МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КАСПИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕХНОЛОГИЙ И ИНЖИНИРИНГА ИМЕНИ Ш.ЕСЕНОВА

КАФЕДРА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

КОШАКАЕВА Ф.М.

ПРАКТИКУМ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

АКТАУ 2011

УДК 519.1
55К22.1
К76

Практикум по дискретной математике: учебное пособие / Ф.М. Кошакаева – Актау, Каспийский государственный университет технологий и инжиниринга им. Ш.Есенова, 2011.- 79 с.
ISBN978-601-226-089-2

Учебное пособие соответствует программе курсов «Математическая логика и дискретная математика» специальности «Математика» и «Дискретная математика» специальности ВТиПО Каспийского государственного университета технологий и инжиниринга им. Ш.Есенова

Рецензенты : доктор технических наук, кандидат физико-математических наук,
профессор Туркпенбаева Б. Ж.
кандидат физико-математических наук,
профессор Утебаев М. Н.
кандидат физико-математических наук,
доцент Уразмагамбетова Э.У.

Рекомендовано к изданию решением учебно-методического Совета КГУТиИ им. Ш.Есенова

ISBN-978-601-226-089-2

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует большое количество руководств по дискретной математике, предназначенных для студентов высших учебных заведений. Но ощущается потребность в пособии, в котором был бы собран материал для практических занятий, соответствующий типовой программе для студентов специальностей «Вычислительная техника и программное обеспечение», «Математика» .

В первой главе данного учебного пособия кратко изложены основные понятия дискретной математики: элементы теории множеств, элементы комбинаторики, элементы логики, теория графов, кодирование. Каждый раздел содержит достаточное количество задач для закрепления темы.

Во второй главе представлены контрольные задания для студентов заочного отделения и методические указания по решению этих заданий на примере конкретного варианта.

В третьей главе даны примерные варианты экзаменационных вопросов, представленных в виде тестовых заданий.

1 ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И СРСП ДЛЯ СТУДЕНТОВ ДНЕВНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

1.1 Введение в теорию множеств.

Множество — это совокупность объектов, называемых его элементами. *Подмножеством* множества *B* называется множество *A*, все элементы которого принадлежат *B*. Этот факт обозначается так: $A \subset B$. *Объединением* множеств *A и B* называется множество $A \cup B = \{x | x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\}$. *Пересечением* множеств *A и B* называется множество $A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } \quad x \in B\}$. *Дополнением* множества *B до A* называется множество $A \setminus B = \{x | x \in A \quad \text{и} \quad x \notin B\}$. *Декартовым произведением* двух множеств *A* и *B* называется множество всех упорядоченных пар, в котором первый элемент каждой пары принадлежит множеству *A*, а второй принадлежит множеству *B*. Обозначается $A \times B = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}$. Количество элементов множества называют *мощностью* множества *A*, обозначают $|A|$. Множества, содержащие одинаковое количество элементов, называются *равномощными*.

Теорема Пусть *A* и *B*- конечные множества. Тогда справедлива формула

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Теорема Если $A_1, A_2, \dots A_n$ - некоторые конечные множества, то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|) +$$
$$+ \quad (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Диаграммы Венна, называемые также *кругами Эйлера*, иллюстрируют операции над множествами:

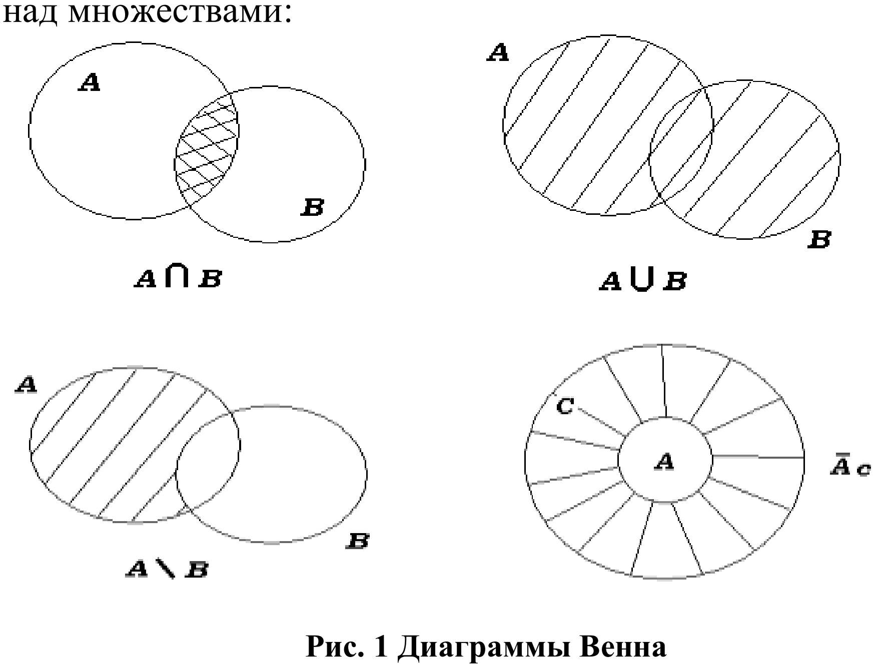


Рис. 1 Диаграммы Венна

Бинарным отношением между множествами A *и* B называется подмножество R в $A \times B$. Если $A = B$, то говорят, что R — отношение на A. Отношение R^* называют *замыканием отношения* R относительно свойства P, если

1) R^* обладает свойством P;
2) $R \subset R^*$;
3) R^* — подмножество любого другого отношения, содержащего R и обладающего свойством P.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется *отношением эквивалентности. Классом эквивалентности* элемента $x \in A$ является подмножество $E_x = \{z \in A: zRx\}$.

Функцией, определенной на множестве A со значениями в B, называется отношение f между A *и* B, при котором каждому элементу множества A ставится в соответствие единственный элемент из B. Запись $f: A \to B$ обозначает функцию из множества A в множество B. Множество A при этом называют областью определения f, а, B — областью значений функции f. *Множеством значений* функции f называют подмножество в B: $f(A) = \{f(x): X \in A\}$.

Функция $f: A \to B$ называется *инъективной* (*или взаимно однозначной*), если $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ *для* всех $a_1, a_2 \in A$. Функция f: $A \to B$ называется *сюръективной*, если ее множество значений совпадает с областью значений. Иначе говоря, если для каждого $b \in B$ найдется такой $a \in A$, что $f(a) = b$. Функцию, которая как инъективна, так и *сюръективна*, называют *биекцией* или *биективной*.

Принцип Дирихле утверждает, что если $f: A \to B$ - функция, отображающая конечное множество A в конечное множество B , причем $|A| > |B|$, то, по крайней мере, одно из значений f встретится более одного раза. Если $|A| > k|B|$ для некоторого натурального k, то одно из значений функции f повторится, по крайней мере, $k+1$ раз.

Набор упражнений 1.1

1. Перечислите элементы следующих множеств:
$A=\{x: x \in Z, 10 \le x \le 17\}$;
$B=\{x: x \in Z, x^2 < 24\}$;
$C=\{x: x \in Z, 6x^2+x-1=0\}$,
$D=\{x: x \in R, 6x^2+x-1=0\}$.

2. Пусть $U=\{p, q, r, s, t, u, v, w\}$-универсальное множество, а $A=\{p, q, r, s\}$, $B=\{r, t, v\}$, $C=\{p, s, t, u\}$. Найдите элементы следующих множеств:

1) $B \cap C$; 2) $A \cup C$; 3) $\overline{C}$; 4) $A \cap B \cap C$; 5) $A \overline{\cup} B$;
6) $(A \cup B) \cap (A \cap C)$; 7) $B|C$.

3. Рассмотрим подмножества целых чисел
$A = \{3n: n \in Z, n \ge 4\}$,
$B = \{2n: n \in Z\}$,

$C = \{n : n \in Z, n^2 \le 100\}$.

Используя операции на множествах, выразить следующие подмножества через *A, B, C*:

1) множество всех нечетных целых чисел;

2){-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10};

3){-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9};

4)$\{6n : n \in Z, n \ \ge 2\}$.

4. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

1)$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2) $A \cap (B \cup (A \cap C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3) $A \cup (B \cap (A \cup C)) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

6) $(A \setminus B) \setminus C =(A \setminus C) \setminus B$.

5. Пусть Z универсальное множество всех целых чисел. Z_2 - множество всех четных целых чисел, A={x/ x<10}. Опишите словесно множества: $\overline{Z_2}$, $\overline{A}$, $Z_2 \cap A$, $Z_2 \cup A$.

6. 27 учащихся класса 8 учащихся участвовали в танцевальных номерах на концерте, а 11 пели в хоре; 4 человека и пели и танцевали. Сколько учащихся класса не приняли участия в художественной самодеятельности?

7. Студенты первого курса, изучающие информатику в университете, могут посещать и дополнительные дисциплины. В этом году 25 из них предпочли изучать бухгалтерию, 27 выбрали бизнес, а 12 решили заниматься туризмом. Кроме того, было 20 студентов, слушающих курс бухгалтерии и бизнеса, пятеро изучали бухгалтерию и туризм, а трое — туризм и бизнес. Известно, что никто из студентов не отважился посещать сразу три дополнительных курса. Сколько студентов посещали, по крайней мере, один дополнительный курс? Сколько из них были увлечены только туризмом?

8. Из 20 спортсменов класса - 10 лыжников, 9 гимнастов и 11 легкоатлетов. 6 занимаются легкой атлетикой и гимнастикой, 7- лыжами и легкой атлетикой, 6-лыжами и гимнастикой. Всеми тремя видами спорта занимаются 5 спортсменов. Сколько учащихся занимаются только лыжами, только легкой атлетикой, только гимнастикой? Сколько учащихся занимаются другими видами спорта?

9. Из 29 учащихся класса 18 не пожелали принять участие ни в математической, ни в химической, ни в физической олимпиаде. В математической олимпиаде приняли участие 8 учащихся, в физической-4, в химической -4, только в математической-3, только в физической -1, только в химической-2. Во всех олимпиадах не принял участие никто. Могли ли проходить в одно и то же время математическая и химическая олимпиады? Химическая и физическая?

10. Из 100 студентов английский язык знают 28 студентов, немецкий-30, французский- 42, английский и немецкий-8, английский и французский -10, немецкий и французский -5, а все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?

11. Определите, какие из следующих отношений на множестве людей рефлексивны, симметричны или транзитивны:

1) «...имеет тех же родителей, что и...»;
2) «...является братом...»;
3) «... старше или младше, чем...»;
4) «... не выше, чем...».

12. Установите, какими свойствами обладает каждое из отношений (таблица 1):

Таблица 1

Название отношения	**Множество X**	**Название отношения**	**Множество X**
а) делится на	натуральных чисел	б) иметь общую точку	прямых на плоскости
в) $<$	действительных чисел	г) $\leq$	действительных чисел
д)быть дочерью	жителей Москвы	е)быть однофамильцем	учащихся данного вуза
ж) жить этажом выше	жильцов одного дома	з)быть подмножеством	Подмножеств трехэлементного множества

13. Для каждого из следующих отношений на множестве натуральных чисел N опишите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям:

$R=\{(x,y):2x+y=9\}$;

$S=\{(x,y):x+y<7\}$;

$T=\{(x,y):y=x^2$.

14. Пусть R — отношение на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$, определяемое условием: uRv тогда и только тогда, когда $u+v$ - нечетное число. Представьте R каждым из способов:

1) как множество упорядоченных пар;
2) в графической форме;
3) в виде матрицы.

15. Определите, какие из приведенных ниже отношений на Z являются рефлексивными, симметричными, а какие - транзитивными?
1) «$x+y$ — нечетное число»;
2) «$x+y$ — четное число»;
3) «xy — нечетное число»;
4) «$x + xy$ — четное число».
16. Перечислите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям, заданным на множестве $\{x : x \in Z ,1 \le x \le 12\}$.
1) $R = \{\{x, y) : xy = 9\}$;
2) $S = \{(x, y): 2x = 3y\}$;
3) замыкание R по транзитивности;
4) замыкание S по транзитивности.
17. Ниже определены отношения на множествах. Опишите на словах замыкание по транзитивности в каждом случае:
1) «x на один год старше, чем y» на множестве людей;
2) $x = 2y$ на множестве N натуральных чисел;
3) $x < y$ на множестве R вещественных чисел;
4) «x является дочерью y» на множестве женщин.
18. Найдите замыкания по рефлексивности, по симметричности и по транзитивности отношения $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d,a)\}$, заданного на множестве $\{a, b, c, d\}$.
19. Для каждого из следующих отношений эквивалентности на данном множестве A опишите блоки, на которые разбивается множество A:
1) A — множество книг в библиотеке, а R определяется условием: xRy, тогда и только тогда, если цвет переплета x совпадает с цветом переплета y;
2) $A = Z$, R задается условием: xRy тогда и только тогда, когда $x - y$ — четное число;
3) A — множество людей, xRy, если x имеет тот же пол, что и y;
4) $A = R^2$, R задается по правилу: $(a, b)\ R\ (c, d)$ в том случае, когда $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.
20. Отношение R на множестве Z определяется так: xRy в том и только в том случае, когда $x^2 — y^2$ делится на 3. Покажите, что R является отношением эквивалентности и опишите классы эквивалентности.
21. Какие из нижеперечисленных отношений между множествами A и B являются функциями, определенными на A со значениями в B?
1) $\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$;
2) $\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$;
3) $\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\}$;
4) $\{(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)\}$.
Какие из найденных функций инъективны, а какие сюръективны ?
22. 1) Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы какое-то число на ней выпало, по крайней мере, дважды?
2) Сколько раз нужно бросить две игральные кости, чтобы с гарантией можно было утверждать: сумма выпавших очков появится, по крайней мере, дважды?

3) Сколько карт необходимо вытащить из стандартной колоды в 52 карты, чтобы обязательно попались хотя бы две одной масти?
4) Сколько карт необходимо вытащить из стандартной колоды в 52 карты, чтобы обязательно попались хотя бы четыре одной масти?
23. Известно, что в одном селе проживает 79 семей, в каждой из которых по 2 ребенка.
1) Покажите, что найдется, по крайней мере, две семьи, в которых совпадают месяцы рождения обоих детей, т. е., если в первой семье дети родились в январе и мае, то и во второй — в январе и мае.
2) Докажите, что по крайней мере у шестерых детей имена начинаются с одной и той же буквы.
24. Пусть S={1, 2, . . . , 20}.
1) Какое наименьшее количество четных чисел необходимо взять из множества S, чтобы, по крайней мере, два из них в сумме давали 22?
2) Покажите, что если взять 11 элементов из множества S, то, по крайней мере, одно из выбранных чисел будет делить какое-то из оставшихся в выборке. (Указание: используйте функцию f , которая сопоставляет каждому целому числу его наибольший нечетный делитель. Например, $f(12) = 3$.).
25. В автобусе едет 15 людей. Покажите, что, по крайней мере, у двоих из них день рождения в одном и том же месяце.
26. Покажите, что какие бы пять цифр из 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 мы ни выбрали, найдутся хотя бы две из них, сумма которых равна 9.

