z = 3.$

1.3.5. Біртекті теңдеулер жүйесі

n белгісізі бар біртекті m теңдеулер жүйесі берілсін.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{ò1}x_1 + a_{ò2}x_2 + \ldots + a_{òn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1.27)$$

немесе $À\cdot Õ = 0, \quad 0 = (0,0\ldots,0)$.

(1.27) жүйе үшін $rang\,A = rang\,A'$, Кронекер – Капелли теоремасы бойынша берілген біртекті жүйе әрқашанда үйлесімді және оның әрқашанда нөлдік шешімі бар: $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$, ал бізге жүйенің нөлдік шешімінен өзге шешімдерін табу керек.

Енді (1.27) жүйенің рангісі r- ге тең болсын деп ұйғарайық: $rang\,A = r$. A матрицасының алғашқы r жатық жолы сызықты тәуелсіз болады.

1.6-теорема. (1.27) біртекті сызықты теңдеулер жүйесінің нөлден өзге шешімдері бар болуы үшін $r < n$ теңсіздігінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

1.7-теорема. n белгісізі бар $m = n$ біртекті сызықты теңдеулер жүйесінің нөлден өзге шешімдері бар болуы үшін жүйенің анықтауышы нөлге тең болуы ($\Delta(A) = 0$) қажетті әрі жеткілікті.

(1.27) жүйенің $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_r,\ c_{r+1},\ \ldots\ c_n$ шексіз көп шешімдері болады, мұндағы $c_i = x_i$, $i = \overline{r+1, n}$- кез келген сандар.

1.24-анықтама. Біртекті сызықты (1.27) теңдеулер жүйесінің кез келген $n - r$ сызықты тәуелсіз шешімі осы жүйенің іргелі шешімі деп аталады, мұндағы n- жүйенің белгісіздер саны, r саны A- матрицаның рангісі $rang\,A = r$.

1.25-анықтама. Егер $rang\,A = r < n$ (1.27) жүйенің кез келген X шешімінде $n - r$ тұрақты сан болса, онда ол шешім осы жүйенің жалпы шешімі деп аталады.

13-мысал. Біртекті теңдеулер жүйесін шешу керек.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+2z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$$

Шешуі: A матрицасының жол элементтерін түрлендіреміз:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$r(A)=3$ саны белгісіздер санына тең болғандықтан жүйенің жалғыз шешімі бар, ол әрине мардымсыз шешім: $x_1=x_2=x_3=0$

14-мысал. Біртекті теңдеулер жүйесін шешу керек.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+2z=0 \\ 2x+3y+3z=0 \end{cases}$$

Шешуі: A матрицасының жол элементтерін түрлендіреміз:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r(A)=2<3$$

саны белгісіздер санынан кіші болғандықтан жүйенің бір параметрге тәуелді ақырсыз көп шешімі бар.
Мұнда, мысалы, x пен y базистік айнымалы бола алады.

Теңдеулер жүйесін құрып, оны шешеміз:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=c \\ x+y+c=0 \\ y+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-c \\ z=c \end{cases} \quad c - \text{кез келген сан.}$$

2. ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА

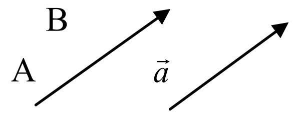
2.1. Вектор ұғымы

Өзінің сандық мәнімен толық анықталатын шамаларды *скалярлық шамалар* деп атайды. Скалярлық шамаларға мысалдар: аудан, ұзындық, көлем, масса, жұмыс, температура.

Векторлық шамалар өздерінің сандық мәндерімен және бағыттарымен анықталады. Векторлық шамаларға мысалдар: күш, жылдамдық, үдеу.

2.1-анықтама. *Вектор* деп бас нүктесі A-да соңғы нүктесі B-да жататын бағытталған $\overrightarrow{AB}$ кесіндісін айтады.

Берілген вектор үлкен екі латын әріпімен немесе кіші бір латын әріптерімен белгіленеді. Мысалы, $\overrightarrow{AB}$ - вектор, A нүктесі осы вектордың бастапқы нүктесі, ал B - соңғы нүктесі, вектордың бағыты A нүктеден B нүктеге бағытталған.



Берілген $\overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығы:
$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ немесе $|\vec{a}|$ деп белгіленеді.

2.1-урет

2.2-анықтама. Коллинеар, бағыттас және модульдері бірдей векторларды тең векторлар дейді $\left(\vec{a} = \vec{b}\right)$.

2.3-анықтама. $\vec{a}$ векторына параллель, модулі тең, бірақ бағыты қарама-қарсы вектор қарама-қарсы бағытталған вектор деп аталады. $\vec{a}$ және $\overrightarrow{BA}$ векторы (бас нүктесі B-да, ал соңғы нүктесі A-да) $\overrightarrow{AB}$ векторға қарама-қарсы вектор деп аталады. $\vec{a}$ векторына *қарама-қарсы вектор* $-\vec{a}$ деп белгіленеді.

$\overrightarrow{AB}$ вектордың *ұзындығы* немесе *модулі* деп кесіндінің ұзындығын айтады да оны $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ деп белгілейді. Ұзындығы нөлге тең векторды *нөлдік вектор* деп атайды да $\vec{0}$ деп белгілейді..

Ұзындығы бірге тең векторды *бірлік вектор* немесе *орто* деп атайды. $\vec{a}$ вектордың бірлік векторының бағыты осы вектормен бағыттас, оны $\vec{a}^{\,0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{e}$ деп белгілейді.

2.4-анықтама. Егер векторлар бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жатса, онда мұндай векторлар коллинеар векторлар деп аталады, онда оларды $\vec{a} \parallel \vec{b}$ деп жазады.

$-\vec{a}$ -қарама-қарсы векторлар.

2.5-анықтама. Параллель жазықтықтардың немесе бір жазықтықтың бойында жатқан кеңістіктегі үш векторларды компланар векторлар дейді.

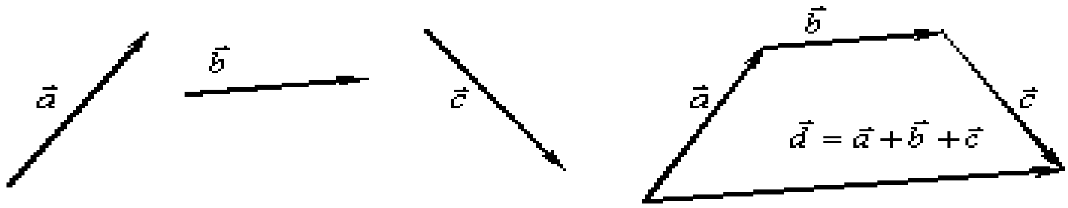
Вектордың бас нүктесін кеңістіктің кез келген нүктесіне параллель жылжытып алып келуге болады.

2.2. Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар

Векторларды қосу, азайту және векторларды санға көбейтуді векторларға қолданылатын сызықтық амалдар дейді. Кеңістікте $\vec{a}$ және $\vec{b}$ кез келген екі вектор берілсін. Кез келген O нүктесін алып $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ векторын тұрғызамыз. A нүктесінен $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ векторын тұрғызамыз.

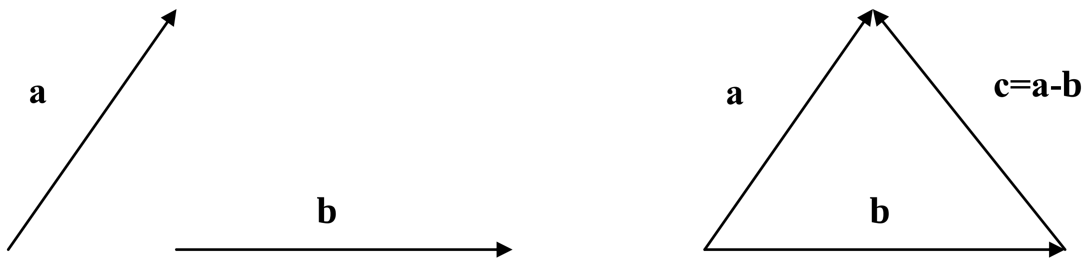
2.6-анықтама. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың *қосындысы* деп $\vec{a}$ вектордың басы мен $\vec{b}$ вектордың соңғы нүктесін қосатын $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ векторын айтады

Келесі суретте үш $\vec{a}, \vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлардың қосындысы келтірілген.



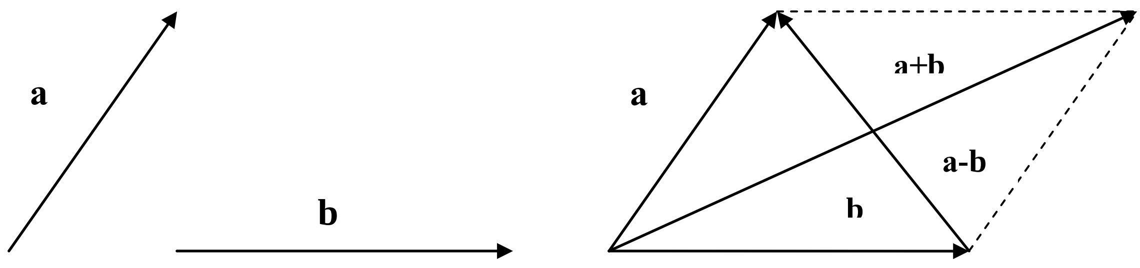
2.2-сурет

2.7-анықтама. Екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың *айырымы* деп $\vec{a}$ және $\left(-\vec{b}\right)$ векторлардың қосындысы болатын $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ векторын айтады (2.3-сурет).



2.3-сурет

Атап өтетін жағдай, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларынан тұрғызылған параллелограммның бір диагоналы, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың қосындысы, ал екіншісі айырымы болады (2.4-сурет).



2.4-сурет

2.8-анықтама. $\vec{a}$ вектордың нақты α санға *көбейтіндісі* деп ұзындығы $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$ тең, $\vec{a}$ векторына коллинеарлы, егер $\alpha > 0$ болса, онда $\vec{a}$ векторына бағыттас, егер $\alpha < 0$ онда $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы бағыттас $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ векторын айтады.

Векторларға қолданылатын сызықтық амалдардың қасиеттері:

1) Векторларды қосу коммутативті

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, $\qquad \forall \vec{a},\vec{b}$

2) Векторларды қосу ассоциативті

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, $\qquad \forall \vec{a},\vec{b},\vec{c}$

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $\qquad \forall \vec{a}$

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$, $\qquad \forall \vec{a}$

5) Векторларды санға көбейту ассоциативті

$\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$, $\qquad \forall \vec{a}, \quad \forall \alpha,\beta\in R$

6) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, $\qquad \forall \vec{a}$

7) Векторды санға көбейту сандарды қосуға қарағанда дистрибутивті

$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$, $\qquad \forall \vec{a}, \quad \forall \alpha,\beta\in R$

8) Векторларды санға көбейту векторларды қосуға қарағанда дистрибутивті

$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$, $\qquad \forall \vec{a},\vec{b}, \quad \forall \alpha\in R$

Осы сегіз қасиетті қанағаттандыратын векторлар жиын кеңістігі, сызықты немесе векторлық кеңістік деп аталады. Бұл кеңістікті R_3 деп белгілейді.

2.3. Векторлардың сызықты тәуелділігі

2.9-анықтама. Берілген $\vec{a}_1, \vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ векторларының сызықты комбинациясы деп

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_m\vec{a}_m$$

өрнегін айтады, мұндағы $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_m$ - кез келген нақты сандар.

Егер $\vec{a}$ векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ векторларының сызықты комбинациясы болса, яғни

$$\vec{b}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n \tag{2.1}$$

теңдігі орындалса, онда $\vec{b}$ векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ векторлары арқылы сызықты өрнектеледі дейміз.

2.10-анықтама. Берілген $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_m$ векторлары үшін кемінде біреуі нөлге тең емес $\alpha_1,\alpha_2,..., \alpha_m$ сандары табылып, олардың сызықты комбинациясы нөлге тең болса, онда бұл векторлар сызықты тәуелді деп, қарсы жағдайда сызықты тәуелсіз деп аталады.

2.11-анықтама. Егер $\vec{b}$ векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ векторларының сызықты комбинациясы арқылы өрнектелсе, онда $\vec{b}$ векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ векторлары арқылы жіктелінеді дейді.

Егер $\vec{a}_1, \vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ векторларының бірі қалған векторлар арқылы жіктелсе, онда $\vec{a}_1, \vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ векторлары сызықты тәуелді векторлар деп аталады.

2.12-анықтама. Түзу бойындағы базис деп осы түзу бойындағы кез келген нөл емес векторды айтады.

2.13-анықтама. Жазықтықтағы базис деп осы жазықтықтың кез келген коллинеар емес екі векторын айтады.

Жазықтықтағы кез келген $\vec{c}$ векторы үшін α мен β нақты сандары табылып,

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \tag{2.2}$$

теңдігі орындалса, онда $\vec{c}$ векторы $\vec{a},\vec{b}$ базисінде жіктелінген деп аталады.

2.14-анықтама. Кеңістікте компланар емес (сызықты тәуелсіз) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлары базис құрайды.

Кез келген $\vec{d}$ векторы осы векторлардың сызықты комбинациясы болса, яғни $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ нақты сандары табылып,

$$\vec{d} = \alpha\,\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \tag{2.3}$$

теңдігі орындалса, онда $\vec{d}$ векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ базисінде жіктеледі дейді.

2.4. Векторлардың проекциялары. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Бізге кеңістікте бағытталған l түзуі, $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A'B'}$ векторлары берілсін.

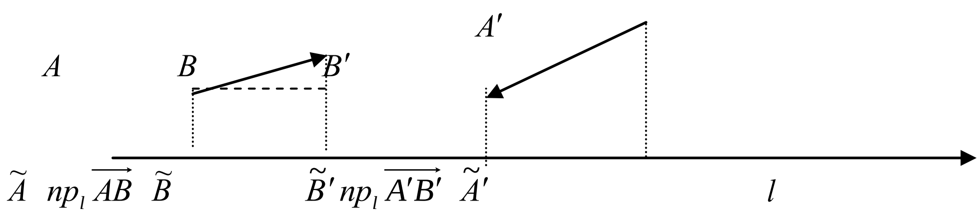
2.15-анықтама: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ векторының L түзуіндегі сандық проекциясы деп $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығы мен $\vec{a}$ векторы мен L түзудің арасындағы φ бұрышының косинусына көбейтіндісін айтады, яғни

$$np_L\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}, L}) = |\vec{a}|\cos\varphi \tag{2.4}$$

Сонымен, $\vec{a}$ вектордың L бағытындағы проекциясы мен оның сандық проекциясының арасындағы байланыс мына теңдік арқылы беріледі:

$$\overrightarrow{np_L\vec{a}} = \vec{e}\,np_L\vec{a}, \tag{2.5}$$

мұндағы $\vec{e}$ векторы L түзудің бірлік векторы.



2.5-сурет

$np_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi > 0,\quad онда\quad l\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}.$

$np_l\overrightarrow{A'B'} = |\overrightarrow{A'B'}|\cos\varphi < 0,\ онда\quad l\uparrow\downarrow\overrightarrow{A'B'}.$

$\vec{a} = \{ a_x, a_{y,} a_z \}$ векторы үшін $a_x = np_{ox}\vec{a},\ a_y = np_{oy}\vec{a},\ a_z = np_{oz}\vec{a}$.

Проекцияның негізгі қасиеттері:

а) $np_l\ AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\alpha,\ \alpha = (e\wedge, \overrightarrow{AB})$;

ә) векторды параллель көшіргеннен проекциясы өзгермейді;

б) $np_l \vec{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l \perp \vec{a}$;

в) қосынды проекциясы $np_l(\vec{a} + \vec{b}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}$;

г) $np_l \lambda \vec{a} = \lambda\ np_l \vec{a}$.

Кеңістікте бағытталған L түзуі берілсін.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың L бойындағы сандық проекцияларының қасиеттері:

1. $np_L(\vec{a} \pm \vec{b}) = np_L\ \vec{a} \pm np_L\ \vec{b}$

2. $np_L(\alpha\ \vec{a}) = \alpha \cdot np_L\ \vec{a}$

2.16-анықтама. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ екі вектордың скалярлық көбейтіндісі деп екі вектордың ұзындықтарының көбейтіндісін, олардың арасындағы φ бұрышының косинусына көбейткенге тең санды айтады, яғни

$$\vec{a}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \wedge \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (2.6)$$

2.17-анықтама. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ екі вектордың скалярлық көбейтіндісі деп $\vec{a}$ вектордың ұзындығын $\vec{b}$ векторының $\vec{a}$ векторына түсірілген проекциясына көбейтіндісін немесе $\vec{b}$ вектордың ұзындығын $\vec{a}$ векторының $\vec{b}$ векторына түсірілген проекциясына көбейтіндісін айтады, яғни

$$\vec{a}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| np_a \vec{b} = |\vec{b}| np_b \vec{a}. \qquad (2.7)$$

Скаляр көбейтіндінің негізгі қасиеттері:

1. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең, егер:

а) $\vec{a} \perp \vec{b}$

б) векторлар бірі нөлдік вектор болса.

Екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, мұндай векторлар ортогональ векторлар деп аталады.

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 > 0$

3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ орын ауыстыру (коммутативті) қасиеті

4. $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$ үлестірімділік (дистрибутивті) қасиеті

5. $(\vec{a}, \alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$.

6. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болса, онда $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \pm|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Бірінші қасиет скалярлық көбейтіндінің анықтамасынан тікелей шығады.
Төртінші қасиеттің дәлелдеуін келтірейік

$$(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|np_a(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|(np_a\vec{b}+np_a\vec{c})=|\vec{a}|np_a\vec{b}+|\vec{a}|np_a\vec{c}=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$$

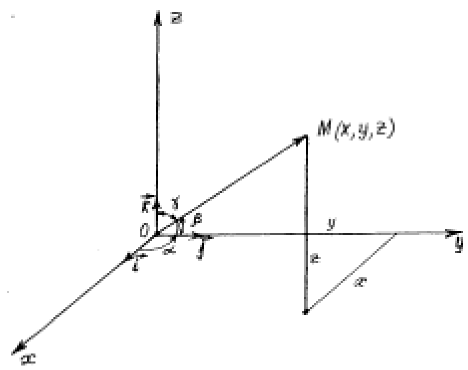
Бұл жерде векторлардың сандық проекцияларының қасиеттерін және векторлардың скалярлық көбейтіндісінің анықтамасын пайдаландық.
Бесінші қасиеттің дәлелдеуі:

$$(\vec{a},\alpha\vec{b})=|\vec{a}|np_a(\alpha\vec{b})=|\vec{a}|\alpha np_a\vec{b}=\alpha|\vec{a}|np_a\vec{b}=\alpha(\vec{a},\vec{b}).$$

Осы қасиеттерден мыналар шығады:

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c}).$$
$$(\alpha\vec{a},\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})\,.$$

Координаттары берілген векторларға қолданылатын сызықтық амалдар
Үш өлшемді кеңістікте тік бұрышты $OXYZ$ координаталар жүйесін енгіземіз. O нүктесі арқылы өтетін өзара үш перпендикуляр бағытталған түзулер координат өстері деп аталады. Мұндағы O нүктесі координаттардың *бас нүктесі* деп аталады. $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ арқылы OX, OY және OZ координаттар-дың бірлік векторлары белгіленген. Осы кеңістікте кез келген M нүктесі берілсін. (2.6-сурет). Бағытталған OM кесінді M нүктесінің *радиус векторы* деп аталынады.



$\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ радиус вектордың координат өстеріндегі сандық проекциялары x, y, z деп белгіленген. Бұл x, y, z - тер M нүктесінің координаттары; x - абсцисса, y - ордината, z - аппликата деп аталады.
Сонымен, x $\vec{a}$ вектордың OX өстегі проекциясы, y OY өстегі проекциясы, z OZ өстегі проекциясы болса, онда $\vec{a}\ =(a_x, a_y, a_z)$ деп жазылады.

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ және $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ векторлары берілсін. Онда мына үш теңдік дұрыс:

1) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \quad a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z,$ (2.8)

2) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) \pm (b_x, b_y, b_z) = (a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z),$ (2.9)

3) $\alpha\vec{a} = \alpha(a_x, a_y, a_z) = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z).$ (2.10)

(2.8) теңдіктің дұрыстығы, векторлардың анықтамасынан шығады. Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар, олардың проекцияларына да қолданылады, сондықтан (2.9) және (2.10) теңдіктері дұрыс.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координат өстерінің бірлік векторлары болғандықтан мына теңдіктер дұрыс:

$$\vec{i} = (1,0,0), \quad \vec{j} = (0,1,0), \quad \vec{k} = (0,0,1), \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,$$
$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1, \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0. \qquad (2.11)$$

Кез келген $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ векторын былай жазуға болады

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (2.12)$$

(2.9) және (2.10), (2.11) формулалардан

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = a_x(1,0,0) + a_y(0,1,0) + a_z\left(0,0,1\right) = (a_x,0,0) + (0,a_y,0) + (0,0,a_z) = \vec{a}$$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ және $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ векторлары берілсін. Онда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a},\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (2.13)$$

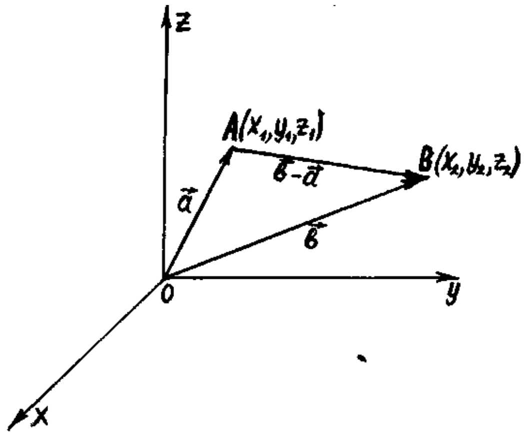
шынында да, (2.11) пайдаланып

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x\vec{i}\cdot\vec{i} + a_y b_y\vec{j}\cdot\vec{j} + a_z b_z\vec{k}\cdot\vec{k} +$$
$$+ a_x b_y\vec{i}\cdot\vec{j} + a_x b_z\vec{i}\cdot\vec{k} + a_y b_x\vec{j}\cdot\vec{i} + a_y b_z\vec{j}\cdot\vec{k} + a_z b_x\vec{k}\cdot\vec{i} + a_z b_y\vec{k}\cdot\vec{j} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Егер $\vec{a} = \vec{b}$ болса, яғни $a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z$, онда

$$|\vec{a}|^2 = a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}} \qquad (2.14)$$

Вектордың ұзындығы (модулі) оның сандық проекцияларының квадраттарының қосындысының квадрат түбіріне тең. (4.9) формуламен $A(x_1, y_1, z_1)$ және $B(x_2, y_2, z_2)$ екі нүктенің ара қашықтығын табуға болады. Себебі бұл ара қашықтық $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ және $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ векторлардың ұштарының ара қашықтығына тең. Сонымен 2.7-суреттен



2.7-сурет

$$\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{b} - \vec{a}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{2.15}$$

(2.12) формуладан мынандай тұжырым шығады:
(2.13)

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (np_x\vec{a})\vec{i} + (np_y\vec{a})\vec{j} + (np_z\vec{a})\vec{k} = \\ = (|\vec{a}|\cos\alpha)\vec{i} + (|\vec{a}|\cos\beta)\vec{j} + (|\vec{a}|\cos\gamma)\vec{k}. \tag{2.16}$$

Мұндағы α, β және γ - бұрыштары $\vec{a}$ векторымен координат өстерінің арасындағы сәйкес бұрыштары. (2.16) формуладан $a_x = |\vec{a}|\cos\alpha,\ a_y = |\vec{a}|\cos\beta,\ a_z = |\vec{a}|\cos\gamma.$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \tag{2.17}$$

Бұл $\cos\alpha, \cos\beta$ және $\cos\gamma$ - лар $\vec{a}$ векторының бағыттауыш косинустары деп аталады және

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Егер $\vec{a}^0$ векторы $\vec{a}$ вектордың бірлік векторы болса, онда $\vec{a}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

1-мысал. $\vec{a} = \{3 : -3; -4\}$ векторының модулін және бағыттауыш косинустарын табу керек.

Шешуі. $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 9 + 16} = \sqrt{34}$; $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$; $\cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{34}}$; $\cos\gamma = -\frac{4}{\sqrt{34}}$.

Векторлардың коллинеарлық және ортогоналдық болу шарттары

Егер $\vec{a} \ = (a_x, a_y, a_z)$ және $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ векторлары коллинеарлы болса, онда оларды былай жазуға болады $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, мұндағы $\alpha \in R$.
Олай болса

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \alpha\vec{b} \Leftrightarrow (a_x,\ a_y, a_z) = \alpha(b_x,\ b_y,\ b_z) \Rightarrow (a_x,\ a_y, a_z) = (\alpha b_x, \alpha b_y, \alpha b_z),$$

онда $a_x = \alpha b_x, \quad a_y = \alpha b_y, \quad a_z = \alpha b_z$, яғни

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \qquad (2.18)$$

(2.18) формуланы векторлардың коллинеарлы болу шарттары деп атайды.
Егер (2.18) формуланың бөлімдерінің біреуі немесе екеуі нөл болса, онда оны нөлге бөлу деп түсінуге болмайды, олай жазылу векторлардың коллинеарлы болуының символикалық жазылуы деп түсіну керек.

2-мысал. $\vec{a} = (1,2,3)$ және $\vec{b} = (4,8,12)$ векторлары коллинеар, себебі олардың координаттары (2.18) шарттарды қанағаттандырады.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} \ \text{ олай болса } \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Егер $\vec{a} \ = (a_x, a_y, a_z)$ және $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ перпендикуляр векторлар болса, онда олардың скалярлық көбейтіндісі нөлге тең, яғни $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Осыдан

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad (2.19)$$

(2.19) формуланы векторлардың перпендикуляр болу шарты деп атайды.
Екі векторлардың скалярлық көбейтіндісінен, екі векторлардың арасындағы бұрышты анықтауға болады. Скалярлық көбейтіндінің бірінші анықтамасынан

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \Rightarrow \ \cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \ \cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}\sqrt{b_x^{\ 2} + b_y^{\ 2} + b_z^{\ 2}}} \qquad (2.20)$$

3-мысал. $\vec{a} = \lambda\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \ \vec{b} = 4\vec{i} + \lambda\vec{j} - 4\vec{k}$ векторлары берілген. λ - ның қандай мәнінде векторлар перпендикуляр болады?

Шешуі: (2.19) формуланы пайдаланып

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

$\vec{a} \ = (\lambda,\ 2,\ 3)$ және $\vec{b} = (4, \lambda, -4)$ векторларының скаляр көбейтіндісін нөлге теңестіріп λ - ның мәнін табамыз:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4\lambda + 2\lambda - 12, \qquad 4\lambda + 2\lambda - 12 = 0, \qquad \lambda = 2$$

2.5. Векторлардың векторлық көбейтіндісі

2.18-анықтама. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a},\vec{b}\right]$ белгіленетін және келесі шарттармен анықталатын векторды айтады:

а) $|\vec{c}| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi,\quad \varphi = (\vec{a}\wedge\vec{b});$

ә) $\vec{c} = \left[\vec{a},\vec{b}\right]$ векторы $\vec{a},\ \vec{b}$ векторлардың әрқайсысына перпендикуляр;

б) $\vec{c}$ векторы OX, OY өстері OZ өсіне қарағанда қалай бағытталса $\vec{a}, \vec{b}$ векторларына қарағанда солай бағытталған, яғни $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ -оң үштік құрайды.

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:

а) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi,\ \varphi = (\vec{a}\wedge\vec{b})$;

ә) $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\,//\,\vec{b},\ \ \vec{a}\times\vec{a} = 0$;

б) векторлық көбейту қарсы коммутативті: $\left[\vec{b},\ \vec{a}\right] = -\left[\vec{a},\vec{b}\right]$;

в) терімділік заңы: $(\lambda\ \vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\ \vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

г) үлестірімділік заңы: $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c},\quad c\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$.

Координаттары берілген векторлардың векторлық көбейтіндісі

Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінің $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ базистік бірлік векторлары оң үштік құрсын. Онда векторлардың векторлық көбейтіндісінің анықтамасы бойынша

$$\begin{aligned}&\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j},\ \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i},\\ &\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j},\ \vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}\end{aligned} \tag{2.21}$$

Бізге

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \text{ және } \vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right) = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

векторлары берілсін. Онда формуланы пайдаланып және векторлық көбейтіндінің қасиеттерінен мына өрнекті аламыз:

$$\begin{aligned}&\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = a_xb_x\vec{i}\times\vec{i} + a_yb_y\vec{j}\times\vec{j} +\\ &+ a_zb_z\vec{k}\times\vec{k} + a_xb_y\vec{i}\times\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\times\vec{k} + a_yb_x\vec{j}\times\vec{i} + a_{y1}b_z\vec{j}\times\vec{k} + a_zb_x\vec{k}\times\vec{i} +\\ &+ a_{z1}b_y\vec{k}\times\vec{j} = \left(a_yb_z - b_ya_z\right)\vec{i} + \left(b_xa_z - a_xb_z\right)\vec{j} + \left(a_xb_y - a_yb_x\right)\vec{k} =\\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

(2.22) формуласын үшінші ретті анықтауыш түрінде де жазуға болады:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{2.23}$$

Векторлық көбейтіндінің анықтамасы бойынша $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына құрылған параллелограммның ауданы

$$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2} \qquad (2.24)$$

формуласымен анықталады.

1-салдар. Ортақ бір нүктеге үйлестірілген коллинеар емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларынан құралған параллелограмм және үшбұрыш аудандары

$$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y\, a_z \\ b_y\, b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x\, a_z \\ b_x\, b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x\, a_y \\ b_x\, b_y \end{vmatrix}^2}\ ; \quad S_\nabla = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} a_y\, a_z \\ b_y\, b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x\, a_z \\ b_x\, b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x\, a_y \\ b_x\, b_y \end{vmatrix}^2}$$

формуласымен табылады.

2-салдар. Егер

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0$$

немесе

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

теңдігі орындалса, онда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар болады.

4-мысал. $\vec{a} = (3;\,-4;\,2)$ және $\vec{b} = (1;\,5;\,1)$ векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек.

Шешуі:

$$[\,\vec{a},\vec{b}\,] = \left\{\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\right\} = \{-14,\,-1,\,19\}.$$

5-мысал. $A_1(3,2,-1)$, $A_2(-1,0,2,)$, $A_3(1,2,5)$ төбелері берілген үшбұрыштың ауданын табу керек.

Шешуі: Алдымен $\overrightarrow{A_1A_2}$ мен $\overrightarrow{A_1A_3}$ векторларынан тұрғызылған параллелограммның ауданын табамыз. Параллелограммның ауданы векторлық көбейтіндінің анықтамасы бойынша $\overrightarrow{A_1A_2}$ және $\overrightarrow{A_1A_3}$ векторлардың векторлық көбейтіндісінің модуліне тең, яғни

$$S = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|.$$

мұндағы $\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1\}$

$\overrightarrow{A_1A_3} = \{x_3 - x_1,\, y_3 - y_1,\, z_3 - z_1\}.$

Ал $A_1A_2A_3$ үшбұрыштың ауданы мына формула бойынша анықталады

$$S_\Delta = \frac{1}{2}S.$$

Сонымен $\overrightarrow{A_1A_2} = \{-4,-2,3\}, \quad \overrightarrow{A_1A_3} = \{-2,0,6\}$

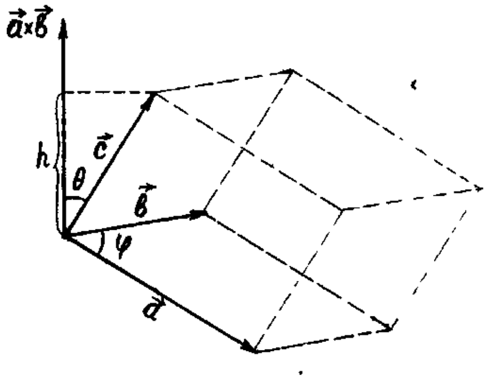
$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\left\{-12\vec{i} - (-24+6)\vec{j} + (-4)\vec{i}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{mod}\left\{-12\vec{i} + 18\vec{j} - 4\vec{k}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + 18^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{144+324+16} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{484} = \frac{1}{2}\cdot 22 = 11. \qquad S_\Delta = 11 \quad (\textit{кв.бірлік}).$$

2.6. Үш вектордың аралас көбейтіндісі

R^3 кеңістігіндегі әрбір компланарлы емес бастары бір нүктеге орналасқан кез келген үш вектор параллелепипедті анықтайды. (2.8-сурет).



2.8-сурет

Осы үш векторлар параллелепипедтің қырларын құрайды. Параллелепипедтті оң (теріс) бағытталған дейді, егерде $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлары оң (сол) үштік құрайтын болса.

2.19-анықтама. Кез келген $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлары берілсін. Егер $\vec{a}$ векторын $\vec{b}$ векторына векторлық көбейтіп, содан кейін $\vec{a}\times\vec{b}$ векторын $\vec{c}$ векторына скаляр көбейтсек нәтижесінде $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп аталатын $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})$ саны шығады.

Үш вектордың аралас көбейтіндісін $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})$, $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$ немесе $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ символдарымен белгілейміз.

2.1-теорема. Компланар емес $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісінің модулі осы векторлар арқылы тұрғызылған параллелепипед көлеміне тең болады, егер векторлар оң үштік құраса бұл көбейтінді “оң”, ал
теріс үштік құраса «теріс» болады.

$$V = \left| \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} \right| , \tag{2.25}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - оң үштік құрайды.

2.2-теорема. Егер

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} , \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} , \quad \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

онда аралас көбейтіндісі

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right] \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{2.26}$$

формуласымен есептелінеді.

1-салдар. Бір нүктеге үйлестірілген компланар емес $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісінің модулінің $1/6$ бөлігі осы векторлар арқылы тұрғызылған пирамида көлеміне тең болады.

2-салдар. Өз координаталарымен берілген $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары компланар болуы үшін мына теңдіктің

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \tag{2.27}$$

орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Векторлардың аралас көбейтіндісінің қасиеттері

1. Көршілес екі вектордың орнын алмастырсақ, оның таңбасы өзгереді:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c} \right) = -\left(\vec{b}\vec{a}\vec{c} \right) = -\left(\vec{a}\vec{c}\vec{b} \right)$$

2. Векторлардың орнын толық алмастырсақ, онда таңба өзгермейді:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) = \left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \right) = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \right)$$

3. $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, d, g \right) = \left(\vec{a}, \vec{d}, \vec{g} \right) + \left(\vec{b}, \vec{d}, \vec{g} \right) + \left(\vec{c}, \vec{d}, \vec{g} \right)$

4. $\left(\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) = \lambda \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right)$

5. Егер $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланар болса, онда $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) = 0$.

6-мысал. $\vec{a} = \{1, 3, 1\}$, $\vec{b} = \{-2, 4, -1\}$, $\vec{c} = \{2, 4, -6\}$ векторларын компланарлыққа тексеру керек.

Шешуі.

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & 4 & -1\\ 2 & 4 & -6\end{vmatrix}=-16\neq 0.$$

Демек, $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлары компланарлы емес.

Координаттары берілген векторлардың аралас көбейтінділері

Тік бұрышты декарт координат жүйесінің $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ базистік бірлік векторлары оң үштік құрсын. Онда векторлардың векторлық көбейтіндісінің анықтамасы бойынша
Бізге

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ \ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y j+b_z\vec{k}\ ,\ \vec{c}=\left(c_x,c_y,c_z\right)=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$$

векторлары берілсін. Онда аралас көбейтіндінің анықтамасы бойынша (2.26) формуланы пайдаланып мына өрнекті аламыз:

$$\left((\vec{a}\times\vec{b}),\vec{c}\right)=c_x\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (2.28)$$

$\vec{a},\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларынан құрылған бағытталған параллелепипедтің көлемі, аралас көбейтіндінің анықтамасы бойынша былай анықталады:

$$V=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (2.29)$$

(2.29) формуладағы анықтауыштың бірінші жолы $\vec{a}$ векторының, екінші жолы $\vec{b}$ векторының ал үшінші жолы $\vec{c}$ векторының координаттары.

7-мысал.

$$\vec{a}\ (1,3,1),\quad \vec{b}\,(-2,4,-1),\quad \vec{c}\,(2,4,-6)$$

векторлары берілген.

Осы векторлардың компланарлы екендігін анықтаңдар, егер компланарлы болмаса, онда қандай үштік құрайтынын анықтап, сол векторлар арқылы құрылған параллелепипедтің көлемін анықта.

Шешуі:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & 4 & -1\\ 2 & 4 & -6\end{vmatrix}=-78= \text{-78},$$

аралас көбейтіндінің нәтижесінен векторлардың компланарлы емес екендігі белгілі болды. Олар сол үштік құрайды, $V=78$.

8-мысал. Төбелері
$$A_1(1,2,3),\quad A_2(0,-1,1),\quad A_3(2,5,2) \text{ және } A_4(3,0,-2)$$
болатын пирамиданың көлемін табу керек.

Шешуі. Алдымен $A_1\vec{A}_2, A_1\vec{A}_3$ және $A_1\vec{A}_4$ векторларын тұрғызылған параллелепипедтің көлемін аралас көбейтінің анықтамасы бойынша мына формуламен табамыз:

$$V_{пар} = \mathrm{mod}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Ал үшбұрышты пирамиданың көлемі:

$$V_{пир} = \frac{1}{6}V_{пар},$$

Алдымен $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$ және $\overrightarrow{A_1A_4}$ векторлардың координаттарын табамыз. Сонымен

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{-1,-3,-2\},\ \overrightarrow{A_1A_3} = \{1,3,-1\},\ \overrightarrow{A_1A_4} = \{2,-2,-5\}.$$

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\{15+4+6+12-15+2\} = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\{24\} = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4.$$

$$V_{пир} = 4 \quad \text{(куб бір)}.$$

3. ЕВКЛИД КЕҢІСТІГІ

3.1. Нақты евклид кеңістігінің анықтамасы және оның қасиеттері

3.1-анықтама. Нақты сызықты векторлық R кеңістіктің кез келген екі $x, y \in R$ элементіне (векторына) скаляр көбейтінді деп аталатын (x, y) нақты саны сәйкес келсе және оған мына төмендегі аксиомалар орындалса:

1. $(x,\ y) = (y,\ x)$
2. $(\alpha \cdot x,\ y) = \alpha \cdot (x,\ y),\ \ \alpha$ - нақты сан,
3. $(x + y,\ z) = (x, z) + (y,\ z)$
4. $(x, x) > 0,$ егер $x \neq 0,$ $(x, x) = 0,$ егер $x = 0$

онда бұл кеңістікті нақты евклид кеңістігі деп атайды.

Евклид кеңістігі кез келген шекті өлшемді немесе шексіз өлшемді болып бөлінеді.

Скаляр көбейтіндінің 1) – 3) аксиомаларын пайдаланып, оның мына төмендегі қасиеттерін дәлелдейік:

1. $(x,\ \alpha\, y)=\alpha(x,\ y)$
2. $(x,\ y+z)=(x,\ y)+(x,\ z)$
3. $(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_k x_k,\ y)=\alpha_1(x_1,y)+\ldots+\alpha_k(x_k,z)$
4. $(x,\ \beta_1\cdot y_1+\ldots+\beta_k\ \ y_k)=\beta_1(x,y)+\ldots+\beta_k(x,y)$

Шынында да,

1. $(x,\alpha\, y)=(\alpha\, y,\ x)=\alpha(y,x)=\alpha(x,y)$
2. $(x,y+z)=(y+z,x)=(y,x)+(z,x)=(x,y)+(x,z)$
3. $(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_k x_k,\ y)=(\alpha_1 x_1,y)+(\alpha_2 x_2,y)+\ldots+(\alpha_k x_k,y)=$
$=\alpha_1(x_1,y)+\ldots+\alpha_k(x_k,y)$
4. $(x,\ \beta_1\cdot y_1+\ldots+\beta_k\ \ y_k)=(\ \beta_1\cdot y_1+\ldots+\beta_k\ \ y_k,\ x)=\beta_1(y_1,\ x)+\ldots+\beta_k(y_k,\ x)=$
$=\beta_1(x,y_1)+\ldots+\beta_k(x,y_k)$

2. Нақты n сандар $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ жиынын x вектордың координаттары деп қарастыралық: $x=(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$.

$x=(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ пен $y=(y_1,y_2,\ ...,\ y_n)$ векторларды қосу, оларды α нақты санға көбейту

$$(x+y)=(x_1+y_1,...,x_n+y_n),\quad \alpha\cdot x=(\alpha\cdot x_1,\ ...,\alpha\cdot x_n)$$

формулаларымен анықтайық, ал олардың скаляр көбейтіндісін

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i \tag{3.1}$$

формулаларымен өрнектейік. Бұл формуламен өрнектелген скаляр көбейтіндіге анықтамадағы төрт аксиома түгелімен орындалады. Олай болса, бұл векторлар жиыны n өлшемді Евклид кеңістік.

3.2. Евклид кеңістігінің нормасы және оның қасиеттері

Евклид R кеңістігінің анықтамасындағы 4-аксиома бойынша кез келген $x\neq 0$ элементтің (вектордың) скаляр $(x,\ x)$ көбейтіндісі нақты оң сан. Сондықтан, бұл скаляр $(x,\ x)$ көбейтіндіден квадрат түбір былай табылады:

$$\sqrt{(x,x)} \tag{3.2}$$

3.2-анықтама. Евклид R кеңістігінің $x\neq 0$ элементіне сәйкес келетін (x,x) скаляр көбейтіндінің квадрат түбірін $\sqrt{(x,x)}$ оның нормасы (немесе ұзындығы, модулі) деп атаймыз және оны $\|x\|$ символымен белгілеп, мына

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)} \tag{3.3}$$

формуламен өрнектейміз.

Ұзындығы бірге тең вектор нормаланған вектор деп аталады.

3.1-теорема. Евклид R кеңістігінің кез келген $x,y\in R$ элементіне Коши-Буняковский

$$(x, y)^2 \le (x, x)(y, y) \tag{3.4}$$

немесе

$$|(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\|$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеуі. Егер α нақты сан болса, онда $\alpha \cdot x - y$ векторы үшін

$$(\alpha \cdot x - y,\ \alpha \cdot x - y) \ge 0 \tag{3.5}$$

теңсіздігі орындалады. Бұдан

$$\alpha^2 \cdot (x,\ x) - 2\alpha \cdot (x,\ y) + (y,\ y) \ge 0 \tag{3.6}$$

α-ға байланысты бұл квадратты үшмүшеліктің теріс болмауы үшін оның дискриминанты оң болмауы:

$$(x, y)^2 - (x,\ x)(y, y) \le 0 \tag{3.7}$$

қажетті әрі жеткілікті. Осы теңсіздіктен (3.4) теңсіздігі алынады. Теорема дәлелденді.

3.2-теорема. Евклид R кеңістігінің кез келген екі $x,\ y \in R$ элементіне (векторына):

$$||x + y|| \le ||x|| + ||y|| \tag{3.8}$$

үшбұрыш теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеу. Норманың және скаляр көбейтіндінің анықтамасы бойынша:

$$||x + y|| = \sqrt{(x + y,\ x + y)} = \sqrt{(x, x) + 2(x, y) + (y, y)}$$

(3.4) Коши теңсіздігін ескерсек, онда

$$||x + y|| \le \sqrt{(x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y)} = \sqrt{\left(\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}\right)^2} = ||x|| + ||y||$$

Теорема дәлелденді.

Ескерту. 1. Егер x, y векторлары сызықты тәуелді болса: $x = \alpha \cdot y$, онда (3.4) теңсіздігі теңдікке айналады:

$$|(x, y)| = ||x| \cdot ||y|| \tag{3.9}$$

Шынында да,

$$|(x,y)| = |(\alpha\cdot y,\ y)| = |\alpha|\cdot(y,\ y) = |\alpha|\cdot(y,y) = |\alpha|\cdot||y||^2 = |\alpha|\cdot||y||\cdot||y|| =$$
$$= ||\alpha\cdot y||\cdot||y|| = ||x||\cdot||y||$$

2. Егер $x,\ y$ векторлары сызықты тәуелсіз болса: $x-\alpha y\neq 0$, онда (3.4) теңсіздігі мына түрде жазылады:

$$|(x,y)| < ||x||\cdot||y|| \qquad (3.10)$$

Шынында да, $x-\alpha y\neq 0$ векторы үшін:

$$(x-\alpha\cdot y, x-\alpha\cdot y) > 0 \text{ немесе } (x,x) - 2\alpha(x,y) + \alpha^2(y,y) > 0$$

Бұдан

$$(x,y)^2 - (x,\ x)(y,y) < 0$$

немесе

$$|(x,y)| < ||x||\cdot||y||$$

Ескерту. Егер x және y векторлары бағытталған кесінділер болса, онда (3.8) үшбұрыш теңсіздігінен шығатын қорытынды: ұшбұрыштың бір қабырғасының ұзыныдығы оның басқа екі қабырғасының ұзындықтарының қосындысынан кіші.

Нақты евклид кеңістігінде берілген екі $x\neq 0$, $y\neq 0$ векторлардың арасындағы φ бұрышты

$$Cos\varphi = \frac{(x,y)}{||x||\cdot||y||} \qquad (3.11)$$

формуламен анықтауға болады.

Егер $|Cos\varphi|\leq 1$ теңсіздігін ескерсек, онда (3.11) формуладан Коши-Буняковский теңсіздігін аламыз.

3.3-теорема. Егер берілген $x\neq 0$ векторын кез келген нақты санға көбейтсек, онда $\alpha\cdot x$ вектордың ұзындығы $||\alpha\cdot x||$ берілген x вектордың ұзындығы $||x||$ мен α санының модулінің көбейтіндісіне тең:

$$||\alpha\cdot x|| = |\alpha|\cdot\|x\| \qquad (3.12)$$

Дәлелдеу. Норманың анықтамасын ескерсек, онда

$$||\alpha\cdot x|| = \sqrt{(\alpha\, x, \alpha\, x)} = \sqrt{\alpha^2(x,x)} = |\alpha|\cdot\|x\|$$

Теорема дәлелденді.

3.3. Ортонормалдаған векторлар жүйесі және оның қасиеттері

3.3-анықтама. Егер евклид кеңістігіндегі

$$l_1,\ l_2,\ ...,\ l_n \qquad (3.13)$$

векторлар жүйесіне

$$\left(l_i, l_j\right)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases} \qquad (3.14)$$

теңдіктері орындалса, онда (3.13) векторларды ортонормалданған векторлар, егер (3.14) теңдіктердің тек бірінші теңдіктері ғана орындалса, онда олар ортогоналды векторлар деп аталады.

3.4-теорема. Нөлдік вектор кез келген векторға ортогонал:

$$(x,0)=0,\ \forall x\in R.$$

Дәлелдеуі. Кез келген $y\in R$ векторға $(x,y)=0$ теңдеуі орындалсын делік. Дәлелдеу керек $x=0,\ y=x$ болғанда $(x,x)=0$. Бұдан $x=0$. Теорема дәлелденді.

3.5-теорема (Пифагор). Егер x және y векторлары ортогонал болса: $(x,\ y)=0$, онда

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

Дәлелдеу. $(x,\ y)=0$ болса, онда (1.4) формуладан $Cos\varphi=0$, яғни $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Ендеше x, y векторлары бір-біріне перпендикуляр: $x\perp y$. Олай болса, $\|x\|, \|y\|$ тік бұрышты үшбұрыштың катеттері, $\|x+y\|$ оның гипотенузасы ретінде қарастырылады. Норманың анықтамасы бойынша:

$$\|x+y\|^2=(x+y,\ x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)=(x,x)+(y,y)=\|x\|^2+\|y\|^2$$

Теорема дәлелденді.

3.6-теорема. Ортонормалданған $l_1, l_2, ..., l_n$ векторлар жүйесі сызықты тәуелсіз.

Дәлелдеу. Берілген векторлардың сызықты тәуелсіз екенін дәлелдеу үшін

$$c_1l_1+c_2l_2+...+c_nl_n=0 \qquad (3.15)$$

теңдеуді қарастырып, оның тек $c_1=c_2=...=c_n=0$ болғанда ғана орындалатынын дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін (5.7) теңдеудің екі жағында l_i векторына скаляр көбейтсек, яғни:

$$\left(c_1l_1+c_2l_2+...+c_nl_n,\ l_i\right)=0,\ i=\overline{1,\ n}$$

Осыдан

$$c_1\left(l_1,\ l_i\right)+c_2\left(l_2,\ l_i\right)+...+c_n\left(l_n,\ l_i\right)=0,\quad i=\overline{1,n}$$

i-дің біртіндеп 1, 2, ..., n мәндерін қабылдағанын және $l_1, l_2, ..., l_n$ ортонормалданған векторлар екенін ескерсек, онда $c_1=c_2=...=c_n=0$. Теорема дәлелденді.

3.7-теорема. Егер евклид R кеңістігіндегі $a_1, a_2, ..., a_k$, $a_i\neq 0,\ i=\overline{1,k}$ сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі болса, онда оған сызықты тәуелді $l_1, l_2, ..., l_k$ ортогоналды векторлар жүйесі мына төмендегі

$$l_1=a_1\neq 0,\quad l_i=a_i+a_{i1}+...+a_{1i-1}l_{i-1},\quad i=\overline{2,\ k} \qquad (3.16)$$

формулалармен өрнектеледі, мұндағы

$$a_{ij} = -\frac{(a_i, l_j)}{(l_i, l_i)}, \; i = \overline{2, k}, \;\; j = \overline{1, i-1} \tag{3.17}$$

Дәлелдеуі. Теореманы индукция әдісімен дәлелдейміз. Іздеп отырған l_1 векторын берілген a_1 векторға тең деп аламыз: $l_1 = a_1 \neq 0$, ал l_2 векторды

$$l_2 = a_2 + a_{21} l_1 \tag{3.18}$$

теңдеуінен анықтаймыз, мұндағы a_{21} белгісіз тұрақты коэффициент. Егер $l_2 = 0$ болса, онда a_1, a_2 векторлары сызықты тәуелді, ал бұл теореманың шартына қарама-қайшы, себебі a_1, a_2 векторлары сызықты тәуелсіз. Сондықтан $l_2 \neq 0$. Белгісіз a_{21} коэффициентті табу үшін (3.18) теңдікті $l_1 \neq 0$ векторына скаляр көбейтеміз:

$$(l_2, l_1) = (a_2, l_1) + a_{21}(l_1, l_1).$$

Іздеп отырған l_2 вектор белгілі $l_1 = a_1$ векторына ортогонал болу керек: $(l_2, l_1) = 0$. Онда

$$a_{21} = -\frac{(a_2, l_1)}{(l_1, l_1)}.$$

Сонымен, (3.16), (3.17) формулалардың $i = 2, \; j = 1$ тең жағдайлары дәлелденді.

$l_1, l_2, ..., l_{n-1}$ ортогонал векторларын (3.16)-ден, оның $a_{ij}, \; i = \overline{2, k-1}, \; j = \overline{1, i-1}$ коэффициенттерін (3.17) формуламен өрнектелетіндей етіп e_k векторын ізделік. Ол e_k векторды

$$l_k = a_k + a_{k1} l_1 + ... + a_{k\,k-1} l_{k-1} \tag{3.19}$$

теңдігінен анықтаймыз, мұндағы $a_{kj}, \;\; j = \overline{1, k-1}$ белгісіз тұрақты коэффициенттер. Егер $l_k = 0$ болса, онда $a_1, a_2, ..., a_{k-1}$ векторлары сызықты тәуелді, ал ол теореманың шартына қарама-қайшы. Ендеше, $l_k \neq 0$. Белгісіз $a_{kj}, \; j = \overline{1, k-1}$ тұрақты коэффициенттерді табу үшін, (3.19) теңдеуді $l_1, l_2, ..., l_{k-1}$ векторларына скаляр көбейтіп және $l_1, l_2, ..., l_k$ ортогонал векторлар екенін ескеріп, белгісіз $a_{kj}, \;\; j = \overline{1, k-1}$ коэффициенттері (3.17), $i = k, \; j = \overline{1, k-1}$ формулалардан анықталатынын дәлелдейміз. Теорема дәлелденді.

3.8-теорема. Егер евклид R кеңістігіндегі $a_1, a_2, ..., a_k, \;\; a_i \neq 0, i = \overline{1, k}$ ортогоналды векторлар жүйесі болса, онда оған сызықты тәуелді $l_1, l_2, ..., l_k$ ортонормалданған векторлар жүйесін мына төмендегі

$$l_i = \frac{a_i}{\|a_i\|}, \quad i = \overline{1, k} \tag{3.20}$$

формулалармен өрнектеуге болады.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін (3.20) формулаларымен өрнектелген $l_i,\ i=\overline{1,k}$ ортонормалданған векторлар жүйесі екенін дәлелдесек жеткілікті. Шынында да, егер $i \neq j$ болса, онда:

$$\left(l_i,\, l_j\right)=\left(\frac{a_i}{||a_i||},\, \frac{a_j}{||a_j||}\right)=\frac{\left(a_i, a_j\right)}{||a_i||\cdot||a_j||}=0$$

Ал, егер $i=j$ болса, онда:

$$\left(l_i,\, l_i\right)=\frac{\left(a_i, a_i\right)}{||a_i||^2}=1$$

Теорема дәлелденді.

3.9-теорема. Кез келген n өлшемді евклид R кеңістігінде n вектордан құрылған ортонормалданған базис бар.
Дәлелдеу. $a_1, a_2, ..., a_n$ векторлар жүйесі евклид R кеңістігінің базисі болсын делік. Сондықтан, 5.7-теорема бойынша $a_1, a_2, ..., a_n$ векторларына сызықты тәуелді $b_1, b_2, ..., b_n$ ортогонал векторлар жүйесін құрамыз:

$$\left(b_i,\, b_j\right)=0,\ i \neq j$$

Енді 3.8-теореманы пайдаланып, $b_1, b_2, ..., b_n$ векторларына сызықты тәуелді $l_1, l_2, ..., l_n$ ортонормалданған векторлар жүйесін құрамыз, ал ол жүйе 3.6-теорема бойынша сызықты тәуелсіз, яғни $l_1, l_2, ..., l_n$ евклид R кеңістігінің ортонормалды базисі. Теорема дәлелденді.

1-мысал. $[-1; 1]$ сегментте анықталған дәрежесі үштен аспайтын көпмүшеліктер кеңістігіндегі ортогонал базисті табу керек.

Шешуі. Ортогонал базисті табу үшін

$$f_0(t)=1, \quad f_1(t)=t, \quad f_2(t)=t^2, \quad f_3(t)=t^3$$

элементтерін базис ретінде қарастыралық. Енді $1,\ t,\ t^2,\ t^3$ элементтеріне сызықты тәуелді $g_0(t),\ \ g_1(t),\ \ g_2(t),\ \ g_3(t)$ ортогонал базисті (3.16) формула бойынша:

$$g_0(t)=f_0(t)=1, \ \ g_1(t)=f_1(t)+a_{10}\cdot g_0(t)$$

мұндағы

$$a_{10}=-\frac{\left(f_1,\, g_0\right)}{\left(g_0,\, g_0\right)}=-\frac{\left(f_1,\, g_0\right)}{2}=0$$

Сонымен,

$$g_1(t)=f_1(t)=t$$

(3.16) формуладан

$$g_2(t)=f_2(t)+a_{21}g_1(t)=f_1(t)+a_{20}\cdot g_0(t)$$

мұндағы

$$a_{20}=-\frac{(f_2,\, g_0)}{(g_0,\, g_0)}=-\int_{-1}^{1} t^2\,\frac{dt}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$a_{21}=-\frac{(f_2,\, g_1)}{(g_1,\, g_1)}=-\int_{-1}^{1} 3t^3\,\frac{dt}{2}=0$$

Сонымен,

$$g_2(t)=t^2-\frac{1}{3}$$

Ең соңында (3.16) формуладан:

$$g_3(t)=f_3(t)+a_{32}\cdot g_2(t)+a_{31}\cdot g_1(t)+a_{30}\cdot g_0(t)$$

мұндағы

$$a_{30}=-\frac{(f_3,\, g_0)}{(g_0,\, g_0)}=-\int_{-1}^{1} t^3\,\frac{dt}{2}=0$$

$$a_{31}=-\frac{(f_3,\, g_1)}{(g_1,\, g_1)}=-\int_{-1}^{1} 3t^4\,\frac{dt}{2}=-\frac{3}{5}$$

$$a_{32}=-\frac{(f_3,\, g_2)}{(g_2,\, g_2)}=-\int_{-1}^{1} \frac{3}{2}\left(t^5-\frac{t}{3}\right)^3 dt=0$$

Сонымен,

$$g_2(t)=t^3-\frac{3t}{5}$$

3.4. Ортонормалданған базисте координаталарымен өрнектелген екі вектордың скаляр көбейтіндісі

3.10-теорема. Евклид R_n кеңістігіндегі кез келген екі вектордың $x=(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_n)\in R_n,\; y=(y_1,\, y_2,\ldots,\, y_n)\in R_n$ скаляр көбейтіндісі

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{3.21}$$

формуламен өрнектелу үшін, оның $l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_n$ базисі ортонормалданған болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. (3.21) формула орындалсын деп, $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базис ортонормалданған болуын дәлелдейік. x пен y векторларын берілген базисте жіктелік:

$$x=x_1\cdot l_1+\ldots+x_n\cdot l_n, \qquad y=y_1\cdot l_1+\ldots+y_n\cdot l_n,$$

(3.21) формуладан

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i l_i + \sum_{j=1}^{n} y_j l_j \right) = x_1 y_1 \cdot (l_1, l_1) + x_2 y_1 \cdot (l_2, l_1) + \ldots + x_n y_1 \cdot (l_n, l_1) +$$
$$+ x_1 y_2 \cdot (l_1, l_2) + x_2 y_2 \cdot (l_2, l_2) + \ldots + x_n y_2 \cdot (l_n, l_2) + \ldots + x_1 y_n \cdot (l_1, l_n) +$$
$$+ x_2 y_n \cdot (l_2, l_n) + \ldots + x_n y_n \cdot (l_n, l_n)$$

яғни

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} x_i y_j \cdot (l_i \cdot l_j) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

Соңғы теңсіздіктің орындалуы үшін евклид R_n кеңістігінің базисі ортонормалданған болуы жеткілікті:

$$(l_i, l_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{3.22}$$

Жеткіліктілігі. Евклид R_n кеңістігінің $l_1, l_2, ..., l_n$ базисі ортонормалданған болсын деп ұйғарып, (3.21) формуланы дәлелдейік. Ол үшін x пен y векторларының скаляр көбейтіндісін қарастырамыз:

$$(x,\ y) = (x_1 \cdot l_1 + \ldots + x_n \cdot l_n,\ y_1 \cdot l_1 + \ldots + y_n \cdot l_n) = \sum_{i,\ j=1}^{n} x_i y_j \cdot (l_i \cdot l_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_1 (l_i, l_1) + \sum_{i=1}^{n} x_i y_2 (l_i, l_2) + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_i y_n (l_i, l_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Теорема дәлелденді.

3.11-теорема. Евклид R_n кеңістігіндегі $l_1, l_2, ..., l_n$ базисі ортонормалданған базисте $x = (x_1, ..., x_n) \in R_n$ вектордың координаттары $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$x_i = (x, l_i), \quad i = \overline{1, n} \tag{3.23}$$

формуламен өрнектеледі.

Дәлелдеу. Берілген $x \in R_n$, векторды $l_1, l_2, ..., l_n$ базис бойынша жіктейік:

$$x = x_1 \cdot l_1 + x_2 l_2 + \ldots + x_n l_n$$

Осы жіктеудің екі жағында l_i векторына скаляр көбейтсек және $l_1, l_2, ..., l_n$ ортонормалданған жүйесі екенін ескерсек, онда

$$(x, l_i) = x_1 (l_1, l_i) + x_2 (l_2, l_i) + \ldots + x_n (l_n, l_i) = x_i$$

Теорема дәлелденді.

Егер R_n кеңістігінің кез келген базисі $(f_1,\ f_2, ...,\ f_n)$ берілген болса, онда

$$\vec{e}_1 = \vec{f}_1,\ \vec{e}_k = \vec{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i^{(k-1)} \vec{e}_i,\ k = 2, 3, ..., n, \tag{3.24}$$

мұндағы

$$c_i^{(k-1)} = \frac{(\vec{f}_k, \vec{e}_i)}{(\vec{e}_i, \vec{e}_i)} \tag{3.25}$$

векторлар осы кеңістіктің ортогональ базисін құрайды (Шмидтің ортогональдау процессі).

2-мысал. $\vec{f}_1 = (1, -2,\ 2),\ \vec{f}_2 = (-1,\ 0, -1),\ \vec{f}_3 = (5, -3,\ -7)$ берілген болса, ортогональ базисін құрайтын векторларын табыңыз.

Шешуі. $\vec{e}_1 = \vec{f}_1 = (1, -2,\ 2)$ делік, $\vec{e}_2$ векторын $\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - c_1^{(1)}\vec{e}_1$ түрінде іздейміз.

$$c_1^{(1)} = \frac{(\vec{f}_2, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1,\ \vec{e}_1)} = \frac{(-1, 0, -1)(1,\ -2,\ 2)}{(1,\ -2,\ 2)\cdot(1,\ -2,\ 2)} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Демек, $\vec{e}_2 = (-1, 0, -1) + \frac{1}{3}(1, -2, 2) = \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Енді $\vec{e}_3$ векторын $\vec{e}_3 = \vec{f}_3 - c_1^{(2)}\vec{e}_1 - c_2^{(2)}\vec{e}_2$ сызықты комбинация түрінде іздейміз.

$$c_1^{(2)} = \frac{(\vec{f}_3, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1,\ \vec{e}_1)} = \frac{(5, -3, -7)(1,\ -2,\ 2)}{(1,\ -2,\ 2)\cdot(1,\ -2,\ 2)} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$c_2^{(2)} = \frac{(\vec{f}_3, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_2,\ \vec{e}_2)} = \frac{(5, -3, -7)\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)} = 1$$

Демек,

$$\vec{e}_3 = (5,\ -3, -7) + \frac{1}{3}(1, -2, 2) - \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\left(5 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right),\ \left(-3 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right), \left(-7 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\right) = .$$
$$= (6,\ -3,\ -6)$$

4. СЫЗЫҚТЫҚ КЕҢІСТІКТЕГІ СЫЗЫҚТЫ ОПЕРАТОРЛАР

4.1. Сызықты түрлендірулердің анықтамасы

4.1-анықтама. Сызықты R кеңістігінің әрбір x элементіне (векторына) осы кеңістікте анықталған y элементі сәйкес келсе, онда R кеңістігінде түрлендіру (оператор) берілді дейміз және ол $\varphi(x)$ таңбасымен белгіленеді, яғни $y = \varphi(x) \in R,\ x \in R.$

Демек, R кеңістігінің φ - түрлендіруі осы кеңістіктің x элементіне ($x \in R$) әсер етіп, осы элементке R кеңістігінің $\varphi(x) \in R$ элементін сәйкес қояды. Бұл жағдайда, R кеңістігінде φ - түрлендіруі берілді дейміз және $R \xrightarrow{\varphi} R$ таңбасымен белгіленеді.

4.2-анықтама. Сызықты R кеңістігіндегі φ түрлендіруді сызықты (сызықты оператор) деп аталады, егер барлық $x_1,\ x_2 \in R$ элементтері үшін

1) $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2),\ \ x_1,\ x_2 \in R$ (4.1)

2) $\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi(x),\ \ x \in R$ (4.2)

шарттары орындалса, мұнда λ - кез келген сан.

Бұл шарттарды төмендегі бір теңсіздікпен алмастыруға болады:

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2) \tag{4.3}$$

φ - түрлендіруінің $y = \varphi(x)$ элементі x элементтің бейнесі, ал x элементі y элементінің түпбейнесі дейміз.

Сызықты R кеңістігінің кез келген φ сызықты түрлендіруі:

1) нөлдік элементті нөлдік элементке түрлендіреді (φ - түрлендіруі нөлдік элементті өзгертпейді): $\varphi(0)=0$
2) қарама-қарсы $-x \in R$ элементті оның қарама-қарсы $-\varphi(x)$ бейнесіне түрлендіреді, яғни $\varphi(-x)=-\varphi(x)$.

Шынында да, $x \in R$ кез келген элемент болсын, онда

$$\varphi(0)=\varphi(0 \cdot x)=0 \cdot \varphi(x)=0$$

Осы сияқты:

$$\varphi(-1)=\varphi((-1) \cdot x)=(-1) \cdot \varphi(x)=-\varphi(x)$$

теңдігі орындалады.

Сызықты R кеңістігінің кез келген элементін нөлдік элементке түрлендіретін түрлендіруді нөлдік түрлендіру дейміз және ол $O(x)$ деп белгіленеді, яғни $O(x)=O,\ x \in R$.

Бұл белгілеудегі теңдіктің оң жағындағы O - нөл элемент, ал сол жағындағы O - нөлдік түрлендіру. Нөлдік түрлендіру сызықты түрлендіру болады.

Сызықты R кеңістігінің кез келген $x \in R$ элементін сол элементтің өзіне-өзін түрлендіретін түрлендіру бірлік немесе тепе-теңдік түрлендіру деп атайды және ол $\varepsilon(x)$ деп белгіленеді, яғни $\varepsilon(x)=x,\ x \in R$.

R сызықты кеңістігінің кез келген $x \in R$ элементін элементін оның $\lambda \cdot x$ элементіне түрлендіретін φ түрлендіруі сызықты болатынын көрсетейік. Шынында да, қарастырып отырған φ түрлендіруін мына түрде жазамыз:

$$\varphi(x)=\lambda \cdot x,\ x \in R.$$

Сонда

$$\varphi(x_1+x_2)=\lambda \cdot (x_1+x_2)=\lambda \cdot x_1+\lambda \cdot x_2=\varphi(x_1)+\varphi(x_2).$$
$$\varphi(\alpha \cdot x)=\lambda \cdot (\alpha \cdot x)=(\lambda \cdot \alpha)x=\alpha(\lambda \cdot x)=\alpha \cdot \varphi(x).$$

Жоғарыда қарастырылған нөлдік пен бірлік түрлендірулер – соңғы қарастырылған түрлендірулердің дербес жағдайы. Егер $\lambda=0$ болса, онда $\varphi \equiv 0$ - нөлдік түрлендіру, егер $\lambda=1$ болса, онда $\varphi \equiv \varepsilon$ - бірлік түрлендіру.
Сызықты түрлендіруге мысалдар келтірейік:

1-мысал. Дәрежесі n - нен үлкен емес көпмүшеліктер жиынын қарастырайық, яғни

$$R=\left\{p(t):\ p(t)=a_0+a_1 \cdot t+a_2 \cdot t^2+\ldots+a_n \cdot t^n\right\}$$

және $\varphi(p)=p'(t),\ p \in R,$ мұндағы $p'(t)$ көпмүшелігі $p(t)$ көпмүшелігінің бірінші туындысы. Бұл жағдайда $\varphi(P)$ сызықты түрлендіру

$$\varphi(p_1(t)+p_2(t))=(p_1(t)+p_2(t))'=p_1'(t)+p_2'(t)=\varphi(p_1)+\varphi(p_2)$$
$$\varphi(\lambda \cdot p)=(\lambda \cdot p(t))'=\lambda \cdot p'(t)=\lambda \cdot \varphi(p)$$

мұндағы $p \in R,\ p_1 \in R,\ p_2 \in R.$

$\varphi(p) = p'(t)$ түрлендіруі дифференциалды түрлендіру деп аталады.