1.2 Элементы комбинаторики

Правило умножения:

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если

$1^{ое}$ действие можно выполнить	n_1 способами
$2^{ое}$	- n_2 способами
$3^{е}$	- n_3 способами
………………………………………………	
$k^{е}$	- n_k способами,

то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 n_2 .. n_k$ способами.

Правило суммы:

Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор «либо A либо B» можно осуществить m+n способами(ни один из способов выбора объекта A не совпадает с каким-либо способом объекта B). Если такие совпадения есть, то получится $m+n-k$ способов выбора, k - число совпадений.

Пусть дано множество из n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется *размещением* из n элементов по k элементов. Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k. $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ или $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Число повторений с размещениями из n элементов по k элементов обозначается $\overset{-k}{An}$, $\overset{-k}{An} = n^k$.

Размещения из n элементов по n элементов называются *перестановками*. P_n - число перестановок из n элементов, $P_n = n!$. Пусть $k_1, k_2, \ldots k_m$ - целые неотрицательные числа, причем $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$. Число различных перестановок, которые можно составить из n элементов, среди которых имеются

k_1 элементов 1-го типа

k_2 элементов 2-го типа

……………………………….

k_m элементов m-го типа

равно $\overline{P}_n(k_1, k_2, \ldots k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$.

Пусть дано множество из n элементов. Каждое его подмножество, состоящее из k элементов, называется *сочетанием* из n элементов по k элементов. C_n^k - число сочетаний из n элементов по k элементов, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Число различных сочетаний из n элементов по k элементов с повторениями равно $\overset{-k}{Cn} = C_{n+k-1}^k$

Набор упражнений 1.2

1. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5. можно составить из цифр 0,1,3,5,7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

2. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0,1,2,3,4,5 , содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

3. Из 10 теннисисток и 6 теннисистов составляются 4 смешанные пары. Сколькими способами это можно сделать?

4. 5 человек вошли в лифт на 1-ом этаже девятиэтажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах?

5. В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь автоматически открывается, если в определенной последовательности нажать 4 кнопки из имеющихся 12. Некто, не зная кода, стал наудачу набирать различные комбинации из 4-х цифр. Какое наибольшее число попыток ему надо осуществить, чтобы дверь открылась?

6. Группе из пяти сотрудников выделено три путевки. Сколько существует способов распределения путевок, если:

1) все путевки различны; 2) все путевки одинаковы.

7. Автомобильные номера данного региона состоят из трех цифр (всего 10 цифр) и трех букв алфавита X={A,B,C,D,E,H,K,M,O,P,T,X,Y}.Сколько автомобилей может быть занумеровано различными номерами?
8. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколько существует способов выделения одного сержанта и трех солдат для патрулирования?
9. Сколько различных перестановок образуется из следующих слов:
1) зебра; 2) баран; 3) водород; 4) абракадабра?
10. В комнате имеется 7 стульев. Сколькими способами можно разместить на них 3 гостя?
11. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник произведений Д.Лондон, располагая их в произвольном порядке? Сколькими способами можно расставить, располагая их так, чтобы I,V,IX тома не стояли рядом (в любом порядке)?
12. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если числа должны быть четными (цифры могут повторяться)?
13. 4 пианиста, 5 скрипачей и 6 баянистов участвуют в конкурсе. Сколькими способами жюри может отобрать по три победителя в каждой номинации?
14. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов, при которых в эту «пятерку» попадут одни девушки? Сколько существует способов, при которых в эту «пятерку» попадут 1 юноша и 4 девушки?
15. Сколькими способами можно упорядочить множество A ={8,9,10,…15} так, чтобы каждое четное число имело четный номер?
16. Владимир хочет пригласить в гости троих из семи своих лучших друзей. Сколькими способами он может выбрать приглашенных?
17. В четырехзначном числе пропущены (не видны) две цифры. Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя пропущенные цифры?
18. У человека есть пять пиджаков, восемь рубашек и семь галстуков. Сколько различных костюмов можно составить из этих предметов?
19. У женщины в шкафу висит шесть платьев, пять юбок и три блузки. Сколько разных нарядов она может составить из своей одежды?
20. В холодильнике стоит мороженое шести разных наименований. На десерт можно взять одну, две или даже три порции мороженого сразу. Сколько возможностей есть у вас для различных десертов?
21. Перевертыш — это многозначное число, которое не поменяет своего значения, если все его цифры записать в обратном порядке. Сколько существует шестизначных перевертышей? А сколько семизначных?
22. Сколько четырехзначных чисел, не превосходящих 6 000, можно составить, используя только нечетные цифры?
23. Пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из шести символов. Первые два из них — строчные буквы латинского алфавита (всего 26 букв), а оставшиеся четыре могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько можно придумать различных паролей?

24. В небольшой фирме восемь человек работают на производстве, пятеро — в отделе сбыта, и трое — в бухгалтерии. Для обсуждения новой продукции было решено пригласить на совещание шестерых работающих. Сколькими способами это можно сделать, если

1) необходимо пригласить по два представителя от каждого отдела;

2)необходимо пригласить, по крайней мере, двоих представителей производства;

3) необходимы представители каждого из трех отделов?

25. 1) в разложении $(x^k + y^P)^n$ найти члены, содержащие x^α ;

а) $k = 2, p = 1, n = 10, \alpha = 4$; б) $k = 2, p = 1, n = 10, \alpha = 14$; в) $k = 2, p = 1, n = 10, \alpha = 12$;

2) в разложении $(x + y + z + w)^m$ найти члены, содержащие x^γ.

а) $m = 7, \gamma = 5$; б) $m = 7, \gamma = 4$; в) $m = 8, \gamma = 5$.

1.3 Элементы логики

Аргументом называют совокупность предложений, про одно из которых, называемое заключением, говорится, что оно следует из остальных, называемых посылками (посылка, в частности, может быть единственной). Аргумент называется *правильным,* если из конъюнкции его посылок следует заключение.

Чтобы установить, является ли аргумент правильным, достаточно:

1) формализовать все посылки и заключение;

2) составить конъюнкцию формализованных посылок;

3)проверить, следует ли из полученной формулы формула, соответствующая заключению. Если следует, то аргумент - правильный, если же нет, то аргумент - неправильный.

Таблица, содержащая всевозможные интерпретации формулы и соответствующие этим интерпретациям значения формулы, называется *истинностной таблицей* формулы.

Правило приведения формул к СДНФ.

Для того чтобы привести формулу, не являющуюся тождественно ложной, к СДНФ, достаточно:

1) привести ее к какой-нибудь ДНФ;

2) удалить члены дизъюнкции, содержащую переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся);

3) из одинаковых членов каждой дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;

4) из одинаковых членов каждой конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;

5) если в какой-нибудь конъюнкции не содержится переменной из числа переменных, входящих исходную формулу, добавить к этой конъюнкции член $\neg X \vee X$ и применить закон распределительности конъюнкции относительно дизъюнкции;

6) если в полученной дизъюнкции окажутся одинаковые члены, удалить все кроме одного. Полученная формула и является СДНФ данной формулы.

Аналогично составляется *правило приведения формул к СКНФ.*

Обобщим понятие истинностной функции. Будем называть переменную *булевой*, если она принимает два значения, которые обозначим символами 0 и 1.

Булевы переменные можно комбинировать, используя операции $\wedge$, $\vee$, $\overline{\ }$ для создания *булевых выражений. Булевой функцией* от *n* булевых переменных $p_1, p_2, ..p_n$ называется такая функция *f*: $B^n \to B$, что $f(p_1, p_2, ..p_n)$ - булево выражение.

Законы булевой алгебры:

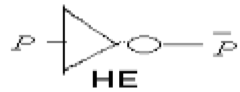
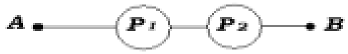
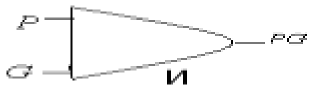
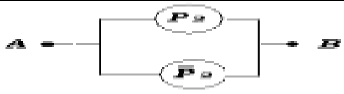
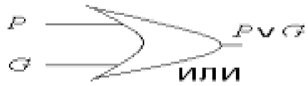
1. $X \equiv X$ - это *закон тождества.*
2. $X \wedge \neg X \equiv л$ - это *закон противоречия.*
3. $\neg(\neg X) \equiv X$ - это *закон двойного отрицания*
4. $X \vee \neg X \equiv и$ - это *закон исключенного третьего.*
5. $X \wedge X \equiv X$, $X \vee X \equiv X$ - это *законы идемпотентности.*
6. $X \wedge Y \equiv Y \wedge X$ - это *законы коммутативности.*
7. $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$, $(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$ - это *законы ассоциативности.*
8. $X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$, $X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ - это *законы дистрибутивности.*
9. $\neg(X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$, $\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$ - это *законы де Моргана.*
10. $X \wedge (X \vee Y) \equiv X$, $X \vee (X \wedge Y) \equiv X$ - это *закон поглощения.*
11. $X \to Y \equiv \neg Y \to \neg X$ - это *закон контрапозиции.*
12. $(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y) \equiv Y$ $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \equiv Y$ - это *законы склеивания*
13. $(X \leftrightarrow Y) \equiv (X \to Y) \wedge (Y \to X)$ - это *закон исключения эквиваленции.*
14. $X \wedge и \equiv X$, $X \vee л \equiv X$.
15. $X \wedge л \equiv л$, $X \vee и \equiv и$.

Истинностные функции не единственно возможные интерпретации булевых функций. Рассмотрим три важнейшие интерпретации булевых функций (таблица 2).

Функциональные схемы можно реализовать в виде электронных устройств с конечным числом входов и выходов, причем на каждом входе и выходе могут появляться только два значения. Такие устройства собраны из *функциональных элементов,* генерирующих основные булевы операции. Стандартные обозначения основных функциональных элементов показаны в таблице 2. На рисунке 2 показан дополнительный функциональный элемент НЕ-И.

Рис.2

Таблица 2

Булева функция	Интерпретация булевых функций на языке		
	алгебры высказываний	переключательных схем	функциональных схем
0	*л*	разомкнуто	сигнал низкого напряжения
1	*и*	замкнуто	сигнал высокого напряжения
$\overline{P}$	$\neg P$	инверсный контакт	
PG	$P \wedge G$		
$P \vee G$	$P \vee G$		

Переключательная схема - это устройство из переключателей (контактов) и проводов, связывающих два полюса - вход и выход. Для конкретности рассматриваются переключательные схемы, представляющие собой участок электрической цепи, по которому проходит ток от источника *А* к потребителю *В*. Между источником и потребителем может быть замыкающий и размыкающий цепь контакт либо несколько контактов, соединенных последовательно или параллельно.

Если между источником и потребителем тока поместить два контакта p_1 и p_2, соединенные последовательно, то цепь замкнута, когда оба контакта замкнуты, и разомкнута, когда хотя бы один из них разомкнут. Конъюнкция переменных X_1 и X_2 , поставленных в соответствие контактам p_1 и p_2 истинна (1), когда обе переменные принимают значение *и*, и ложна (0), когда хотя бы одна из них принимает значение *л*. Таким образом, формуле $X_1 \wedge X_2$ соответствует последовательное соединение контактов.

Если контакты p_1 и p_2 соединены параллельно, то цепь замкнута, когда хотя бы один из контактов замкнут, и разомкнута, когда оба они разомкнуты. Такой схеме соответствует формула $X_1 \vee X_2$, являющаяся истинной (1),когда хотя бы одна из переменных принимает значение *и*, и ложной (0), когда обе принимают значение *л*.

Если контакты замыкаются и размыкаются одновременно, то они называются *идентичными*. Если один размыкается, когда другой замыкается, то они называются *инверсными*. Идентичные контакты обозначаются одинаково. Инверсный контакту p обозначается $\overline{p}$. Если контакту p поставить переменную X, то очевидно, что контакту $\overline{p}$ будет соответствовать формула $\neg X$: когда переменная X принимает значение *и* (1) - контакт p замкнут, формула $\neg X$ принимает значение *л* (0) - контакт $\overline{p}$ разомкнут, и наоборот.

Установленные соответствия дают возможность описать любую цепь с последовательно или параллельно соединенными контактами формулой логики высказываний (булевой функцией). С другой стороны, любую формулу логики высказываний можно смоделировать в виде переключательной схемы.

Пусть М - некоторое множество, n- неотрицательное целое число.

1. n=0. *0-местным предикатом* на множестве М называется всякое конкретное высказывание *А* об элементах множества М.

2. n>0. *n-местным предикатом* на множестве *М* называется всякая функция *Р* от n переменных, заданная на множестве *М* со значениями во множестве {*и,л*}. Обозначается $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. При этом переменные $x_1,x_2,\ldots,x_n$,
участвующие в записи предиката *Р* называются *предметными переменными*, а множество *М* - предметной областью предиката.

Каждому предикату *Р*, заданному на множестве *М*, соответствует подмножество этого множества, состоящее из тех и только тех элементов множества *М*, которым соответствуют значения *и* предиката *Р*. Это подмножество множества *М* называется *множеством истинности* предиката *Р*. Обозначается: $\overset{\frown}{P}$.

Пусть *Р(х)* -некоторый одноместный предикат на множестве *М*. Выражениями $\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$ обозначаются высказывания (0-местные предикаты), истинностные значения которых определяются следующим образом:

1. $\forall x P(x)$ =*и* тогда и только тогда, когда для любого элемента выполняется *Р(а)=и*;

2. $\exists x P(x)$ =*и* тогда и только тогда, когда существует хотя бы один элемент такой, что *Р(а)=и*.

$\forall$- квантор общности, $\exists$- квантор существования. Кванторы являются двойственными относительно друг друга. *Р(х)* называется областью действия квантора. Переход от формы *Р(х)* к высказыванию $\forall x P(x)$ или к высказыванию $\exists x P(x)$ называется *квантификацией Р(х)*.

Метод математической индукции, доказывает истинность высказывания $\forall n\ P(n)$, определенного на всех натуральных числах $n \in N$, в два этапа:

1. Проверяется истинность $P(n)$ при $n=1$;
2. Из предположения истинности $P(k)$ для $k>1$ доказывается истинность $P(k+1)$.

Формальным доказательством (в теории L) называется конечная последовательность формул $B_1, B_2, \ldots B_k$. Причем каждая формула этой последовательности либо аксиома, либо получена по правилу МР из каких-либо двух предшествующих формул этой последовательности. Формальное доказательство является доказательством своей последней формулы B_k. Формула *В* называется *формально доказуемой*, или *формальной теоремой* теории L, если она имеет формальное доказательство.

Запись $\vdash_L B$ означает: формула *В* формально доказуема в теории *L*.

Условились запись $\vdash B$ читать: формула *B* доказуема или *B* - теорема.