2-мысал. $R = C[0;\,1]$ кеңістігіндегі

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)dt, \quad f(t) \in R, \quad t \in [0;1]$$

түрлендіруін қарастырайық. Онда $\varphi(f)$ түрлендіруі сызықты болатынын көрсетіңдер.

Шешуі. $\varphi(f_1 + f_2) = \int_0^1 [f_1(t) + f_2(t)]dt = \int_0^1 f_1(t)dt + \int_0^1 f_2(t)dt = \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$

$$\varphi(\lambda \cdot f) = \int_0^1 \lambda \cdot f(t)dt = \lambda \cdot \int_0^1 f(t)dt = \lambda \cdot \varphi(f)$$

мұндағы $f_1,\ f_2 \in R.$

3-мысал. R сызықты кеңістігіндегі $\varphi(x) = \lambda \cdot x^2$ түрлендіруі сызықты бола ма, мұндағы λ - тұрақты сан, $x \in R.$

Шешуі.

$$\varphi(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \lambda(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)^2 = \lambda(\lambda_1 \cdot x_1)^2 +$$
$$+ 2\lambda \cdot (\lambda_1 x_1)(\lambda_2 x_2) + \lambda \cdot (\lambda_2 x_2)^2 \neq \lambda(\lambda_1 x_1)^2 + \lambda(\lambda_2 x_2)^2 = \lambda\varphi(x_1) + \lambda\varphi(x_2)$$

мұндағы $x_1,\ x_2 \in R.$

$\varphi(x) = \lambda \cdot x^2$ түрлендіруі сызықты болмайды, себебі, сызықты болу шарттары орындалмайды.

4-мысал. R сызықты кеңістігіндегі $\varphi(x) = a \cdot x + b$ түрлендіруі сызықты бола ма, мұндағы $a,\, b$ - тұрақты сандар, $b \neq 0,\ x \in R.$

Шешуі.

$$\varphi(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = a(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) + b = a\lambda_1 x_1 + a\lambda_2 x_2 + b \neq$$
$$\neq \lambda_1(ax_1 + b) + \lambda_2(ax_2 + b) = \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2)$$

Демек, $\varphi(x) = a \cdot x + b$ түрлендіруі сызықты емес.

5-мысал. Егер $x = \{x_1;\ x_2, \ldots, x_n\} \in R,\ \varphi \equiv A = (a_{ij}),\ i = \overline{1,\, n},\ j = \overline{1,\, n},$ матрица болсын және ол элементке $y \in R$ элементі сәйкес болсын, яғни:

$$y = A \cdot x \quad \text{немесе} \quad A \cdot x = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n1j} x_j \end{pmatrix}$$

Бұдан $y = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = \overline{1, n}.$ Осыдан $\varphi \equiv A$ түрлендіру сызықты болады.

4.2. Матрица мен түрлендіру арасындағы байланыс

Кез келген сызықты кеңістігінің $l_1, l_2, ..., l_n$ базисі мен кез келген φ сызықты түрлендіруін қарастырайық.

4.1-теорема. Сызықты R кеңістігінде берілген $l_1, l_2, ..., l_n$ базисте әрбір φ сызықты түрлендіруге тек бір ғана A квадратты матрица сәйкес келеді және, керісінше, әрбір квадратты матрицаға тек бір ғана φ сызықты түрлендіру сәйкес келеді.

Дәлелдеуі. Кез келген $x \in R$ элементін $l_1, l_2, ..., l_n$ базис бойынша жіктейік:

$$x = x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + ... + x_n \cdot l_n,$$

мұндағы $x_1; x_2, ..., x_n$ берілген x элементінің координаттары: $x = (x_1; x_2, ..., x_n)$. Осыдан және φ түрлендіруі сызықты болғандықтан, төмендегі теңдік орындалады:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 l_1 + x_2 l_2 + ... + x_n l_n) = x_1 \cdot \varphi(l_1) + x_2 \cdot \varphi(l_2) + ... + x_n \cdot \varphi(l_n) \qquad (4.4)$$

$\varphi(l_i), i = \overline{1,n}$ - векторлары R кеңістігінің элементтері екенін ескеріп: $\varphi(l_i) \in R, i = \overline{1,n}$ оларды $l_1, l_2, ..., l_n$ базис бойынша жіктейік:

$$\varphi(l_i) = a_{1i}\, l_1 + a_{2i}\, l_2 + ... + a_{ni}\, l_n,\ i = \overline{1,\ n}, \qquad (4.5)$$

мұндағы $a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni}$ сандары $\varphi(l_i)$ элементінің координаттары:
$\varphi(l_i) = (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni}),\ i = \overline{1,n}$. Онда (4.4) теңдік (4.5) жіктеуге сәйкес былай өрнектеледі:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = x_1(a_{11} \cdot l_1 + a_{21} l_2 + ... + a_{n1} l_n) + x_2(a_{12} \cdot l_1 + a_{22} l_2 + ... + a_{n2} l_n) + ... + \\ &x_n(a_{1n} \cdot l_1 + a_{2n} l_2 + ... + a_{nn} l_n) = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n) \cdot l_1 + ... + \\ &+ (a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + ... + a_{nn} x_n) \cdot l_n \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Егер $\varphi(x) \in R$ элементінің координаттары $y_1; y_2, ..., y_n$ болса, яғни $\varphi(x) = (y_1;\ y_2, ..., y_n) \equiv y$ және оны $l_1, l_2, ..., l_n$ базис бойынша жіктесек:

$$\varphi(x) = y_1 \cdot l_1 + y_2 \cdot l_2 + ... + y_n \cdot l_n, \qquad (4.7)$$

онда бұл жіктеуді (4.6) жіктеумен салыстырып, мына теңдеулерді аламыз:

$$y_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + ... + a_{in} x_n, \quad i = \overline{1,n} \qquad (4.8)$$

Сонымен, кез келген φ сызықты түрлендіруге $l_1, l_2, ..., l_n$ базис бойынша

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ . \ . & . \ . \ . \ . & . \ . \ . \ . & . \ . \ . \ . \\ a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \end{pmatrix}$$

матрицасы сәйкес келеді және оның i тік жолын (4.5) жіктелудің коэффициенттерімен, ал i жатық жолын (4.8) жіктелудің коэффициенттерінен құрастырамыз.

Кез келген квадратты A матрица берілсін $A=\left(a_{i\,j}\right)$. Кез келген $x\in R$ элементін: $x=x_1\cdot l_1+x_2\cdot l_2+\ldots+x_n\cdot l_n$ басқа бір $y=\varphi(x)\in R$ элементіне өрнектейтін сызықты түрлендіруді (4.7) жіктеу бойынша φ деп белгілейік:

$$\varphi(x)=y_1\cdot l_1+y_2\cdot l_2+\ldots+y_n\cdot l_n,$$

мұндағы $y_i,\ i=\overline{1,n}$ - коэффициенттері (4.8) формулалармен өрнектеледі:

$$y_i=a_{i1}\cdot x_1+a_{i2}\cdot x_2+\ldots+a_{in}x_n,\quad i=\overline{1,n}$$

Осы белгіленген түрлендірудің сызықты болатынын дәлелдейік. Шынында да, бұл φ түрлендіру кез келген $x\in R$ элементін: $z=z_1\cdot l_1+\ldots+z_n\cdot l_n$ басқа $\varphi(x)\in R$ элементке өрнектейді:

$$\varphi(z)=\nu_1\cdot l_1+\ldots+\nu_n\cdot l_n,$$

мұндағы

$$\nu_i=a_{i1}\cdot z_1+a_{i2}\cdot z_2+\ldots+a_{in}z_n,\quad i=\overline{1,n}$$

ал ол $x+z\in R$ элементін:

$$x+z=\left(x_1+z_1\right)\cdot l_1+\ldots+\left(x_n+z_n\right)\cdot l_n$$

$\varphi(x+z)\in R$ элементіне өрнектейді:

$$\varphi(x+z)=u_1\cdot l_1+u_2\cdot l_2+\ldots+u_n\cdot l_n,$$

мұндағы

$$u_i=a_{i1}\cdot\left(x_1+z_1\right)+\ldots+a_{i\,n}\cdot\left(x_n+z_n\right)=y_i+\nu_i,\ i=\overline{1,\,n}$$

Олай болса,

$$\begin{aligned}\varphi\left(x+z\right)&=\left(y_1+\nu_1\right)\cdot l_1+\ \ldots\ +\ \left(y_n+\nu_n\right)\cdot l_n=\\&=\left(y_1l_1+\ \ldots\ +y_nl_n+\ldots+\nu_nl_n\right)=\ \varphi(x)+\varphi(z)\end{aligned}$$

Сол сияқты:

$$\lambda\cdot x=\lambda\left(x_1\cdot l_1+x_2\cdot l_2+\ldots+x_n\cdot l_n\right)=\lambda\cdot x_1\cdot l_1+\ldots+\lambda\cdot x_n\cdot l_n$$

және

$$\varphi\left(\lambda\cdot x\right)=w_1\cdot l_1+\ldots+w_nl_n,$$

мұндағы:

$$w_i = a_{i1}(\lambda \cdot x_1) + \ldots + a_{in}(\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot y_i,\ i = \overline{1,\ n}..$$

Ендеше,

$$\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot y_1 \cdot l_1 + \ldots + \lambda \cdot y_n \cdot l_n = \lambda(y_1 \cdot l_1 + \ldots + y_n \cdot l_n) = \lambda \cdot \varphi(x)$$

Сонымен, белгіленген φ сызықты түрлендіру. Теорема дәлелденді.

6-мысал. R - кеңістігіндегі ε бірлік: $\varepsilon(x) = x,\ x \in R$ және O - нөлдік: $O(x) = O,\ x \in R$ түрлендірулерінің сәйкес матрицаларын анықтау керек.
Шешуі: (6.4) формулалар мен R - кеңістігіндегі $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базис бойынша:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(l_1) \equiv a_{11} \cdot l_1 + a_{21} \cdot l_2 + \ldots + a_{n1} \cdot l_n = 1 \cdot l_1 + 0 \cdot l_2 + \ldots + 0 \cdot l_n \equiv l_1,\\
&\varepsilon(l_2) \equiv a_{12} \cdot l_1 + a_{22} \cdot l_2 + \ldots + a_{n2} \cdot l_n = 0 \cdot l_1 + 1 \cdot l_2 + \ldots + 0 \cdot l_n \equiv l_2,\\
&. \ .\\
&\varepsilon(l_n) \equiv a_{1n} \cdot l_1 + a_{2n} \cdot l_2 + \ldots + a_{nn} \cdot l_n = 0 \cdot l_1 + 0 \cdot l_2 + \ldots + 1 \cdot l_n \equiv l_n
\end{aligned}$$

және осы сияқты:

$$O(l_i) \equiv a_{1i} \cdot l_1 + a_{2i} \cdot l_2 + \ldots + a_{ni} \cdot l_n = O \cdot l_1 + 0 \cdot l_2 + \ldots + 0 \cdot l_n \equiv O,\ i = \overline{1, n}.$$

Ендеше, ε бірлік пен O нөлдік түрлендірулерге мына төмендегі матрицалар сәйкес келеді:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Демек, ε - бірлік түрлендіруге E бірлік матрица, ал нөлдік түрлендіруге O нөлдік матрица сәйкес келеді.

7-мысал. φ - сызықты түрлендіруінің матрицасы n - ретті квадрат матрица болсын және $\varphi(x) = \lambda \cdot x,\ \ x \in R$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \ldots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Онда

$$\begin{aligned}
&a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = \lambda \cdot x_1,\\
&a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = \lambda \cdot x_2,\\
&. \ ,\\
&a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = \lambda \cdot x_n.
\end{aligned}$$

Осыдан кейін $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ элементтерінің коэффициенттерін теңестіріп, сызықты түрлендірудің матрицасының элементерін төмендегі формулалардан табамыз:

$$a_{i\,j}=\begin{cases}\lambda, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Сондықтан, берілген φ түрлендіруіне диагоналды

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda\end{pmatrix}$$

матрица сәйкес келеді. Егер $\lambda=0$ болса, онда $\varphi=0$ - нөлдік түрлендіру ($a_{i\,j}=0,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$), ал егер $\lambda=1$ болса, онда $\varphi\equiv\varepsilon$ - бірлік түрлендіру ($a_{i\,j}=1,\ i=j,\ a_{i\,j}=0, i\neq j$).

4.3. Сызықты түрлендіруге амалдар қолдану

Кез келген сызықты түрлендірулерге қосу, көбейту және санды түрлендірулерге көбейту амалдары орындалады.

Айталық, R сызықты кеңістігінде φ_1 мен φ_2 сызықтық түрлендірулері берілсін: $R\xrightarrow{\varphi_1}R,\ R\xrightarrow{\varphi_2}R$.

4.3-анықтама. φ_1 мен φ_2 сызықтық түрлендірулерінің қосындысы деп φ түрлендіруін айтамыз, егер R кеңістігінің әрбір $x\in R$ элементіне $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ элементі сәйкес келсе, онда ол $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ таңбасымен белгіленеді немесе $\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x),\ \ x\in R.$

Анықтамадағы φ сызықтық түрлендіру болатынын көрсетейік. Ол үшін $x=\lambda_1\cdot x_1+\lambda_2\cdot x_2$ болсын.

Анықтама бойынша φ_1 мен φ_2 сызықты, сондықтан:

$$\begin{aligned}&\varphi(\lambda_1\cdot x_1+\lambda_2\cdot x_2)=\varphi_1(\lambda_1\cdot x_1+\lambda_2\cdot x_2)+\varphi_2(\lambda_1\cdot x_1+\lambda_2\cdot x_2)=\\&=\lambda_1\varphi_1(x_1)+\lambda_2\varphi_1(x_2)++\lambda_1\varphi_2(x_1)+\lambda_2\varphi_2(x_2)=\lambda_1\cdot[\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_1)]+\\&+\lambda_2\cdot[\varphi_1(x_2)+\varphi_2(x_2)]=\lambda_1\cdot\varphi(x_1)+\lambda_2\cdot\varphi(x_2)\end{aligned}$$

Демек, сызықты түрлендірулердің қосындысы да сызықты түрлендіру болады. φ_1 мен φ_2 сызықтық түрлендірулерін қосқанда олардың сәйкес матрицалары да қосылады, яғни $A=A_1+A_2$.

Оны тексеру үшін R сызықты кеңістігінің $l_1, l_2, ..., l_n$ базистегі φ_1 түрлендіруінің матрицасы $A_1 = \left(a_{i\,j}^{(1)}\right)_{n\times n}$, ал осы базистегі φ_2 түрлендіруінің матрицасы $A_2 = \left(a_{i\,j}^{(2)}\right)_{n\times n}$ болсын. Онда (4.7) формулаларынан $\varphi(x) = y_1 \cdot l_1 + y_2 \cdot l_2 + ... + y_n \cdot l_n$,

$$\varphi_1(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(1)} \cdot l_i, \quad \varphi_2(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(2)} \cdot l_i, \; k = \overline{1,n}$$

мұндағы $l_1, l_2, ..., l_n$ элементтері R сызықты кеңістігінің базисі. Соңғы және $\varphi(l_k) = \varphi_1(l_k) + \varphi_2(l_k)$ теңдіктерінен

$$\varphi(l_k) = \varphi_1(l_k) + \varphi_2(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(1)} \cdot l_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(2)} \cdot l_i = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ik}^{(1)} + a_{ik}^{(2)}\right) \cdot l_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot l_i, \; k = \overline{1,n}$$

мұндағы $a_{ik} = a_{ik}^{(1)} + a_{ik}^{(2)}$. Ал $A = a_{ik}$ матрица $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ түрлендіруінің сәйкес матрицасы.

4.4-анықтама. λ саны мен φ сызықты түрлендіруінің көбейтіндісі деп $\lambda \cdot \varphi = \varphi_1$ түрлендіруін айтамыз, егер көбейтіндіге мына ереже орындалса

$$\varphi_1(x) = (\lambda \cdot \varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x), \; x \in R.$$

Енді λ санын φ сызықты түрлендіруіне көбейткенде λ саны мен φ сызықты түрлендіруінің сәйкес матрицасы арасында қандай амал орындалатынын қарастырайық. Ол үшін R сызықты кеңістігінің $l_1, l_2, ..., l_n$ элементтері R сызықты кеңістігінің базисі, ал $A = \left(a_{i\,j}\right)_{n\times n}$ берілген φ сызықты түрлендіруінің матрицасы $A_1 = \left(a_{1\,j}\right)_{n\times n}$ - φ_1 сызықты түрлендіруінің матрицасы болсын. Онда анықтама бойынша:

$$\varphi(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot l_i, \quad \varphi_1(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(1)} \cdot l_i, \quad \varphi_1(l_k) = \lambda\varphi(l_k)_i, \; k = \overline{1,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(1)} \cdot l_i = \sum_{i-1}^{n} (\lambda \cdot a_{ik}) \cdot l_i, \quad a_{ik}^{(1)}\varphi(l_k) = \lambda \cdot a_{ik\,i}$$

Сонымен, λ санын φ сызықты түрлендіруіне көбейткенде λ саны осы сызықты түрлендірудің сәйкес матрицасына көбейтіледі, яғни $A_1 = \lambda \cdot A$.

4.5-анықтама. φ_1 мен φ_2 сызықтық түрлендірулердің көбейтіндісі деп φ түрлендіруін айтамыз, бұл жағдайда R кеңістігінің әрбір $x \in R$ элементіне $\varphi_1(\varphi_2(x))$ элементі сәйкес келеді және түрлендірулердің көбейтіндісі $\varphi(x) = \varphi_1(\varphi_2(x))$, $x \in R$ таңбасымен белгіленеді.

Анықтамадағы $\varphi(x) = \varphi_1(\varphi_2(x))$ түрлендіруі де - сызықтық түрлендіру. Шынында да:

$$\varphi\,(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \varphi_1(\varphi_2(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2))$$

Берілген φ_1 мен φ_2 түрлендірулері сызықты. Онда:

$$\begin{aligned}\varphi\ (\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) &= \varphi_1(\lambda_1 \cdot \varphi_2(x_1) + \lambda_2 \cdot \varphi_2(x_2)) = \\ &= \varphi_1(\lambda_1\varphi_2(x_1)) + \varphi_1(\lambda_2\varphi_2(x_2)) = \lambda_1 \cdot \varphi_1(\varphi_2(x_1)) + \\ &\quad + \lambda_2 \cdot \varphi_1(\varphi_2(x_2))\end{aligned}$$

теңдігі орындалады.

Сызықты түрлендірулерді көбейткенде олардың сәйкес матрицалары көбейтіледі.

Соңғы анықтамадан: φ түрлендіруі мен ε бірлік түрлендіруінің көбейтіндісі φ түрлендіруінің өзіне тең, яғни

$$\varphi(\varepsilon(x)) = \varphi(x), \quad x \in R.$$

4.6-анықтама. Егер R кеңістігінің кез келген $x \in R$ элементі үшін теңдігі орындалса, онда φ_1 мен φ_2 сызықтық түрлендірулер тең деп аталады, тең түрлендірулерді $\varphi_1 = \varphi_2$ таңбасымен белгілейміз.

Тең түрлендірулердің сәйкес матрицалары тең болады.

Сонымен, жоғарыдағы айтылған анықтамалардан мынадай қорытындыға келеміз. Сызықты түрлендіруге қолданылатын амалдар қосу, көбейту, дәрежелеу амалдардың шарттарын қанағаттандырады:

1. $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_1$;
2. $(\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3 = \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3)$;
3. $\varphi_1\ (\varphi_2(\varphi_3)) = (\varphi_1(\varphi_2))\varphi_3$;
4. $(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \varphi_3 = \varphi_1(\varphi_3) + \varphi_2(\varphi_3)$;
5. $\cdot\, \varphi_1(\varphi_2 + \varphi_3) = \varphi_1(\varphi_2) + \varphi_1(\varphi_3)$;
6. $\varphi(\varphi) = \varphi^2,\ \varphi^2(\varphi) = \varphi^3,\ \dots,\ \varphi^{n-1}(\varphi) = \varphi^n$;
7. $\varphi^{n+m} = \varphi^n(\varphi^m),\ \varphi^0 = \varepsilon$.

4.4. Базистен базиске көшу матрицасы

Кез келген R кеңістігі берілсін. Берілген кеңістіктің төмендегі екі базисін қарастырайық:

I базис: $l_1,\ l_2,\ \dots,\ l_n,\ l_i \in R,\ i = \overline{1,n}$,

II базис: $l_1',\ l_2',\ \dots,\ l_n',\ l_i' \in R,\ i = \overline{1,n}$.

R кеңістігінің кез келген элементі I базис бойынша жіктелінеді

$$x = x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + \dots + x_n \cdot l_n$$

Сондықтан, II базистің кез келген элементі I базис бойынша жіктелсін:

$$
\begin{aligned}
&l_1' = a_{11}\cdot l_1 + a_{12}\cdot l_2 + \ldots + a_{1n}\cdot l_n,\\
&l_2' = a_{21}\cdot l_1 + a_{22}\cdot l_2 + \ldots + a_{2n}\cdot l_n,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&l_n' = a_{n1}\cdot l_1 + a_{n2}\cdot l_2 + \ldots + a_{nn}\cdot l_n
\end{aligned}
\qquad (4.9)
$$

4.7-анықтама. Берілген (4.9) жүйенің a_{ij} коэффициенттерінен анықталған квадрат кесте

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

І базистен ІІ базиске көшу матрицасы деп аталады.

Көшу матрицасының анықтауышы нөлге тең болмайды, яғни $|A| \neq 0$.
Демек, A матрицасының A^{-1} кері матрицасы бар және және (4.9) жүйеден $l_1',\ l_2',\ldots,\ l_n'$ элементтері арқылы өрнектелетін $l_1,\ l_2,\ldots,\ l_n$ элементтерін табуға болады. Басқаша айтқанда, І базистен ІІ базиске көшу A матрица арқылы атқарылады.

ІІ базистен І базиске көшу A матрицасының A^{-1} кері матрицасы арқылы атқарылады.

Ол үшін І базистің кез келген $l_i,\ i=\overline{1,n}$ элементін ІІ базис арқылы жіктейік:

$$
\begin{aligned}
&l_1 = b_{11}\cdot l_1' + b_{12}\cdot l_2' + \ldots + b_{1n}\cdot l_n',\\
&l_2 = b_{21}\cdot l_1' + b_{22}\cdot l_2' + \ldots + b_{2n}\cdot l_n',\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&l_n = b_{n1}\cdot l_1' + b_{n2}\cdot l_2' + \ldots + b_{nn}\cdot l_n'
\end{aligned}
\qquad (4.10)
$$

мұндағы $b_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,\ n}$ және

$$
B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}
$$

ІІ базистен І базиске көшу матрицасы деп аталады, демек B матрицасы A^{-1} кері матрицасы болады.

4.5. Сызықты трлендірулердің әр түрлі базистегі матрицаларының байланысы. Кері түрлендіру

Кез келген сызықты R кеңістігінде φ сызықты түрлендіруі мен

$$l_1,\ l_2,\ ...,\ l_n, \tag{4.11}$$

$$f_1,\ f_2,\ ...,\ f_n \tag{4.12}$$

базистері берілсін. Онда $f_k \in R$ болғандықтан, әрбір f_k базисін (4.11) базисі бойынша жіктеуге болады:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}\cdot l_1 + a_{12}\cdot l_2 + ... + a_{1n}\cdot l_n, \\ f_2 &= a_{21}\cdot l_1 + a_{22}\cdot l_2 + ... + a_{2n}\cdot l_n, \\ &... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \\ f_n &= a_{n1}\cdot l_1 + a_{n2}\cdot l_2 + ... + a_{nn}\cdot l_n \end{aligned} \tag{4.13}$$

немесе

$$f_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} l_i,\ k = \overline{1,\ n} \qquad f = A\cdot l, \quad A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \tag{4.14}$$

мұндағы A матрица (4.11) базистен (4.12) базиске көшу матрицасы деп аталады және $|A| \neq 0$ болады, яғни базистен базиске көшу матрицасының A^{-1} кері матрицасы бар.

φ түрлендіруінің (4.11) базистегі матрицасының B, ал оның (4.12) базистегі матрицасы C болсын, яғни (4.5) формула бойынша:

$$\varphi(l_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\, l_i, \quad k = \overline{1,\ n}, \tag{4.15}$$

$$\varphi(f_k) = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\, f_i, \quad k = \overline{1,\ n}, \tag{4.16}$$

мұндағы

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Ендігі мақсат A, B, C матрицаларының арасындағы байланысты табу.

4.2-теорема. Егер φ сызықты түрлендірудің (4.11) базистегі матрицасы $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$ және (4.12) базистегі матрицасы $C = \left(c_{ij}\right)_{n\times n}$ болса, онда B мен C матрицалар арасындағы байланыс мына төмендегі формуламен өрнектеледі:

$$C = A^{-1}\cdot B\cdot A \text{ немесе } B = A^{-1}\cdot C\cdot A \tag{4.17}$$

мұндағы A матрица (4.14) формуламен өрнектеледі және $|A| \neq 0$.

Дәлелдеуі. Теореманы үшін (4.14) формуланы (4.16) формулаға қойсақ, яғни

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} l_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} l_j\right)_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\cdot\varphi(l_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ik} a_{ji} l_{j.}$$

Соңғы теңдікке (4.15) теңдікті қойып,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ik}\sum_{j=1}^{n} b_{ji}\cdot l_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} c_{ik} l_{j.}$$

немесе

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{ik}\right)\cdot l_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} c_{ik}\right) l_{j.}$$

теңдігін аламыз. Соңғы теңдіктің l_j элементтерінің коэффициенттерін теңестіріп, сонда

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} c_{ik}, \quad j,\ k=\overline{1,n}$$

Осыдан

$$B\cdot A = A\cdot C \tag{4.18}$$

яғни соңғы теңдіктің матрица түріндегі теңдігін аламыз.
A матрицаның кері матрицасы бар болғандықтан, (4.18) теңдігін солдан оңға қарай A^{-1} кері матрицаға көбейтіп, (4.17) формуланы аламыз. Теорема дәлелденді.

Сонымен, φ түрлендіруі (4.12) базистегі C матрицасы (4.17) формуладан анықталады, яғни түрлендіруінің әртүрлі базистегі матрицалары арасындағы байланыс (4.18) формуламен беріледі және B мен C матрицалары ұқсас. Демек, φ сызықты түрлендіруінің әртүрлі базистегі матрицалары ұқсас болады.

8-мысал. φ түрлендіруінің l_1, l_2 базистегі матрица

$$B=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 6 & -1\end{pmatrix}$$

болсын. φ түрлендіруінің $f_1,\ f_2$ базистегі матрицасын табыңдар, мұндағы

$$f_1 = l_1 + 2l_2,\ \ f_2 = 2l_1 + 3l_2.$$

l_1, l_2 базистен $f_1,\ f_2$ базиске көшу A матрицасы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad |A|=1\neq 0.$$

Сондықтан A матрицасының кері матрицасы бар. Кері матрицаны анықтайық:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Сонда

$$C=A^{-1}\cdot B\cdot A=$$
$$=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4.8-анықтама. Сызықты φ түрлендіруі ерекше емес деп аталады, егер $\varphi(x)=0$ теңдігі $x\equiv 0$ болғанда ғана орындалса, ал бұл теңдік $x\neq 0$ болғанда орындалса, онда ол ерекше түрлендіру деп аталады.

4.3-теорема. φ сызықты түрлендіру ерекше емес түрлендіру болу үшін, φ түрлендіруінің A матрицасы ерекше емес болуы, яғни $|A|\neq 0$, қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Сызықты R кеңістігінің $l_1,\ l_2, ...,\ l_n$ базисін қарастырайық. Кез келген $x\in R$ элементті $l_1,\ l_2, ...,\ l_n$ базис бойынша жіктейік:

$$x=\alpha_1\cdot l_1+\alpha_2\cdot l_2+...+\lambda_n\cdot l_n$$

мұндағы α_i қарастырып отырған x элементінің $l_1,\ l_2, ...,\ l_n$ базистегі координаттары $x=(\alpha_1,\ \alpha_2, ...,\ \alpha_n)$. Теореманы дәлелдеу үшін $x=0$ болатын $\alpha_i\equiv 0,\ i=\overline{1,\ n}$, сандарын табайық. Ол үшін φ сызықты түрлендірудің A матрицасын пайдаланып, мына төмендегі біртектес сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{aligned} &a_{11}\cdot\alpha_1+a_{12}\cdot\alpha_2+...+a_{1n}\cdot\alpha_n=0\\ &a_{21}\cdot\alpha_1+a_{22}\cdot\alpha_2+...+a_{2n}\cdot\alpha_n=0\\ &\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ &a_{n1}\cdot\alpha_1+a_{n2}\cdot\alpha_2+...+a_{nn}\cdot\alpha_n=0 \end{aligned}$$

Бұл біртектес жүйенің тек нөлдік шешімі болу үшін, яғни $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$ оның анықтауышы $|A|$ нөлге тең емес (ерекше емес) болуы қажетті әрі жеткілікті яғни $|A|\neq 0$. Онда $x=0$ нөлдік элемент бар және ол элемент үшін $\varphi(x)=0$ теңдігі лоындалады. Теорема дәлелденді.

4.4-теорема. φ сызықты түрлендіру ерекше болу үшін, φ түрлендіруінің A матрицасы ерекше болуы, яғни $|A|=0$, қажетті әрі жеткілікті.

4.9 –анықтама. Сызықты R кеңістігінің φ түрлендіруі сызықты φ түрлендіруінің кері түрлендіруі деп аталады, егер ε бірлік түрлендіру мен кез келген

$x \in R$ элемент үшін $\varphi(\psi) = \psi(\varphi) = \varepsilon$ немесе $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = \varepsilon(x) = x$, $x \in R$ теңдігі орындалса және φ түрлендіруінің кері түрлендіруі φ^{-1} таңбасымен белгіленеді, яғни

$$\varphi^{-1}(\varphi) = \varphi(\varphi^{-1}) = \varepsilon$$

немесе

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = \varepsilon(x) = x, \quad x \in R. \tag{4.19}$$

Енді берілген φ сызықты түрлендіруінің кері түрлендіруде φ^{-1} сызықты болатынын дәлелдейік. Дәлелдеу үшін

$$\varphi^{-1}(\lambda \cdot u + \mu \cdot y) = \lambda\varphi^{-1}(u) + \mu\varphi^{-1}(y), \; u \in R, \; y \in R.$$

теңдігін дәлелдесек жеткілікті.

$\varphi^{-1}(u) = x$, $\varphi^{-1}(y) = y$ деп белгілейік немесе $u = \varphi(x)$, $y = \varphi(y)$, мұндағы $x, \; y \in R.$
φ түрлендіруі сызықты, сондықтан

$$\varphi(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot \varphi(x) + \mu \cdot \varphi(y) = \lambda \cdot u + \mu \cdot y.$$

Осыдан дәлелдеу керек теңдігімізді аламыз:

$$\varphi^{-1}(\lambda \cdot u + \mu \cdot y) = \varphi^{-1}[\varphi(\lambda \cdot x + \mu \cdot y)] = \varepsilon(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) =$$
$$= \lambda \cdot x + \mu \cdot y = \lambda \cdot \varphi^{-1}(u) + \mu \cdot \varphi^{-1}(y).$$

Кез келген сызықты түрлендіруінің кері түрлендіруі болмауы мүмкін.
Кері түрлендіру және кері матрица туралы түсінік байланысты, яғни (4.19) теңдікті матрица түрінде былай жазуға болады:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \tag{4.20}$$

немесе керісінше, яғни (4.20) түрден (4.19) түрге көшуге болады.

4.5-теорема. Сызықты R кеңістігінің сызықты φ түрлендіруінің кері φ^{-1} түрлендіруі бар болу үшін, оның ерекше емес болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. φ^{-1} кері түрлендірудің бары белгілі дейік:

$$\varphi^{-1} \cdot \varphi = \varphi \cdot \varphi^{-1} = \varepsilon.$$

Онда $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ теңдігі орындалады, яғни A матрицаның A^{-1} кері матрицасы бар немесе $|A| \neq 0.$ Ендеше 4.3-теорема бойынша φ ерекше емес түрлендіру.

Жеткіліктілігі. φ ерекше емес түрлендіру делік. Олай болса, 4.3-теорема бойынша $|A| \neq 0,$ яғни A^{-1} бар. Онда $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ немесе $\varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = \varepsilon,$ яғни кері түрлендіру бар. Теорема дәлелделді.

Демек, кері түрлендірудің анықтамасынан: кез келген y элемент үшін $\varphi^{-1}(\varphi(y)) = y$ теңдігі орындалады, яғни егер φ түрлендіру y элементке $\varphi(y)$ элементті сәйкес қойса, онда φ^{-1} кері түрлендіруі $\varphi(y)$ элементке y элементті сәйкес қояды.

9-мысал. $\varphi(x)=x$ түрлендіруінің кері түрлендіруін анықтайық, мұндағы $x=\{x_1-x_2+x_3;\ x_3;\ x_2\}$ болсын.

Шешуі. Берілген түрлендірудің матрицасын алайық:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad |A|=-1\neq 0.$$

Осында

$$A=A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Сондықтан, $\varphi^{-1}(x)=\{x_{-1}-x_2+x_3;\ x_3;\ x_2\ \}$.

4.6. Түрлендірудің бейнесі мен ядросы

4.10-анықтама. Сызықты R кеңістігіндегі φ түрлендіруінің бейнесі деп $y=\varphi(x),\ x\in R$ түріндегі барлық элементтердің жиынын айтамыз және ол R_δ немесе

$$im\varphi=R_\delta=\{y:\ \varphi(x)y,\ x\in R\}$$

таңбасымен белгіленеді.

Басқаша айтқанда, $\varphi(x)=y$ теңдігінің кем дегенде бір шешімі бар болатын y элементтерінің жиыны φ түрлендірудің бейнесі болады.

R_δ кеңістігінің өлшемі φ сызықты түрлендіруінің рангісі деп аталады және ол $rang\,(R_б)$ немесе $rang\,\varphi=\dim R_б=\dim(im\varphi)$.

4.11-анықтама. Сызықты R кеңістігіндегі φ түрлендіруінің ядросы деп $\varphi(x)=0$ теңдеуін қанағаттандыратын $x\in R$ элементтерінің жиынын айтамыз және ол $R_я$ немесе

$$\ker\varphi=R_я=\{\ x\in R:\ \varphi(x)=0\}$$

таңбасымен белгіленеді.

$R_я$ кеңістігінің өлшемі φ сызықты түрлендіруінің дефектісі деп аталады.

4.6-теорема. Сызықты n өлшемді R кеңістігінің кез келген сызықты φ түрлендіруі үшін

$$\dim R_я+\dim R_б=\dim R=n$$

немесе

$$\dim(im\varphi)+\dim(\ker\varphi)=\dim R$$

формуласы орындалады.

10-мысал. Берілген түрлендіруінің R_δ мен $R_я$ кеңістіктерінің өлшемі және олардың базисін анықтаңдар: $\varphi(x)=y$, мұндағы $x=(2x_1-x_2-x_3;\ x_1-2x_2+x_3;\ x_1+x_2-2x_3)$.

Шешуі. Берілген φ түрлендіруінің матрицасын анықтайық:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

R_δ кеңістігінің анықтамасы бойынша: y элемент R_δ кеңістігінің элементі болу үшін $\varphi(x)=y,\ y\in R$ орындалуы қажетті әрі жеткілікті, яғни матрица түрінде

$$y=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

$$|A|=0,\quad \begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-3\neq 0.$$

A матрицасының рангісі 2-ге тең, олай болса, $rang(\varphi)=rangR_\delta=2$.
Енді R кеңістігінің базисі ретінде A матрицаның тік жолдарын алайық, мысалы $l_1=(2;\ 1;\ 1),\ l_2=(-1;\ -2;\ 1)$.
$R_я$ ядроның анықтамасы бойынша: x элемент $R_я$ кеңістігінің элементі болу үшін $\varphi(x)=0$ теңдігі орындалуы қажетті әрі жеткілікті, яғни матрица түрінде

$$A\cdot x=0,\ |A|=0$$

немесе

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Демек, $R_я$ кеңістігі біртекті жүйенің шешімдерінен анықталған кеңістік болады. Сондықтан

$$\dim R_я=\dim R-\dim R_б=3-2=1$$

$R_я$-кеңістігінің базисі ретінде біртектес жүйенің іргелі шешімдерін алуға болады. Енді осы жүйенің іргелі шешімдерін табайық :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = x_3, \\ x_1 - 2x_2 = -x_3, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_3 & -1 \\ -x_3 & -2 \end{vmatrix} = -2x_3 - x_3 = -3x_3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & x_3 \\ 1 & -x_3 \end{vmatrix} = -2x_3 - x_3 = -3x_3,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = x_3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = x_3,$$

Сонымен $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$. Мысал $x_3 = 2$ болғанда $x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,$ яғни $l_1 = \{2,\ 2,\ 2\}$ базис $R_я$-ядроның базисі.

4.7. Сызықты түрлендірудің меншікті мәні мен меншікті элементі

Кез-келген n өлшемді сызықты R кеңістігіндегі φ сызықты түрлендіруді қарастырайық: $R \xrightarrow{\varphi} R$ және R кеңістігінен

$$l_1,\ l_2,\ ...,\ l_n$$

базисін алайық ($\dim R = n$). Қарастырып отырған φ түрлендірудің матрицасы $A = (a_{i\,j}),\ \ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,n}$ болсын.

4.12-анықтама. Сызықты φ түрлендіруінің A матрицасының сипаттамалық матрицасы деп мына төмендегі

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

матрицасын айтамыз, $\Delta_A(\lambda) = |A - \lambda E|$ анықтауышы φ сызықты түрлендіруінің сипаттамалық көпмүшелігі, ал $\Delta_A(\lambda) = |A - \lambda E| = 0$ оның сипаттамалық теңдеуі деп аталады.

4.13-анықтама. Сызықты φ түрлендіруінің меншікті элементі (векторы) деп

$$\varphi(x) = \lambda \cdot x \qquad (4.21)$$

теңдігін қанағаттандыратын, нөлге тең емес $x\ (x \neq 0)$ элементті айтамыз, ал λ саны φ түрлендіруінің меншікті мәні немесе сипаттамалық түбірі деп аталады.

Бұл анықтама, яғни (4.21) теңдік, матрица түрінде былай айтылады: нөлге тең емес $x\ (x \neq 0)$ вектор A матрицаның меншікті векторы, ал λ саны оның меншікті мәні деп аталады, егер

$$A \cdot x = \lambda \cdot x, \quad x \neq 0 \tag{4.22}$$

4.7-теорема. λ_0 саны φ сызықты түрлендіруінің меншікті мәні болуы үшін, ол оның сипаттамалық көпмүшелігінің түбірі болуы:

$$\Delta(\lambda_0) = |A - \lambda_0 E| = 0$$

қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. λ_0 - саны φ түрлендіруінің меншікті мәні болсын:

$$\varphi(x) = \lambda \cdot x, \quad x \neq 0 \tag{4.23}$$

немесе матрица түрінде, яғни (4.22) түрінде

$$A \cdot x = \lambda_0 \cdot x, \quad x \neq 0 \tag{4.24}$$

теңдігі орындалады.

Енді λ_0 - саны сипаттамалық көпмүшеліктің түбірі болатынын дәлелдейік: $\Delta_A(\lambda_0) = |A - \lambda_0 E| = 0$. Ол үшін кері жориық, яғни λ_0 - саны сипаттамалық көпмүшеліктің түбірі болмасын:

$$\Delta_A(\lambda_0) = |A - \lambda_0 E| \neq 0.$$

(4.24)- теңдіктен

$$(A - \lambda_0 \cdot E) \cdot x = 0, \quad x \neq 0 \tag{4.25}$$

теңдігін аламыз. Ұйғаруымыз бойынша $\Delta_A(\lambda_0) \neq 0$ онда (4.25) біртектес жүйенің тек нөлдік шешімі ғана бар, яғни $x = 0$. Ал бұл ($x = 0$), ұйғаруымызға (λ_0 - саны φ түрлендіруінің меншікті мәні болсын және $x \neq 0$**)** қайшы келеді. Осы қайшылық теореманың қажеттілігін дәлелдейді:

$$\Delta_A(\lambda_0) = |A - \lambda_0 E| = 0,$$

яғни λ_0 - саны сипаттамалық көпмүшеліктің түбірі.

Жеткіліктілігі. λ_0 - саны φ сызықты түрлендіруінің сипаттамалық көпмүшеліктің түбірі болсын:

$$|A - \lambda_0 E| = 0.$$

λ_0 - саны φ түрлендіруінің меншікті мәні болатындығын дәлелдейік, яғни $x \neq 0$ элементі табылып, (4.23) теңдігі, яғни

$$\varphi(x) = \lambda_0 \cdot x \ \text{ немесе } \ A \cdot x = \lambda_0 \cdot x, \quad x \neq 0$$

теңдігі орындалатынын дәлелдейік. Осыдан біртектес теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\left(A-\lambda_0\cdot E\right)\cdot x=0$$

Ұйғарым бойынша: $\left|A-\lambda_0 E\right|=0$. Сондықтан, біртектес жүйенің нөлден өзгеше шешімі бар, яғни $x\neq 0$. Демек, анықтама бойынша λ_0 - саны φ түрлендіруінің меншікті мәні болады. Теорема дәлелденді.

A матрицасының меншікті векторы бағана $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}$, бұлар меншікті вектордың сызықтық түрлендіріліуінің $\tilde{o}_1, x_{2,\dots,}\ x_n$ кординаттарынан құралған, алынған базистегі матрицасы A-ға тең.

Меншікті вектор және матрицанын меншікті мәндерін табу жолдарын қарастырайық. $\lambda X=\lambda \mathrm{E}X$ екені белгілі, мұндағы Е бірлік матрица болса, онда теңдеуді мына түрде жазуға болады

$$\left(A-\lambda E\right)X=0 \tag{4.26}$$

Жазыңқы тұлғада (4.26) теңдік сызықтық біртекті теңдеулер жүйесін көрсетеді.

$$\begin{cases} \left(a_{11}-\lambda\right)x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots & +a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+ & \left(a_{22}-\lambda\right)x_2+ & \dots & +a_{2n}x_n=0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & \dots & +\left(a_{nn}-\lambda\right)x_n=0 \end{cases} \tag{4.25}$$

меншікті вектордың $x_1, x_{2,\dots,}\ x_n$ координаттары үшін (4.25) жүйесінің анықтауышы

$$D(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

A матрицасының сипаттамалық анықтауышы деп аталады. Егер оны ашсақ, онда λ-ға салыстырмалы n-ші дәрежелі көпмүшелікті аламыз $D(A-\lambda E)=(-1)^n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\alpha_{n-2}\lambda^{n-2}+\dots+\alpha_1\lambda+\alpha_0+\alpha_0$, бұл көпмүшелікті *матрицасының сипаттамалық көпмүшелігі* деп атайды. Оның $\alpha_{m-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_0$ коэффициенттері A матрицасының элементтеріне байланысты, ал ең жоғарғы λ^n жанындағы коэффициент $(-1)^n$ ге тең.

(4.25) жүйенің анықтауышы нөлге тең болған жағдайда ол біртекті сондықтан оның нөлге тең емес шешуі бар. Анықтауышты нөлге теңей отырып, мына теңдеуді аламыз

$$D(A-\lambda E)=(-1)^n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\alpha_{n-2}\lambda^{n-2}+...+\alpha_1\lambda+\alpha_0+\alpha_0,=0, \qquad (4.26)$$

бұны *А матрицасының сипаттамалық теңдеуі* деп аталады. *Сипаттамалық* теңдеудің түбірі матрицаның меншікті мәндері бола алады.

Характеристикалық (4.26) теңдеудің кез-келген түбірін алып, оны (4.25) жүйедегі λ орнына қоямыз. Онда жүйенің анықтауышы нолге тең болады және оның нолдік емес шешулері болады. Жүйенің нолге тең емес шешуін тауып алынған меншікті мәнге тән меншікті вектордың координаттарын аламыз. Сипаттамалық теңдеудің басқа түбірлері үшін (4.25) теңдеудің басқа шешуі табылады, яғни басқа меншікті вектор.

А матрицаның элементтері нақты болсын. Онда оның сипаттамалық теңдеуінің коэффициенттері де нақты болады. Кейде оның түбірлері комплексті болып келуіде мүмкін. Сонымен, нақты матрицанында комплексті меншікті мәндері болуы мүмкін. Егер нақты матрицаның меншікті мәні комплексті болса, онда сәйкес меншікті вектордың координаттары да комплексті.

Геометриалық мағынасымен қарағанда меншікті вектор кеңістікте бағыттың $Y=AX$ сызықтық түрлендіріліуінде өзгермейтінін көрсетеді және бағыт бойында кеңістік «созылуға» ұшырайды, ал осы векторға сәйкес өзіндік мәні (нақты немесе комплексті) көрсетілген бағытта «созылуға» шамасын анықтайды.

Сипаттамалық теңдеудің дәрежесі n-ге тең болса, онда оның n түбірі болады (нақты немесе комплексті). Олардың арасында еселі түбірлерде болуы мүмкін. Сондықтан А матрицасының әртүрлі меншікті мәндерініңң саны n-нен кіші болуы да мүмкін.

Матрица *А*-ның қос-қостан әртүрлі $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_k$ меншікті мәнінің саны $k\ (k\le n)$ болсын. Олардың кезекпен (4.25) жүйеге қойып және шешсек $X_1,\ X_2, ...,\ X_\kappa$ меншікті векторларын табамыз . $X_1,\ X_2, ...,\ X_\kappa$ векторларының яғни матрицаның меншікті векторларының қос-қостан әртүрлі өзіндік мәндеріне сызықтық тәуелсіз екенін дәлелдейміз. Сызықтық тәуелсіз бағаналар векторлар сияқты анықталады. $X_1,\ X_2, ...,\ X_\kappa$ бағаналары сызықтық тәуелсіз деп аталады. Егерде $c_1X_1+c_2X_2+...+c_kX_k=0$ теңдігі $c_1=c_2=...=c_k=0$ болған жағдайында мүмкін болса.

$$X_k=\sum_{i=1}^{l}c_iX_i \qquad (4.27)$$

Кейбір дербес жағдайда мұндағы c_i - кейбір коэффициенттер. (4.27) теңдіктің екі жағында А матрицаға көбейтейік. $Ax_i=\lambda_i\ X_i$ екені белгілі, онда

$$AX_k=\sum_{i=1}^{l}c_iAX_i=\sum_{i=1}^{l}c_i\lambda_iX_i \qquad (4.28)$$

Басқа жағынан $AX_k=\lambda_k\,X_k$ Осы теңдіктің оң жағынан (4.27) формула бойынша X_k мәнін қойсақ:

$$AX_k=\lambda_{\ddot{e}}\sum_{i=1}^{l}c_iX_i=\sum_{i=1}^{l}c_i\lambda_{\hat{e}}X_i \qquad (4.29)$$

теңдігін аламыз.

(4.28) және (4.29) теңдіктерінің айырмасын құраймыз.

$$\sum_{i=1}^{l} c_i\lambda_\kappa \mathrm{X}_i - \sum_{i=1}^{l} c_i\lambda_i \mathrm{X}_i = \sum_{i=1}^{l} c_i(\lambda_i - \lambda_k)\mathrm{X}_i = 0.$$

$\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_i$, бағаналар сызықтық тәуелсіз болғандықтан, соңғы теңдікте барлық $c_i(\lambda_i - \lambda_k)(i = 1.2....,1)$ коэфициенттері нөлге тең. Бірақта меншікті мәндер қос-қостан әртүрлі $(\lambda_i - \lambda_k \neq 0)$, онда

$$c_i = 0 \ (i = 1,2,...,l) \qquad (4.30)$$

Теңдікті ескерсек бағана (4.27) нөлдік, ал нөлдік бағана матрицаның меншікті векторы бола алмайды. Яғни өзіндік $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_\kappa$ векторлардың сызықтық тәуелділігі туралы ұйғарым дұрыс емес немесе ол қайшылыққа тірейді. Сонымен қос-қостан әртүрлі өзіндік мәнге тән матрицаның меншікті векторы сызықтық-тәуелсіз.

Дербес жағдайда (4.26) сипаттамалық теңдеудің барлық түбірлері қарапайым (яғни, $k = n$ болғанда) онда матрицаның әр уақытта n сызықтық-тәуелсіз өзіндік векторларын құруға болады.

Әртүрлі өзіндік, k мәндері бар n- ші ретті матрицаның әруақытта k сызықтық-тәуелсіз меншікті векторлары болады. Бірақ бұл нәтижелер толық емес. Шындығында, матрицанын р санды сызықтық-тәуелсіз меншікті векторлары k дан кіші емес, k дан үлкен болуы мүмкін, бірақ n-нен үлкен емес, $k \leq p \leq n.$

Сипаттамалық теңдеудің еселі түбірлер жағдайы қарастырылмайды, өйткені оны үйрену үшін матрица теориясының өте терең мағлұматтары қажет болады.

11-мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ матрицасының меншікті мәнін және меншікті векторын табыңыз.

Шешуі. Матрицанын сипаттамалық теңдеуін құрамыз.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Мұның түбірлері $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 3.$ меншікті мәндері болады. Теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + \quad 2x_2 = 0 \\ -x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

болады.

Бірінші меншікті векторды табамыз. Теңдеулер жүйесіне $\lambda_1 = 2$ қоямыз, нәтижесінде мына жүйені аламыз:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Жүйе анықтауышы нөлге тең. Оның нөлдік емес шешуі $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ мұндағы x_1-кез-келген сан. Дербес жағдайда егер x_1=1 болса, онда $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Екінші меншікті векторды табамыз. Теңдеулер жүйесіне $\lambda_1 = 3$ қоямыз, нәтижесінде

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

анықтауышы нөлге тең жүйені аламыз. Оның нөлдік емес шешуі $x_2 = x_1$, мұндағы x_1-кез-келген сан. Дербес жағдайда егер x_1=1 болса,

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

X_1, X_2 меншікті вектордың сызықтық-тәуелсіз екенін тексеру оңай.

$Y = AX$ сызықтық түрлендіруді матрицамен қарастырайық. Ол екі түрлі бағыттағы жазықтықтың созылуын көрсетеді. Бірінші өзіндік вектор анықталатын бағыт бойында жазықтық екі рет ла екінші өзіндік вектор анықталатын бағыт бойында жазықтық үш рет созылады.

Бұл мысалда сипаттамалық теңдеудің түбірі қарапайым және сол себептен сызықтық-тәуелсіз өзіндік вектор саны р әртүрлі өзіндік мәндер саны k мен және матрица реті n мен сәйкес келеді. $\underline{k} = \underline{p} = \underline{n} = 2$

12-мысал. Мына $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ матрицаның меншікті мәнін және меншікті векторын табыңыз.

Шешуі. Матрицанын сипаттамалық теңдеуін құрамыз.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ à & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$$

Оның екі еселі түбірі $\lambda_{1,2} = 1$. Осыған сәйкес матрицанын $\lambda = 1$ бірғана меншікті мәні болады. Жүйе мына түрге келеді.

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 \quad = 0 \\ ax_1 + (1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Осыларға $\lambda = 1$жалғыз өзіндік мәнін қойып

$$\left.\begin{matrix} 0 = 0, \\ ax_1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

табамыз. Бұл жүйенің шешімі $x_1 = 0$ x_2 кез-келген $x_2 = 1$ болғанда өзіндік вектор. Қалған барлық өзіндік векторлар $X = x_2 X$ формуласымен өрнектеледі. Сонымен, матрицанын тек қана бір сызықтық-тәуелсіз векторы болады.

$Y = AX$ сызықтық түрлендіруді матрицамен жазықтықтың екнші кординат өсіне салыстырмалы ығысуын көрсетеді.

Бұл мысалда характеристикалық теңдеу түбірлері еселенген сонымен қоса сызықтық-тәуелсіз меншікті векторлар саны р әртүрлі меншікті мәндер саны k мен сәйкес келеді және матрица ретінен n кіші: $k = p = 1$, $n = 2$.

13-мысал. Мына $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ скаляр матрицаның меншікті мәнін және меншікті векторын табыңыз.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0$$

сипаттамалық теңдеуінің екі еселі түбірі $\lambda = 3$. Жүйе былайша

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1 \quad =0 \\ (1-\lambda)x_2 =0\end{cases}$$

Бұл өрнекте $\lambda = 3$ жалғыз өзіндік мәнін қойып

$$\begin{cases}0=0 \\ 0=0\end{cases}$$

жүйені аламыз. Яғни кез-келген $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ бағана матрицанын меншікті векторы бола алады.

Дербес жағдайда $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ бағаналары сызықтық-тәуелсіз меншікті векторлар.

Матрицасы сызықтық түрлендіру ұқсас түрлендіруді яғни, жазықтықтың барлық бағыттары бойынша үш рет бірқалыпты созылуын көрсетеді.
Бұл мысалда характеристикалық теңдеу түбірлері еселі сондықтан $k < n$. Бірақ сызықтық-тәуелсіз өзіндік векторлар саны p әртүрлі меншікті мәндер k санынан үлкен және матрицанын n ретімен сәйкес: $k = 1,\ p = n = 2.$

14-мысал. $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ ортогоналды матрицанын өзіндік мәнін және өзіндік векторын табыңыз.
Шешуі.

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2(\cos\varphi)\lambda + 1 = 0$$

сипаттамалық теңдеуін құрамыз. Оның түбірлері

$$\lambda_{1,2} = cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

комплексті болады, егер $\varphi \neq m\pi (m = 0.1.2,...)$ $\varphi \neq m\pi$ болсын Онда берілген матрицанын нақты кеңістікте өзіндік мәндері және өзіндік векторлары болмайды. Y=AX сызықтық түрлендіруді осы -матрицамен жазықтықтың φ бұрышына бұрылуын көрсетеді, нәтижесінде барлық бағыттар ығысады. Бірақта комплексті жазықтықта матрицанын өзіндік мәндері және өзіндік векторлары болады.

Сәйкес комплексті мәндеріне тиісті сызықты тәуелсіз өзіндік векторларды табамыз. Теңдеулер жүйесі мына түрде болады:

$$\begin{cases}(\cos\varphi - \lambda)x_1 - (\sin\varphi)x_2 \quad = 0 \\ (\sin\varphi)x_1 + (\cos\varphi - \lambda)x_2 = 0\end{cases}$$

Осы өрнекте $\lambda = \cos\varphi + -\sin\varphi.$ қойып

$$\begin{cases}-i(\sin\varphi)x_1 - (\sin\varphi)x_2 \quad = 0 \\ (\sin\varphi)x_1 - (\sin\varphi)x_2 = 0\end{cases}$$

жүйені аламыз. Екі теңдеуді $\sin\varphi \neq 0$ қысқартып және бірінші теңдеуді i-ге көбейтіп мына өрнекті аламыз

$$\begin{cases} x_1 - ix_2 \quad = 0 \\ x_1 - ix_2 = 0 \end{cases}$$

Бұдан $x_1 = ix_2$ мұндағы x_2 кез-келген.

Дербес жағдайда $x_2 = 1$ болғанда өзіндік вектор $X_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

Екінші $\lambda = \cos\varphi - i\sin\varphi.$ өзіндік мәнді теңдеулерге қойып оларды $\sin\varphi$-ге қысқартып және бірінші теңдеуді i ге көбейтсек

$$\begin{cases} ix_1 - x_2 \quad = 0 \\ ix_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Сонымен $x_1 = ix_2$ мұндағы x_1 кез-келген. Дербес жағдайда $x_1 = 1$ болғанда өзіндік вектор $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ X_1, X_2 өзіндік векторлары сызықты тәуелсіздігін тексеру оңай.

$\varphi = 0,\ 2\pi,\ 4\pi....$ болғанда матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ бірлік матрицаға айналады. Оның меншікті мәндері $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$ Кезкелген бағана меншікті вектор. Дербес жағдайда $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ және $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ меншікті болғанда матрица векторлары сызықты тәуелсіз.

$\varphi = \pi,\ 3\pi, 5\pi....$ болғанда матрица Е-матрицаға айналады. Оның меншікті мәндері $\lambda_1 = \lambda_2 = -1.$ Кезкелген бағана $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ меншікті вектор.

Сызықты оператордың матрицасын диоганальды түрге келтіру

Егер L_n кеңістігіндегі A операторының $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ меншікті сандарына сәйкес келетін меншікті векторлары $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ болса, бұл векторлар базисінде A операторының матрицасы

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

диоганальды түрге ие болады.

15-мысал. Сызықты оператордың матрицасын диоганальды түрге келтіріп, сәйкес базисін табу керек, егер

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Шешуі. Сипаттауыш теңдеудің

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -2 & -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(1-\lambda^2)=0$$

түбірлері $\lambda_1=2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$ болады. Демек, матрица диоганаль түрге келтіріледі. Сәйкестелген меншікті векторларын табамыз. $\lambda_1=2$ болғанда $(A-\lambda E)X=0$ жүйе келесі түрге келтіріледі:

$$(A-\lambda E)X=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

немесе

$$\begin{cases}-x_1+2x_2=0\\ -2x_1-2x_2-3x_3=0\end{cases}$$

Шешімдердің фундаментальды жүйесі тек қана бір $E_1(2,1,-2)^T$ вектордан тұрады. Осы сияқты $\lambda_2=1$ болғанда $(A-\lambda E)X=0$ жүйе келесі түрге келтіріледі:

$$(A-E)X=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

немесе

$$\begin{cases}x_2=0\\ -2x_1-2x_2-2x_3=0\end{cases}$$

түрге келеді. Бұл жүйеден екінші меншікті векторды табамыз: $E_2(1,0,-1)^T$. Соңында сияқты $\lambda_3=-1$ болғанда жүйе келесі түрге келтіріледі:

$$(A+E)X=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

немесе

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\ \quad 3x_2=0\end{cases}$$

жүйеден үшінші меншікті векторды табамыз: $E_3(0,0,1)^T$.

Табылған $E_1(2,1,-2)^T$, $E_2(1,0,-1)^T$, $E_3(0,0,1)^T$ векторлар ізделінді базисті құрайды, бұл базистегі сызық түрлендірудің A матрицасы келесі диоганальды түрге келеді:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.8. Түйіндес түрлендіру

Бізге Евклид R кеңістігінде сызықты φ түрлендіруі берілсін: $R \xrightarrow{\varphi} R$.

4.14-анықтама. Евклид кеңістігіндегі φ^* сызықты түрлендіру $\left(R \xrightarrow{\varphi^*} R\right)$, егер кез-келген $x,\ y \in R$ элементтер үшін

$$(\varphi(x),\ y) = \left(x,\ \varphi^*(y)\right),\ \ x,\ y \in R \tag{4.31}$$

теңдігі орындалса, φ түрлендіруінің түйіндес түрлендіруі деп аталады.

4.8-теорема. Евклид R кеңістігінде кез келген φ сызықты түрлендіруінің тек бір ғана φ^* сызықты түйіндес түрлендіруі бар.

Дәлелдеуі. R кеңістігінде берілген y пен x элменттерін алып, мына теңдікті қарастырайық:

$$f(x) = (\varphi(x),\ y),\ \ x \in R,\ y \in R, \tag{4.32}$$

мұндағы $f : R \xrightarrow{f} V$, ал V - нақты сандар кеңістігі.

Қарастырмақшы болған $f(x)$ функциясының сызықты болатынын дәлелдейік. Ол үшін φ түрлендіруінің сызықты болатынын ескерсек жеткілікті:

$$\begin{aligned} f(\alpha\, x + \beta\, x) &= (\varphi(\alpha\, x + \beta\, z), y) = (\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(z), y) = \alpha(\varphi(x), y) + \beta(\varphi(z), y) = \\ &= \alpha\ f(x) + \beta\ f(z), \qquad x \in R,\ y \in R,\ z \in R. \end{aligned}$$

Енді $f(x)$ функциясының сызықты және төменгі теоремадан теңдігін аламыз:
Егер $l_1, l_2, ..., l_n$ евклид кеңістігінің ортонормалданған базисі болса, онда R кеңістігінде анықталган сызықты $f(x)$ функцияға және оның базисінде тәуелді векторы $a \in R$ табылып, ол $f(x)$ функция x пен a векторларының скаляр көбейтіндісіне тең болады:

$$f(x) = (x,\ a)$$

мұндағы $a = (a_1, a_2, ..., a_n),\ a_i = f(l_i),\ i = \overline{1,\ n}$.

$$f(x) = (x,\ a),\ \ x \in R,\ \ a \in R \tag{4.33}$$

мұндағы x - кез келген элемент, a - берілген элемент. Олай болса, (4.22) мен (4.33) формулаларын салыстырып

$$(\varphi(x),\ y) = (x, a),\ \ x \in R \tag{4.34}$$

теңдігін аламыз. Демек, (4.34) теңдік $\psi(y)=a$ орындалатын ψ түрлендіруінің сызықты болатынын айқындайды, яғни

$$(\varphi(x),\ y)=(x,\psi(y)) \tag{4.35}$$

ψ түрлендіруінің сызықты болатынын дәлелдейік. Шынында да, (4.35) теңдіктен

$$(x,\psi(\alpha\, y+\beta\, z))=(\varphi(x),\ \alpha\, y+\beta\, z)=\alpha\ (\varphi(x),\ \ y)+\beta\,(\varphi(x),\ \ z)=$$
$$=\alpha\ (x,\ \psi\,(y))+\beta\,(x,\ \ \psi(z))=(x,\ a\psi(y)+\beta\psi(z)),\quad y\in R,\ z\in R,\ \ x\in R.$$

$\psi=\varphi^*$ теңдігі орындалатынын көрсетейік. (4.35) формуладан $(\varphi(x),\ y)=(x,\psi(y))$ және (4.31) теңдіктен $(\varphi(x),\ y)=\left(x,\ \varphi^*(y)\right)=0.$ Онда

$$\left(x,\ \varphi^*(y)\right)-(x,\ \psi(y))=0 \text{ және } \left(x,\ \left(\varphi^*-\psi\right)y\right)=0$$

Осыдан барлық $y\in R$ үшін $\left(\varphi^*-\psi\right)\cdot y=0$ теңдігі орындалады, яғни $\psi=\varphi^*$.

Анықталған $\psi=\varphi^*$ түрлендіруі тек біреу ғана болатынын дәлелдейік.
Ол үшін мұндай түрлендіруді екеу деп қарастырайық, яғни $\varphi_1^*=\psi.$ Бұл жағдайда (4.35) формуладан:

$$(\varphi(x),\ y)=\left(x,\ \varphi^*(y)\right) \text{ және } (\varphi(x),\ y)=\left(x,\ \varphi_1{}^*(y)\right)$$

теңдіктері орындалады. Онда

$$\left(x,\ \varphi^*(y)\right)=\left(x,\ \varphi_1{}^*(y)\right),\ \left(x,\ \left(\varphi^*-\varphi_1^*\right)\cdot y\right)=0$$

Осыдан $\left(\varphi^*-\varphi_1^*\right)\cdot y=0,$ яғни $\varphi_1^*=\varphi^*.$ Теорема дәлелденді.

Енді φ^* түйіндес түрлендіруінің қасиеттерімен танысайық.

1. Бірлік түрлендіруінің түйіндесі өзіне тең, яғни $\varepsilon=\varepsilon^*$.
2. Нөлдік түрлендіруінің түйіндесі өзіне тең, яғни $0=0^*$.
3. Сызықты түрлендірулердің қосындысының түйіндесі олардың түйіндестерінің қосындысына тең, яғни

$$(\varphi_1+\varphi_2)^*=\varphi_1^*+\varphi_2^*.$$

4. $(\alpha\cdot\varphi)^*=\alpha\cdot\varphi^*.$
5. Түйіндес түрлендірулердің түйіндесі сызықты түрлендірудің өзіне тең , яғни

$$\left(\varphi^*\right)^*=\varphi.$$

6. Сызықты түрлендірулердің көбейтіндісінің түйіндесі олардың түйіндестерінің көбейтінділеріне тең, яғни

$$(\varphi_1\cdot\varphi_2)^*=\varphi_1^*\cdot\varphi_2^*.$$

Дәлелдеуі. Жоғарыдағы қасиеттердің дәлелдемесі бірдей болғандықтан, 5-қасиеттің дәлелдемесін көрсетейік. Сонымен,

$$(\varphi(x),\ y)=(x,\ \varphi^*(y))=(\varphi^*(y),\ x)=\left(y,\ (\varphi^*)^*(x)\right)=\left((\varphi^*)^*(x), y\right)$$

Осыдан $\varphi(x)=(\varphi^*)^*(x)$, яғни $\varphi=(\varphi^*)^*$.

4.9. Симметриялы түрлендіру

4.15-анықтама. Егер евклид R кіңістігіндегі φ сызықты түрлендіру өзінің түйіндес түрлендіруіне тең болса: $\varphi=\varphi^*$ онда ол симметриялы деп аталады.

4.9-теорема. Евклид R кеңістігіндегі сызықты φ түрлендіру симметриялы болу үшін, барлық $x, y\in R$ элементтері үшін

$$(\varphi(x), y)=(x,\ \varphi(y)),\quad \forall x, y\in R \tag{4.36}$$

теңдігі орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Берілген φ түрлендіруі симметриялы болсын деп ұйғарып, (4.36) теңдікті дәлелдейік. Онда

$$(\varphi(x), y)=((x,\ \varphi^*(y))=(x,\ \varphi(y)).$$

Жеткіліктігі. (4.36) теңдігі орындалсын деп ұйғарып, $\varphi=\varphi^*$ теңдігін дәлелдейік. Онда (4.36) теңдіктен:

$$(x,\ \varphi^*(y))=(\varphi(x),\ y)=(x,\ \varphi(y)).$$

Осыдан $\varphi^*=\varphi$ болды. Теорема дәлелденді.