Формальным выводом формулы B из посылок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется конечная последовательность формул $B_1, B_2, \ldots, B_k$ заканчивающаяся формулой B $(B_k = B)$, причем каждая формула этой последовательности или одна из посылок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ или аксиома, или формула, полученная из некоторых двух предшествующих формул этой последовательности по правилу МР. Если существует формальный вывод формулы B из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то формула B называется *формально выводимой* из формул
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ и обозначается $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$ или $\Gamma \vdash B$, где $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ - множество посылок(гипотез).

Аксиомы:

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
3. $A \to (B \to A \wedge B)$ - аксиома введения конъюнкции.
4. $A \wedge B \to A$, 5. $A \wedge B \to B$ - аксиомы удаления конъюнкции.
6. $A \to A \vee B$, 7. $B \to A \vee B$ - аксиомы введения дизъюнкции.
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ - аксиома удаления дизъюнкции.
9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ - аксиома введения отрицания.
10. $\neg\neg A \to A$ - аксиома удаления отрицания.
11. $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$ - аксиома введения эквиваленции.
12. $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$, 13. $(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$- аксиомы удаления эквиваленции.

Правила вывода:

Правило вывода *(R)*- это процедура перехода от двух формул вида $A, A \to B$ к одной формуле вида B для любых двух A и B.

$\dfrac{A,\ A \to B}{B}$ - правило Modus ponens (утверждающий модус (умозаключение))

$A, A \to B$ - посылки, B - заключение.

Набор упражнений 1.3

1. Проверьте аргумент сокращенным способом:

1) Если Петр поедет в Екатеринбург, то Иван поедет в Киев. Петр поедет в Екатеринбург или в Челябинск. Если Петр поедет в Челябинск, то Анна останется в Москве. Но Анна не останется в Москве. Следовательно, Иван поедет в Киев.

2) Для того чтобы быть допущенным к экзаменам, необходимо получить зачет по логике. Я получу этот зачет, если научусь проверять аргументы сокращенным способом. Я не усвоил этот метод. Следовательно, я не буду допущен к экзаменам.

3) Для того чтобы сдать экзамен, мне необходимо достать учебник или конспект. Я достану учебник только в том случае, если мой приятель не уедет. Он уедет, только если я достану конспект. Значит, я сдам экзамен.

2. Полиция задержала четырех гангстеров, подозреваемых в краже автомобиля: Анри, Луи, Жоржа и Тома. При допросе они дали следующие показания:
Анри: «Это сделал Луи», Луи: « Это сделал Том», Жорж: « Это не я», Том: «Луи лжет, говоря, что это я». Дополнительное расследование показало, что правду сказал только один из них. Кто украл машину?

3. При составлении расписания на понедельник были высказаны пожелания, чтобы математика была первым или вторым уроком, физика первым или третьим, литература вторым или третьим. Можно ли удовлетворить все высказанные пожелания?

4. Обвиняемые А, В, С дали следующие показания. А: «В виновен, а С невиновен», В: « А невиновен или С виновен», С: « Я невиновен, но хотя бы один из А или В виновен». Совместимы ли эти показания, т.е. могут ли они быть верны одновременно? Предполагая, что все показания правдивы, определить, кто виновен.

5. Владимир, Роман, Андрей и Сергей заняли на математической олимпиаде четыре первых места. На вопрос о распределении мест были получены следующие ответы: 1) Роман – первый, Сергей - второй;
2)Роман- второй, Владимир – третий; 3) Андрей- второй, Владимир- четвертый. В каждом из ответов только одно утверждение истинно. Определить, как распределились места.

6. Встретились скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас имеет белые, один черные и один рыжие волосы, но ни у одного нет волос того цвета, на который указывает его фамилия», - заметил черноволосый. «Ты прав», - сказал Белов. Определить, какой цвет волос у художника.

7. Найти таблицу истинности формулы:

1) $A \overline{\leftrightarrow} B \vee A \wedge B$ 2) $A \overline{\rightarrow} B \vee (A \vee \overline{B})$

3) $(A \rightarrow B) \wedge (A \vee B)$ 4) $A \overline{\leftrightarrow} B \vee (A \rightarrow B)$

5) $A \overline{\rightarrow} B \vee (A \leftrightarrow B)$ 6) $(\overline{A} \rightarrow B) \vee A \wedge B$

7) $A \vee (A \leftrightarrow B) \wedge \overline{B}$ 8) $(A \rightarrow \overline{B}) \wedge (A \vee B)$

9) $(\overline{A} \rightarrow \overline{\overline{B}}) \vee A \wedge B$ 10) $(\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}) \vee \overline{A} \wedge B$

8. Построить СДНФ и СКНФ для функции f, таблица истинности (таблица 3) которой имеет следующий вид:

Таблица 3

X	Y	Z	F(X,Y,Z)	X	Y	Z	F(X,Y,Z)
0	0	0	a	1	0	0	e
0	0	1	b	1	0	1	k
0	1	0	c	1	1	0	g
0	1	1	d	1	1	1	h

Значения a,b,c,d,e,k,g,h представлены в таблице 4.

Таблица 4

№	a	b	c	d	e	k	g	h	№	a	b	c	d	e	k	g	h
1	1	0	0	1	1	0	1	0	2	1	0	1	0	1	0	0	1
3	0	1	1	0	0	0	1	1	4	0	0	1	1	0	1	1	0
5	1	0	0	0	1	1	0	1	6	0	1	1	0	0	0	1	0
7	1	0	1	0	0	1	0	0	8	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	1	0	1	0	1	1	1	10	0	0	1	1	0	0	0	1

9. Пусть в некотором конкурсе решается вопрос о допуске того или иного участника к следующему туру тремя членами жюри *X,Y,Z*. Решение жюри характеризуется булевой функцией *F*, заданной таблицей 5. Составить соответствующую переключательную схему и упростить схему, т.е. уменьшить число контактов таким образом, чтобы новая схема работала так же, как и прежняя (использовать законы булевой алгебры).

Таблица 5

X	*Y*	*Z*	*F(X,Y,Z)*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

10. Вычислите булеву функцию, генерируемую функциональной схемой, показанной на рисунке 3.

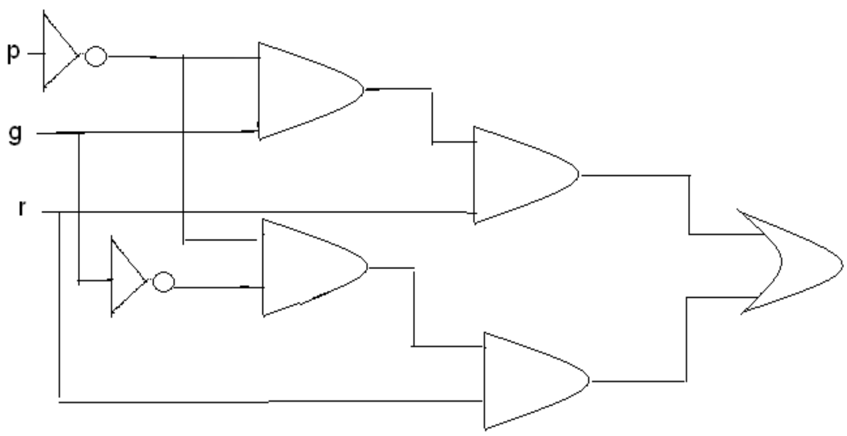


Рис.3

11. С помощью законов булевой алгебры проверьте, что выражение $\bar{p}$ НЕ-И($\bar{q}$ НЕ-И r) эквивалентно выражению $p \vee (\bar{q} \wedge r)$.

Затем замените функциональную схему, представленную на рисунке 4, на эквивалентную ей, но состоящую из двух функциональных элементов: И и ИЛИ и одного инвертора.

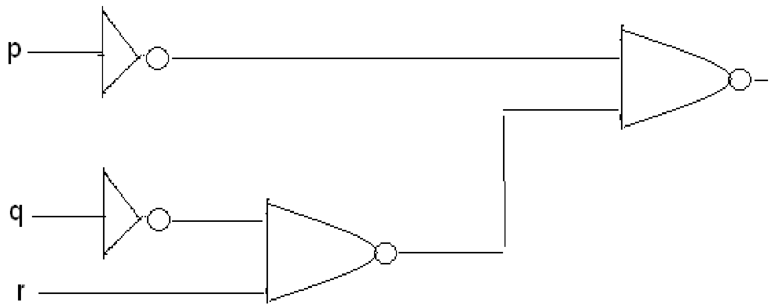


Рис. 4

12. Что получится на выходе функциональной схемы, представленной на рисунке 5?

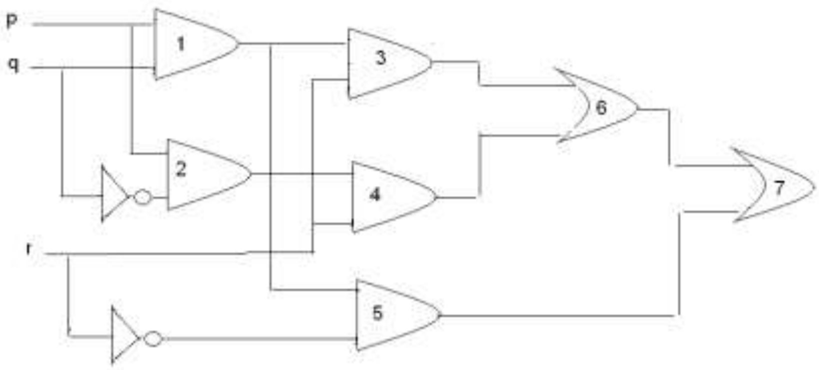


Рис.5

13. Докажите эквивалентность функциональных схем, изображенных на рисунке 6.

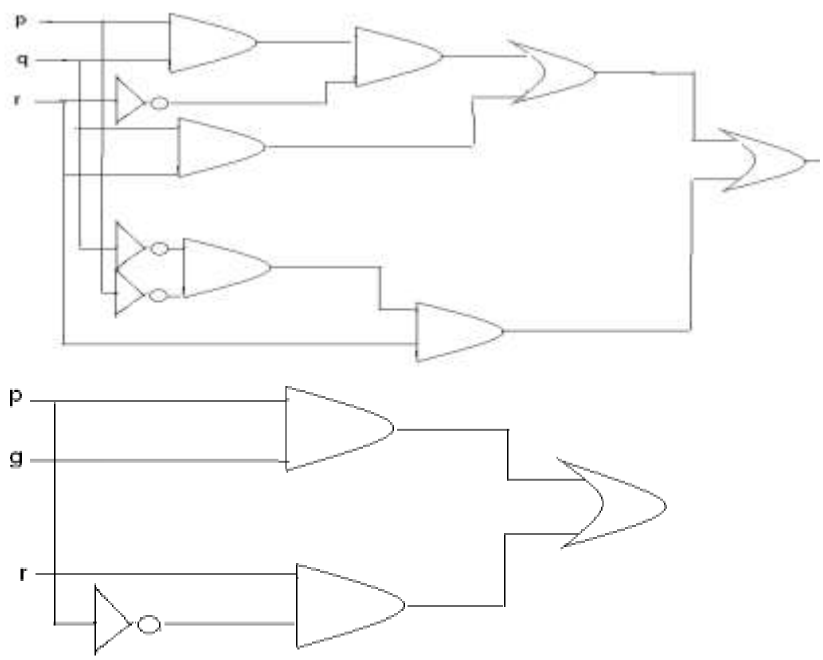


Рис.6

14. Начертите функциональную схему, реализующую булеву функцию $p(q \vee r)$, используя только НЕ-И.

15. Запишите выражение $(p \wedge \bar{q}) \wedge r$.используя только:

1) операции $\vee$ и $\bar{\ }$;
2) функцию НЕ-И.

16. Что получится на выходе функциональной схемы, представленной на рисунке (полубитный сумматор) 7?

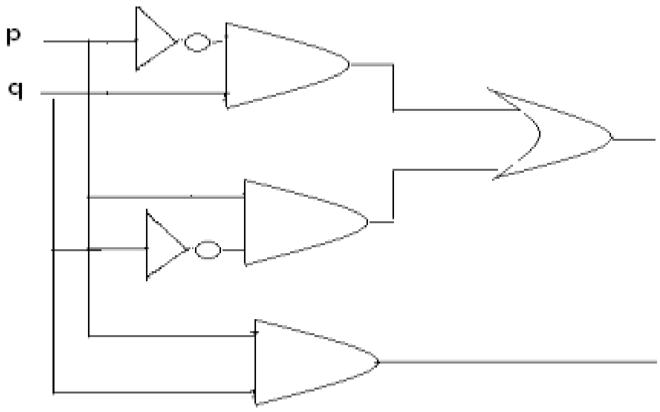
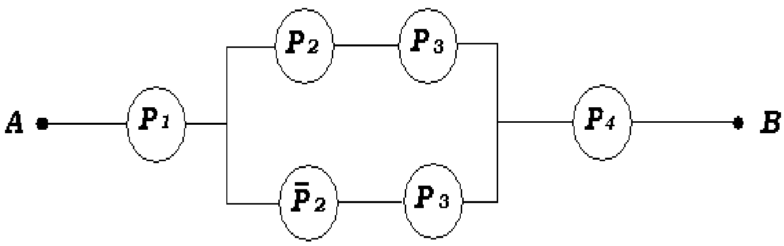


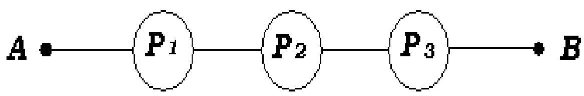
Рис.7

17. Найти формулу, соответствующую схеме (рис.8)

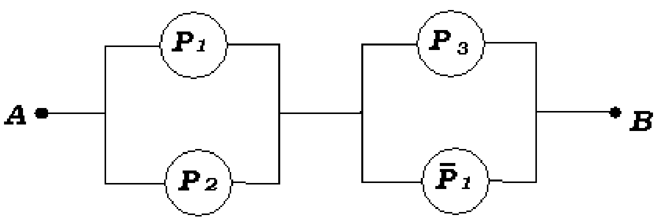
1)



2)



3)



4)

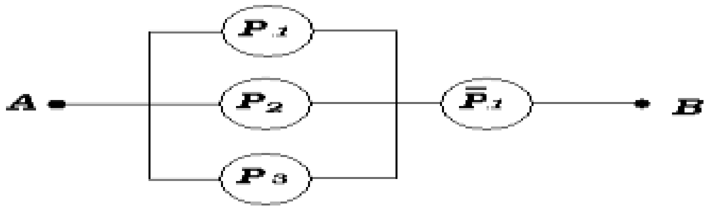


Рис.8

а) $(X_1 \vee X_2)(X_3 \vee \overline{X}_1)$; б) $(X_1 \vee X_2 \vee X_3)\overline{X}_1$; в) $X_1(X_2X_3 \vee \overline{X}_2 X_3)X_4$;
г) $X_1X_2X_3$.