Енді симметриялы түрлендірудің негізгі қасиеттерімен танысайық.

1. Егер φ түрлендіруі симметриалы болса, онда φ мен φ^* түрлендірулері аустырымды болады, яғни

$$\varphi\cdot\varphi^*=\varphi^*\cdot\varphi.$$

Шынында да, берілген φ түрлендіруі симметриялы $\varphi=\varphi^*$.

Сондықтан, $\varphi\cdot\varphi^*=\varphi^*\cdot\varphi$.

2. Егер φ мен ψ түрлендірулері симметриалы болса, онда $\varphi+\psi,\ \lambda\varphi$ және φ^{-1}түрлендірулері симметриялы болады, яғни

$$(\varphi+\psi)^*=\varphi+\psi,\ \ (\lambda\varphi)^*=\lambda\varphi,\ \ (\varphi^{-1})^*=\varphi^{-1}.$$

Шынында да, $(\varphi+\psi)^*=\varphi^*+\psi^*=\varphi+\psi, (\lambda\varphi)=\lambda\varphi^*=\lambda\varphi, (\varphi^{-1})^*=(\varphi^*)^{-1}=\varphi^{-1}$.

3. Егер φ мен ψ түрлендірулері симметриялы болса, онда $\varphi\cdot\psi$ түрлендіруі симметриялы болу үшін, олар ауыстырымды болу қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. $\varphi\cdot\psi$ симметриялы болсын: $(\varphi\cdot\psi)^*=\varphi\cdot\psi$ деп ұйғарып, $\varphi\cdot\psi=\psi\cdot\varphi$ теңдігін дәлелдейік. Онда

$$\varphi\cdot\psi=(\varphi\cdot\psi)^*=\psi^*\cdot\varphi^*=\psi\cdot\varphi$$

Жеткіліктігі. $\varphi\cdot\psi=\psi\cdot\varphi$ ауыстырымды болсын деп ұйғарып, $(\varphi\cdot\psi)^*=\varphi\cdot\psi$ теңдігін дәлелдейік. Онда

$$(\varphi\cdot\psi)^*=\psi^*\cdot\varphi^*=\psi\cdot\varphi=\varphi\cdot\psi$$

4.10. Ортогонал түрлендіру

4.16-анықтама. Евклид R кеңістігінің сызықты түрлендіруі ортогонал деп аталады, егер барлық $x,y\in R$ элементтері үшін

$$(\varphi(x),\ \varphi(y))=(x,\ y) \tag{4.37}$$

теңдігі орындалса.

4.10-теорема. Евклид R кеңістігінің φ сызықты түрлендіруі ортогонал болу үшін, оның түйіндес түрлендіруі кері түрлендіруге тең болуы

$$\varphi^*=\varphi^{-1} \tag{4.38}$$

қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Евклид R кеңістігінің φ сызықты түрлендіруі ортогонал болсын, яғни (4.37) теңдік орындалады. (4.38) теңдікті дәлелдейік. Онда (4.37) теңдіктен:

$$(x,y)=(\varphi(x),\ \varphi(y))=(x,\ (\varphi(y)))$$

Осыдан $\varphi^*\varphi=E$. Онда $\varphi^*=\varphi^{-1}$ болады.

Жеткіліктігі. Евклид R кеңістігінің φ сызықты түрлендіруі үшін (4.38) теңдігі орындалсын. (4.37) теңдікті дәлелдейік. Шынында да:

$$(\varphi(x),\ \varphi(y))=(x,\varphi^*(\varphi(y)))=(x,\ \varphi^{-1}\varphi(y))=(x,\ \varepsilon(y))=(x,y)$$

теорема дәлелденді.

Салдар. (4.38) формуланың теңдігінен $\varphi^*\varphi=\varphi\cdot\varphi^*=\varepsilon$ теңдігін аламыз, яғни ортогонал түрлендіруге ауыстырымдылық орындалады.

4.10-теоремадағы (4.38) формуланы матрицалық түрде жазайық. Ол үшін евклид R кеңістігінен:

$$l_1,\ l_2,\ldots,l_n,\ (l_i,\ l_j)=\begin{cases}0,\ i\neq j\\ 1,\ i=j\end{cases} \tag{4.39}$$

ортонормолданған базисті алайық және осы базисте φ сызықты түрлендіруге

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}, \quad i, j=\overline{1, n}$$

матрица сәйкес келсін. Онда φ түрлендіруінің φ^* түйіндес түрлендіруіне

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\left(a_{jij}\right)_{n\times n}, \quad i, j=\overline{1, n}$$

матрица сәйкес келеді.

4.17-анықтама. Сызықты φ түрлендіруінің A матрицасы ортогонал деп аталады, егер

$$A'=A^{-1} \text{ немесе } A'\cdot A=A\cdot A'=E$$

теңдігі орындалса, мұндағы E - бірлік матрица.

Осы анықтамадан соң 4.10-теореманы «матрица тілінде» тұжырымдауға болады.

4.11-теорема. Евклид R кеңістігіндегі φ сызықты түрлендіруі (4.39) ортонормалданған базисте ортогонал болу үшін, осы түрлендірудің матрицасы ортогонал болуы:

$$A'=A^{-1} \text{ немесе } A'\cdot A=A\cdot A'=E \tag{4.40}$$

қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. φ түрлендіруі ортогонал болсын деп ұйғарып, (4.40) теңдікті дәлелдейік. (4.38) теңдіктен

$$\varphi\cdot\varphi^*=\varphi^*\cdot\varphi=\varepsilon$$

Осыдан $A'\cdot A=A\cdot A'=E$ болады, онда $A'=A^{-1}$.

Жеткіліктілігі. (4.40) теңдігі орындалды деп ұйғарып, (4.39) теңдікті дәлелдейік. (4.40) теңдіктен

$$A'\cdot A=A\cdot A'=E, \quad \varphi\cdot\varphi^*=\varphi^*\cdot\varphi=\varepsilon \text{ .}$$

Онда $\varphi^*=\varphi^{-1}$ теңдігі орындалады. Теорема дәлелденді.

Жоғарыдағы теоремалардан: кез келген ортогонал түрлендірудің кері түрлендіруі бар, ал ортогонал матрицаның кері матрицасы бар.

Ортогонал түрлендірудің қасиеттері.

1. ε бірлік түрлендіру ортогоналды.

Дәлелдеу. $\varepsilon(x)=x,\ \varepsilon(y)=y$, онда $(\varepsilon(x), \varepsilon(y))=(x, y)$ теңдігі орындалады.

2. Егер φ мен ψ ортогонал түрлендірулер болса, онда $\varphi \cdot \psi$ де ортогонал түрлендіру.

Шынында да,

$$(\varphi \cdot \psi(x),\ \varphi \cdot \psi(x)) = (\psi(x),\ \varphi^* \varphi(y)) = (\psi(x),\ \psi(y)) = (x, y)$$

3. Егер φ ортогонал түрлендіру болса, онда φ^{-1} түрлендіру де ортогонал.
Дәлелдеу. φ ортогонал түрлендіру болғандықтан, ($\varphi^* = \varphi^{-1}$):

$$\left(\varphi^{-1}\right)^* = \left(\varphi^*\right)^{-1} = \left(\varphi^{-1}\right)^{-1}$$

теңдігі орындалады.

4. Егер φ ортогонал түрлендіру болса, онда $\alpha \cdot \varphi$ ортогонал болуы үшін, $\alpha = \pm 1$ болуы қажетті әрі жеткілікті.
Дәлелдеу.

$$(\alpha\varphi(x),\ \alpha\varphi(y)) = \alpha^2\,(\varphi(x), \varphi(y)) = \alpha^2 (x, y)$$

Осыдан

$$(\alpha\varphi(x),\ \alpha\varphi(y)) = (x, y)$$

теңдігі орындалуы үшін, $\alpha^2 = 1,\quad \alpha = \pm 1$ болуы қажетті әрі жеткілікті.
5. Егер φ ортогонал түрлендіру болса, онда ол элементтің ұзындығын өзгертпейді, яғни

$$\left|\,|\varphi(x)|\,\right|^2 = \left|\,|x|\,\right|^2,\quad x \in R.$$

Дәлелдеу. Барлық $x = y \in R$ үшін (4.27) теңдіктен

$$(\varphi(x), \varphi(x)) = (x,\ x),\quad \left|\,|\varphi(x)|\,\right|^2 = \left|\,|x|\,\right|^2$$

теңдігін аламыз.

6. φ ортогонал түрлендіруінің меншікті мәні ± 1-ге тең.

Дәлелдеу. Егер $\varphi(x) = \lambda x$ болса, онда

$$(x,\ x) = (\varphi(x),\ \varphi(x)) = (\lambda x,\ \lambda x) = \lambda^2\ (x,\ x)$$

Осыдан, $\lambda^2 = 1,\ \lambda = \pm 1.$

7. φ ортогонал түрлендіруінің әртүрлі меншікті мәндерінің меншікті элементтері ортогонал болады.
Дәлелдеу. $\varphi(x) = \lambda_1 x,\ \varphi(y) = \lambda_2 y$ және $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$ болсын, $(x, y) = 0$ теңдігін дәлелдейік. Ол үшін (x, y) скаляр көбейтіндіні қарастырайық:

$$(x,\ y) = (\varphi(x),\ \varphi(y)) = \lambda_1\lambda_2\ (x,\ y)$$

Осыдан $(1 - \lambda_1\lambda_2)(x, y) = 0$, мұндағы $1 - \lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Онда, $(x, y) = 0$.

Осы сияқты R кеңістігінің ортогонал түрлендіруінің ортогонал матрицасына төмендегі қасиеттер дәлелденеді.

1. E бірлік матрица ортогонал.

2. Егер A мен B матрицалары ортогонал болса, онда $A \cdot B$ матрицасы да ортогонал болады.

3. Егер A матрица ортогонал болса, онда A^{-1} ортогонал болады.

$$A^{-1}\left(A^{-1}\right)' = A^{-1}\left(A'\right)^{-1} = \left(A'A\right)^{-1} = E.$$

4. Егер A ортогонал болса, онда $\alpha \cdot A$ ортогонал болуы үшін, $\alpha = \pm 1$ болуы қажетті әрі жеткілікті.

5. A ортогонал матрицаның меншікті мәндері комплекс болуы мүмкін, мысалы

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

матрицасы ортогонал, яғни $A \cdot A' = E$, ал оның меншікті мәндері комплекс сандар:

$$\lambda v_2 = \cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi$$

6. Егер A ортогонал матрицаның меншікті мәні нақты сан болса, онда ол ± 1-ге тең.

7. A ортогонал матрицаның әртүрлі меншікті мәндерінің меншікті элементтері ортогонал болады.

8. A ортогонал матрицаның анықтауышы ± 1-ге тең.

5. СЫЗЫҚТЫ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ОБЪЕКТІЛЕР

5.1 Нүктелердің ара қашықтығы. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

Егер жазықтықта тік бұрышты XOY координаталар жүйесі берілсе, онда осы жазықтықтың x және y координаталары бар M нүктесін – $M(x;y)$ деп белгілейміз.

$M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелерінің ара қашықтығы d мына формула арқылы анықталады:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{5.1}$$

Дербес жағдайда, $O(0;0)$ координаталар басынан $M(x, y)$ нүктесіне дейінгі d ара қашықтық:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.2}$$

Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

AB кесіндіні берілген $\lambda > 0$ қатынаста бөлетін C нүктенің координаталарын табу керек, яғни

$$\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \lambda \tag{5.3}$$

Егер $A = (x_1, y_1, z_1)$ және $B = (x_2, y_2, z_2)$ болса, C нүктенің белгісіз x, y және z координаттарын табу керек. (5.3) формуладан

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \tag{5.4}$$

дұрыстығы шығады. $\overrightarrow{AC} = (x - x_1, \quad y - y_1, \quad z - z_1)$, $\overrightarrow{CB} = (x_2 - x, \quad y_2 - y, \quad z_2 - z)$

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z) \Rightarrow$$
$$(\tilde{o} - \tilde{o}_1, \acute{o}_2 - \acute{o}_1, z_2 - z_1) = (\lambda(\tilde{o}_2 - \tilde{o}), \ \lambda(\acute{o}_2 - \acute{o}), \ \lambda(z_2 - z))$$

Соңғы теңдіктің координаттарын теңестіріп теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 &= \lambda(y_2 - y) \\ z - z_1 &= \lambda(z_2 - z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \\ z &= \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

(5.5) формулалар кесіндіні берілген қатынаста бөлу формулалары деп аталады. Дербес жағдайда $\lambda = 1$ болғанда, C нүктесі кесіндінің ортасында жатса, (5.5) түрі мынандай болады:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \tag{5.6}$$

1-мысал. A(3;8) және B(-5:14) нүктелерінің арақашықтығын табу керек.

Шешуі: Арақашықтықты есептеу формуласына нүктелердің координаттарын қоямыз:

$$d = \sqrt{(-5-3)^2 + (14-8)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

2-мысал. AB кесінді ұштары A(-2;5), B(4;17) екені белгілі. Осы кесіндінің бойынан A-ға дейінгі қашықтығы B-ға дейінгі қашықтығынан 2 есе үлкен болатын C нүктесін белгілейік. C нүктесінің координаттарын табу керек.

Шешуі: $|AC| = 2|CB| \Rightarrow \lambda = |AC| : |CB| = 2$

$$x_c = \frac{-2 + 2\cdot 4}{1+2} = 2, \ y_c = \frac{5 + 2\cdot 7}{1+2} = 13, \quad \text{яғни } C(2;13).$$

3-мысал. AB кесіндінің ортасы C(2;3) нүктесі екені белгілі. Егер B(7:5) болса, A нүктесінің координаттарын табу керек.

Шешуі: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ формуласы бойынша

$$2 = \frac{x_A + 7}{2} \Rightarrow x_A = -3, \quad 3 = \frac{y_A + 5}{2} \Rightarrow y_A = 1$$

яғни A(-3;1) .

5.2. Полярлық координаталар

P жазықтығында тікбұрышты координаталар жүйесі берілсін. Яғни O полюсі мен OX және OY осьтері анықталсын. Осы жүйемен тығыз байланысты тағы да бір полярлық деп аталатын координаталар жүйесі бар. Жазықтықтағы кез келген $A(x.y)$ нүктесінің орны келесі екі ρ, φ жұбы нақты сандарымен толық сипатталады.

Осы сандардың (ρ, φ) жұбы A нүктесінің полярлық координатасы деп аталады.

Декарттық координаталарды полярлық координаталар арқылы өрнектеу формуласы:

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \tag{5.7}$$

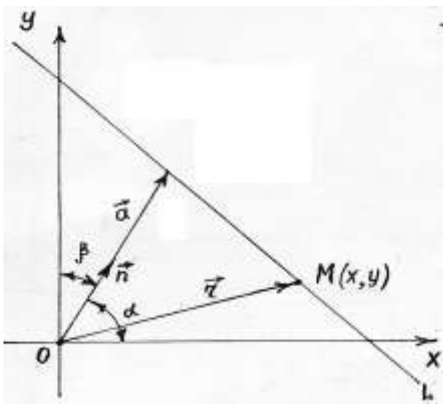
Керісінше полярлық координаталарды декарттық координаталар арқылы өрнектеу формуласы:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x} & \text{åãåð } x > o \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x} & \text{åãåð } x < 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

5.3. Жазықтықтағы түзудің теңдеулері

Жазықтықтағы тік бұрышты координат жүйесінде L түзуі берілсін. Басы O нүктеде жатқан $\vec{a}$ векторының соңғы нүктесінен осыған перпендикуляр L түзуі жүргізілген (5.1-сурет). Сондықтан $\vec{a}$ векторы L түзуін толық анықтайды. p саны $\vec{a}$ вектордың ұзындығы $\left(p = |\vec{a}|\right)$. Мұндағы $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ векторы $\vec{a}$ векторының бірлік векторы.

α және β бұрыштары $\vec{n}$ векторының Ox және Oy өстерімен жасайтын бұрыштары $\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1\right)$. $M(x, y)$ нүктесі L түзудің кез келген нүктесі, оның радиус векторын $\vec{r} = (x, y)$ деп белгілейміз. L түзудің кез келген нүктесінің радиус векторының $\vec{n}$ бірлік вектор бағытындағы проекциясы тұрақты және ол p -ға тең. Сонымен



5.1-сурет

$$(\vec{r}, \vec{n}) = p \qquad (p \geq 0) \tag{5.9}$$

(5.9) теңдеу жазықтықтағы L түзудің *векторлық теңдеуі* деп аталады. Бұл теңдеу координаттар арқылы былай жазылады

$$x\cos\alpha + y\cos\beta = p \qquad (p \geq 0) \tag{5.10}$$

теңдеуді жазықтықтағы L түзудің *нормаль түріндегі теңдеуі* деп аталады.
Сонымен

$$Ax + By + C = 0 \tag{5.11}$$

(5.11) теңдеу жазықтықтағы түзудің *жалпы түрдегі теңдеуі* деп аталады.
Бұл теңдеуді әрқашанда нормальді түрге келтіруге болады оны мына санға көбейтіп

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{5.12}$$

μ саны нормаль көбейткіш деп аталады.

Түзудің жалпы теңдеуінің дербес түрлері:

1. Егер $A = 0$ болса, онда (5.11) теңдеуі мына түрге келеді $y = -\dfrac{C}{B}$. Бұл OX өсіне параллель түзудің теңдеуі;
2. Егер $B = 0$ болса, онда $x = -\dfrac{C}{A}$ түзуі OY өсіне параллель;
3. Егер $C = 0$ болса, онда $Ax + By = 0$ теңдеуі бас нүкте $O(0,0)$ арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

$Ax + By + C = 0$ түзудің жалпы теңдеуін мына түрге келтіруге болады, егер $B \neq 0$,

$$y = kx + b \tag{5.13}$$

мұндағы $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$. Бұл теңдеуді *бұрыштық коэффициентімен берілген түзудің теңдеуі* деп аталады. Мұндағы $k = tg\alpha$ бұрыштық коэффициент, ал α L түзуі мен OX өсінің оң бағытының арасындағы бұрыш.

Егер A, B, C нөлге тең болмаса түзудің жалпы теңдеуін мына түрде жазуға болады

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{5.14}$$

Мұндағы $a = -\dfrac{C}{A}, b = -\dfrac{C}{B}$, Бұл теңдеу түзудің *кесіндідегі теңдеуі* деп аталады. Бұл түзу OX өсін a нүктесінде, OY өсін b нүктеде қиып өтеді.

Екі түзуді қарастырайық

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (L_1)$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \qquad (L_2)$$

$\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$ векторлар осы екі түзудің сәйкес нормаль векторлары. Екі түзудің арасындағы бұрыш осы екі $\vec{N}_1$ және $\vec{N}_2$ векторлардың арасындағы бұрышқа тең. Скалярлық көбейтіндінің бірінші анықтамасынан

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = |\vec{N}_1||\vec{N}_2|\cos\varphi \quad \text{осыдан} \quad \cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|},$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{5.15}$$

Жалпы теңдеумен берілген L_1 және L_2 түзулерінің перпендикуляр болу шарты:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \tag{5.16}$$

Жалпы теңдеумен берілген L_1 және L_2 түзулерінің параллель болу шарты:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \tag{5.17}$$

L_1 және L_2 түзулер бұрыштық теңдеулер арқылы берілсін, яғни

$$\left.\begin{array}{l} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{array}\right\},$$

онда екі түзудің перпендикуляр болу шарты:

$$k_1 k_2 = -1 \qquad (5.18)$$

екі түзудің параллель болу шарты:

$$k_1 = k_2 \qquad (5.19)$$

1. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуі:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (5.20)$$

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \text{мұндағы } k = -\frac{A}{B}. \qquad (5.21)$$

2. Екі $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (5.22)$$

3. $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден түзуге дейінгі ара қашықтық:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (5.23)$$

4-мысал. A(2,-3), B(-4, 3) нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу керек.
Шешуі.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

формуласын қолданады.

$$x + y + 1 = 0.$$

5-мысал. $A(2;\, 3)$ нүктесінен $2x - 3y + 4 = 0$ түзуіне дейінгі қашықтықты табу керек.
Шешуі.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

олай болса

$$d=\frac{|4-9+4|}{\sqrt{4+9}}=\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

6-мысал. Координат осьтерінде $a=\frac{2}{5}$, $b=-\frac{1}{10}$ кесінділерін қиятын түзудің теңдеуін жазу керек.

Шешуі: Түзудің «кесіндідегі» теңдеуін қолданамыз:

$$\frac{x}{2/5}+\frac{y}{-1/10}=1$$

Бұдан, $\frac{5}{2}x-10y=1$ теңдеуін аламыз, немесе $5x-20y-2=0$ - түзудің жалпы теңдеуі шығады.

7-мысал. Түзудің жалпы теңдеуі берілген: $12x-5y-65=0$.

Түзудің:

1) бұрыштық коэффиценті арқылы жазылған теңдеуін;

2) «кесіндідегі» теңдеуін жазу керек.

Шешуі: 1) Жалпы теңдеуден y-ті шығарып алсақ, бұрыштық коэффиценті арқылы жазылған түзудің теңдеуін аламыз.

$$5y=12x-65 \Rightarrow y=\frac{12}{5}x-13, \text{ мұндағы } k=\frac{12}{5}, \text{ b= -13.}$$

2) Жалпы теңдеудің бос мүшесін оң жаққа көшіріп, сосын теңдеудің екі жағын да 65-ке бөлеміз:

$$12x-5y=65 \Rightarrow \frac{12}{65}x-\frac{5}{65}y=1.$$

Бұл теңдеуге келесі түрлендіру жасайық:

$$\frac{x}{65/12}+\frac{y}{\left(-65/5\right)}=1 \quad \text{немесе} \quad \frac{x}{65/12}+\frac{y}{-13}=1$$

- бұл түзудің «кесіндідегі» теңдеуі. Мұндағы $a=\frac{65}{12}=5\frac{5}{12}$, $b=-13$.

8-мысал. Үшбұрыш төбелері берілген: A(0;1), B(6;5), C(12;-1). C төбесінен түсірілген биіктік теңдеуін жазу керек.

Шешуі: AB қабырғасының теңдеуін жазайық:

$$\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-1}{5-1} \Rightarrow 4x=6(y-1) \Rightarrow 2x-3y+3=0.$$

Бұдан бұрыштық коэффициенті: $k=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$.

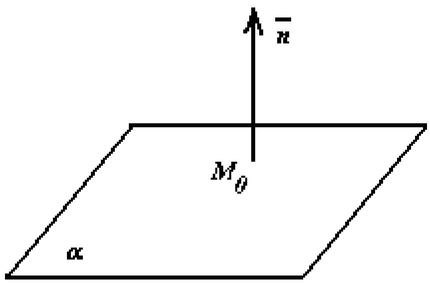
C төбесінен түсірілген биіктік AB түзуіне перпендикуляр болғандықтан, оның бұрыштық коэффициенті $k=-\frac{3}{2}$ болады. Енді биіктік теңдеуін жазайық:

$$y-(-1)=-\frac{3}{2}(x-12), \text{ немесе } 3x+2y-34=0.$$

5.4. Жазықтық теңдеуі

5.1-теорема. Кеңістікте декарттық координат жүйесінде берілген кез келген жазықтыққа бірінші дәрежелі теңдеу сәйкес келеді және керісінше бірінші дәрежелі теңдеуге кеңістікте жазықтық сәйкес келеді. Жазықтықтың жалпы теңдеуі

$$\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0. \tag{5.24}$$



$\bar{n} = \{A; B; C\}$- жазықтықтың нормаль векторы, $\bar{n} \perp \alpha$.

Бізге $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі, $\bar{n} = \{A; B; C\}$ жазықтықтың нормаль векторы берілсе, онда M_0 нүктесі арқылы өтетін $\bar{n}$- нормаль векторы болатын жазықтық теңдеуі мына түрде жазылады

5.2 сурет

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{5.25}$$

Жазықтықтардың өз-ара орналасуы. Екі жазықтық арасындағы бұрыш. Екі жазықтық арасындағы бұрышты олардың нормальдарының арасындағы бұрыш есебінде алуға болады.

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \ \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

теңдеулерімен α_1, α_2 жазықтықтары берілсін.

$\overline{N_1} = \{A_1, B_1, C_1\} \perp \alpha_1$, $\overline{N_1} - \alpha_1$ жазықтығының нормаль векторы;

$\overline{N_2} = \{A_2, B_2, C_2\} \perp \alpha_2$, $\overline{N_2} - \alpha_2$ жазықтығының нормаль векторы.

Жазықтықтардың арасындағы бұрышты θ деп белгілейік. Осы бұрыштың косинусы былай есептелінеді

$$\cos\theta = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{5.26}$$

Егер $\alpha_1 \ // \ \alpha_2 \Rightarrow \ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

«Кесінді» түріндегі жазықтық теңдеуі

Жазықтықтың жалпы теңдеуі $Ax + By + Cz + D = 0$ берілсін. Осы теңдеуді түрлендірейік.

$$Ax+By+Cz=-D \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1 .$$

Егер

$$-\frac{D}{A}=a, \quad -\frac{D}{B}=b, \quad -\frac{D}{C}=c$$

деп белгілесек, онда

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{5.27}$$

жазықтықтың "кесінді" түріндегі теңдеуін аламыз.

$\overline{N}$ нормаль векторы OX, OY, OZ координат өстерімен сәйкесінше α, β, γ бұрыштарын жасасын, 0 нүктесінен M нүктесіне қарайғы бағытты оң бағыт деп алайық, p OM кесіндісінің ұзындығы $p=|OM|$ болсын.

Бағыттаушы косинустар $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ белгілі деп есептеп жазықтық теңдеуін жазайық. $\forall A(x,y,z)\in\alpha$ нүктесін алайық. $np_{\overline{N}}\overrightarrow{OA}=p$.

$\overrightarrow{OA}=\{x;y;z\}$; $\overline{N}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. $\quad np_{\overline{N}}\overrightarrow{OA}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$.

Осыдан $np_{\overline{N}}\overrightarrow{OA}=p$ екенін ескеріп,

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \tag{5.28}$$

жазықтықтың нормаль теңдеуін аламыз.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығына дейінгі қашықтық d мына формуламен есептелінеді:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{5.29}$$

Жазықтық теңдеуін құруға арналған негізгі есептер

а) $M(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін $\overline{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ ($\overline{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар емес векторлар) векторларына параллель α жазықтық теңдеуін жазыңыз.

α жазықтығында жататын кез келген $M(x,y,z)$ нүктесін алайық. $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$, $\bar{a}$, $\vec{b}$ - векторлары компланар векторлар. Олай болса $\overrightarrow{M_0M}\cdot\bar{a}\cdot\vec{b}=0$. Осыдан α жазықтығының теңдеуі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0; \tag{5.30}$$

ә) $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ нүктелері арқылы өтетін $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ векторына параллель жазықтық теңдеуін жазыңыз.

$M(x,y,z)\in\alpha$. $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$ - компланар векторлар. Олай болса $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{a}=0$. Осыдан α жазықтығының теңдеуі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=0; \tag{5.31}$$

б) $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңыз. $M(x,y,z)\in\alpha$. Мына векторларды табайық

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\},\quad \overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1\}.$$

$\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланар векторлар.

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0.$$

Осыдан α жазықтығының теңдеуі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{5.32}$$

9-мысал. Берілген $M_1(1,-1,2)$, $M_2(1,3,2)$, $M_3(3,1,3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жаз.

Шешуі: Іздестіріп отырған жазықтықтың теңдеуін табу үшін:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1-1 & 3+1 & 2-2 \\ 3-1 & 1+1 & 3-2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$4(x-1)-(y+1)(0)+(z-2)(-8)=0 \ \text{немесе} \ 4x-8z+12=0 \ \Rightarrow$$
$$x-2z+3=0.$$

10-мысал. $M_0(1,2,4)$ нүктеден $2x+2y-z-11=0$ жазықтыққа дейінгі ара қашықтықты табу керек.

Шешуі: Ара қашықтықты табу формуласымен есептейміз.

$$A=2, \quad B=2, \quad C=-1, \quad D=-11. \quad x_0=1, \quad y_0=2, \quad z_0=4.$$

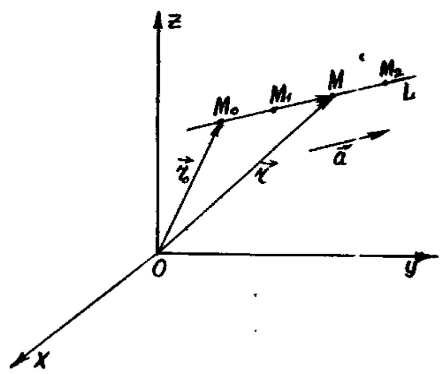
Олай болса

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot1+2\cdot2-1\cdot4-11|}{\sqrt{4+4+1}}==\frac{|-9|}{3}=\frac{9}{3}=3.$$

5.5. Кеңістіктегі түзу теңдеуі

L түзудің қайсібір M_0 нүктеден өтетіндігі белгілі болса және осы түзуге параллель болатын $\vec{a}$ векторы берілсе, онда оның кеңістіктегі орны толық анықталады. $\vec{a}$ векторы осы түзудің *бағыттауыш векторы* деп аталады. Сонымен $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі және $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ векторы берілсін. M_0 нүктесі арқылы өтетін $\vec{a}$ векторы бағыттауыш вектор болатын L түзудің теңдеуін құру керек.

$M(x,y,z)$ нүктесі L түзудің кез келген нүктесі болсын. M_0 және M нүктенің радиус векторларын $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ және $\vec{r}=(x,y,z)$ деп белгілейік. $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ векторы L түзудің бойында жатыр және ол $\vec{a}$ векторына параллель. $\vec{r}_0, \vec{r}$ және $\overrightarrow{M_0M}$ үш векторлардың арасында мынандай байланыс бар (5.3 сурет).



5.3-сурет

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\overrightarrow{M_0M} \tag{5.33}$$

$\overrightarrow{M_0M}$ векторы $\vec{a}$ векторына параллель болғандықтан

$$\overrightarrow{M_0M}=t\,\vec{a},$$

мұндағы t әртүрлі сандық мән қабылдайтын параметр. Енді (5.33) формуланы былай жазуға болады

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{a} \tag{5.34}$$

түзудің *векторлық түріндегі* теңдеуі

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \qquad t \in (-\infty; +\infty) \tag{5.35}$$

түзудің *параметрлік түріндегі теңдеуі.*

$$\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) \text{ және } \vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$$

векторлары коллинеар болғандықтан мына қатынастарды аламыз

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z} \tag{5.36}$$

теңдікті L түзудің кеңістіктегі *канондық* теңдеулері деп аталады.
Енді L түзудің $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ және $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ нүктелері арқылы өтетін теңдеуін табу керек. Бұл жағдайда $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$ векторы L түзудің бағыттауыш векторы болатындығы анық. Сондықтан $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$. Ал L түзуі M_1 нүктесі арқылы өтетін болғандықтан формула бойынша

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{y_2 - y_1} \tag{5.37}$$

(5.37) теңдіктер *екі нүкте арқылы өтетін* кеңістіктегі түзудің теңдеулері деп аталады.
Бізге Π_1 және Π_2 екі жазықтықтың жалпы түрдегі теңдеулері берілсін

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{5.38}$$

Егерде $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ болса, онда екі жазықтық бір-біріне параллель болады, егерде $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ болса, онда (5.38) теңдеулер тек бір жазықтықтың теңдеуі болады.
Бұл екі шарт орындалмаса екі жазықтық бір түзудің бойымен қиылысады. Сондықтан (5.38) теңдеулер жүйесі L түзудің кеңістіктегі *жалпы түрдегі теңдеулері* деп аталады.

11-мысал. $M(3,2,1)$ нүктеден өтетін $2x - 3y - z + 2 = 0$ жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеулерін табыңдар.

Шешуі: Берілген жазықтықтың нормаль векторы іздестіріп отырған түзуге бағыттауыш вектор болады. Олай болса, берілген M нүктеден өтетін бағыттауыш векторы $\vec{N}(2,-3,-1)$ болатын түзудің теңдеулері (5.37) бойынша былай анықталады

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{-1}.$$

12-мысал. L түзуінің теңдеулері жалпы түрде берілген

$$L:\begin{cases}2x-y+2z-3=0\\ x+2y-z-1=0\end{cases}$$

Осы түзудің канондық теңдеулерін жазыңдар.
Шешуі: *Т*еңдеулер жүйесінен x және y белгісіздерді z арқылы өрнектеп мынаны аламыз

$5x=7-3z,$ осыдан $z=\dfrac{5x-7}{-3}$, $5y=4z-1,$ осыдан $z=\dfrac{5y+1}{4}$.

$$\frac{5x-7}{-3}=\frac{5y+1}{4}=\frac{z}{1}\ \text{немесе}\ \frac{x-\frac{7}{5}}{\frac{-3}{5}}=\frac{y+\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{z}{1}\ \text{немесе}\ \frac{x-\frac{7}{5}}{-3}=\frac{y+\frac{1}{5}}{4}=\frac{z}{5}.$$

13-мысал. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z}{1}$ түзуімен қиылысатын $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{n}$ түзуінің теңдеуіндегі n параметрді және түзулердің қиылысу нүктесін табу керек.