18. Составить формулу, соответствующую схеме на рисунке 9, и упростить ее, используя законы булевой алгебры:

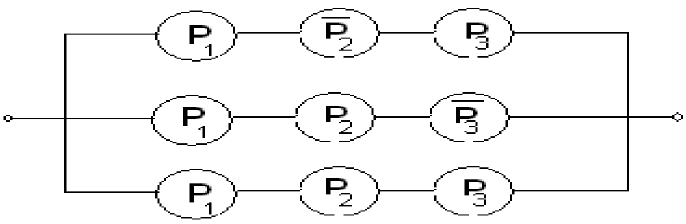


Рис.9

19. На множестве натуральных чисел задан одноместный предикат *P(x)*. Определить его значения при *x=a* и при *x=b*. Применить к предикату *P(x)* кванторные операции.
1) *P(x)*: «*x*- составное число», *a*=15, *b*=13.
2) *P(x)*: «*x*- четное число», *a*=15, *b*=18.
3) *P(x):* «*x*- нечетное число», *a*=15, *b*=13.
4) *P(x)*: «*x* делится на 3», *a*=15, *b*=17.
5) *P(x)*: «100 делится на *x*», *a*=15, *b*=25.
6) *P(x)*: «*x* больше 100», *a*=105, *b*=25.
7) *P(x)*: «*x*-полный квадрат», *a*=225, *b*=18.
8) *P(x)*: «*x*-степень двойки», *a*=256, *b*=328.
9) *P(x)*: «в десятичной записи числа *x* встречается цифра 1», *a*=225, *b*=18.
10) *P(x)*: «в десятичной записи числа *x* не встречается цифра 2», *a*=225, *b*=18.

20. Определите множество истинности предиката
P(x,y) «($x+y$ -нечетно)$\wedge(\left||x-y|\right. \le 1)$», если переменная *x* принимает значения из множества{5,8,9}, а переменная у - из множества {4,7,8,10}.

21. Докажите по индукции, что равенство $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ выполнено при всех натуральных *n.*

22. Методом математической индукции докажите, что $7^n - 1$ делится на 6 при любом натуральном показателе n.

23. Докажите каждое из высказываний методом математической индукции:

1) $1 + 5 + 9+\ldots+(4n-3) = n(2n - 1)$ для всех натуральных чисел n;

2) $1^2 + 2^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$ для всех натуральных чисел n;

3) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ для всех натуральных чисел n;

4) число $n^3 - n$ делится на 3 при всех натуральных значениях числа n;

5) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots n\cdot n!=(n+1)!-1$ для всех натуральных чисел n.

24. Последовательность натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$ определяется рекуррентной формулой $x_1=1$, $x_{k+1}=\frac{x_k}{x_k+2}$ при $k\geq 1$.Вычислите x_2, x_3, x_4. Докажите по индукции, что $x_n=\frac{1}{2^n-1}$ при $n\geq 1$.

25. Последовательность натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$ определяется рекуррентной формулой $x_1=1$, $x_2=1$ и $x_{k+1}=2x_k-x_{k-1}$ при $k>1$. Вычислите x_3, x_4, x_5. Найдите общую формулу x_n и докажите ее истинность индуктивным методом.

26. Среди данных формул укажите те, которые при любой интерпретации истинны; ложны:

1) $(\overline{\forall} xP(x))\leftrightarrow(\exists x\,\overline{P}(x))$;б) $(\overline{\exists} xP(x))\leftrightarrow(\forall x\,\overline{P}(x))$;

2) $(\exists x\forall yP(x,y))\rightarrow\forall y\exists xP(x,y)$;г) $(\forall x\forall yP(x,y))\leftrightarrow(\forall y\forall xP(x,y))$;

3) $(\exists x\exists yP(x,y))\leftrightarrow(\exists y\exists xP(x,y))$.

27. Пусть $P(x),R(x),G(x),S(x,y)$ обозначают предикаты «x -простое число», «x - четное число», «x - нечетное число», «y делится на x» соответственно. Переведите на русский язык:

1) $P(7)$; б)$R(2)\wedge P(2)$;б) $\forall x(S(2,x)\rightarrow R(x)$;

2) $\exists x(R(x)S(x,6)$;

3) $\exists x(R(x)\wedge P(x))-\neg\exists((R(x)\wedge P(x))\wedge\exists y(x\neq y)\wedge R(y)\wedge P(y)))$;

4) $\forall x(\neg R(x)\rightarrow\neg S(2,x)$; $\forall x(R(x)\wedge\forall y(S(x,y)\rightarrow P(y)))$;

5) $\forall x(P(x)\rightarrow\exists y(R(y)\wedge S(x,y)))$;

6) $\forall x(G(x)\rightarrow\forall y(P(y)\rightarrow\neg S(x,y)))$.

28. Построить доказательство или вывод из совокупности формул:

1) $A,B\vdash A\wedge B$;

2) $\vdash (A\to B) \wedge \bar{B} \to \bar{A}$;
3) $\vdash A\to(B\to A\wedge B)$;
4) $\vdash (A\to B)\to(A\to A)$.
5) $\vdash A\to A\wedge A$;
6) $\vdash (A\wedge B\to C)\to(A\to(B\to C))$;
7) $A\wedge B \vdash B\wedge A$
8) $\vdash A\vee B\to B\vee A$
9) $A\to B \vdash (B\to C)\to(A\to C)$
10) $\vdash ((A\wedge B)\to C)\to(A\to(B\to C))$.

29. Постройте выводы:
1) $P\wedge G\vdash P$;
2) $P\vdash P\vee G$;
3) $A\to B, A\to\neg B\vdash\neg A$;
4) $A\to B, B\to A\vdash A\leftrightarrow B$;
5) $C\to A, C\to B, C\vdash A\wedge B$;
6) $A\wedge B,\ A\to(B\to C)\vdash C$;
7) $A\to B, B\to C\vdash A\to C$;
8) $(A\to C)\to C,\ A\to B, B\to C\vdash C$;
9) $A\to B,\neg B\vdash\neg A$;
10) $A\to B, C\to E, \neg B\wedge\neg E\vdash\neg A\wedge\neg C$.

30. Установите, что:
1) $\vdash (A\to B)\wedge(B\to C)\to(A\to C)$;
2) $\vdash (A\to(B\to C))\to(A\wedge B\to C)$;
3) $\vdash (A\to B)\to(A\to(A\to B))$.

31. Установите существование доказательств следующих формул:
1) $A\vee B\to B\vee A$;
2) $A\to A\wedge A$;
3) $A\wedge B\to A\vee B$;
4) $A\vee(A\to A)$;
5) $A\to(A\leftrightarrow A)$.

32. Построить вывод:
$\forall y(R\to P(y))\vdash\forall xP(x)$

1.4 Теория графов

Граф G = (V, *E)* состоит из множества V', чьи элементы называют *вершинами* графа, и множества E его ребер, соединяющих некоторые пары вершин. Вершины u и v графа называют *смежными*, если они соединены каким-то ребром е, про которое говорят, что оно инцидентно вершинам u и v. *Степенью* вершины v считают число $d(v)$ ребер графа, инцидентных V. *Маршрутом* длины k в графе называют такую последовательность различных вершин $v_0, v_1, \ldots, v_k$ в которой каждая пара соседних вершин $v_{i-1}v_i$ соединена ребром.

Циклом в графе является замкнутый маршрут $v_0, v_1, \ldots, v_k$, v_0 которого все вершины, кроме первой и последней, различны. Граф называют *связным*, если любую пару его вершин соединяет какой-нибудь маршрут. Любой граф можно разбить на подграфы, каждый из которых окажется связным. Минимальное число таких связных компонент называется *числом связности* графа и обозначается через *c{G).* Граф, в котором существует маршрут (называемый *эйлеровым)***,** начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине и проходящий по каждому ребру графа ровно один раз, называется *эйлеровым* графом. Связный граф с двумя или более вершинами является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет четную степень. *Подграфом* графа $G = (V, E)$ называют граф $G' = (V, E')$, в котором $E' \subset E$ и $V \subset V$. Ребро графа называется ориентированным, если одну вершину считают началом, а другую концом ребра. Граф, ребра которого ориентированным, называется *ориентированным* или *орграфом*. В этом случае элементы множества V называются *узлами*, а элементы множества E - *дугами*. Если задан орграф $G(V,E)$, в котором дуги помечены числами (так называемыми весами, длинами дуг), то этот орграф можно представить с помощью матрицы весов С:

$$C[i,j] = \begin{cases} 0, & \text{для } i = j \\ c_{ij}, \textit{конечная} \text{ величина, если есть дуга из } i \text{ в } j, \\ \infty, & \text{если нет дуги из } i \text{ в } j. \end{cases}$$

Гамильтоновым называют такой цикл в графе, который проходит через каждую вершину графа, причем, только один раз. Граф, в котором существует гамильтонов цикл, называют *гамильтоновым***.** Связный ацикличный граф G = (V, E) является *деревом***.** *Остовным деревом* графа G называют такой его подграф, который является деревом и содержит все вершины графа G. *Задача коммивояжера* состоит в поиске гамильтонова цикла минимального общего веса в нагруженном графе. *Алгоритм ближайшего соседа* позволяет найти субоптимальное решение задачи коммивояжера. В *алгоритме Дейкстры* достаточно знать, какие вершины (узлы) являются соседними и какова цена (длина) перехода. На очередном шаге нужно выбрать вершину v , до которой точно известен кратчайший путь от s , и пересчитать оценки путей для вершин, смежных с v. Такой вершиной на первом шаге окажется вершина s (для нее T[s]=0**,** T[v]- длина кратчайшего пути от s к v). На следующих шагах новой вершиной v является вершина, которая еще не рассмотрена и для которой оценка пути минимальна.

Алгоритм Прима

1. Выберите произвольную вершину и ребро, соединяющее ее ближайшим (по весу) соседом.

2. Найдите не присоединенную (еще) вершину, ближе всего лежащую к одной из присоединенных, и соедините с ней.

3. Повторяйте 2 до тех пор пока все вершины не будут присоединены.

Алгоритм поиска минимального остовного дерева:

1.Выбирают ребро v графа с наименьшим весом, исключают его из списка E ребер, расположенных по возрастанию веса, записывают его в множество T.

2.Из оставшегося списка E/v выбирают следующее ребро с наименьшим весом, добавление которого к T не ведет к образованию циклов.
3. Продолжают процесс, пока не исчерпан список E.
4.На последнем шаге T- список ребер, образующих минимальный остов.

Алгоритм построения коммуникационной сети минимальной длины:
1.Начать с любого узла и соединить его с ближайшим узлом. Считать, что это связанные узлы, а все другие - несвязанные.
2.Определить несвязанный узел, ближайший к одному из связанных узлов. Если таких «ближайших» узлов несколько, то выбрать любой. Добавить этот узел к связанным узлам. И так далее до тех пор, пока есть несвязанные узлы.

Алгоритм определения максимального потока.
1. Найти какой-нибудь путь от источника до стока, который образован дугами, каждая из которых имеет в направлении потока ненулевую мощность. Если такого пути нет, то оптимальное решение найдено.
2. Найти наименьшее значение мощности дуги P_f на выбранном пути шага 1. Увеличить поток через сеть на величину P_f.
3. На пути из шага 1 сократить на P_f мощности потоков на всех дугах в направлении потока и увеличить на P_f мощности потоков на всех дугах в обратном направлении. Перейти к 1.

Набор упражнений 1.4

1. Лист бумаги Плюшкин (Н.В.Гоголь "Мертвые души") разрезает на три части. Некоторые из полученных листов он также разрезает на три части. Несколько новых листков он вновь разрезает на три более мелкие части и так далее. Сколько Плюшкин получает листиков бумаги, если разрезает k листов?

2. Утверждают, что в одной компании из пяти человек каждый знаком с двумя другими. Возможна ли такая компания?

3. Девять шахматистов проводят турнир в один круг (каждый из участников должен сыграть с каждым по одному разу). Покажите, что в любой момент найдутся двое, закончившие одинаковое число партий.

4. Девять человек проводят шахматный турнир в один круг. К некоторому моменту выясняется, что в точности двое сыграли одинаковое число партий. Нужно доказать, что либо в точности один участник еще не сыграл ни одной партии, либо в точности один сыграл все партии.

5. Найти матрицы смежности и инцидентности для графа G (рис 10). Вычислить валентности (степени) вершин.

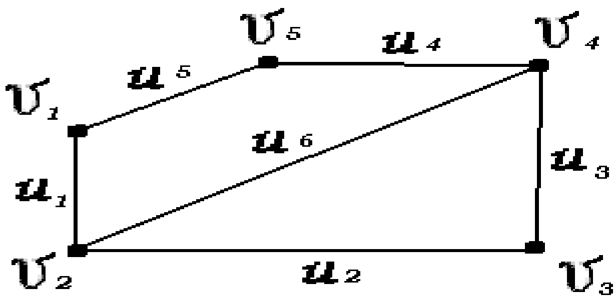


Рис. 10

6. Объясните, почему сумма степеней всех вершин простого графа G совпадает с удвоенным числом его ребер. Этот факт называют леммой об эстафете. Используя эту лемму, покажите, что в любом полном графе K_n с n вершинами есть ровно $n(n-1)/2$ ребер. Для каких значений n граф K_n будет эйлеровым?

7. Нарисуйте граф, чья матрица смежности имеет вид :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Введя подходящие обозначения вершин, для каждого из графов на рисунке 11 подберите соответствующую матрицу смежности из перечисленных ниже.

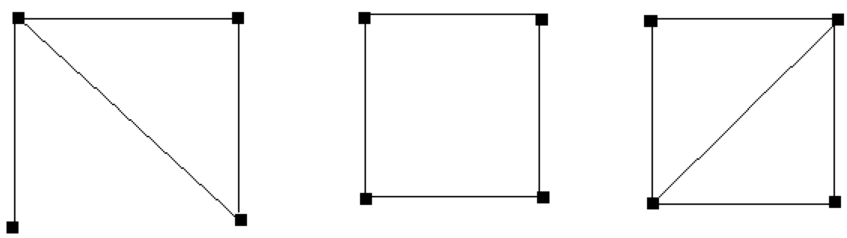


Рис.11

$$1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Какие из графов на рисунке 12 могут являться подграфами графа из упражнения 7?

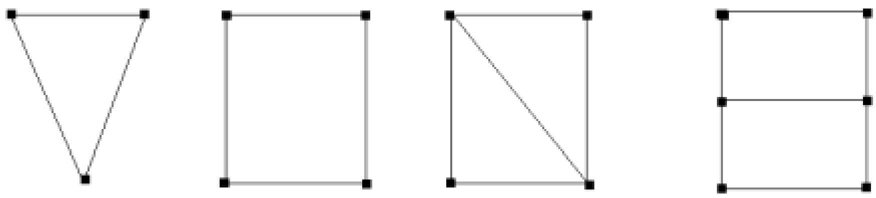


Рис. 12

10. Определить наличие эйлеровых циклов в следующих графах (рис.13):

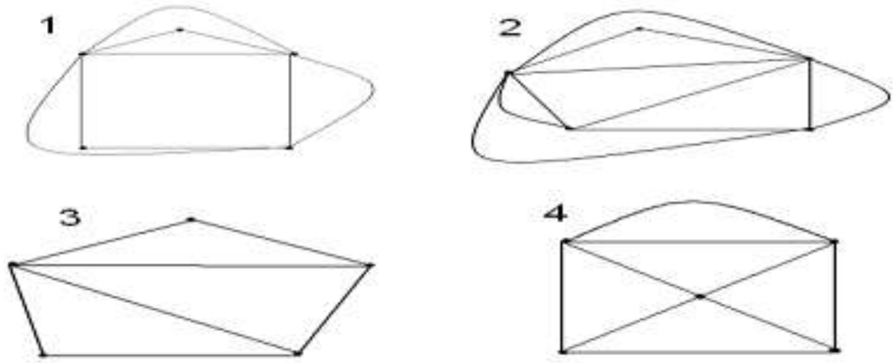


Рис.13

11. Найдите гамильтоновы циклы в графе на рисунке 14.