Шешуі: Екі түзудің бағыттаушы векторлары $\vec{s_1}=\{3;2;1\}$, $\vec{s_2}=\{2;-3;n\}$ мен екі түзудің бойындағы берілген нүктелер арқылы өтетін $\overrightarrow{M_1M_2}\{1-0;5-0;0-0\}=\{1;5;0\}$ векторы компланар болғандықтан, келесі анықтауыш мәні 0-ге тең (компланарлық шарт бойынша):

$$\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -3 & n\end{vmatrix}=0\ \text{немесе}\ 2n+10+3-15n=0,\ \text{яғни}\ n=1.$$

$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z}{1}$ және $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{1}$ түзулерінің қиылысу нүктесін табу үшін соңғы теңдеуден x пен y-ті z арқылы өрнектейік: $x=2z, y=-3z.$ Бұл өрнектерді $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+5}{2}$ теңдігіне қоялық. Сонда:

$$\frac{2z+1}{3}=\frac{-3z+5}{2},\ \text{бұдан}\ z=1.$$

Ендеше, $x=2z=2,\ y=-3z=-3.$ Сонымен $M(2;-3;1)$.

Түзулердің арасындағы бұрыш

Кеңістікте L_1 және L_2 түзулері канондық теңдеулері арқылы берілсін

$$\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z} \text{ және } \frac{x-x_2}{b_x}=\frac{y-y_2}{b_y}=\frac{z-z_2}{b_z}.$$

Бұлардың бағыттауыш векторлары сәйкес $\vec{a}=\left(a_x,\, a_y,\, a_z\right)$ және $\vec{b}=\left(b_x,\, b_y,\, b_z\right)$. Екі түзудің арасындағы бұрыш екі бағыттауыш вектордың арасындағы бұрышқа тең. Сондықтан екі вектордың скалярлық көбейтіндісінің анықтамасынан, мына формуланы аламыз

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad \cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^3}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \tag{5.39}$$

Егер екі түзу перпендикуляр болса, онда $\cos\varphi=0$.
Сондықтан

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0 \tag{5.40}$$

Егер екі түзу параллель болса, онда екі бағыттауыш векторлар коллинеар болады. Сондықтан олардың координаттары пропорционал болады

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \tag{5.41}$$

14-мысал. $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{3}$ және $\begin{cases}2x+y-z-1=0\\ 2x-y+3x+5=0\end{cases}$ екі түзудің арасындағы бұрышты табу керек.

Шешуі: Бірінші түзудің бағыттауыш векторы $\vec{a}=(2,-1,3)$, ал екінші түзудің бағыттауыш векторы былай анықталады $\vec{b}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$, мұндағы $\vec{N}_1(2,1,-1)$, $\vec{N}_2(2,-1,3)$. Сонымен $\vec{b}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=2\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}=(2;-8;-4).$

(5.38) формулаға $a_1=2,\quad a_2=-1,\quad a_3=3,\quad b_1=2,\quad b_2=-8,\quad b_3=-4$ мәндерін қойып, $\cos\varphi$ -ы табамыз.

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^3}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^3}}=\frac{2\cdot2+1\cdot8-3\cdot4}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{4+64+16}}=\frac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{84}}=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

5.6. Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың арасындағы байланыс

1. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш.

$\frac{x-a}{e}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ түзуі және $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығы берілсін.

Түзу мен жазықтық арасындағы сүйір бұрыш деп түзу мен оның проекциясының арасындағы бұрышты айтады.
Бұл бұрыштың синусы мына формуламен анықталады

$$\sin\varphi=\frac{Ae+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{e^2+m^2+n^2}} \tag{5.42}$$

2. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі

$$\vec{N}=(A,B,C) \qquad \vec{S}=(l,m,n)$$

$$Ae+Bm+Cn=0 \tag{5.43}$$

3. Түзу мен жазықтықтың перпендикуляр белгісі:

$$\frac{A}{e}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n} \tag{5.44}$$

15-мысал. $L:\begin{cases}x=2+2t\\ y=-1-t\\ z=3+t\end{cases}$ түзуі мен $P:\ x+3y-z+6=0$ жазықтығының

а) арасындағы бұрыштың синусын;
ә) қиылысу нүктесін табу керек.

Шешуі. а) L түзуінің бағыттаушы векторы $\vec{a}=(2;-1;1)$, p жазықтығының нормалі $\vec{n}=(1;\ 3;\ -1)$. Сондықтан (5.42) бойынша

$$\sin\varphi=\frac{1\cdot2+3\cdot(-1)+(-1)\cdot1}{\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{-2}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{6}}=-\frac{2}{\sqrt{66}};$$

ә) L түзуінің p жазықтығының қиылысу нүктесі олардың теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде ізделеді

$$\begin{cases}x=2+2t\\ y=-1-t\\ z=3+t\\ x+3y-z+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+2t\\ y=-1-t\\ z=3+t\\ 2+2t-3-3t-3-t+6=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}t=1\\ x=2+2\cdot1\\ y--1-1\\ z=3+1\end{cases} \Leftrightarrow \quad x=4, \quad y=-2, \quad z=4$$

16-мысал. $A(6;-4;6)$ нүктесінен $5y-5z+22=0$ жазықтығына түсірілген биіктік теңдеуін және ұзындығын табу керек.
Шешуі. а) A нүктесінен жазықтыққа түсірілген биіктік координатасын табамыз:

$$AO=(x-6\ ;y+4;\ z-6).$$

Жазықтықтың нормаль векторының координатасы:

$$5y-5z+22=0 \Rightarrow N=(0;5;-5).$$

Екі вектордың параллелдік белгісі бойынша биіктік теңдеуі:

$$\frac{x-6}{0}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-6}{-5}$$

ә) A нүктесінен $5y-5z+22=0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табамыз:

$$d=\frac{|Ax_4+By_4+Cz_4+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|5\cdot(-4)-5\cdot 6+22|}{\sqrt{50}}=\frac{28}{5\sqrt{2}}$$

6. ЕКІНШІ РЕТТІ ҚИСЫҚТАР ЖӘНЕ БЕТТЕР

6.1. Екінші ретті қисықтардың канондық теңдеулері

6.1.1. Эллипс

Дәрежелері 2 –ші ретті болатын теңдеулермен анықталатын сызықтарды қарастырайық.

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (6.1)$$

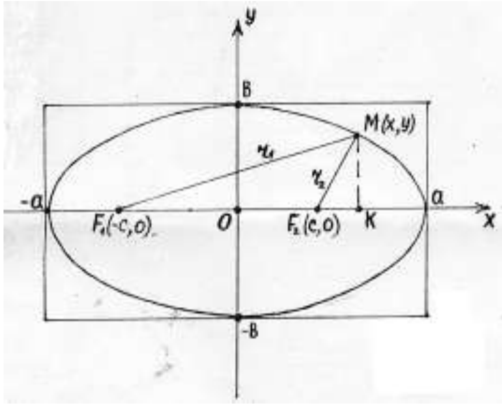
Бұл теңдеудің коэффициенттері нақты сандар және ең кем дегенде A,B немесе C -ның біреуі нөлге тең емес.

Мұндай сызықтарды 2-ші ретті сызықтар (қисықтар) деп аталады.

6.1-анықтама. Жазықтықтағы фокус деп аталатын $F_1(-c,0)$ және $F_2(+c,0)$ нүктелеріне дейінгі ара қашықтықтарының қосындысы $2a$ ($2a>2c$) - ға тең болатын нүктелердің геометриялық орнын эллипс деп аталады. $r_1+r_2=2a.$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (c^2=a^2-b^2) \qquad (a>0, b>0, a\ge b) \qquad (6.2)$$

O- центрі. a - эллипстің үлкен жарты өсі, b - кіші жарты өсі деп аталады. $-a \le x \le a$ және $-b \le y \le b.$ Сондықтан эллипстің барлық нүктелері $x = \pm a,\quad y = \pm b$ түзулерден тұратын төртбұрыш ішінде жатады.



6.1-сурет

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad (6.3)$$

эллипстің эксцентриситеті деп аталады. $(0 < \varepsilon < 1)$. $F_1(-c,0)$ және $F_2(c,0)$ эллипстің фокустері, ал эллипстің фокусінен кез келген нүктесіне дейінгі қашықтықтарды $(r_1 = F_1M, r_2 = F_2M)$ M нүктесінің фокальдық радиустері деп атайды.

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad (6.4)$$

Эллипстің канондық теңдеуін қорытып шығаруға болады. $M(x,y)$ эллипстің кез келген нүктесі. 6.1-суреттегі F_1MK тікбұрышты үшбұрыштан $r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, ал F_2MK үшбұрыштан $r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Бұл өрнектерді (7.4) формулаға қойсақ мына өрнекті аламыз.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,.$$

Бұл формуланы түрлендіру арқылы мына формулаларды аламыз:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

екі жағын квадраттап

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

тағы да екі жағын квадраттаймыз

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

$c^2 = a^2 - b^2$ болғандықтан $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ немесе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6.5)$$

бұл теңдеу эллипстің канондық теңдеуі.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (6.6)$$

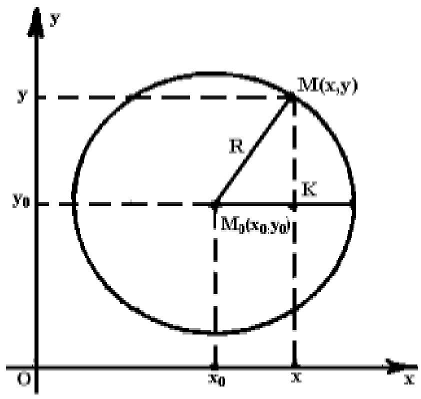
центрі $M(x_0, y_0)$ нүктесінде орналасқан эллипс.

6.1.2. Шеңбер

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad (6.7)$$

шеңбердің канондық теңдеуі.

6.2-анықтама. M_0 нүктеден бірдей R қашықтықтағы нүктелердің геометриялық орнын радиусы R-ге тең центрі M_0 нүктеде жататын *шеңбер* деп атайды. Шеңбердің канондық теңдеуін 6.2-суреттен табамыз. ΔM_0MK-дан $|M_0M|=\sqrt{(M_0K)^2+(MK)^2}$. $M_0K=x-x_0$, $MK=y-y_0$, $M_0M=R$ онда $R=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ осыдан $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$



6.2-сурет

Егер $x_0=0; y_0=0$ болса, онда центрі бас нүкте болатын шеңбердің теңдеуі

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (6.8)$$

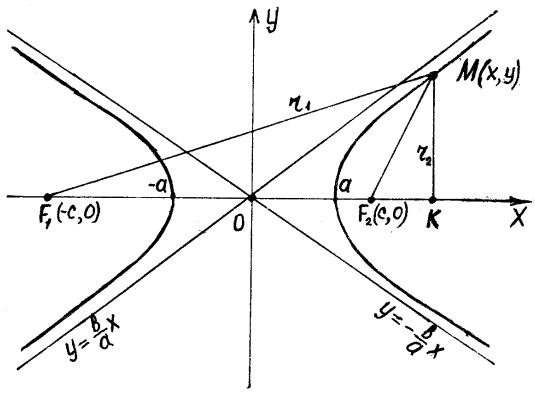
6.1.3. Гипербола

6.3-анықтама. Фокустар деп аталатын екі F_1 және F_2 нүктеден ара қашықтықтарының айырымасының абсолют шамасы тұрақты, $2a$ болатын, жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орнын *гипербола* деп атайды, яғни

$$|r_1-r_2|=2a \qquad (6.9)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>0,\quad b>0) \qquad c^2=a^2+b^2 \qquad (6.10)$$

Теңдікте x және y-тің дәрежелері жұп. Сондықтан гипербола Ox және Oy өстеріне симметриялы, сонымен қатар гипербола $O(0,0)$ бас нүктеге де симметриялы. Ox өсіндегі $(a,0)$, $(-a,0)$ нүктелері гиперболаның төбелері деп, $O(0,0)$- гиперболаның центрі, Ox өсі гиперболаның нақты өсі, Oy - жорамал өсі, a - нақты жарты өсі, b - жорамал жарты өсі деп аталады.



6.3-сурет

Ал $y=\pm\frac{b}{a}x$ түзулері гиперболаның көлбеу асимптоталары болатындығын дәлелдеуге болады. $c^2=a^2+b^2$ деп белгілесек,

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \tag{6.11}$$

өрнекті гиперболаның эксцентриситеті деп атайды. $F_1(-c,0)$ және $F_2(c,0)$ нүктелері гиперболаның фокустері, $r_1=F_1M$ және $r_2=F_2M$ гиперболаның M нүктесінің фокальдық радиустері деп аталады, мұндағы M гиперболаның кез келген нүктесі (6.3-сурет).

(6.9) формуланы пайдаланып 6.3-суреттен $r_1=F_1M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $r_2=F_2M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ екендігін ескеріп гиперболаның канондық теңдеуіне тең екендігін дәлелдеуге болады.

$$y=\pm\frac{b}{a}x \tag{6.12}$$

гиперболаның ассимтоталары

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \tag{6.13}$$

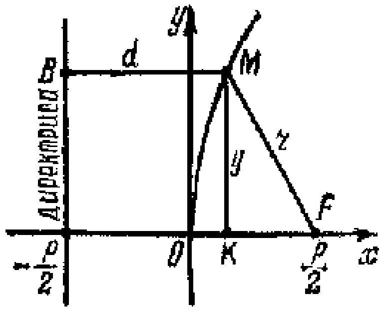
центрі $M(x_0,y_0)$ нүктесінде орналасқан гипербола.

6.1.4. Парабола

Параболаның канондық теңдеуі

$$y^2=2px \qquad (p>0) \tag{6.14}$$

Бұл теңдеудегі айнымалы y-тің дәрежесі жұп, сондықтан парабола Ox өсіне симметриялы (6.4-сурет). $O(0{,}0)$ нүктесі параболаның төбесі, $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ нүктесі параболаның фокусі, $r=|FM|$ параболаның M нүктесінің фокальдық радиусі деп аталады, мұндағы $M(x,y)$ параболаның кез келген нүктесі



6.4-сурет

6.4-анықтама. F фокустен және директриса деп аталатын түзуден ара қашықтықтары бірдей болатын нүктелердің геометриялық орнын *парабола* деп атайды, яғни

$$r=d \tag{6.15}$$

(6.15) теңдікті пайдаланып 6.4-суреттен $r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, $d=\frac{p}{2}+x$ екендігін ескеріп

параболаның канондық теңдеуі болатындығын дәлелдеуге болады.

$$2p(y-y_0)^2=(x-x_0)^2 \tag{6.16}$$

төбесі $M(x_0,y_0)$ нүктесінде орналасқан парабола.

1-мысал. $2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$ теңдеуі қандай қисықты анықтайды?

Шешуі: Берілген теңдеуге келесі түрлендірулер қолданайық: Теңдеуді 2-ге қысқартып, теңдеу мүшелерін топтаймыз.

$$x^2-4x+y^2+\frac{5}{2}y=2.$$

Енді толық квадратқа дейін толықтырамыз:

$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}\right)=2+4+\frac{25}{16}$$

$$\left(x-2\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$$

- бұл центрі $\left(2;-\frac{5}{4}\right)$, радиусы $r=\frac{11}{4}$ шеңбердің теңдеуі.

2-мысал. $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$ теңдеуі қандай қисықты анықтайды?

Шешуі: Теңдеу мүшелерін топтастырып, келесі түрлендірулер жасайық:

$$\left(x^2+2x\right)-9\left(y^2-4y\right)=44$$

$$\left(x^2+2x+1\right)-9\left(y^2-4y+4\right)=44+1-36$$

$$\left(x+1\right)^2-9\left(y-2\right)^2=9$$

$$\frac{\left(x+1\right)^2}{9}-\left(y-2\right)^2=1 \ -\text{гипербола.}$$

3-мысал. $\mathrm{M}\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ және $\mathrm{N}\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ нүктелері арқылы өтетін эллипстің теңдеуін жазу керек.

Шешуі: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - ізделінді эллипс теңдеуі болсын. Берілген нүктелердің координаттары осы теңдеуді қанағаттандыруы керек. Ендеше,

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1,\ \frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}=1$$

Бұдан, $a^2=10,\ b^2=1$ екендігі шығады. Сонымен, эллипс теңдеуі:

$$\frac{x^2}{10}+y^2=1.$$

6.2. Кеңістіктегі беттердің теңдеулері

Кеңістіктегі беттердің жалпы теңдеуі былай беріледі

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{3}b_ix_i+B=0 \qquad (6.17)$$

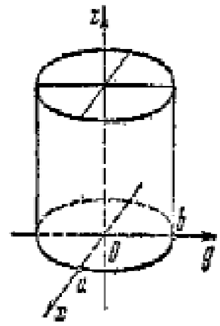
Мұндағы $a_{ij}=a_{ji}, b_i$, B берілген тұрақты сандар, x_1, x_2, x_3 —кеңістіктегі айнымалылар. $x_1=x, x_2=y, x_3=z$ деп белгілеп беттердің канондық түрде берілген дербес түрлерін қарастырайық.

1. Сфера	$x^2+y^2+z^2=R^2$	$(R>0)$
2. Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$(a,b,c>0)$
3. Бір қуысты гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$(a,b,c>0)$
4. Екі қуысты гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$(a,b,c>0)$
5. Эллиптикалық параболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$	$(a,b,p>0)$
6. Гиперболалық параболоид	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$	$(a,b,p>0)$
7. Екінші ретті конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$(a,b,c>0)$
8. Эллиптикалық цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(a,b>0)$
9. Гиперболалық цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$(a,b>0)$
10. Параболалық цилиндр	$y^2=2px$	$(p>0)$
11.Өзара қиылысатын екі жазықтық	$a^2x^2-b^2y^2=0$	$(a,b>0)$
12. Параллель немесе беттесетін екі жазықтықтың	$x^2-a^2=0$	$(a>0)$
13. OZ өсі	$x^2+y^2=0$	
14. Бас нүкте $O(0,0,0)$	$x^2+y^2+z^2=0$	

Қимасы өзара қиылысатын екі түзулер болады $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ немесе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$

8. Эллиптикалық цилиндр. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a,b>0)$

теңдеуде z айнымалысы жоқ. XOY жазықтығына теңдеуі жарты өстері a және b-ға тең эллипсті анықтайды. Егер (x,y) нүктесі осы эллипсте жатса, онда z-і кез келген (x,y,z) нүкте беттің үстінде жатады (6.5-сурет). Сонымен OZ өсіне параллель осындай нүктелердің жиыны эллиптикалық цилиндрлік бетті құрайды. Бұл бет XOY жазықтығын $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипспен қияды. Бұл эллипс цилиндрдің бағыттауыш сызығы деп, ал беттің үстінде жатқан OZ өсіне параллель түзулер осы беттің жасаушылары деп аталады. Егерде осы цилиндрді $x=h, \ (|h|\le a)$ немесе $y=h, \ (|h|\le b)$



6.5-сурет

жазықтықтарымен қисақ, қимасынан жасаушы түзу-лер аламыз, яғни

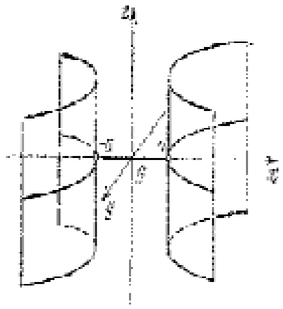
$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{a^2} \quad \text{немесе} \quad \frac{x^2}{a^2}=1-\frac{h^2}{b^2}.$$

9. Гиперболалық цилиндр. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a,b>0)$

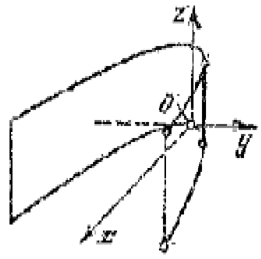
теңдеу гиперболаның цилиндрлік беттің канондық теңдеуі (6.6-сурет). Бұл беттің бағыттауыш сызығы гипербола болады.

10. Параболалық цилиндр. $y^2=2px \quad (p>0)$

Бұл параболалық цилиндрдің бағыттауыш сызықтары парабола болады. OZ өсіне параллель осы беттің үстінде жатқан түзулер осы цилиндрдің жасаушылары деп аталады (6.7-сурет).



6.6-сурет



6.7-сурет

11. Өзара қиылысатын екі жазықтықтың теңдеуі

$$a^2x^2-b^2y^2=0 \quad (a,b>0)$$

Бұл беттің бағыттауыштары $y=\pm\frac{a}{b}x$ түзулері болады.

12. Параллель немесе беттесетін екі жазықтықтың теңдеуі

$$x^2-a^2=0. \quad (a>0)$$

13. $x^2+y^2=0$ теңдеуді тек OZ өстің нүктелері ғана $(0,0,z)$ қанағаттандырады, сондықтан ол OZ өстің теңдеуі. $x^2+z^2=0$ OY өстің теңдеуі. $y^2+z^2=0$ OX өстің теңдеуі.

14. $x^2+y^2+z^2=0$ теңдеуді тек $O(0,0,0)$ нүктенің координаттары ғана қанағаттандырады.

4-мысал. $4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0$ теңдеуін канондық түрге келтіру керек.

Шешуі: Бірдей айнымалылы мүшелерін топтастырайық:

$$4(x^2-2x)+9(y^2-2y)+36(z^2-2z)=-13.$$

Жақша ішіндегі өрнектерді толық квадратқа дейін толықтырамыз:

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2-2y+1)+36(z^2-2z+1)=-13+4+9+36$$

$$\text{немесе}\quad 4(x-1)^2+9(y-1)^2+36(z-1)^2=36.$$

Координат осьтерін параллель көшіреміз, жаңа координат басы ретінде $O'(1;1;1)$ нүктесін аламыз. Координаттарды түрлендіру формуласы: $x=x'+1,\ \ y=y'+1,\ \ z=z'+1$ болады. Сонда беттің теңдеуі: $4x'^2+9y'^2+36z'^2=36$ немесе $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}+z'^2=1$ – бұл эллипсоид теңдеуі. Оның центрі жаңа координат басында болады, ал жарты осьтері 3, 2, 1-ге тең.

5-мысал. $x^2-y^2-4x+8y-2z=0$ теңдеуін канондық түрге келтіру керек.

Шешуі: x пен y-і бар мүшелерді топтастырып: $(x^2-4x)-(y^2-8y)=2z.$ жақшадағы өрнектерді толық квадратқа дейін толықтырайық:

$$(x^2-4x+4)-(y^2-8y+16)=2z+4-16 \text{ немесе } (x-2)^2-(y-4)^2=2(z-6).$$

Координат осьтерін параллель көшіреміз, мұндағы жаңа координат басы ретінде $O'(2;4;6)$ нүктесін аламыз. Сонда $x=x'+2,\ y=y'+4,\ z=z'+6.$ Соңында $x'^2-y'^2=2z'$ теңдеуін аламыз. Бұл гиперболалық параболоидты анықтайды.

7. КВАДРАТТЫҚ ФОРМАЛАР

7.1. Квадраттық форманың матрицасы және түрі

R^n кеңістігіндегі $x_1, x_2, ..., x_n$ айнымалысының квадраттық формасы деп мына қосындыны айтамыз:

$$f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{7.1}$$

R^2 кеңістігіндегі квадраттық форманың түрі:

$$f(x_1,x_2)=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{2}\left(a_{i1}x_ix_1+a_{i2}x_ix_2\right)=\left(a_{11}x_1x_1+a_{12}x_1x_2\right)+\left(a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2x_2\right) \tag{7.2}$$

$a_{12}=a_{21}$ болғандықтан (7.1)-ді мына түрде жазамыз:

$$f(x_1,x_2)=a_{11}x_1x_1+a_{12}x_1x_2+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2x_2=a_{11}x_1^{\ 2}+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^{\ 2} \tag{7.3}$$

мұндағы $A=\left(a_{i\,j}\right)$ квадраттық форманың матрицасы деп аталады.

R^3 кеңістігіндегі квадраттық форманың түрі:

$$
\begin{aligned}
f\left(x_1, x_2, x_3\right) &= \sum_{i,\,j=1}^{3} a_{i\,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{3}\left(a_{i1}x_i x_1 + a_{i\,2}x_i x_2 + a_{i3}x_3\right) = \\
&= \left(a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3\right) + \left(a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3\right) + \\
&\quad + \left(a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3\right)
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

$a_{i\,j}=a_{j\,i}$ болғандықтан (7.4)-ті мына түрде жазамыз:

$$
f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \sum_{i,\,j=1}^{3} a_{i\,j} x_i x_j = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \tag{7.5}
$$

1-мысал. R^3 кеңістігіндегі $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=x_1^2-3x_3^2+4x_1x_2+x_1x_3$ квадраттық форманың матрицасын табыңыз.

Шешуі. Берілген квадраттық формада

$$
a_{11}=1,\ a_{22}=0,\ a_{33}=-3,\ a_{12}=2,\ a_{13}=\frac{1}{2},\ a_{23}=0
$$

болғандықтан, оның матрицасының түрі:

$$
A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}
$$

2-мысал. Матрица берілген: $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Берілген матрицасының квадраттық формасын табыңыз.

Шешуі. Берілген матрицада

$$
a_{11}=-1,\ a_{22}=2,\ \ a_{12}=5
$$

Олай болса берілген матрицаның квадраттық формасы:

$$
f\left(x_1,\ x_2\right)=-x_1{}^2+10x_1x_2+2x_2{}^2
$$

Егер квадраттық формада теңдіктің құрамында $x_i x_j,\ i \neq j$ көбейтіндісі болмаса квадраттық форманың канондық түрі деп аталады.

7.2. Квадраттық формаларды канондық түрге келтіру тәсілдері

Лагранж тәсілі (толық квадратты ажырату тәсілі). Айталық, n базисінде квадраттық форма (7.1) теңдікпен берілген болсын. Егер $x_i^{\,2}$ -тың барлық коэффициенттері

$a_{ii},\ i=\overline{1,n}$ нөлге тең болып, квадраттық форма нөлге тең болмаса, онде ең кемінде бір көбейтінді нөлге тең болмайды, мысалы, $2a_{12}x_1x_2$. Ескі және жаңа базистерде векторлардың координаттары

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + x_2' \\ x_2 &= x_1' - x_2' \\ x_i &= x_i',\ i=\overline{1,n} \end{aligned} \tag{7.6.}$$

формулаларымен байланысты болатындай етіп базисті түрлендіреміз.
Онда
$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(x_1'+x_2')(x_1'-x_2') = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2$ және ұйғарым бойынша $a_{11}=a_{22}=0$ болғандықтан, $x_1'^2$-тың коэффициенті нөлге тең болмайды.
Сондықтан, (7.1) теңдіктегі квадраттардың ең кемінде біреуінде коэффициенті нөлге тең болмайтындай B базисі табылады.

Айталық, $a_{11} \neq 0$ болсын.

Квадраттық форманың x_1 -ге қатысты бөлігін қарастырайық, яғни

$$\sigma_1 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n \tag{7.7}$$

Осы қосындыны толық квадратқа дейін толықтырамыз:

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \gamma_1 \tag{7.8}$$

мұндағы γ_1 x_1 -ге тәуелсіз мүшелерінің алгебралық қосындысы.

Егер

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n. \\ x_i' &= x_i,\ i=2,3,\ldots,n \end{aligned} \tag{7.9}$$

алмастыру жасасақ, жаңа базисте квадраттық форма мына түрді қабылдайды:

$$f = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + \sum_{i.,j=2}^{n} a_{ij}x_i'x_j' = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + A_1 \tag{7.10}$$

Соңғы формада $\frac{1}{a_{11}}x_1'^2$ қосылғыш бөлініп алынған, ал A_1 қалған бөлігі L_{n-1} кеңістігінің квадраттық формасы болады. Одан әрі осы процесті A_1 квадраттық формасы үшін тағы да қайталаймыз.

3-мысал. Лагранж әдісін қолданып,

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1$$

квадраттық форманы канондық түрге келтіріңдер.

Шешуі. Белгілеу енгіземіз:

$$x_1 = y_1 - y_2$$
$$x_2 = y_1 + y_2$$
$$x_3 = y_3$$

және

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Сонда

$$f = 2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) - 6(y_1 + y_2)y_{3=} + 2y_3(y_1 - y_2) = 2(y_1^2 - y_2^2) - 4y_1y_3 - 8y_2y_3 =$$
$$2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3$$

Квадраттық форманың y_1 -ге қатысты бөлігін қарастырайық, яғни

$$\sigma_1 = 2y_1{}^2 - 4y_1y_3$$

Осы қосындыны толық квадратқа дейін толықтырамыз:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(2y_1 - 2y_3)^2 - 2y_3^2$$

Сонда

$$f = \frac{1}{2}(2y_1 - 2y_3)^2 - 2y_2^2 - 8y_2y_3 - 2y_3^2$$

Белгілеу енгіземіз:

$$z_1 = 2y_1 - 2y_3,\ z_2 = y_2,\ \ z_3 = y_3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2$$

Және де жалғастырып,

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - (2z_2^2 + 8z_2z_3) - 2z_3^2 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}(-2z_2 - 4z_3)^2 + 6z_{.3}^2$$

$$-2z_2 - 4z_3 = t_2$$
$$z_1 = t_1$$
$$z_3 = t_3$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 + 6t_{.3}^2$$

4-мысал. Лагранж әдісін қолданып,

$$f = 2x_1^2 + 11x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 20x_1x_3 + 16x_2x_3 \qquad (1)$$

квадраттық форманы нормалдық түрге келтіріңіз.

Шешуі. Берілген квадраттық формасында x_1 айнымалының квадраты бар болғандықтан

$$f = \left(2x_1^2 + 4x_1x_2 - 20x_1x_3\right) + 11x_2^2 + 5x_3^2 + 16x_2x_3 \qquad (2)$$

түрінде жазуға болады. (2) теңдеудің жақшаның ішінен толық квадратты бөліп аламыз:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(2x_1 + 2x_2 - 10x_3\right)^2 - 2x_2^2 - 50x_3^2 - 4x_1x_2 + 20x_1x_3 + 20x_2x_3 + 11x_2^2 + 5x_3^2 + 16x_2x_3 = \\ &= \frac{1}{2}\left(2x_1 + 2x_2 - 10x_3\right)^2 + 9x_2^2 - 45x_3^2 + 36x_2x_3 \end{aligned} \qquad (3)$$

Келесі белгілеулерді енгізелік:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 2x_2 - 10x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \qquad (4)$$

(4) белгілеулерді (3) –ке қойып, төмендегі түрді аламыз:

$$f = \frac{1}{2}y_1^2 + \left(9y_2^2 + 36y_2y_3 - 45y_3^2\right) \qquad (5)$$

Енді (5) тің екінші жақшасын түрлендіріп, және толық квадратты бөліп аламыз:

$$9y_2^2 - 45y_3^2 + 36y_2y_3 = 9\left(y_2^2 - 5y_3^2 + 4y_2y_3\right)$$

$$y_2^2 - 5y_3^2 + 4y_2y_3 = \left(y_2 + 2y_3\right)^2 - 9y_3^2$$

$$2\,f = \frac{1}{2}y_1^2 + 9\left(y_2 + 2y_3\right)^2 - 81y_3^2 \qquad (6)$$

Келесі белгілеулерді енгізелік:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

(6) теңдеуге қойсақ, берілген квадраттық форманың канондық түрін аламыз:

$$f = \frac{1}{2} z_1^2 + 9 z_2^2 - 81 z_3^2 \qquad (7)$$

Енді берілген квадраттық форманы (7) ші канондық түрге келтіретін сызықты түрлендірулерді табайық:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} y_1 - y_2 - 5y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

Осыдан

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} z_1 - z_2 - 5z_3 \\ x_2 = z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases} \qquad (8)$$

(8) формулаларын квадраттық формасындағы x_1, x_2, x_3 орындарына қойып (7) түрге келтіруге болады.
(7) формулада

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2} u_1 \\ z_2 = \frac{1}{3} u_2 \\ z_3 = \frac{1}{9} u_3 \end{cases} \quad \text{деп белгілеп}$$

$$f = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

нормалдық түрге келеміз.

2-ші бөлім. **СӨЖ тапсырмалары және оларды орындау үлгілері**

№ 1. Анықтауыш. Алгебралық толықтауыш. Минор

1-мысал. Ретін төмендету әдісімен анықтауышты есептеу керек

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Шешуі. а) Анықтауыштың 6 –шы қасиетін пайдаланып есептейміз.

Анықтауыштың кез келген жатық жолының (бағанының) барлық элементтерін κ - санына көбейтіп, екінші бір жатық жолдың (бағанының) сәйкес элементтеріне қосқанда, оның мәні өзгермейді.

2 - ші бағанды таңдап аламыз. Бірінші жатық жолдың элементтерін нөлге айналдырамыз, одан кейін анықтауыштың ретін төмендетеміз:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -13 \end{vmatrix} = -(-13+14) = -1$$

ә) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ анықтауыштың 7-ші қасиетін пайдаланып шешеміз:

Анықтауыштың кез келген жатық жолының (бағанының) элементері мен сәйкес алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы осы анықтауыштың мәніне тең.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

1-ші жолды таңдап аламыз.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2(4+6+6+2+4-18)+(18-18+6-12)-(9-3-3-6) = 2\cdot 4-6-3 = -1$$

Жауабы: -1.

1-тапсырма

1-10. Ретін төмендету әдісімен төртінші ретті анықтауышты есептеңіз.

1. 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & -7 \\ -10 & 40 & 10 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 6 & 11 \end{vmatrix}$$

3.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -9 \\ -4 & 9 & 0 & 12 \\ 7 & 2 & 6 & 7 \\ -3 & 10 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

4.
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ -10 & -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

5.
$$\begin{vmatrix} -3 & 8 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \\ -6 & -3 & -3 & 3 \\ -5 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

6.
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ -8 & 3 & 2 & -4 \\ -4 & 5 & 6 & -6 \\ -6 & 7 & -9 & -3 \end{vmatrix}$$

7.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -8 & -9 & -9 \\ -5 & -5 & -11 & -7 \\ -9 & 3 & -6 & -12 \end{vmatrix}$$

8.
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 6 & 7 \\ 9 & 3 & 12 & 6 \end{vmatrix}$$

9.
$$\begin{vmatrix} 110 & 30 & 10 & 20 \\ -22 & 5 & -3 & -5 \\ - & 3 & -2 & -7 \\ -8 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

10.
$$\begin{vmatrix} 20 & 10 & -30 & 40 \\ 2 & -3 & 3 & -6 \\ 3 & -1 & 2 & -5 \\ 4 & -2 & 4 & -4 \end{vmatrix}$$

№ 2. Матрица. Матрица рангі

2-мысал. Матрицасының рангын элементар түрлендіру және көмкерген минорлар әдісімен табыңдар.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Шешуі.

а) Элементар түрлендіру әдісі.

3-ші бағанды $\frac{1}{2}$-ге көбейтіп, келесі матрицаға ккөшеміз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Одан кейін 1-ші жолды (-2)-ге көбейтіп 4-ші жолға қосамыз, сонда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Одан кейін 3-ші бағанды (-1) –ге көбейтіп 1-ші бағанға, одан кейін екінші бағанға, (-3) –ке көбейтіп 4-ші бағанға, 5-ші бағанға қосып, ең соңында берілген матрицаға эквивалентті төменгі матрицаны аламыз:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4-ші жолды 2-ші, 3-ші жолдарға қосып, 3-ші бағанда тағыда нөльдер аламыз.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Содан кейін 2-ші бағанды (-4) көбейтіп 1-ші бағанға, (-2)-ге көбейтіп 4-ші бағанға, одан кейін 5-ші бағанға қосамыз:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3-ші жолды (-2)-ге көбейтіп 2-ші жолға қосамыз:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4-ші бағанды 3-ке көбейтіп 1-ші бағанға, (-3)-ке көбейтіп 5-бағанға қосамыз:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4-ші бағанды (-1)-ге көбейтіп келесі матрицаны аламыз:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Демек, $r_A = 3$.

ә) Көмкерген минорлар әдісі.

2-ші ретті нөлдік емес минорды белгілеп аламыз: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

3-ші ретті көмкеру минорын қарастырамыз:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6 \neq 0$$

4-ші ретті көмкеру минорын қарастырамыз:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

4-ші ретті минорлардың барлығы нөлге тең болады, демек, $r_A = 3$.

Жауабы: $r_A = 3$

2-тапсырма

11-20. Матрицасының рангын элементар түрлендіру және көмкерген минорлар әдісімен табыңдар.

11.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -10 & 20 \end{pmatrix}$$

12.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

13.
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

14.
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

15.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

16.
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

17.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

18.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

19.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

20.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 3. Сызықтық теңдеулер жүйесі

3-мысал. Сызықтық теңдеулер жүйесін
а) Крамер формулаларымен;
ә) Гаусс әдісімен;
б) Матрица әдісімен шешіңдер.

а) Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін Крамер формулаларымен шешіңіз

$$\begin{cases} 2x-4y+z=3 \\ x-5y+3z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

Шешуі. Жүйе анықтауышы

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-10-12-1+5+4+6=-23+15=-8.$$

Δ анықтауышының 1-ші, 2-ші, 3-ші бағандарын бос мүшелермен алмастыра отырып, төмендегі анықтауыштарды есептейміз

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-16, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8\cdot$$

Олай болса, $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-16}{-8}=2$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{0}{-8}=0$, $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{8}{-8}=-1$.

ә) Сызықтық теңдеулер жүйесі берілген. Матрица әдісімен шешіңіз.

$$\begin{cases} 2x-4y+z=3 \\ x-5y+3z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

Шешуі. Сызықтық теңдеулер жүйесін матрица әдісімен шешу формуласы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

мұндағы $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-10-12-1+5+4+6=-8\neq 0.$$

Кері матрица $A^{-1}=-\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -2\cdot 3 + 3\cdot(-1) - 7\cdot 1 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot(-1) - 5\cdot 1 \\ 4\cdot 3 - 2\cdot(-1) - 6\cdot 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

яғни $x = 2, \quad y = 0, \quad z = -1$ жүйенің шешімі.

б) Сызықтық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешіңіз.

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Шешуі. Жүйенің кез келген теңдеуін таңдап аламыз. Демек, 3-ші теңдеуді таңдап алып, 1-ші теңдеуді (-1)-ге көбейтіп 2 - ші теңдеуге қосып 2-ші теңдеуден x-ті жоямыз және 1-ші теңдеуді (-2)- ге көбейтіп 3-ші теңдеуге қосып 2-ші теңдеуден x-ті жоямыз:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ 2x - 4y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + x = 1 \\ -4y + 2z = -2 \\ -2y - z = 1 \end{cases}$$

2 - ші теңдеуді (-2) - ге бөліп 3-ші теңдеуге қосу арқылы мына жүйені аламыз:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ -2y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

2-ші теңдеуден y-ті табамыз: $2y = 1 - 1 \Rightarrow y = 0$

1-ші теңдеуден x-ті табамыз: $x = 1 + 0 + 1 = 2$

Жауабы: $(2;0;-1)$

3-тапсырма

21-30. Сызықтық теңдеулер жүйесін

а) Крамер формулаларымен;

ә) Гаусс әдісімен;

б) Матрица әдісімен шешіңіз.

21.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

22.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

23.
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$$

24.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

25.

26.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

27.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

28.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -7 \end{cases}$$

29.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 13 \end{cases}$$

30.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

№ 4. Вектор. Векторды базис бойынша жіктеу

4-*мысал.* $\vec{d}$ векторын $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары бойынша жіктеңдер. $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының базис құрайтынын көрсетіңіз.

$\vec{d} = (-2;\ \ 4;\ \ 7)$ $\vec{a} = (0;\ \ 1;\ \ 2)$ $\vec{b} = (1;\ \ 0;\ \ 1)$ $\vec{c} = (-1;\ \ 2;\ \ 4)$

Шешуі.

Алдымен $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының базис құрайтынын көрсетеміз.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 4 = -1 \neq 0$$

Енді $\vec{d}$ векторын базис бойынша жіктейміз. $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

$$(-2;\ \ 4;\ \ 7) = x \cdot (0;\ \ 1;\ \ 2) + y \cdot (1;\ \ 0;\ \ 1) + z \cdot (-1;\ \ 2;\ \ 4)$$

$$\begin{cases} y - z = -2 \\ x + 2z = 4 \\ 2x + y + 4z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Сонымен,

Жауабы: $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{y} + \vec{c}$

4-тапсырма

31-40. $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының базис құрайтынын көрсетіп, $\vec{d}$ векторын $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары бойынша жіктеңдер.

31.	$\vec{d}=(-1;4;7)$	$\vec{a}=(-1;1;2)$	$\vec{b}=(1;0;1)$	$\vec{c}=(-1;2;4)$
32.	$\vec{d}=(6;12;-1)$	$\vec{a}=(1;3;0)$	$\vec{b}=(2;-1;1)$	$\vec{c}=(0;-1;2)$
33.	$\vec{d}=(1;-4;4)$	$\vec{a}=(2;1;-1)$	$\vec{b}=(0;3;2)$	$\vec{c}=(1;-1;1)$
34.	$\vec{d}=(-9;5;5)$	$\vec{a}=(4;1;1)$	$\vec{b}=(2;0;-3)$	$\vec{c}=(-1;2;1)$
35.	$\vec{d}=(-5;-5;5)$	$\vec{a}=(-2;0;1)$	$\vec{b}=(1;3;-1)$	$\vec{c}=(0;4;1)$
36.	$\vec{d}=(13;2;7)$	$\vec{a}=(5;1;0)$	$\vec{b}=(2;-1;3)$	$\vec{c}=(1;0;-1)$
37.	$\vec{d}=(-19;-1;7)$	$\vec{a}=(0;1;1)$	$\vec{b}=(-2;0;1)$	$\vec{c}=(3;1;0)$
38.	$\vec{d}=(3;-3;4)$	$\vec{a}=(1;0;2)$	$\vec{b}=(0;1;1)$	$\vec{c}=(2;-1;4)$
39.	$\vec{d}=(3;3;-1)$	$\vec{a}=(3;1;0)$	$\vec{b}=(-1;2;1)$	$\vec{c}=(-1;0;2)$
40.	$\vec{d}=(-1;7;4)$	$\vec{a}=(-1;2;1)$	$\vec{b}=(2;0;3)$	$\vec{c}=(1;1;-1)$

№ 5. Сызықты түрлендіру

5-мысал. Екі сызықтық түрлендіру берілген. Матрицалық есептеулер арқылы x_1'', x_2'', x_3'' айнымалыларын x_1, x_2, x_3 арқылы өрнектейтін түрлендіруді табыңдар.

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_2' = 6x_1 + 7x_2 + x_3 \\ x_3' = 9x_1 + x_2 + 8x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = -x_1' + 3x_2' - 2x_3' \\ x_2'' = -4x_1' + x_2' + 2x_3' \\ x_3'' = 3x_1' - 4x_2' + 5x_3' \end{cases}$$

Шешуі. Берілген сызықтық түрлендіруді матрица түрінде жазамыз:

$$X' = A \cdot X \quad \text{және} \quad X'' = B \cdot X'$$

$$X'' = B \cdot A \cdot X$$

Мұндағы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Орындарына қоятын болсақ:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -4+18-18 & -3+21-2 & -5+3-16 \\ -16+6+18 & -12+7+2 & -20+1+16 \\ 12-24+45 & 9-28+5 & 15-4+40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4x_1 + 16x_2 - 18x_3 \\ 8x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ 33x_1 - 14x_2 + 51x_3 \end{pmatrix}$$

Олай болса

Жауабы: $\begin{cases} x_1'' = -4x_1 + 16x_2 - 18x_3 \\ x_2'' = 8x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_3'' = 33x_1 - 14x_2 + 51x_3 \end{cases}$

5-тапсырма

41-50. Екі сызықтық түрлендіру берілген. Матрицалық есептеулер арқылы x_1'', x_2'', x_3'' айнымалыларын x_1, x_2, x_3 арқылы өрнектейтін түрлендіруді табыңдар.

41.	$\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_2' = -4x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1'' = -x_1' - 2x_2' + x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + x_2' - x_3' \\ x_3'' = x_1' - x_2' + x_3' \end{cases}$
42.	$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ x_3' = 8x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1'' = 9x_1' + 3x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = 2x_1' + 3x_3' \\ x_3'' = x_2' - x_3' \end{cases}$
43.	$\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 4x_3 \\ x_2' = 4x_2 - 9x_3 \\ x_3' = 3x_1 + x_2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1'' = x_2' - 6x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + 7x_3' \\ x_3'' = x_1' + x_2' - x_3' \end{cases}$
44.	$\begin{cases} x_1' = 2x_2 \\ x_2' = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 4x_1 - x_2 + 5x_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1'' = -3x_1' + x_3' \\ x_2'' = 2x_2' + x_3' \\ x_3'' = -x_2' + 3x_3' \end{cases}$
45.	$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + 5x_3 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_3' = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 3x_2' + x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + x_2' + 2x_3' \\ x_3'' = x_1' - 2x_2' + x_3' \end{cases}$
46.	$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' = 3x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1'' = x_1' - 2x_2' - x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + x_2' + 2x_3' \\ x_3'' = x_1' + 2x_2' + 2x_3' \end{cases}$
47.	$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ x_2' = 6x_1 + 9x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 + 8x_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1'' = -x_1' + 8x_2' - 2x_3' \\ x_2'' = -4x_1' + 3x_2' + 2x_3' \\ x_3'' = 3x_1' - 8x_2' + 5x_3' \end{cases}$

48.	$\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 - 5x_3 \\ x_3' = -3x_1 + 5x_2 + x_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 5x_2' - 3x_3' \\ x_2'' = x_1' - x_2' - x_3' \\ x_3'' = 7x_1' + 4x_3' \end{cases}$
49.	$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 5x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = 3x_2 - 6x_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - x_2' - 5x_3' \\ x_2'' = 7x_1' + x_2' + 4x_3' \\ x_3'' = 6x_1' + 4x_2' - 7x_3' \end{cases}$
50.	$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -3x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 3x_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1'' = 3x_1' + x_2' \\ x_2'' = x_1' - 2x_2' - x_3' \\ x_3'' = 3x_2' + 2x_3' \end{cases}$

№ 6. Меншікті векторлар және меншікті мәндер

6-м*ысал.* A матрицасында берілген сызықты түрлендірудің меншікті мәнін және меншікті векторын табыңдар.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Шешуі. Матрицанын сипаттамалық теңдеуін құрамыз.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Теңдеуді шешеміз:

$$-\lambda(4-\lambda)(2-\lambda) + 3(2-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

Мұның түбірлері $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$ меншікті мәндері болады.

Бірінші меншікті векторды табамыз. Теңдеулер жүйесіне $\lambda_1 = 2$ қоямыз, нәтижесінде мына жүйені аламыз:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Жүйені шешіп x_1=0 болса, $x_2 = 2x_1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ мәндерін табамыз.

Сонда

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Екінші меншікті векторды табамыз. Теңдеулер жүйесіне $\lambda_2 = 3$ қоямыз, нәтижесінде

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Жүйені шешіп анықтауышы нөлге тең жүйені аламыз. Оның нөлдік емес шешуі $x_2 = 3x_1$, мұндағы x_1-кез-келген сан.

Дербес жағдайда егер x_1=1 болса,

$$x_2 = 3x_1,\ x_1 = 1,\ x_3 = -2x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1.$$

Сонда

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Үшінші меншікті векторды табамыз. Теңдеулер жүйесіне $\lambda_3 = 1$ қоямыз, нәтижесінде

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесін шешіп, дербес жағдайда, үшінші меншікті векторды табамыз:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Жауабы: $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6-тапсырма

51-60. Сызықты түрлендірудің меншікті мәні мен меншікті векторын табыңдар.

51. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

52. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

53. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

54. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

55. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

56. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

57. $A=\begin{pmatrix}-3 & 11 & 7\\ 0 & 5 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

58. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}$

59. $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 21\\ 21 & 2 & 16\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

60. $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

№ 7. Түзу және жазықтық теңдеулері. Векторларды көбейту. Векторлар арасындағы бұрыш

7-мысал. $A_1A_2A_3A_4$ пирамида төбелері берілген.

$$A_1(3;-2;2),\quad A_2(1;-3;1),\quad A_3(2;0;4),\quad A_4(6;-4;6)$$

Табу керек:

1. $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_1A_3}$, $\vec{A_1A_4}$ векторларының координаталарын және модулдарын;
2. $\vec{A_1A_2}$ және $\vec{A_1A_3}$ векторларының скаляр көбейтіндісін;
3. $\vec{A_1A_2}$ және $\vec{A_1A_3}$ векторларының арасындағы бұрышын;
4. $A_1A_2A_3$ жағының ауданын;
5. $A_1A_2A_3A_4$ пирамида көлемін;
6. A_1A_2 түзуінің теңдеуін;
7. $A_1A_2A_3$ жазықтығының теңдеуін;
8. A_1A_4 түзуі мен $A_1A_2A_3$ жазықтығының арасындағы бұрышын;
9. A_4 төбесінен $A_1A_2A_3$ жазықтығына түсірілген биіктік теңдеуін және ұзындығын.

Шешуі.

1. $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_1A_3}$, $\vec{A_1A_4}$ векторларының координаталарын табамыз.

$$\vec{a}=\vec{A_1A_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)=((1-3);(-3+2);(1-2))=(-2;-1;-1);$$

$$\vec{b}=\vec{A_1A_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)=((2-3);(0+2);(4-2))=(-1;2;2)\ ;$$

$$\vec{c}=\vec{A_1A_4}=(x_4-x_1;y_4-y_1;z_4-z_1)=((6-3);(-4+2);(6-2))=(3;-2;4)\ .$$

$\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_1A_3}$, $\vec{A_1A_4}$ векторларының ұзындықтарын табамыз.

$$|\vec{a}|=\left|\vec{A_1A_2}\right|=\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}\ ;$$

$$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{A_1A_3}\right|=\sqrt{b_x^{\,2}+b_y^{\,2}+b_z^{\,2}}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3;$$

$$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{A_1A_4}\right|=\sqrt{c_x^{\,2}+c_y^{\,2}+c_z^{\,2}}=\sqrt{9+4+16}=\sqrt{29}\,.$$

2. $\vec{A_1A_2}$ және $\vec{A_1A_3}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табамыз.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=(-2)(-1)+(-1)2+(-1)2=2-2-2=2\ .$$

3. $\vec{A_1A_2}$ және $\vec{A_1A_3}$ векторларының арасындағы бұрышты табамыз

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{2}{3\sqrt{6}}\Rightarrow\varphi=\arccos\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right).$$

4. $A_1A_2A_3$ жағының ауданын табамыз

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}^2}=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{25+25}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

5. $A_1A_2A_3A_4$ пирамида көлемін табамыз

$$V_{пир}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 4\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|(-16-6+2+6-4-8)\right|=\frac{26}{6}.$$

6. A_1A_2 түзуінің теңдеуін табамыз

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-2}\quad\Rightarrow\quad\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{-1}.$$

7. $A_1A_2A_3$ жазықтығының теңдеуін табамыз

$A_1A_2A_3$ жазықтығының теңдеуі:

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0\quad\begin{vmatrix}x-3 & y+2 & z-2\\ -2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$-2x+6+y+2-4z+8-z+2+4y+8+2x-6=0$$

$$5y-5z+22=0\Rightarrow\vec{N}=(0;5;-5)$$

8. A_1A_4 түзуі мен $A_1A_2A_3$ жазықтығының арасындағы бұрышты табамыз.

A_1A_4 түзуінің теңдеуі: $\dfrac{x-x_1}{x_4-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_4-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_4-z_1}$

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-2}{4}\qquad\vec{S}=(3;-2;4)$$

$A_1A_2A_3$ жазықтығының теңдеуі: $5y-5z+22=0\Rightarrow\vec{N}=(0;5;-5)$.

$$\sin\psi=\frac{\vec{S}\cdot\vec{N}}{|\vec{S}|\cdot|\vec{N}|}=\frac{(3;-2;4)(0;5;-5)}{\sqrt{9+4+16}\sqrt{0+25+25}}=\frac{-10-20}{5\sqrt{58}}=\frac{-6}{\sqrt{58}},$$

$$\psi=\arcsin\left(\frac{-6}{\sqrt{58}}\right)$$

9. A_4 төбесінен $A_1A_2A_3$ жазықтығына түсірілген биіктіктің теңдеуі.

A_4 төбесінен түсірілген биіктік $A_1A_2A_3$ жазықтығына перпендикуляр.

$A_4O=(x-x_4;y-y_4;z-z_4)=(x-6;y+4;z-6)$.

$A_1A_2A_3$ жазықтығының теңдеуі: $5y-5z+22=0\Rightarrow N=(0;5;-5)$.

Екі вектордың параллелдік белгісі бойынша биіктік теңдеуі:

$$\frac{x-6}{0}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-6}{-5}$$

A_4 төбесінен $A_1A_2A_3$ жазықтығына түсірілген биіктіктің ұзындығы немесе A_4 төбесінен $A_1A_2A_3$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табамыз:

$$d=\frac{|Ax_4+By_4+Cz_4+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|5\cdot(-4)-5\cdot 6+22|}{\sqrt{50}}=\frac{28}{5\sqrt{2}}$$

Жауабы: $\frac{28}{5\sqrt{2}}$

7-тапсырма.

61-70. $A_1A_2A_3A_4$ пирамида төбелері берілген. $A_1(3;-2;2)$, $A_2(1;-3;1)$, $A_3(2;0;4)$, $A_4(6;-4;6)$

Табу керек:

1. $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ векторларының координаталарын және модулдарын;
2. $\overrightarrow{A_1A_2}$ және $\overrightarrow{A_1A_3}$ векторларының скаляр көбейтіндісін;
3. $\overrightarrow{A_1A_2}$ және $\overrightarrow{A_1A_3}$ векторларының арасындағы бұрышын;
4. $A_1A_2A_3$ жағының ауданын;
5. $A_1A_2A_3A_4$ пирамида көлемін;
6. A_1A_2 түзуінің теңдеуін;
7. $A_1A_2A_3$ жазықтығының теңдеуін;
8. A_1A_4 түзуі мен $A_1A_2A_3$ жазықтығының арасындағы бұрышын;
9. A_4 төбесінен $A_1A_2A_3$ жазықтығына түсірілген биіктік теңдеуін және ұзындығын.

61.	$A_1(-1;\ 2;\ 1)$	$A_2(-2;\ 2;\ 5)$	$A_3(-3;\ 3;\ 1)$	$A_4(-1;\ 4;\ 3)$
62.	$A_1(-2;\ 1;-1)$	$A_2(-3;\ 1;\ 3)$	$A_3(-4;\ 2;-1)$	$A_4(-2;\ 3;\ 1)$
63.	$A_1(1;\ 1;\ 2)$	$A_2(0;\ 1;\ 6)$	$A_3(-1;\ 2;\ 2)$	$A_4(1;\ 3;\ 4)$
64.	$A_1(-1;-2;1)$	$A_2(-2;\ -2;\ 5)$	$A_3(-3;-1;\ 1)$	$A_4(-1;\ 0;\ 3)$
65.	$A_1(2;\ -1;\ 1)$	$A_2(1;-1;\ 5)$	$A_3(0;\ 0;\ 1)$	$A_4(2;\ 1;\ 3)$
66.	$A_1(-1;\ 1;\ -2)$	$A_2(-2;\ 1;\ 2)$	$A_3(-3;\ 2;\ -2)$	$A_4(-1;\ 3;\ 0)$
67.	$A_1(1;\ 2;\ 1)$	$A_2(0;\ 2;\ 5)$	$A_3(-1;\ 3;\ 1)$	$A_4(1;\ 4;\ 3)$
68.	$A_1(-2;\ -1;\ 1)$	$A_2(-3;\ -1;\ 5)$	$A_3(-4;\ 0;\ 1)$	$A_4(-2;\ 1;3)$
69.	$A_1(1;\ -1;\ 2)$	$A_2(0;\ -1;\ 6)$	$A_3(-1;\ 0;\ 2)$	$A_4(1;\ 1;\ 4)$
70.	$A_1(1;\ -2;\ 1)$	$A_2(0;\ -2;\ 5)$	$A_3(-1;\ -1;\ 1)$	$A_4(1;\ 0;\ 3)$

№ 8. Декарттық және полярлық координаталар. Екінші ретті қисықтар

8-мысал. Полярлық координата жүйесінде $r = \dfrac{3}{1-\sin\varphi}$ сызықтық теңдеу берілген.

1. Берілген теңдеуді декарттық координата жүйесінде өрнектеңдер.
2. Табылған теңдеудің түрін анықтап, сызбасын салыңдар.

Шешуі. Полярлық координата декарттық координата арқылы мына формуламен өрнектеледі:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Осы формулаларды берілген теңдеуге қойып, аламыз.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{1 - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - y}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - y = 3, \sqrt{x^2 + y^2} = 3 + y$$

$$(\sqrt{x^2 + y^2})^2 = (3 + y)^2, \quad x^2 + y^2 = 9 + 6y + y^2$$

$$x^2 = 9 + 6y \Rightarrow 6y = x^2 - 9 \Rightarrow y = \frac{x^2}{6} - \frac{3}{2}$$

Жауабы: Бұл парабола теңдеуі.

8-тапсырма.

71-80. Полярлық координата жүйесінде сызықтық теңдеу берілген.

1. Берілген теңдеуді декарттық координата жүйесінде өрнектеңдер.
2. Табылған теңдеудің түрін анықтап, сызбасын салыңдар.

71.	$r = \dfrac{1}{1+\cos\varphi}$	72.	$r = \dfrac{1}{1+3\cos\varphi}$
73.	$r = \dfrac{1}{1+\sin\varphi}$	74.	$r = \dfrac{1}{1-\sin\varphi}$
75.	$r = \dfrac{3}{1+2\sin\varphi}$	76.	$r = \dfrac{8}{3-\cos\varphi}$
77.	$r = \dfrac{3}{1-2\cos\varphi}$	78.	$r = \dfrac{3}{1-2\sin\varphi}$
79.	$r = \dfrac{10}{2+\cos\varphi}$	80.	$r = \dfrac{5}{3-4\sin\varphi}$

№ 9. Екінші ретті қисықтарды зерттеу және оның графигін салу

9-мысал. $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$ теңдеуі қандай қисықты анықтайды?

Шешуі: Берілген теңдеуге келесі түрлендірулер қолданайық: Теңдеуді 16-ге қысқартып, теңдеу мүшелерін топтаймыз.

$$x^2 - 2x + \frac{25}{16}y^2 + \frac{50}{16}y = 359$$
$$\left(x^2 - 2x\right) + \frac{25}{16}\left(y^2 + 2y\right) = \frac{359}{16}$$
$$\left(x-1\right)^2 - 1 + \frac{25}{16}\left(\left(y+1\right)^2 - 1\right) = \frac{359}{16}$$

$$\left(x-1\right)^2 + \frac{25}{16}\left(y+1\right)^2 = \frac{400}{16}$$

$$\frac{\left(x-1\right)^2}{25} + \frac{\left(y+1\right)^2}{16} = 1$$

- бұл центрі $(1; -1)$, $a^2 = 5, b^2 = 4$ эллипс теңдеуі.

Жауабы: Эллипс теңдеуі.

9-тапсырма

81-90. Екінші ретті қисықтың түрін анықтаңдар. Графигін салыңдар.

81. $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$
82. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$
83. $9x^2 - 4y^2 - 36x + 24y - 36 = 0$
84. $x^2 - 6x - 6y - 21 = 0$
85. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$
86. $x^2 - 8x + 2y + 18 = 0$
87. $2x^2 + 5y^2 + 8x - 10y - 17 = 0$
88. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$
89. $x^2 - 6y^2 - 12x + 36y - 48 = 0$
90. $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$

№ 10. Екінші ретті беттер

10-мысал. $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$ теңдеуі қандай бетті анықтайды?
Шешуі: Бірдей айнымалылы мүшелерін топтастырайық:

$$(x^2 - x) + (y^2 + 2y) + z^2 = -1.$$

Енді толық квадратқа дейін толықтырамыз:

$$(x^2 - x + \frac{1}{4}) + (y^2 + 2y + 1) + z^2 = -1 + \frac{1}{4} + 1$$

немесе

$$(x-\frac{1}{2})^2+(y+1)^2+z^2=\frac{1}{4}$$

- бұл центрі $C\left(\frac{1}{2};-1;0\right)$, радиусы $r=\frac{1}{2}$ сфераның теңдеуі.

Жауабы: Бұл сфера теңдеуі.

10-тапсырма

91-100. Екінші ретті беттің теңлеуін канондық түрге келтіріп, түрін анықтаңдар.

91. $4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0$

92. $x^2+y^2-z^2-2y+2z=0.$

93. $x^2-y^2-4x+8y-2z=0$

94. $4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0$

95. $4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0$

96. $x^2+y^2-z^2-2x-2y+2z+2=0.$

97. $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z-2=0.$

98. $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0.$

99. $x^2+z^2-4x-4z+4=0.$

100. $9x^2-z^2-18x-18y-6z=0.$

3-бөлім. Тест сұрақтары

1. Егер анықтауыштың екі жатық жолдарын ауыстырсақ, онда оның мәні;
A) таңбасын өзгертеді
B) таңбасын өзгертпейді
C) екі есе кемиді
D) өзгермейді
E) екі есе өседі

2. n-ші ретті аңықтауыштың қандай да бір жатық жолын k санына көбейтіп келесі бір жолға қосса, онда анықтауыштың мәні
A) k –есе өседі
B) k –есе кемиді
C) k –ға кемиді
D) $-k$ –ға артады.
E) өзгермейді

3. Егер анықтауыштың екі жатық жолдарының сәйкес мәндері тең болса, онда анықтауыштың мәні
A) нольге тең

B) бас диагонал элементерінің көбейтіндісіне тең
C) бас диагонал емес элементтердің көбейтіндісіне тең
D) нольге тең емес
E) осы жатық жолдардың элементтерінің қосындысына тең
4. Егер анықтауыштың бір жатық жолы нольдік элементтерден тұрса, онда оның мәні
A) 0
B) 1
C) ∞
D) 2
E) -1
5. Егер анықтауыштың екі бағанасының орындарын ауыстырсық, онда оның мәні

A) таңбасын өзгертеді

B) таңбасын өзгертпейді
C) абсолют шамасын өзгертеді
D) өзгермейді
E) екі есе өседі
6. Егер анықтауыштың қайсібір жолының элементтерінің ортақ көбейткіші бар болса,
A) оны анықтауышқа бөлуге болады
B) мұндай анықтауыш нолге тең
C) мұндай анықтауыш бірге тең
D) мұндай анықтауыш екіге тең
E) оны анықт**а**уыштың алдына шығаруға болады
7. Екінші ретті анықтауышты табыңыз: $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$
A) 0
B) 6
C) -6
D) 1
E) -1
8. Үшінші ретті анықтауышты табыңыз: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$
A) 0
B) 12
C) -12
D) -24
E) 42
9. Теңдеуді шешіңдер: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & x & 1 \end{vmatrix} = 2$
A) -6
B) -4
C) 3
D) 4
E) 0

10. Теңдеуді шешіңдер: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3$

A) -1
B) -2
C) 0
D) 1
E) 10

11. Теңсіздікті шеш: $\begin{vmatrix} 4 & x \\ -x & -9 \end{vmatrix} < 0$

A) $x \in (-6;6)$

B) $x \in (-\infty;6)$

C) $x \in (-\infty;-6)$

D) $x \in (-6;\infty)$

E) $x \in (6;\infty)$

12. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 22 & 4 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ анықтауыштың A_{32} алгебралық толықтауышын табыңдар.

A) -34
B) 12
C) 2
D) -2
E) -12

13. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$ анықтауышының A_{22} алгебралық толықтауышын табыңдар.

A) 1
B) 6
C) -7
D) 7
E) -1

14. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышты есептеңдер.

A) 0
B) 10
C) 20
D) 40
E) -30

15. $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$ анықтауышты есептеңдер.

A) 3

B) 1
C) 4
D) 5
E) -1

16. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ анықтауышты есептеңдер.

A) -1
B) 11
C) 5
D) 10
E) 1

17. Есептеңдер: $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$

A) -9
B) 10
C) 19
D) 9
E) -8

18. A матрицаның рангісі деп
A) A матрицасының нольге тең емес минорларының ең үлкен реті
B) A матрицасынан құралған нольге тең емес мәні
C) A матрицасынан құралған анықтауыштың мәні
D) A матрицасының ең үлкен элементі
E) A матрицасының ең кіші элементі

19. Егер $m \times n$ өлшемді $A = (a_{ij})$ матрицасы мен $p \times k$ өлшемді $B(b_{ij})$ матрицасының көбейтіндісі төмендегі шарт орындалғанда ғана бар болады:
A) $n = p$, A матрицасының тік жолдар саны B матрицасаның жатық жолдар санына тең болса
B) $m = p$, A матрицасының жатық жолдар саны B матрицасаның жатық жолдар санына тең болса
C) $m = k$, A матрицасының жатық жолдар саны B матрицасаның тік жолдар санына тең болса
D) $m = p$, $n > k$, A матрицасының жатық жолдар саны мен B матрицасаның жатық жолдар санына тең, ал A матрицасының тік жолдар саны B матрицасының тік жолдар санынан үлкен
E) $n = k; m > p$, A матрицасының тік жолдар саны мен B матрицасаның тік жолдар саны тең, ал A матрицасының жатық жолдар саны B матрицасының жатық жолдар санынан үлкен

20. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ түріндегі матрица қалай аталады ?

A) нөлдік
B) бірлік
C) симметриялық

D) бағандық
E) жолдық
21. Квадрат матрица деп қандай матрицаны айтады?
A) жол саны баған санына тең
B) жол саны баған санынан кіші
C) жол саны баған санынан үлкен
D) жол саны баған санынан кіші және тең
E) жол саны баған санынан үлкен және тең

22. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ матрицасы мен $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ матрицасының көбейтіндісін табыңдар.
A) $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$
C) (3)
D) $(1 \quad 2 \quad 3)$
E) $(1 \quad 2)$
23. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ матрицасына A^{-1} кері матрицаны табыңдар.
A) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$
24. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ матрицаларын көбейтіңдер.
A) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -7\end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix}21 & 7\\ 8 & -6\end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix}0 & -7\\ -3 & -12\end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 0 & -6\end{pmatrix}$

25. $A=\begin{pmatrix}7 & -2 & 3\end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix}$ матрицаларын көбейтіңдер.

A) $\begin{pmatrix}28 & 2 & 15\end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix}35 & 2 & 12\end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix}15\end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix}28\end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix}-15\end{pmatrix}$

26. $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\4 & 1\end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $A\cdot B$- ны табыңдар.

A) $\begin{pmatrix}6 & 15\\4 & 2\end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix}10 & -9\\36 & -12\end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix}3 & 5\\4 & 2\end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix}11 & -1\\9 & 10\end{pmatrix}$

27. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\-3 & 2\end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix}4 & -5\\-2 & 4\end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $A+3B$- ны табыңдар.