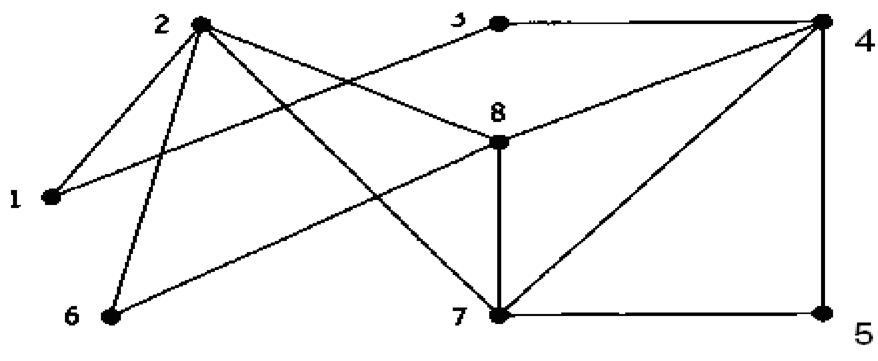


Рис.14

Найдите в нем циклы длины 3, 4, 5, 6 и 7.

12. На рисунке 15 изображен граф Петерсена Р.

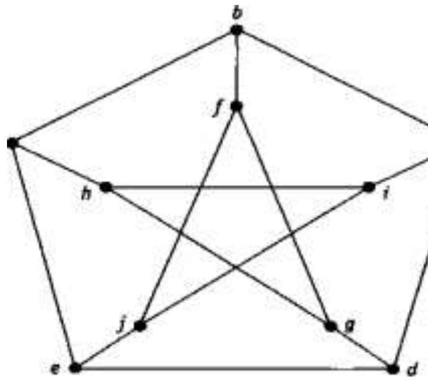


Рис. 15

Найдите в нем цикл длины 9. Покажите, что *P* не является гамильтоновым.

13. Используйте алгоритм ближайшего соседа для поиска гамильтонова цикла в нагруженном графе (рис. 16), взяв за исходную

1) вершину *A;*

2) вершину *D*.

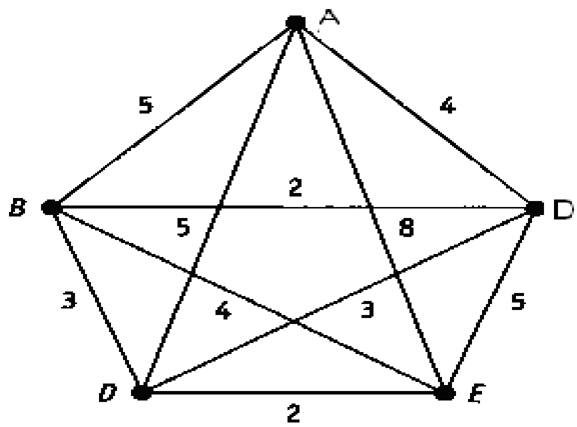


Рис.16

14. Известно, что дерево *T* имеет три вершины степени 3 и четыре вершины степени 2. Остальные вершины дерева имеют степень 1. Сколько вершин степени 1 есть у дерева T? (Указание: обозначьте число вершин дерева *T* через *n* и примените лемму об эстафете).

15. Выясните, являются ли графы, задаваемые следующими матрицами смежности, деревьями:

$$1)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16. Найдите минимальное остовное дерево графа, изображенного на рисунке 17

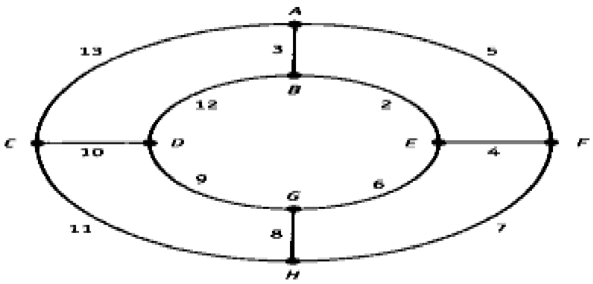


Рис.17

17. Изобразите орграф с вершинами $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и матрицей смежности

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Предположите, что вес каждой дуги равен 1 и найдите (если он существует)
1) кратчайший путь (пути) от вершины 1 до вершины 2;
2) кратчайший путь (пути) от вершины 3 до вершины 6;
3) контур длины 5.

18. Проследите за работой алгоритма Дейкстры на примере орграфа, изображенного на рисунке 18, и найдите кратчайшие пути до каждой вершины
1) от вершины *A;*
2) от вершины *C*.

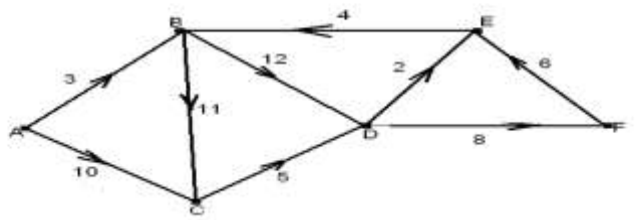


Рис. 18

19. С помощью алгоритма Дейкстры найдите кратчайший путь от вершины *S* до всех остальных вершин в нагруженном графе из рисунке 19. Найдите два кратчайших пути от *S* до Т.

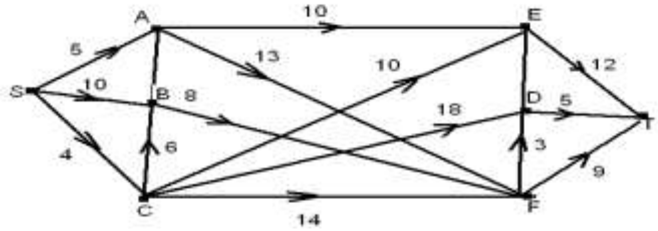


Рис.19

20. Составить матрицу весов орграфа (рис.20):

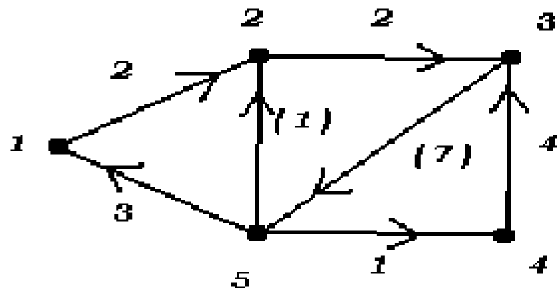


Рис.20

21. Составить матрицу весов орграфа (рис.21):

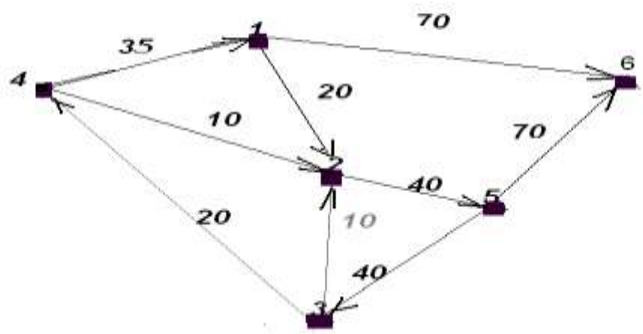


Рис.21

22.Составить матрицу весов орграфа (рис.22):

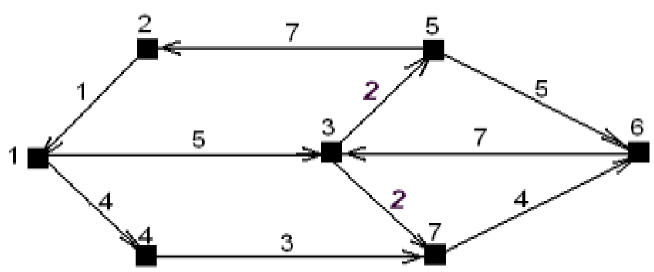


Рис.22

23. *Задача определения кратчайшего пути. Метод присвоения меток.*

Задача состоит в том, чтобы найти кратчайший путь на графе от какой-то выделенной вершины до любой другой вершины.

1)Узел 7- склад, остальные узлы – строительные компании. Показатели на дугах - расстояния в километрах. Надо найти кратчайшие расстояния от склада до каждой строительной площадки. Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 1 через строительную площадку 2? Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 2? Проходит ли кратчайший путь от склада до строительной площадки 2 через строительную площадку 4(рис.23.)?

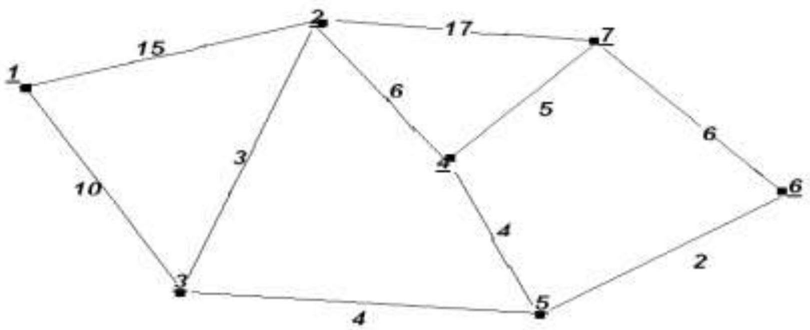


Рис.23

2) Компания грузовых перевозок осуществляет услуги по перевозке грузов между Воронежом (В) и райцентрами. Если компания получает заказ на обслуживание, она как можно быстрее посылает грузовик в райцентр, из которого поступил заказ. Так как существенны быстрое обслуживание и минимальные транспортные затраты, большое значение приобретает то, что грузовик проследует из Воронежа в соответствующий райцентр по наиболее короткому маршруту. Сеть, представленная ниже, отображает сеть дорог. Расстояния указаны в километрах. Найти кратчайшие маршруты от Воронежа до всех 10 райцентров. Какова длина кратчайшего пути от Воронежа до райцентра 10? Какова длина кратчайшего пути от Воронежа до райцентра 8? Проходит ли кратчайший путь от Воронежа до райцентра 9 через райцентр 6(рис.24)?

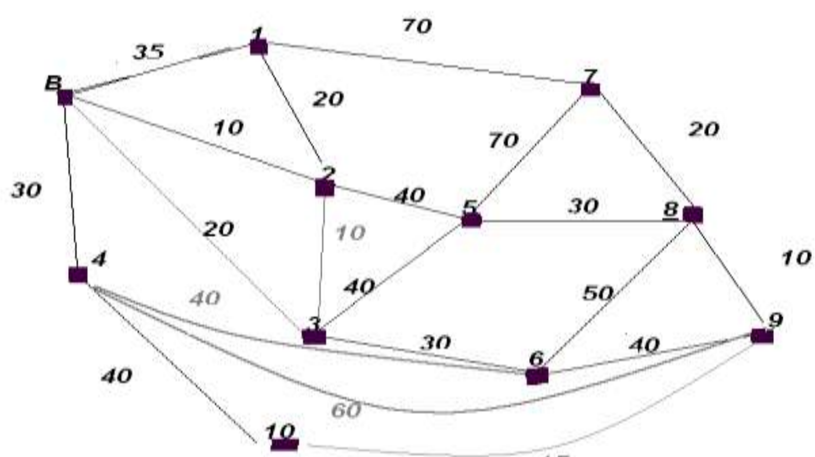


Рис.24

3) Предложить алгоритм действий при наличии в сети нескольких равных постоянных меток.

24. *Задача о кратчайшем пути между двумя пунктами*
Известна схема дорог. Требуется перевезти груз из одно пункта в другой по маршруту минимальной длины.

1) Найти маршрут минимальной длины от пункта 1 к пункту 11(рис.25).

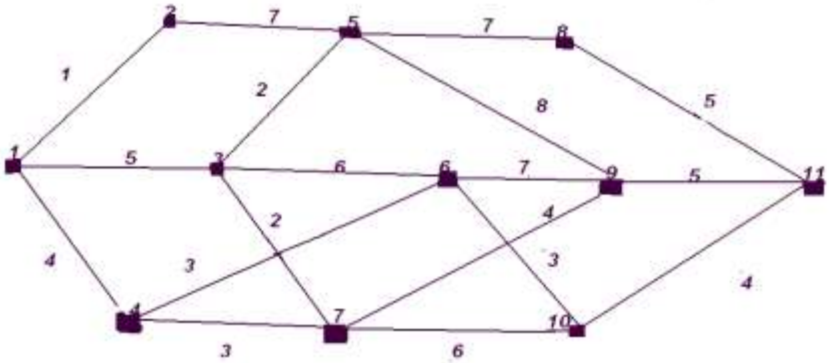


Рис.25

2)Найти маршрут минимальной длины от пункта 1 к пункту 10.

25. *Построение коммуникационной сети минимальной длины*
Коммуникационная сеть минимальной длины (или дерево кратчайших расстояний)- это совокупность дуг сети, имеющая минимальную суммарную длину и обеспечивающая достижение всех узлов сети, т.е. возможность попасть из любого узла в любой другой узел.
1) Университет устанавливает компьютерную систему электронной почты, которая позволит передавать сообщение между деканами восьми факультетов. Сеть возможных электронных связей между деканатами показана ниже. Протяженность коммуникаций в километрах отмечена на дугах. Предложить проект системы связи, которая позволит всем восьми
деканам обеспечить доступ к системе электронной почты. Решение должно обеспечить минимальную возможную общую длину коммуникаций (рис.26).

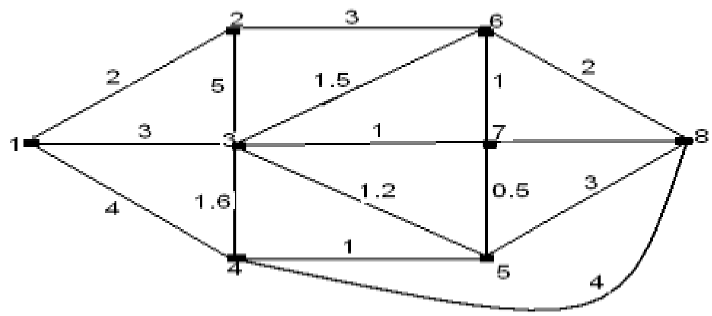


Рис.26

2) Фирма получила заказ на прокладку кабеля для кабельного телевидения. Узлы сети, отражают точки, к которым должна быть проведена кабельная сеть (рис.27).

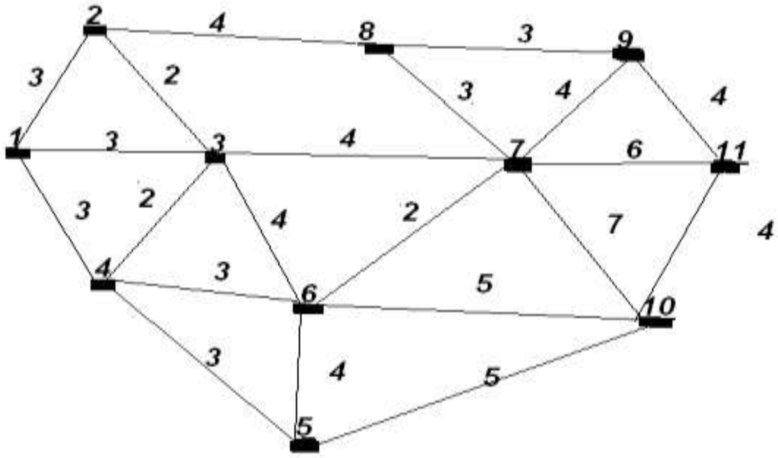


Рис.27

Дуги сети показывают количество километров между точками подвода кабеля. Предложить решение, которое позволит обеспечить доступ кабельной сети ко всем точкам, но при этом общая протяженность кабельных линий будет минимально возможной.

26. *Задача определения максимального потока*

Рассматривается сеть с одним узлом входа (источник) и одним узлом выхода(сток). Какова максимальная величина потока(количество машин, сообщений, жидкости и т.д.) который может войти в сетевую систему и выйти из нее в заданный период времени?

Предполагается, что поток, вытекающий из узла, равен потоку, втекающему в узел. Под пропускной способностью (или мощностью) дуги будем понимать верхнее ограничение на поток в этой дуге(автомобильные трассы ограничивают число автомобилей в транспортной системе, величина трубопроводов ограничивает количество нефти в системе ее распределения). Мощность потока может зависеть от его направления.

Условное изображение в сети 

означает, что мощность потока от узла 1 к узлу 2 равна 6, а мощность потока от узла 2 к узлу 1 равна 0, т.е. это –«улица с односторонним движением».

1) Система автодорог «Север-Юг», проходящих через Псковскую область, может обеспечить пропускные способности, показанные на рисунке 28 схеме (тыс.автомашин в час).

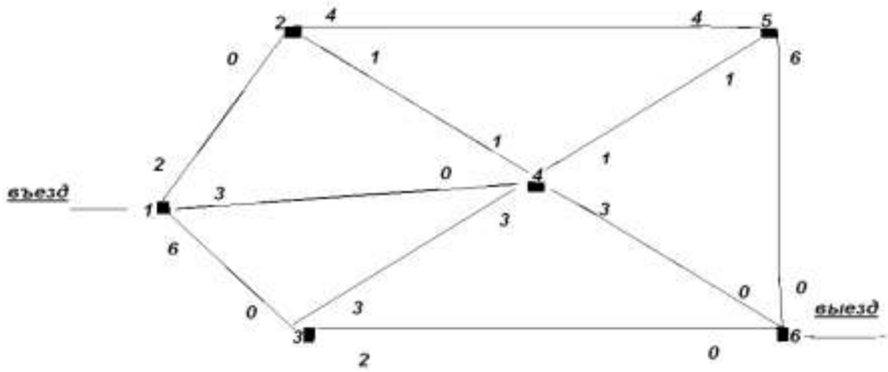


Рис.28

Каков максимальный поток автомашин через эту систему(тыс. автомашин в час)? Сколько автомашин должно проехать по дороге 5-6, чтобы обеспечить максимальный поток?

2)Чему равен максимальный поток автомашин для системы автодорог (рис.29)?

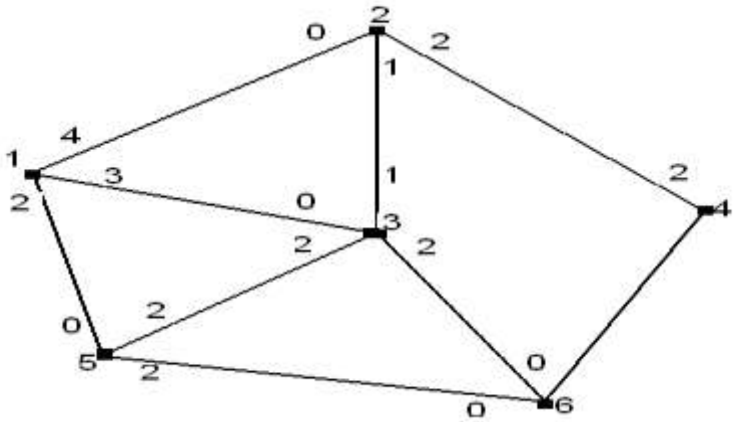


Рис.29

3)Рассматривается возможность введения секции 3-4 с пропускной способностью 3 тыс. автомашин в час. На сколько увеличится величина максимального потока автомашин?

27. По матрице смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 0 & f & g & h \\ b & f & 0 & k & m \\ c & g & k & 0 & n \\ d & h & m & n & 0 \end{pmatrix}$$

построить граф. Определить наличие эйлерова цикла в этом графе. Значения переменных даны в таблице 6.

Таблица 6

№	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*k*	*m*	*n*	№	*a*	*b*	*C*	*d*	*f*	*g*	*h*	*k*	*m*	*n*
1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	2	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
3	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	4	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
5	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	6	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
7	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	8	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
9	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	10	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1

28. 1)Для матрицы

$$\begin{pmatrix} \infty & a & b & c & d \\ e & \infty & f & g & h \\ k & m & \infty & n & p \\ q & r & s & \infty & t \\ x & y & z & w & \infty \end{pmatrix}$$

решить задачу коммивояжера.

2)Найти кратчайший путь от вершины 1 до любой другой вершины (рис.30)

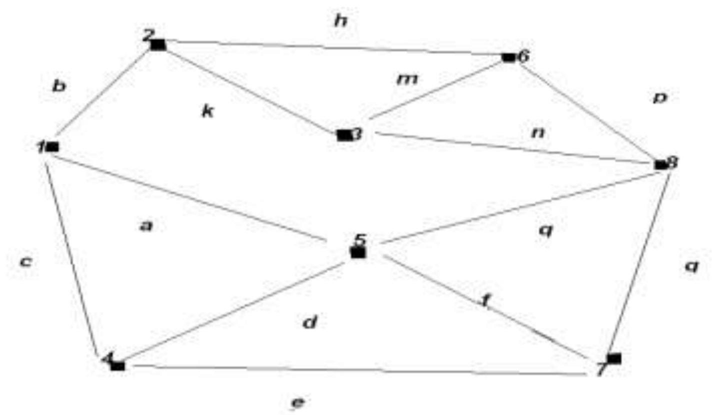


Рис.30

3) Построить коммуникационную сеть минимальной длины в пункте 2)

4) Чему равен максимальный поток между пунктами 1 и 6 (рис.31, таблица 7))?

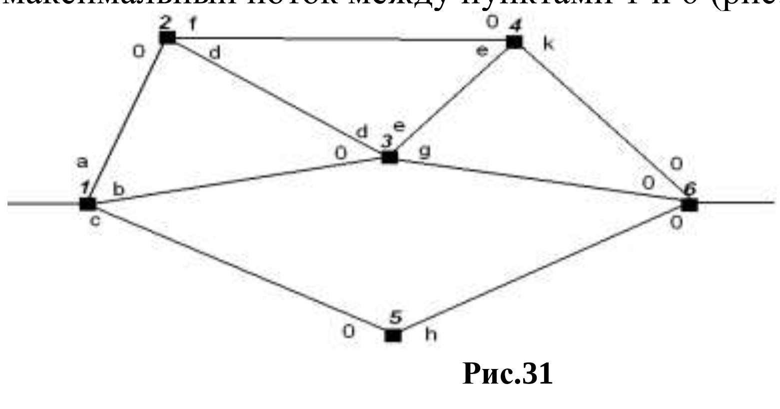


Рис.31

Таблица 7

№	*a*	*b*	*c*	*D*	*f*	*e*	*g*	*h*	*k*	*m*	*n*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*x*	*y*	*z*	*w*
1	9	4	2	9	5	7	2	1	4	3	7	3	1	6	7	4	4	7	6	1
2	8	9	1	3	5	7	4	8	6	7	4	2	4	7	1	4	1	3	5	5
3	2	6	9	3	3	2	2	4	8	6	1	7	5	7	7	2	9	3	4	4
4	1	8	5	3	3	2	5	9	5	8	6	1	5	4	9	4	7	1	2	3
5	7	7	5	1	8	7	4	2	9	7	8	2	5	6	9	1	6	2	4	3
6	7	1	8	1	9	2	5	9	8	8	6	9	2	7	2	7	6	3	4	1
7	6	6	6	8	8	5	2	9	8	1	8	7	9	4	3	4	1	1	1	7
8	7	7	9	3	8	6	4	6	3	8	5	8	7	3	4	5	8	9	9	5
9	1	2	7	42	8	2	3	1	4	4	7	3	1	6	2	7	5	2	8	1
10	5	5	4	4	4	3	8	3	2	4	6	1	2	7	5	6	5	9	3	4

1.5 Кодирование

Кодом называется система условных знаков (символов) для передачи, обработки, хранения различной информации Сообщения записываются с помощью 0 и 1. Получается конечная последовательность длины m из 0 и 1. Эта последовательность кодируется более длинной последовательностью длины $n(n>m)$ из 0 и 1, которая и передается по каналам связи. Различают коды с обнаружением ошибок и коды с исправлением ошибок. При использовании *кода с проверкой четности* к передаваемому сообщению из 0 и 1 добавляется еще один символ, равный сумме по модулю 2 передаваемых символов. При декодировании полученного сообщения нужно отбросить последнюю цифру. Коды с тройным повторением- это пример кода с исправлением ошибок. Предаваемое сообщение разбивается на блоки, каждый блок передается трижды, например, трижды передается каждый символ. Принятое сообщение разбивается по три символа. Символ, который чаще всего встречается в такой тройке, объявляется очередной цифрой декодированного сообщения. Коды Хемминга- это (m,n)- коды, где $m=2^r-1-r$, $n=2^r-1$, $r\geq 2$, позволяющие исправлять однократную ошибку. Из 0 и 1 составляется матрица M=(A E) размера $(n\text{-}m)\times n$, где E- единичная матрица порядка n-m, а матрица A размера $(n\text{-}m)\times m$ подбирается так, чтобы в столбцах матрицы M были указаны все двоичные разложения чисел от 1 до n. Матрица M называется *проверочной матрицей* (m,n)- кода Хемминга.

По проверочной матрице кода Хемминга строится *порождающая матрица* матрица кода Хемминга $G=(E_1\ A^T)$, где E_1 – единичная матрица порядка m, а A^T получается транспонированием матрицы A. При кодировании вектора a надо умножить вектор a на порождающую матрицу кода Хемминга G слева: aG. При умножении матриц используется сложение по модулю 2. Первые символов вектора aG – это исходное сообщение, а n-m последние символов нужны для контроля.

Алгоритм Хаффмена

Упорядочивается в порядке убывания вероятностей список букв. В исходном упорядоченном массиве вероятностей *P* отбрасываются две последние(наименьшие) вероятности, их сумма вставляется в массив *P*, так чтобы массив(на единицу меньшей длины) остался упорядоченным. Так происходит до тех пор, пока не останется массив их двух элементов. Для пары букв оптимальное кодирование известно: первой букве назначается код 0, а второй - 1. После этого в обратном порядке строятся оптимальные коды для трех, четверых и т.д. элементов. При этом нужна только последовательность номеров кодов, которые были изъяты из массива кодов и продублированы в конце с добавлением разряда.

Набор упражнений 1.5

1.Кодировать слово abcdekgh с помощью кода с проверкой четности.
2.Декодировать слово hgked с помощью кода с проверкой четности.
3.Определить, содержится ли ошибка в полученном сообщении.
4.Кодировать слово abcdekgh с помощью кода с тройным повторением.
5.Декодировать слово hgkedc с помощью кода с тройным повторением.
6.Известна проверочная матрица $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ кода Хемминга.

Кодировать сообщение abcd . Декодировать сообщение abcdekg. Значения переменных в таблице 8.

Таблица 8

№	a	b	C	d	e	k	g	h	№	a	b	c	d	e	k	g	h
1	1	0	0	1	1	0	1	0	**2**	1	0	1	0	1	0	0	1
3	0	1	1	0	0	0	1	1	**4**	0	0	1	1	0	1	1	0
5	1	0	0	0	1	1	0	1	**6**	0	1	1	0	0	0	1	0
7	1	0	1	0	0	1	0	0	**8**	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	1	0	1	0	1	1	1	**10**	0	0	1	1	0	0	0	1

1. В таблице 9 указаны частоты букв. Построить по этим данным код Хаффмана и кодировать слово «тина».

Таблица 9

Буква	*А*	*н*	*о*	*е*	*т*	*и*
Частота	*H*	*k*	*m*	*n*	*p*	*q*

Значения переменных заданы в таблице 10

Таблица10

№	a	B	c	h	k	m	n	p	q
1	44	35	41	17	14	13	7	8	2
2	99	54	43	18	17	13	4	6	3
3	57	43	49	13	12	11	6	8	4
4	35	27	42	14	11	13	5	5	5
5	55	31	23	15	17	14	8	4	6
6	39	22	35	12	19	17	8	7	7
7	76	33	45	19	18	11	6	4	8
8	87	53	71	19	14	13	8	6	9
9	69	16	53	16	13	11	5	5	4
10	46	29	44	13	12	17	4	8	5

2 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ ВТиПО

Программа курса дискретной математики для студентов – заочников специальности ВТиПО предусматривает выполнение одной контрольной работы. Задания для контрольной работы даны в первой части этой главы и составлены таким образом, чтобы охватить все темы, предусмотренные типовой программой. Вторая часть данной главы содержит методические указания по выполнению контрольных заданий, решения конкретных аналогичных задач.

2.1 Задания контрольной работы

Задание1

Для выполнения работы необходимо определить и записать в таблицу 11 значения булевых переменных a_1-a_{48} (нули и единицы) исходя из следующих параметров:

Н- порядковый номер студента в списке группы;

Ф- число букв в фамилии студента.

Впишите свои параметры в табличку.

Н=	Ф=

Значения выбираются a_1-a_{48} из таблицы 12 по следующему правилу:

a_1-a_6 – 6 чисел подряд, начиная с позиции Н;

a_7-a_{16} -10 чисел подряд, начиная с позиции Ф+20;

a_{17}-a_{26} -10 чисел подряд, начиная с позиции Н+Ф+20;

a_{27}-a_{36}- 10 чисел подряд, начиная с позиции Н+2Ф+30;

a_{37}-a_{48}- 12 чисел подряд, начиная с позиции Н+3Ф+40.