A) $\begin{pmatrix}5 & 9\\1 & 4\end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix}11 & -13\\-9 & 14\end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix}3 & 10\\21 & 0\end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix}3 & 7\\10 & 4\end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix}6 & 9\\11 & 4\end{pmatrix}$

28. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\-3 & 2\end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix}4 & -5\\-2 & 4\end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $A-3B$- ны табыңдар.

A) $\begin{pmatrix}5 & 9\\1 & 4\end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix}11 & -13\\-9 & 14\end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix}-13 & 17\\3 & -10\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$

29. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $2A - B$- ны табыңдар.

A) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 11 & -13 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} -13 & 17 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$

30. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $2A + B$- ны табыңдар.

A) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -81 & 0 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} -13 & 17 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$

31. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімін табыңдар.

A) $(1;1)$
B) $(2;1)$
C) $(3;1)$
D) $(-1;1)$
E) $(2;3)$

32. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = -4 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімін табыңдар.

A) $(-1;4)$
B) $(1;3)$
C) $(1;2)$

D) $(-2;6)$

E) $(0;3)$

33. $\begin{cases} x \quad\quad -z=0 \\ -x+2y+z=0 \\ \quad\quad y-z=0 \end{cases}$ біртекті теңдеулер жүйесін шешіңдер.

A) $(0;0;0)$

B) $(1;0;1)$

C) $(2;1;1)$

D) $(-1;1;1)$

E) $(c;2c;3c)$

34. $\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ x_1+2x_2=3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімін табыңдар.

A) $(1;1)$

B) $(2;1)$

C) $(3;1)$

D) $(0;1)$

E) $(2;0)$

35. $\begin{cases} x_1-x_2=2 \\ 2x_1-x_2=1 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімін табыңдар.

A) $(-1;-3)$

B) $(1;3)$

C) $(3;1)$

D) $(-3;1)$

E) $(1;1)$

36. $\begin{cases} 3x_1+x_2=2 \\ 2x_1-x_2=3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімін табыңдар.

A) $(1;-1)$

B) $(1;1)$

C) $(2;1)$

D) $(1;2)$

E) $(-1;-1)$

37. $\begin{cases} x-y=2 \\ x+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімін табыңдар.

A) $(0;-2;0)$

B) $(0;2;0)$

C) $(-2;0;0)$

D) $(0;0;-2)$

E) $(2;0;0)$

38. $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+z=0 \\ x-z=1 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімін табыңдар.

A) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

B) $\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

C) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

D) $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$

E) $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

39. $\begin{cases} x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2=0 \\ x_1+x_3=1 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімін табыңдар.

A) $(0;0;1)$
B) $(0;0;-1)$
C) $(1;0;0)$
D) $(0;1;0)$
E) $(0;0;-2)$

40. $\begin{cases} y-z=1 \\ x+y=1 \\ x-z=1 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің шешімін табыңдар.

A) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

B) $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

C) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

D) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

E) $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

41. $A(3;-2)$ және $B(4;1)$ нүктелері берілген. $\vec{AB}$ векторының модулін табу керек.
A) 10
B) 5
C) $\sqrt{10}$
D) $\sqrt{5}$
E) 2.

42. $\vec{a}=(3;2;-1)$ векторының модулін табыңдар.

A) $\sqrt{14}$
B) $\sqrt{6}$
C) $\sqrt{12}$
D) $\sqrt{2}$
E) 4

43. $\vec{a} = \{3;\ 4;\ 0\}$ векторының ұзындығын табыңдар.
A) 5
B) 4
C) 3
D) 0
E) 6

44. $\vec{a} = (1; 2; -1)$ және $\vec{b} = (-2; 1; 0)$ векторлары берілген. $\vec{a} + 2\vec{b}$ - ны табыңдар.
A) $(6; 7; 9)$
B) $(-1; 2; 0)$
C) $(-3; 4; -1)$
D) $(5; 6; 7)$
E) $(20; 3; 4)$

45. $\vec{a} = (2; 4; 0)$; $\vec{b} = (0; -3; 1)$ векторлары берілген. $2\vec{a} - 3\vec{b}$ - ны табыңдар.
A) $(4; 17; -3)$
B) $(-4; -17; 3)$
C) $(2; 7; -1)$
D) $(4; -1; 3)$
E) $(4; -1; -3)$

46. $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}$ болса, $\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$ және $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ параллелограмның
A) биіктіктерін
B) периметрлерін
C) биссектриссаларын
D) диагоналдарының жартысы
E) медианаларын

47. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ және $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ векторлары берілген. $\vec{a} + \vec{b}$ - ны табыңдар.
A) $5\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$
B) $-2\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$
C) $-3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
D) $-\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$
E) $-\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

48. Координаталары $a_x = 2$, $a_y = 3$, $a_z = -4$ болатын вектордың $\cos\alpha$ бағыттаушы косинусын табыңдар.
A) $\cos\alpha = \frac{2}{5}$

B) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$

C) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

E) 30

49. Координаталары $a_x = 2$, $a_y = 3$, $a_z = -4$ болатын вектордың $\cos\beta$ бағыттаушы косинусын табыңдар.

A) $\cos\beta = \frac{2}{5}$

B) $\cos\beta = \frac{1}{2}$

C) $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{29}}$

E) 30.

50. Координаталары $a_x = 2$, $a_y = 3$, $a_z = -4$ болатын вектордың $\cos\gamma$ бағыттаушы косинусын табыңдар.

A) $\cos\alpha = \frac{2}{5}$

B) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$

C) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

E) $\cos\gamma = -\frac{4}{\sqrt{29}}$

51. $\vec{a} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ векторының бағыттауыш косинусы $\cos\alpha$

A) $\cos\alpha = \frac{8}{9}$

B) $\cos\alpha = -\frac{4}{9}$

C) $\cos\alpha = \frac{1}{9}$

D) $\cos\alpha = 1$

E) $\cos\alpha = 0$

52. Векторлардың скаляр көбейтіндісі

A) $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$

B) $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$

C) $|\vec{a}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$

D) $|\vec{b}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$

E) $|\vec{a}||\vec{b}|$

53. $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 6$, $\varphi = 60^0$ берілген. Табу керек: $\vec{a}\cdot\vec{b}$

A) 30
B) 15
C) $15\sqrt{2}$
D) $15\sqrt{3}$
E) 0

54. Егер $\vec{a} = 2\sqrt{2}$ және $\vec{b} = 5$ олардың арасындағы бұрыш 135^0 болса, онда осы вектордың скалярлық көбейтіндісін есептеңіз.
A) $4\sqrt{3}$
B) -10
C) $2\sqrt{5}$
D) $-3\sqrt{2}$
E) $4\sqrt{2}$

55. $\vec{a} = (4; -2; -4)$ және $\vec{b} = (6; -3; 2)$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңдар
A) 1
B) 20
C) 22
D) 21
E) -20

56. $\vec{a} = (2; -1; 2)$ және $\vec{b} = (1; 3; 2)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңыз.
A) 1
B) 2
C) 3
D) -3
E) -2

57. m және k кандай мәндерінде $\vec{a} = (m; 3; 5)$ және $\vec{b} = (4; k; 1)$ векторлары коллинеар болады?
A) $m = 20$ $k = \frac{3}{5}$
B) $m = 5$ $k = 1$
C) $m = 1$ $k = 5$
D) $m = 4$ $k = 3$
E) $m = 2$ $k = 1$

58. m және k-нің қандай мәндерінде мына векторлар коллинеар болады.
$\vec{a}=(5;3;m)$ және $\vec{b}=(1;k;4)$

A) $m=20\ \ k=1$
B) $m=2;\ k=1$
C) $m=20\ k=\frac{3}{5}$
D) $m=4\ \ k=3$
E) $m=3\ k=4$

59. Егер $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ және $\vec{b}=\vec{j}+2\vec{k}$ болса, онда $\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)$

A) $-\frac{1}{\sqrt{15}}$
B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
C) $\frac{3}{\sqrt{15}}$
D) $\frac{1}{\sqrt{15}}$
E) 1

60. $\vec{a}=\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$ және $\vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңдар.

A) 11
B) 21
C) 0
D) 3
E) -21

61. $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ және $\vec{b}=\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңдар.

A) 18
B) 21
C) 0
D) 3
E) -21

62. $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ және $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}+4\vec{k}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңдар.

A) 18
B) 21
C) 0
D) 5
E) -21

63. $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ мен $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ векторларының векторлық көбейтіндісін табыңдар.

A) $a_1b_1\vec{i}+a_2b_2\vec{j}+a_3b_3\vec{k}$

B) $(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}+(a_3+b_3)\vec{k}$

C) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

D) $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

E) $\begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{i} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$

64. $\vec{a}=(2;-1;3)$; $\vec{b}=(1;-2;2)$ векторларының векторлық көбейтіндісі:

A) $(4;-1;-3)$

B) $(1;4;-3)$

C) $(-1;2;3)$

D) $(-4;1;3)$

E) $(-4;-1;3)$

65. Егер $\left|\vec{a}\right|=2$ және $\left|\vec{b}\right|=5$ олардың арасындағы бұрыш 120^0 болса, онда осы векторлардың векторлық көбейтіндісін есептеңдер.

A) $4\sqrt{3}$

B) $5\sqrt{3}$

C) $2\sqrt{5}$

D) $3\sqrt{3}$

E) $3\sqrt{2}$

66. $\vec{a}=\vec{j}-\vec{k}$ мен $\vec{b}=-\vec{i}-\vec{j}$ векторларының векторлық көбейтіндісі:

A) $-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

B) $\vec{i}-\vec{j}$

C) $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

D) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

E) $\vec{j}+\vec{k}$

67. Коллинеар $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін табыңдар.

A) $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

B) $2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

C) $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

D) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

E) 0

68. Төбелері $A(1;2;3)$, $B(-2;2;3)$, $C(1;-2;3)$ нүктелерінде жатқан үшбұрыштың ауданын табыңдар.
A) 6
B) –5
C) –6
D) 4
E) 2
69. Төбелері $A(1;2;1)$, $B(2;3;0)$, $C(1;-2;4)$ нүктелерінде жатқан үшбұрыштың ауданын табыңдар.
A) 16
B) 13
C) 26
D) $\frac{\sqrt{26}}{2}$
E) $\sqrt{26}$
70. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына құрылған параллелограмның ауданы:
A) $\vec{a}\vec{b}$
B) $[\vec{a}\vec{b}]$
C) $|\vec{a}x\vec{b}|$
D) $\vec{a}+\vec{b}$
E) $\vec{a}-\vec{b}$
71. $\vec{a}=(-3;0;0)$ және $\vec{b}=(0;-4;0)$ векторларынан құралған параллелограмм ауданын табыңдар.
A) 12
B) –5
C) –6
D) 4
E) 2

72. $\vec{a}=(-1;0;-1)$ және $\vec{b}=(2;-2;-3)$ векторларынан құралған параллелограмм ауданын табыңдар.
A) $\frac{\sqrt{33}}{2}$
B) $\sqrt{33}$
C) 33
D) 31
E) 33/2
73. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларынан құралған параллелограмм ауданын табыңдар, егер $|\vec{a}|=5;\ |\vec{b}|=8$, және олардың арасындағы бұрыш $\varphi=30^0$ болса.
A) 10
B) 20
C) -10

D) -20
E) 25
74. Үш вектордың компланарлық белгісі:
A) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$
B) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=0$
C) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=1$
D) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$
E) $\vec{a}\vec{b}+\vec{c}$ =0
75. Егер $\vec{a}=(1;0;1)$, $\vec{b}=(-1;-1;0)$, $\vec{c}=(2;2;0)$ болса, онда $\left(\vec{a},\ \ \vec{в},\ \ \vec{c}\right)$ есептеңдер.

A) –1
B) 2
C) -2
D) 1
E) 0
76. $\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|=\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right\|$ геометриялық мағынасы:
A) үш вектордың аралас көбейтіндісі
B) үш вектордың векторлық көбейтіндісі
C) екі вектордың скаляр көбейтіндісі
D) параллелепипед көлемі
E) компланар векторлар
77. $\vec{a}=(1;0;0)$, $\vec{b}=(0;1;1)$, $\vec{c}=(0;0;1)$ векторларынан құрылған пирамида көлемін табыңдар.
A) $1/6$
B) 6
C) 1
D) 0
E) 3
78. $\vec{a}=(1;2;0)$; $\vec{b}=(0;4;1)$; $\vec{c}=(1;2;3)$ векторларынан құрылған пирамида көлемін табыңдар.
A) $1/2$
B) $1/3$
C) $2/5$
D) $1/6$
E) 2
79. $\vec{a}=(1;0;0)$, $\vec{b}=(0;1;1)$, $\vec{c}=(0;0;1)$ векторларынан құрылған параллелепипед көлемін табыңдар.
A) $1/6$
B) 6
C) 1
D) 0
E) 3

80. $\vec{a}=(1;2;0)$; $\vec{b}=(0;4;1)$; $\vec{c}=(1;2;3)$ векторларынан құралған пирамида көлемін табыңдар.
A) $1/2$
B) $1/3$
C) $2/5$
D) $1/6$
E) 12
81. $\vec{a}=(1;3;1)$, $\vec{b}=(-2;4;-1)$, $\vec{c}=(2;4;-6)$ векторлары берілген. Олар қандай векторлар екенін анықтаңдар.
A) коллинеар векторлар
B) компланар векторлар
C) компланар емес векторлар
D) перпендикуляр векторлар
E) нөлдік векторлар
82. $\vec{a}=(2;-2;0)$, $\vec{b}=(1;1;1)$, $\vec{c}=(-1;3;0)$ векторларынан құрылған параллелепипедтің көлемін табыңдар.
A) 4
B) 2
C) 1
D) 0
E) 3
83. $\vec{a}=(1;-2;1)$, $\vec{b}=(-1;-1;0)$, $\vec{c}=(3;2;0)$ векторларының аралас көбейтіндісін табыңдар.
A) 4
B) 2
C) 1
D) 0
E) 3
84. Кесіндінің ортасының координаталарын табу формуласы.
A) $x=\dfrac{x_1-x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1-y_2}{2}$
B) $x=\dfrac{x_1\cdot x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1\cdot y_2}{2}$
C) $x=x_1+x_2$; $y=y_1+y_2$
D) $x=x_1-x_2$; $y=y_1-y_2$
E) $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$
85. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласы.
A) $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$
B) $x=\dfrac{x_1+x_2}{1+\lambda}$; $y=\dfrac{y_1+y_2}{1+\lambda}$
C) $x=\dfrac{\lambda x_1}{x_2}$; $y=\dfrac{\lambda y_1}{y_2}$

D) $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

E) $x=\dfrac{x_1\cdot x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1\cdot y_2}{2}$

86. $M(5;1)$ және $N(1;5)$ нүктелері берілген. MN - кесіндісінің орта нүктесінің координатасын табыңдар.
A) $(2;2)$
B) $(-2;-2)$
C) $(3;3)$
D) $(-3;-3)$
E) $(0;0)$

87. $A(2;\,-1;\,3)$ және $B(3;\,2;\,3)$ нүктелерінің ара қашықтығын табыңдар.
A) $\sqrt{11}$
B) $\sqrt{10}$
C) 10
D) 11
E) 12

88. $A(5;\,-3)$ нүктесіне OY осі арқылы симметриялы нүкте
A) $A(-5;\,3)$
B) $A(5;\,3)$
C) $A(3;\,-5)$
D) $A(-3;\,5)$
E) $A(-5;\,-3)$

89. $A(3;\,4)$ нүктесіне $O(0;0)$ координатаның бас нүктесіне симметриялы нүкте
A) $A(-3;\,4)$
B) $A(-3;-4)$
C) $A(3;-4)$
D) $A(4;-3)$
E) $A(-4;\,3)$

90. Параллелограмның үш төбесі берілген $A(2;5;4)$, $B(0;1;0)$, $C(4;1;3)$. Параллелограмның төртінші төбесін табыңдар.
A) $D(5;6;7)$
B) $D(6;5;7)$
C) $D(7;0;3)$
D) $D(3;4;7)$
E) $D(1;2;3)$

91. Үшбұрыш төбелері $A(1;2;3)$, $B(3;2;6)$, $C(-5;6;4)$. A төбесінен жүргізілген AK медианасының ұзындығын табыңдар.
A) 3
B) 5
C) 5
D) $2\sqrt{3}$
E) 6.

92. $A(-3;7)$ және $B(-3;-3)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі:
A) $x+y=3$
B) $x-3=0$
C) $y-3=0$
D) $y+3=0$
E) $x+3=0$
93. $A(1;2)$ және $B(0;3)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі:
A) $y-x+3=0$
B) $y-x-3=0$
C) $x+y-3=0$
D) $y-2x-3=0$
E) $y-2x+3=0$
94. $x=a$ қандай түзудің теңдеуі?
A) Oy осімен параллель түзу
B) Ox осімен параллель түзу
C) Oy осімен перпендикуляр түзу
D) Ox осімен перпендикуляр түзу
E) I және II ширектің биссектрисасы

95. $M(2;-3)$ нүктесі арқылы өтетін және бұрыштық коэффиценті $k=2$ болатын түзу теңдеуі
A) $x-2=2(y-3)$
B) $x+2=2(y+3)$
C) $y+3=2(x-2)$
D) $y-3=-2(x+2)$
E) $y-2=x+3$
96. $Ax+By+C=0$ түзуінің нормальдық векторын анықтаңыз.
A) $\overline{n}=\{A;B\}$
B) $\overline{n}=\{x,y\}$
C) $\overline{n}=\left\{\frac{A}{C};\frac{B}{C}\right\}$
D) $\overline{n}=\{AC;B\}$
E) $\overline{n}=\{A;BC\}$
97. $A(-2;4)$ нүктесінен $4x-3y-5=0$ түзуге дейінгі қашықтықты табыңыз.
A) $d=5$
B) $d=10$
C) $d=1$
D) $d=15$
E) $d=20$
98. $A(1;2)$ нүктесінен $2x-y+3=0$ түзуіне дейінгі қашықтықты табыңыз.
A) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

99. Мына түзулердің қайсысы $y = -3x + 5$ түзуіне перпендикуляр?

A) $y = 3x - 5$

B) $y = 3x + 1$

C) $y = \frac{1}{3}x + 1$

D) $y = -3x + 8$

E) $y = -\frac{1}{3}x - 5$

100. Мына түзулердің қайсысы $y = -\frac{2}{3}x + 5$ түзуіне перпендикуляр?

A) $y = 3x - 5$

B) $y = 3x + 1$

C) $y = x + 1$

D) $y = -3x + 8$

E) $y = \frac{3}{2}x - 1$

101. $x + y - 5 = 0$ түзуінің бұрыштық коэффициентін анықтаңдар.

A) 1

B) 5

C) –1

D) –5

E) 0.

102. $A(3;1)$ нүктесі арқылы өтетін, бұрыштық коэффициенті $k = 2$ болатын түзудің теңдеуі:

A) $y = 2x + 5$

B) $y = -2x + 5$

C) $y = 2x - 5$

D) $y = 2x + 1$

E) $y = 2x - 1$

103. $3y + 5 = 0$ түзуінің бұрыштық коэффициентін табыңдар.

A) 0

B) 3

C) 5

D) $-\frac{5}{3}$

E) $-\frac{3}{5}$
104. $A(3;1)$ және $B(4;2)$ нүктелері арқылы жүргізілген түзудің теңдеуі:
A) $x+y+2=0$
B) $x-y+2=0$
C) $x+y-2=0$
D) $x-y-2=0$
E) $x-y-4=0$.
105. $A(2;5)$ және $B(7;6)$ нүктелері арқылы жүргізілген түзудің бұрыштық коэффициентін тап.
A) 5
B) -5
C) 0
D) $-0,2$
E) $0,2$
106. $A(2;-5)$ нүктесі арқылы $y=3x+5$ түзуіне параллель түзудің теңдеуін жазу керек.
A) $y=5x-10$
B) $y=3x-11$
C) $y=3$
D) $y=-3x+5$
E) $y=-3x$
107. $y=3x+4$ түзуіне перпендикуляр $A(2;3)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуі:
A) $x-3y=0$
B) $x+3y-11=0$
C) $x-y=0$
D) $3x-y+1=0$
E) $x+y=0$.

108. $2x+5y-3=0$ түзуіне $M(2;3)$ нүктесі арқылы өтетін параллель түзудің теңдеуі:
A) $5x+2y$
B) $5y-2x+2=0$
C) $5y+2x-19=0$
D) $5y+2x=0$
E) $x-y-1=0$.
109. $A(2;1)$ және $B(3;1)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің бұрыштық коэффициентін табу керек.
A) $k=1$
B) $k=0$
C) $k=2$
D) $k=-1$
E) $k=-2$.
110. $A(1;-2)$ нүктесінен $3x+4y-4=0$ түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

A) $\frac{5}{9}$
B) 5
C) $\frac{9}{5}$
D) $\frac{9}{4}$
E) 9.
111. $3x-2y=-1,\ x+4y=2$ түзулердің қиылысу нүктесі
A) $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$
B) $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$
C) $\left(\frac{1}{2};-1\right)$
D) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$
E) $\left(0;\frac{1}{3}\right)$
112. $4x^2-5y^2=100$ гиперболаның остерін табыңыз.
A) $4;\ \sqrt{5}$
B) $5;\ 4\sqrt{5}$
C) $5;\ 2\sqrt{5}$
D) $10;\ 4\sqrt{5}$
E) $10;\ \sqrt{5}$

113. Центрі $(5;3)$ болатын, радиусы $R=4$ тең шеңбердің теңдеуі.
A) $(x+5)^2+(y+3)^2=16$
B) $(x-5)^2+(y-3)^2=4$
C) $(x-5)^2+(y-3)^2=16$
D) $(x+5)^2+(y+3)^2=4$
E) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=16$
114. $y^2=4x$ параболасының фокусын табыңдар.
A) $F(4;0)$
B) $F(2;0)$
C) $F(-4;0)$
D) $F(-2;0)$
E) $F(1;0)$
115. $y^2=4x$ параболаның директрисасының теңдеуін тап.
A) $x-1=0$
B) $x+1=0$

C) $x+2=0$
D) $x-2=0$
E) $x+4=0$

116. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ гиперболаның асимтоталарының теңдеуін тап.

A) $y=\pm\frac{4}{9x}$

B) $y=\pm\frac{9}{4}x$

C) $y=\pm\frac{3}{2}x$

D) $y=\pm\frac{2}{3}x$

E) $y=\pm x$

117. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ теңдеуімен берілген эллипстің экцентриситеті.

A) $\frac{4}{5}$

B) $\frac{5}{4}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{5}{3}$

E) $\frac{4}{3}$

118. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ теңдеуімен берілген гиперболаның экцентриситеті.

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{5}{3}$

C) $\frac{5}{4}$

D) $\frac{4}{5}$

E) $\frac{4}{3}$

119. Центрі $(-2;4)$ нүктесінде жарты осьтері $a=6;\ b=3$ және болатын эллипстің теңдеуін жазыңдар

A) $\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$

B) $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$

C) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$

D) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$

E) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$

120. Мына $x^2-6y^2-12x+36y-48=0$ қисықты канондық түрге келтіріп, қай түрі екенін анықтаңдар.
A) Эллипс
B) Шеңбер
C) Гипербола
D) Парабола
E) Сфера

121. Мына $x^2-8x+2y+18=0$ қисықты канондық түрге келтіріп, қай түрі екенін анықтаңдар.
A) Эллипс
B) Шеңбер
C) Гипербола
D) Парабола
E) Сфера

122. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболаның асимтоталарының теңдеуін тап.

A) $y=\pm\frac{4}{9}x$

B) $y=\pm\frac{3}{4}x$

C) $y=\pm\frac{3}{2}x$

D) $y=\pm\frac{2}{3}x$

E) $y=\pm x$

123. $Ax+By+D=0$ – қандай жазықтықты өрнектейді?
A) OZ осіне параллель
B) XOY жазықтығына параллель
C) OX осіне параллель
D) OY осіне параллель
E) OY осіне перпендикуляр

124. $A(2;2;-1)$ нүктесінен $2x+10y-11z-10=0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңыз.
A) $7/5$
B) 1
C) $5/3$
D) 20
E) 8

125. $x+3y-4=0$ түзуін нормальдық түрге келтіру керек.

A) $\frac{2}{\sqrt{15}}x+\frac{3}{\sqrt{20}}y-\frac{1}{\sqrt{10}}=0$

B) $\frac{3}{\sqrt{18}}x+\frac{13}{\sqrt{30}}y+\frac{2}{\sqrt{10}}=1$

C) $\frac{1}{\sqrt{25}}x-\frac{4}{\sqrt{20}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=2$

D) $\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{4}{\sqrt{10}}=0$

E) $x+3y-1=0$

126. $4x+3y-10=0$ түзуін нормальдық түрге келтіру керек.

A) $\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2=0$

B) $\frac{3}{\sqrt{18}}x+\frac{13}{\sqrt{30}}y+\frac{2}{\sqrt{10}}=1$

C) $\frac{1}{\sqrt{25}}x-\frac{4}{\sqrt{20}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=2$

D) $\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{4}{\sqrt{10}}=0$

E) $x+3y-1=0$

127. Берілген $2x-3y+z-4=0$ жазықтықтың кесіндідегі теңдеуін көрсетіңіз.

A) $\frac{x}{2}+\frac{y}{\frac{4}{3}}+\frac{z}{4}=1$

B) $\frac{x}{\frac{1}{2}}-\frac{y}{\frac{1}{3}}+\frac{z}{1}=1$

C) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-\frac{4}{3}}+\frac{z}{4}=1$

D) $\frac{x}{2}+\frac{y}{\frac{4}{3}}+4z=1$

E) $\frac{x}{2}+\frac{y}{-\frac{4}{3}}+\frac{z}{4}=1$

128. Берілген $x-3y+z-2=0$ жазықтықтың кесіндідегі теңдеуін көрсетіңіз.

A) $\frac{x}{2}+\frac{y}{\frac{4}{3}}+\frac{z}{4}=1$

B) $\frac{x}{\frac{1}{2}}-\frac{y}{\frac{1}{3}}+\frac{z}{1}=1$

C) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-\frac{4}{3}}+\frac{z}{4}=1$

D) $\frac{x}{2}+\frac{y}{\frac{4}{3}}+4z=1$

E) $\frac{x}{2}+\frac{y}{-\frac{2}{3}}+\frac{z}{2}=1.$

129. $16x-12y+15z+12=0$ жазықтығының OY осімен қиылысу нүктесін табыңыз.
A) $(0;1;0)$
B) $(2;0;0)$
C) $(1;-1;1)$
D) $(1;0;1)$
E) $(3;0;1)$

130. $16x-12y+15z+32=0$ жазықтығының OX осімен қиылысу нүктесін табыңыз.
A) $(0;1;0)$
B) $(-2;0;0)$
C) $(1;-1;1)$
D) $(1;0;1)$
E) $(3;0;1)$

131. $16x-3y+12z+12=0$ жазықтығының OZ осімен қиылысу нүктесін табыңыз.
A) $(0;1;0)$
B) $(2;0;0)$
C) $(1;-1;1)$
D) $(1;0;1)$
E) $(0;0;-1)$

132. $M_0(-1;0;-2)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{N}=\{1;2;4\}$ векторына перпендикуляр жазықтық теңдеуін табыңыз.
A) $5x+3y-2z+1=0$
B) $x+2y+4z+9=0$
C) $2x+3y+5z-4=0$
D) $7x-3y+z-3=0$
E) $4x+3y-z+6=0$

133. $2x+3y-4z+1=0$ жазықтықтының нормаль векторы?
A) $\{-3;2;0\}$
B) $\{4;0;2\}$
C) $\{-3;2;-4\}$
D) $\{4;3;2\}$
E) $\{2;3;-4\}$

134. $3x+2y+z=1$ және $2x-y+3z=2$ жазықтықтарының арасындағы бұрышты табу керек.
A) 45^0
B) 60^0
C) 90^0

D) 30^0
E) 120^0
135. $2x + y - 3z - 2 = 0$ жазықтығының нормаль векторын табу керек.
A) (-2; 2; 3)
B) (2; -1; 3)
C) (2; 1;-3)
D) (2; -1; 0)
E) (2; 1; 3)
136. $M_1(1;-3;4)$, $M_2(0;-2;-1)$, $M_3(1;1;-1)$ нүктелері арқылы жүргізілген жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.
A) $15x - 5y - 4z - 14 = 0$
B) $15x + 5y + 4z + 14 = 0$
C) $15x + 5y + 4z - 14 = 0$
D) $15x - 5y + 4z + 14 = 0$
E) $15x - 5y - 4z + 14 = 0$

137. $M_1(5;1;0)$, $M_2(1;2;0)$, $M_3(2;-2;3)$ нүктелері арқылы жүргізілген жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.
A) $x - y + z = 0$
B) $x - 2y + 3z = 0$
C) $3x - 2y + 3z - 2 = 0$
D) $x + 4y + 5z - 9 = 0$
E) $x - 4y - 5z = 0$
138. $M(0;1;-3)$ нүктесінен өтетін $\vec{a} = (1;2;-1)$ векторына параллель түзудің тендеуін көрсетіңдер.
A) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-1}$
B) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-3}$
C) $x + 2(y-1) - (z+3) = 0$
D) $x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{1}$
E) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{2}$
139. $M_1(1;-2;1)$ және $M_2(3;1;-1)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің канондық теңдеуі:
A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$
B) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$
C) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$
D) $\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{3}$
E) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$

140. $3x - y + 2z = 0$ жазықтығына $A(2;3;-4)$ нүктесі арқылы перпендикуляр түзудің теңдеуі:

A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = z-3$

B) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{2}$

C) $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$

D) $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}$

E) $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{4}$

141. $4x - y + 3z = 0$ жазықтығына $A(1;3;4)$ нүктесі арқылы перпендикуляр түзудің теңдеуін жазу керек.

A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = z-3$

B) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{3}$

C) $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$

D) $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}$

E) $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{4}$

142**.** $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығының және $(p_1,\ p_2,\ p_3)$ векторының параллельдік шарты...

A) $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$

B) $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D = 0$

C) $Ap_1 = Bp_2 = Cp_3$

D) $Ap_1 + Bp_1 + Cp_1 = 0$

E) $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D = 1$

143. $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығымен $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ түзуінің параллельдік шарты.

A) $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{c}{n}$

B) $A = l;\ B = m;\ C = n$

C) $Al = Bm = Cn$

D) $Al + Bm + Cn = 0$

E) $Al - Bm - Cn = 0$

144. $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығымен $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ түзуінің перпендикулярлық шарты.

A) $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$

B) $A=l;\ B=m;\ C=n$

C) $Al=Bm=Cn$

D) $Al+Bm+Cn=0$

E) $Al-Bm-Cn=0$

145. Эллипстік параболоидтың канондық теңдеуі:

A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

B) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$

C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

D) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$

E) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$

146. Гиперболалық параболоидтың канондық теңдеуі:

A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

B) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$

C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

D) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$

E) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$

147. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ теңдеуімен анықталған бетті …деп атайды

A) сфера

B) бір қуысты гипербалоид

C) екі қуысты гиперболоид

D) эллипсоид

E) эллипстік параболоид

148. $x^2+y^2+z^2=1$ теңдеуімен анықталған бетті …деп атайды

A) сфера

B) бір қуысты гипербалоид

C) екі қуысты гиперболоид

D) эллипсоид

E) эллипстік параболоид

149. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ теңдеуімен анықталған бетті …деп атайды

A) сфера

B) бір қуысты гипербалоид

C) екі қуысты гиперболоид
D) эллипсоид
E) эллипстік параболоид

150. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ теңдеуімен анықталған бетті …деп атайды

A) сфера
B) бір қуысты гипербалоид
C) екі қуысты гиперболоид
D) эллипсоид
E) эллипстік параболоид

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). - Алматы: «Иль-Тех-Кітап». ЖШС, 2000. - 744 б.
2. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. – Алматы: ҚазТУ, 2000. – 254 б.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М., Наука, 1980.

4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. –М. Наука, 1975.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Высшая алгебра. –М. Наука, 1981.
6. С. Аяпбергенов. Аналитикалық геометрия – Алматы, 1971
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть1, 2. М., Высшая школа, 1998
8. Шипачев В.С. Основы высшей математики, Высшая математика, 1989
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М. ФМЛ 1982
10. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии М, Наука, 1969.
11. **Сборник индивидуальных задании по высшей математике под редакцией Рябушка А.П. Минск, 2001**
12. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.К. Жоғары математика. - Алматы: КБП, 2004. - 409 б.
13. Қабдықайыров Қ. Жоғары математика. - Алматы: РБК, 1993.
14. Қасымов Қ.А., Қасымов Е.А. Жоғары математика курсы. - Алматы: Санат, 1994.

МАЗМҰНЫ

Жоспар 2011 ж., реті.

КОЩАНОВА ГУЛАШ РАХМЕТҚЫЗЫ

Алгебра және геометрия

Оқу құралы

Редакторы

Басуға қол қойылды
Тираж _500_ дана
Көлемі _____ оқу-баспа т.
Бағасы _____ тенге

Пішіні 60 х 84 1/16
№ 1 типографиялық қағаз
Тапсырыс _____

«Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті» РМҚК, Редакция-баспа бөлімі
Ақтау, 27 шағын аудан