Таблица 11

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}	a_{30}	a_{31}	a_{32}
a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}	a_{39}	a_{40}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	a_{48}

Таблица 12

	1 5	10	15	20
	10100	00100	01001	11101
20+	11111	11101	10101	11110
40+	01000	10010	11000	10000
60+	10111	01101	00101	00010
80+	00110	10111	00101	01001
100+	11011	01011	10111	00001
120+	11110	10110	00101	11000

Задание2.

Двузначные двоичные числа $c=a_{13}a_{14}$, $d=a_{15}a_{16}$, $g=a_{17}a_{18}$, $h=a_{19}a_{20}$ перевести в десятичную систему. Вычислить $m=c+3$; $n=c+d+3$; $p=g+3$; $q=g+h+4$. Заполнить таблицу 13.

Таблица13

c	D	g	h	m	n	p	q

Найти число следующих комбинаторных конфигураций:

$$A_n^m, C_n^m, \overline{A}_n^m, \overline{C}_n^m, A_q^p, C_q^p, \overline{A}_q^p, \overline{C}_q^p$$

Задание3

Заполнить таблицу 14, вычисляя последовательно значения булевых функций в столбцах A-E по заданным формулам с параметрами a_1-a_8 .

Таблица 14

X	*Y*	*Z*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Предварительно запишите элементарные конъюнкции A и C и дизъюнкции B с использованием, где необходимо, знака отрицания в соответствии со значениями a_1-a_8.Для результирующей функции E построить СДНФ.

$E = X^{a_1} * Y^{a_2} * Z^{a_3} \leftrightarrow ((X^{a_4} \vee Y^{a_5}) \rightarrow X^{a_6} * Y^{a_7} * Z^{a_8}$

A= $X^{a_1} * Y^{a_2} * Z^{a_3}$

B= $X^{a_4} \vee Y^{a_5}$

C= $X^{a_6} * Y^{a_7} * Z^{a_8}$

$D = B \rightarrow C$

$E = A \leftrightarrow D.$

(Например, если $a_1 = 0$, $a_2 = 1$,$a_3 = 0$, то $X^{a_1} * Y^{a_2} * Z^{a_3} = \overline{X}\, Y\, \overline{Z}$)

Задание 4

Заполнить 15 числами $a_{Ф+1}$-$a_{Ф+15}$ таблицу 15, представляющую двуместный предикат P(X,У). Определить значения высказываний:

(1) $\forall X \exists Y (P(X,Y) = 1)$

(2) $\forall Y \exists X (P(X,Y) = 1)$

(3) $\exists X \forall Y (P(X,Y) = 1)$

(4) $\forall Y \forall X (P(X,Y) = 1)$

Таблица 15

X: Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Y_1	$a_{Ф+1}$	$a_{Ф+2}$	$a_{Ф+3}$	$a_{Ф+4}$	$a_{Ф+5}$
Y_2	$a_{Ф+6}$	$a_{Ф+7}$	$a_{Ф+8}$	$a_{Ф+9}$	$a_{Ф+10}$
Y_3	$a_{Ф+11}$	$a_{Ф+12}$	$a_{Ф+13}$	$a_{Ф+14}$	$a_{Ф+15}$

Задание 5.

Образовать двузначное двоичное число $b=a_1a_2$.Перевести в десятичную систему - это номер задачи этого задания.

Найти область истинности предиката P(X,У), заданного предикатной формулой:

0. P(X,У)=((X+У)-нечетно $\wedge$ (/X-У/$\le$1)), где X=(5,6,8), У=(3,6,7,9,10).

1.P(X,У)=((X-У)-нечетно$\wedge$(max(X,У)-нечетно), где X=(2,5,6,8), У=(3,6,9).

2.P(X,У)=((X-У)делится на 3) $\rightarrow$(X+У>6), где X=(1,4,5,6), У=(2,3,4).

3.P(X,У)=((X+У)-нечетно$\vee$ ((X-У)делится на 3), где X=(1,3,6,7), У=(2,4,5).

Задание6

Расставить символы a_1-a_{28} в указанные места матрицы A(табл.16) размерности 8x8.

1) Дополнить матрицу А , заменив нулями и единицами символы * так, чтобы она представляла антирефлексивное антисимметричное отношение R_1 на множестве (1,2,…8).

2) Дополнить матрицу А, заменив нулями и единицами символы * так, чтобы она представляла рефлексивное симметричное отношение R_2 на множестве (1,2,…8).

Таблица 16

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*	*	a_1	a_2	*	*	*	a_{13}
2	a_4	*	a_5	*	*	*	a_6	a_7
3	*	*	*	*	a_8	*	a_9	*
4	*	a_{10}	a_{11}	*	a_{12}	a_{13}	*	a_{14}
5	a_{15}	a_{16}	*	*	*	a_{17}	*	*
6	a_{18}	a_{19}	a_{20}	*	*	*	*	*
7	a_{21}	*	*	a_{22}	a_{23}	a_{24}	*	a_{25}
8	*	*	a_{26}	*	a_{27}	a_{28}	*	*

Задание 7.

Из символов a_{21}-a_{41} образовать 7 трехзначных двоичных чисел b_1-b_7

$b_1=a_{21}a_{22}a_{23}$, $b_2=a_{24}a_{25}a_{26}$, $b_3=a_{27}a_{28}a_{29}$

$b_4=a_{30}a_{31}a_{32}$, $b_5=a_{33}a_{34}a_{35}$, $b_6=a_{36}a_{37}a_{38}$, $b_7=a_{39}a_{40}a_{41}$

Перевести их в десятичную систему(если $b_i=0$, то это число заменить b_i+1)

Ориентированный граф G с множеством вершин V={1,2,3,4,5,6,7}задан списком дуг E={(1, b_1),(2, b_1),(2, b_2),(3, b_3),(3, b_7),(4, b_4),(4, b_5),(5, b_2),(6, b_6),(6, b_7),(7, b_7),(7, b_1)}.

Построить реализацию графа G.

Построить матрицу инциденций графа G.

Задание 8

Заполнить таблицу 17 следующим образом:

Из символов a_{21}-a_{48} образовать 7 четырехзначных двоичных чисел b_1-b_7

$b_1=a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}$, $b_2=a_{25}a_{26}a_{27}a_{28}$, $b_3=a_{29}a_{30}a_{31}a_{32}$

$b_4=a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}$, $b_5=a_{37}a_{38}a_{39}a_{40}$, $b_6=a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}$, $b_7=a_{45}a_{46}a_{47}a_{48}$

Перевести их в десятичную систему, прибавить к каждому 1. Получим числа $c_1….c_7$: $c_i= b_i+1$. Вычислить сумму: $C=\sum_{i=1}^{7} c_i$. Определить с точностью 0,001 числа $d_i=c_i/C$, i=2,3,…7; вычислить $d_1=1-\sum_{i=2}^{7} d_i$ (тем самым сумма чисел $d_1… d_7$ равна 1).

Таблица 17

b_i в двоичной записи	b_i в десятичной записи	c_i	$d_i=c_i/C$ i=2,3,…7	Сообщения и их коды Фано
b_1			d_1	A_1:
b_2			d_2	A_2:
b_3			d_3	A_3:
b_4			d_4	A_4:
b_5			d_5	A_5:
b_6			d_6	A_6:
b_7			d_7	A_7:

Считая числа d_1… d_7 частотами сообщений A_1-A_7 , построить коды Фано и Хафмена для системы сообщений A_1-A_7; занести результат в последний столбец таблицы 18. Вычислить стоимость полученного кода L. Построить кодовое дерево.

Задание 9

Перевести в десятичную систему двоичное число $a_{39}a_{40}a_{41}$ и прибавить 1. Полученное число i определяет номер программы машины Тьюринга (задания в табл.19).

1)Построить граф переходов выбранной машины Тьюринга T_i;

2)перевести слово R=$a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}a_{47}$ в алфавите {0,1} в слово S в алфавите {a,b}, заменив 0 на a ,1 на *в;* заполнить таблицу 18.

Таблица 18

$a_{39}a_{40}a_{41}$	i	R=$a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}a_{47}$	S

3) применить машину Тьюринга T_i к начальной конфигурации. Составить протокол. Показать заключительную конфигурацию.

Таблица 19

T_1	*A*	*в*	*c*	*0*
q_1	q_2R	R		q_5L
q_2	q_1	q_3aL	q_1	q_5L
q_3	q_4bR		q_1R	
q_4	q_1R			
q_5	L	L	L	q_0R

T_2	*A*	*в*	*c*	*0*
q_1	R	q_2R	R	q_3L
q_2	q_1cL	q_1	q_1	q_3L
q_3	L	L	L	q_0R

T_3	*A*	*в*	*c*	*0*
q_1	R	q_2R		q_5L
q_2	q_3bL	q_1	q_1	q_5L
q_3		q_4aR		
q_4		q_1R		
q_5	L	L	L	q_0R

T_4	*A*	*в*	*c*	*0*
q_1	R	q_2R	R	q_4L
q_2	q_3cL	q_1	q_1	q_4L
q_3		q_3aR	q_1R	
q_4	L	L	L	q_0R

T_5	*A*	*в*	*c*	*0*
q_1	R	q_2R		q_5L
q_2	q_3bL	q_1	q_1	q_5L
q_3		q_4cR		
q_4		q_1R		
q_5	L	L	L	q_0R

T_6	*A*	*в*	*c*	*0*
q_1	q_2R	R	R	q_4L
q_2	q_1	q_3cL	q_1	q_4L
q_3	q_3bR		q_1R	
q_4	L	L	L	q_0R

T_7	*A*	*в*	*c*	*0*
q_1	q_2R	R	R	q_3L

q_2	q_1	$q_1 cR$	q_1	$q_3 L$
q_3	L	L	L	$q_0 R$

T_8	A	$в$	c	0
q_1	$q_2 R$	R		$q_5 L$
q_2	q_1	$q_3 aL$	q_1	$q_5 L$
q_3	$q_4 cR$			
q_4	$q_1 R$			
q_5	L	L	L	$q_0 R$

2.2 Методические указания по выполнению контрольных заданий

К заданию 1:

Для выполнения работы необходимо заполнить таблицу 11. Для этого определяем необходимые параметры Н и Ф. Н - порядковый номер студента в списке группы; Ф - число букв в фамилии студента.

Предположим под номером 5 в списке группы записан студент Иманов: Н=5, Ф=6.

Значения выбираются a_1-a_{48} из таблицы 12 по следующему правилу:

a_1-a_6 – 6 чисел подряд, начиная с позиции 5(000100);

a_7-a_{16} -10 чисел подряд, начиная с позиции 26(1110110101);

a_{17}-a_{26} -10 чисел подряд, начиная с позиции 31(1010111110);

a_{27}-a_{36}- 10 чисел подряд, начиная с позиции 47(0010110001);

a_{37}-a_{48}- 12 чисел подряд, начиная с позиции 63(110110100101).

Выбранные значения подставляем в таблицу 11А.

Таблица11А

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}	a_{30}	a_{31}	a_{32}
1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}	a_{39}	a_{40}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	a_{48}
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1

К заданию 2:

По заданному алгоритму выбираем из таблицы 11А двоичные числа и переводим в десятичную систему: $c=01_2=1_{10}$; $d=01_2=1_{10}$;$g=10_2=2_{10}$; $h=10_2=2_{10}$; $m=c+3=1+3=4$; $n=c+d+3=1+1+3=5$; $p=g+3=2+3=5$;$q=g+h+4=2+2+4=8$.

Заполняем таблицу 13А.

Таблица 13А

c	D	g	h	m	n	p	q
1	1	2	2	4	5	5	8

Найдем число следующих комбинаторных конфигураций:

$A_5^4, C_5^4, \bar{A}_5^4, \bar{C}_5^4, A_8^5, C_8^5, \bar{A}_8^5, \bar{C}_8^5.$

При этом для вычислений числа размещений без повторений используем формулу: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; с повторениями: $\bar{A}_n^k = n^k$.

Для вычисления числа сочетаний без повторений используется формула:

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; с повторениями: $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

У нас p=5;q= 8 m=4; n=5. Тогда:

$$A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 1*2*3*4*5 = 120, C_5^4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{4!\,5}{4!\,1!} = 5, \bar{A}_5^4 = 5^4 = 625,$$

$$\bar{C}_5^4 = C_{5+4-1}^4 = C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{4!*5*6*7*8}{4!*1*2*3*4} = 70,$$

$$A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 4*5*6*7*8 = 7020, C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{5!\,6*7*8}{5!\,1*2*3} = 56,$$

$$\bar{C}_8^5 = C_{8+5-1}^5 = C_{12}^5 = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5!\,7!} = \frac{7!\,8*9*10*11*12}{7!\,1*2*3*4*5} = 792,$$

$$\bar{A}_8^5 = 8^5 = 32768.$$

К заданию 3:

Согласно заданному алгоритму запишем элементарные конъюнкции $A = X^{a_1} * Y^{a_2} * Z^{a_3} = X^0 * Y^0 * Z^0 = \bar{X}\,\bar{Y}\,\bar{Z}$ и

С= $X^{a_6} * Y^{a_7} * Z^{a_8} = X^0 * Y^1 * Z^1 = \bar{X}\,YZ$ и дизъюнкцию

$B = X^{a_4} \vee Y^{a_5} = X^1 \vee Y^0 = X \vee \bar{Y}$.

С учетом $D = B \to C$, $E = A \leftrightarrow D$ заполняем таблицу 14А, немного расширив ее для большей наглядности.

Таблица 14А

X	Y	Z	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$	A	B	C	D	E
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1

1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1

Для результирующей функции
$E = X^{a_1} * Y^{a_2} * Z^{a_3} \leftrightarrow ((X^{a_4} \vee Y^{a_5}) \rightarrow X^{a_6} * Y^{a_7} * Z^{a_8} = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} \leftrightarrow ((X \vee \bar{Y}) \rightarrow \bar{X}YZ)$ строим СДНФ:

1) Выбираем строки в последнем столбце, значения в которых равны 1;
2) Составляем для каждой из выделенных строк конъюнкцию переменных X,Y,Z или их отрицаний так, чтобы наборам значений переменных в этих строках соответствовало значение 1.

Получим

для второй строки: $(\neg X)(\neg Y)Z$
для пятой строки: $X(\neg Y)(\neg Z);$
для шестой строки: $X(\neg Y)Z;$
для седьмой строки: $XY(\neg Z);$
для восьмой строки: $XYZ;$

3.Дизъюнкция этих формул - искомая формула:
$(\neg X)(\neg Y)Z \vee X(\neg Y)(\neg Z) \vee X(\neg Y)Z \vee XY(\neg Z) \vee XYZ.$

К заданию 4:
Используя таблицу 11А, заполним таблицу 15А:

Таблица 15А

X: / Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Y_1	1	1	1	0	1
Y_2	1	0	1	0	1
Y_3	1	0	1	0	1

(1) $\forall X \exists Y (P(X,Y) = 1)$
(2) $\forall Y \exists X (P(X,Y) = 1)$
(3) $\exists X \forall Y (P(X,Y) = 1)$
(4) $\forall Y \forall X (P(X,Y) = 1)$

Если внутренний квантор - $\exists$, а внешний - $\forall$, то для истинности формулы в каждом ряду таблицы, соответствующем переменной, связанной внешним квантором, должна присутствовать хотя бы одна единица. Для истинности высказывания (1) необходимо наличие единицы в каждом столбце; это условие не выполняется для четвертого столбца: высказывание ложно. Для истинности высказывания (2) необходимо наличие единицы в каждой строке; это условие выполняется: высказывание истинно. Для истинности (3) высказывания необходимо наличие столбца из единиц; такие столбцы в таблице есть(для X_1, для X_5): данное высказывание истинно. Для истинности высказывания (4) таблица должна состоять только из единиц. В нашей таблице имеются нули. Следовательно, данное высказывание ложное.

К заданию 5:

Образуем двузначное двоичное число $b=a_1a_2=00$. Переводим в десятичную систему ; 0 - номер задачи этого задания.

Найти область истинности предиката Р(Х,У), заданного предикатной формулой:

0. $P(X,У)=((X+У)\text{-четно} \rightarrow (/X-У/\leq 2))$, где Х=(3,6,8), У=(7,9).

Составим и заполним таблицу 15Б; при этом ставим в соответствующую строку-столбец единицу(1), если при данных значениях Х, У предикат принимает истинное значение, в противном случае – 0.

Согласно данным последнего столбца таблицы 15Б область истинности предиката Р(Х,У) составляет множество пар{(6,7),(6,9),(8,7),(8,9)}.

Таблица 15Б

X	Y	X+У- четно	$/X-У/\leq 2$	P(X,У)
3	7	1	0	0
3	9	1	0	0
6	7	0	0	1
6	9	0	0	1
8	7	0	1	1
8	9	0	1	1

К заданию 6:

Расставим символы a_1-a_{28} в указанные места матрицы А (таблица16А) размерности 8х8.

Таблица 16А

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*	*	0	0	*	*	*	0
2	1	*	0	*	*	*	0	1
3	*	*	*	*	1	*	1	*
4	*	0	1	*	1	0	*	1
5	0	1	*	*	*	1	*	*
6	0	1	0	*	*	*	*	*
7	1	*	*	1	1	1	*	1
8	*	*	0	*	0	0	*	*

1) Дополним матрицу А , заменив нулями и единицами символы * так, чтобы она представляла антирефлексивное антисимметричное отношение R на множестве (1,2,…8).

Отношение *R*, заданное на множестве *A* называется *рефлексивным*, если для всякого *a* из этого множества *aRa*.

Антирефлексивность в нашем случае будет заключаться в присвоении всем элементам $a_{i,i}$ значения 0: $a_{1,1}=0$, $a_{2,2}=0$, $a_{3,3}=0$, $a_{4,4}=0$, $a_{5,5}=0$, $a_{6,6}=0$, $a_{7,7}=0$, $a_{8,8}=0$.

Отношение *R*, заданное на множестве *A* называется *симметричным*, если на этом множестве из *aRв* следует *вRa*.

2)Для данной матрицы антисимметричность будет выражаться в выполнении условия $a_{ij} \neq a_{ji}$. Например, если в таблице 16А $a_{1,3}=0$, то $a_{3,1}$должно равняться 1,т.е. $a_{3,1}$=1.

Так как $a_{13}=a_{14}=a_{18}=a_{23}=a_{27}=a_{42}=a_{46}=a_{51}=a_{61}=a_{63}=a_{83}=a_{85}=a_{86}$=0, то соответствующим симметричным элементам таблицы присвоим значения, равные 1: $a_{31}=a_{41}=a_{81}=a_{32}=a_{72}=a_{24}=a_{64}=a_{15}=a_{16}=a_{36}=a_{38}=a_{58}=a_{68}$=1.
Так как $a_{21}=a_{28}=a_{35}=a_{37}=a_{43}=a_{45}=a_{48}=a_{52}=a_{56}=a_{62}=a_{71}=a_{74}=a_{75}=a_{76}=a_{78}$ =1, то соответствующим симметричным элементам таблицы присвоим значения равные 0: $a_{12}=a_{82}=a_{53}=a_{73}=a_{34}=a_{54}=a_{84}=a_{25}=a_{65}=a_{26}=a_{17}=a_{47}=a_{57}=a_{67}=a_{87}$ =0.Заполняем таблицу 16Б.

Таблица 16Б

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	1	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0	0	1
3	1	1	0	0	1	1	1	1
4	1	0	1	0	1	0	0	1
5	0	1	0	0	0	1	0	1
6	0	1	0	1	0	0	0	1
7	1	1	0	1	1	1	0	1
8	1	0	0	0	0	0	0	0

3) Рефлексивность будет заключаться в присвоении всем элементам $a_{i,i}$ значения 1: $a_{1,1}=1$, $a_{2,2}=1$, $a_{3,3}=1$, $a_{4,4}=1$, $a_{5,5}=1$, $a_{6,6}=1$, $a_{7,7}=1$, $a_{8,8}=1$.
Для данной матрицы симметричность будет выражаться в выполнении условия $a_{ij}=a_{ji}$. Например, если в таблице $a_{1,3}=0$, то $a_{3,1}$должно равняться 0,т.е. $a_{3,1}=0$.

Так как $a_{13}=a_{14}=a_{18}=a_{23}=a_{27}=a_{42}=a_{46}=a_{51}=a_{61}=a_{63}=a_{83}=a_{85}=a_{86}$=0, то соответствующим симметричным элементам таблицы присвоим значения,

равные 0:
$a_{31}=a_{41}=a_{81}=a_{32}=a_{72}=a_{24}=a_{64}=a_{15}=a_{16}=a_{36}=a_{38}=a_{58}=a_{68}=0$.
Так как
$a_{21}=a_{28}=a_{35}=a_{37}=a_{43}=a_{45}=a_{48}=a_{52}=a_{56}=a_{62}=a_{71}=a_{74}=a_{75}=a_{76}=a_{78}$ =1,то соответствующим симметричным элементам таблицы присвоим значения равные 1:
$a_{12}=a_{82}=a_{53}=a_{73}=a_{34}=a_{54}=a_{84}=a_{25}=a_{65}=a_{26}=a_{17}=a_{47}=a_{57}=a_{67}=a_{87}$ =1. Заполняем таблицу 16В.

Таблица 16В

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	0	0	0	0	1	0
2	1	1	0	0	1	1	0	1
3	0	0	1	1	1	0	1	0
4	0	0	1	1	1	0	1	1
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	0	0	1	1	0	0
7	1	0	1	1	1	1	1	1
8	0	1	0	1	0	0	1	1

К заданию 7:
Пусть v_1 и v_2 - вершины, $e=(v_1,v_2)$ - соединяющее их ребро. Тогда вершина v_1 и ребро e инцидентны, вершина v_2 и ребро e инцидентны.
Элементы матрицы инциденций для орграфа вычисляются по правилу:

$$H[i,j]=\begin{cases} 1, \textit{если вершина } v_i \textit{ инцидентна ребру } e_j \textit{ и является концом} \\ 0, \qquad \textit{если вершина } v_i \textit{ и ребро } e_j \textit{ не инцидентны} \\ -1, \textit{если вершина } v_i \textit{ инцидентна ребру } e_j \textit{ и является его началом} \end{cases}$$

Из символов a_{21}-a_{41} образуем 7 трехзначных двоичных чисел b_1-b_7
$b_1=a_{21}a_{22}a_{23}$ =111, $b_2=a_{24}a_{25}a_{26}$ =110, $b_3=a_{27}a_{28}a_{29}$= 001, $b_4=a_{30}a_{31}a_{32}$ = 011, $b_5=a_{33}a_{34}a_{35}$=000, $b_6=a_{36}a_{37}a_{38}$=111, $b_7=a_{39}a_{40}a_{41}$ =011. Переводим их в десятичную систему: $b_1=7$, $b_2=6$, $b_3=1$, $b_4=3$, $b_5=0$, $b_6=7$, $b_7=3$
Так как $b_5=0$, то это число заменим
$b_5=1$.Ориентированный граф G с множеством вершин V={1,2,3,4,5,6,7}задан списком дуг E={(1, 7),(2, 7),(2, 6),(3, 1),(3, 3),(4, 3),(4, 1),(5, 6),(6, 7),(6, 3),(7, 3),(7, 7)}.

Реализация орграфа представлена на рисунке 32, матрица инциденций – в таблице 16Г.

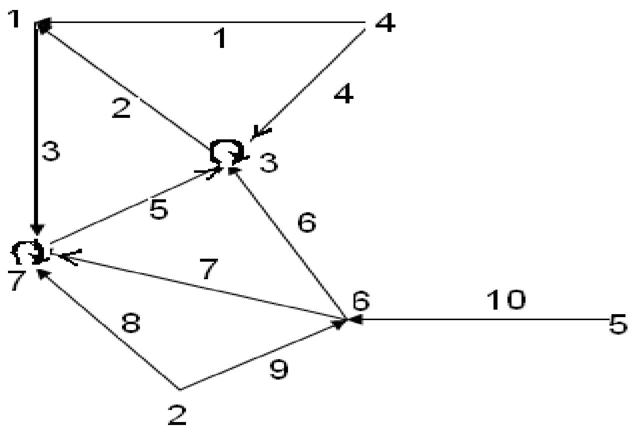


Рис.32

Таблица 16Г

Вершины	ребра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2		0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
3		0	-1	0	1	1	1	0	0	0	0
4		-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
6		0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	1
7		0	0	-1	0	-1	0	1	1	0	0

К заданию 8:

Заполним таблицу 17А следующим образом:

Из символов a_{21}-a_{48} образуем 7 четырехзначных двоичных чисел b_1-b_7

$b_1=a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}=1111$, $b_2=a_{25}a_{26}a_{27}a_{28}=1000$, $b_3=a_{29}a_{30}a_{31}a_{32}=1011$, $b_4=a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}=0001$, $b_5=a_{37}a_{38}a_{39}a_{40}=1101$, $b_6=a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}=1010$, $b_7=a_{45}a_{46}a_{47}a_{48}=0101$.

Двоичные числа переведем в десятичную систему счисления:

Таблица 17А

b_i в двоичной записи	b_i в десятичной записи	c_i	$d_i=c_i/C$ $i=2,3,\ldots 7$	Сообщения и их коды Фано
1111	15	16	$d_1=0{,}228$	A_1:
1000	8	9	$d_2=9/70=0{,}129$	A_2:
1011	11	12	$d_3=12/70=0{,}171$	A_3:
0001	1	2	$d_4=2/70=0{,}029$	A_4:
1101	13	14	$d_5=14/70=0{,}2$	A_5:
1010	10	11	$d_6=11/70=0{,}157$	A_6:
0101	5	6	$d_7=6/70=0{,}086$	A_7:

$C= 16+9+12+2+14+11+6=70$

$d_1=1-(0{,}129+0{,}171+0{,}029+0{,}2+0{,}157+0{,}086)=0{,}228$

Алгоритм Фано заключается в следующем. Упорядоченный в порядке убывания вероятностей список букв делится на две последовательные части так, чтобы суммы вероятностей входящих в них букв как можно меньше отличались друг от друга. Буквам из первой приписывается символ 0, а буквам из второй части - символ 1. Далее точно также поступают с каждой из полученных частей, если она содержит, по крайней мере, две буквы. Этот процесс продолжается до тех пор, пока весь список не разобьется на части, содержащие по одной букве. Каждой букве ставится в соответствие последовательность символов, прописанных в результате этого процесса данной букве. Полученный код является префиксным. У нас согласно таблице 17А следующее распределение сообщений и соответствующих частот (табл.17а):

Таблица 17а

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
0.228	0.129	0.171	0.029	0.2	0.157	0.086

Упорядочим список сообщений по убыванию частот и разделим группу событий на две части, различающиеся возможно меньше по суммарной частоте (табл.17б).

Таблица 17б

A_1	A_5	A_3	A_6	A_2	A_7	A_5
0.228	0.2	0.171	0.157	0.129	0.086	0.029

Установим первый символ кода 0 для сообщений первой группы, 1 - для второй группы (табл. 17в).

Таблица 17в

A_1	A_5	A_3	A_6	A_2	A_7	A_5
0.228	0.2	0.171	0.157	0.129	0.086	0.029
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Будем повторять процедуру деления на две части в каждой из групп до тех пор, пока в группе больше одной строки, добавляя каждый раз к коду справа 0 для первой части подразбиения и 1 -для второй части (рис.33)

A_1	0.228	0.428	0.228						00
A_5	0.2		0.2						01
A_3	0.171	0.572	0.171	0.328	0.171				100
A_6	0.157		0.157		0.157				101
A_2	0.129		0.129	0.244	0.129				110
A_7	0.086		0.086		0.086	0.115	0.086		1110
A_5	0.029		0.029		0.029		0.029		1111

Рис.33 Алгоритм Фано

Окончательный код для данного списка дан в таблице 17г.

Таблица 17г

A_1	A_5	A_3	A_6	A_2	A_7	A_5
0.228	0.2	0.171	0.157	0.129	0.086	0.029
00	**01**	**100**	**101**	**110**	**1110**	**1111**

Стоимость кода 2*(0.228+0.2)+3*(0.171+0.157+0.129)+4*(0.086+0.029)=2.687
Кодовое дерево имеет вид (рис.34):

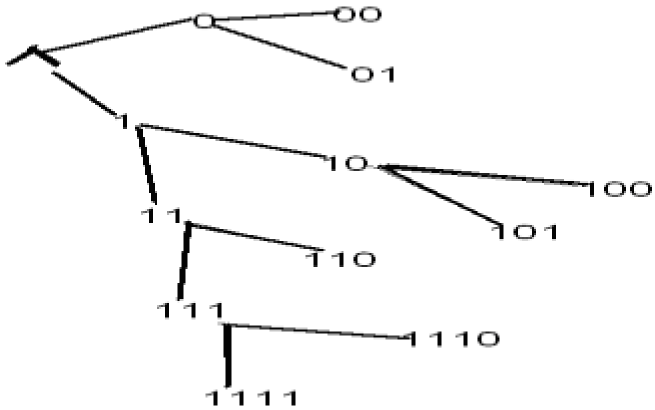


Рис.34 Кодовое дерево для таблицы 17г

Алгоритм Хафмена состоит в следующем.

Упорядочивается в порядке убывания вероятностей список букв. В исходном упорядоченном массиве вероятностей *P* отбрасываются две последние(наименьшие) вероятности, их сумма вставляется в массив *P*, так чтобы массив(на единицу меньшей длины) остался упорядоченным. Так происходит до тех пор, пока не останется массив их двух элементов. Для пары букв оптимальное кодирование известно: первой букве назначается код 0, а второй - 1. После этого в обратном порядке строятся оптимальные коды для трех, четверых и т.д. элементов. При этом нужна только последовательность номеров кодов, которые были изъяты из массива кодов и продублированы в конце с добавлением разряда.

Рассмотрим уже упорядоченный массив (табл.17б)
Складываем две наименьшие частоты (0.086+0.029=0.115), вставим в массив, не нарушая порядка убывания (табл.17д).

Таблица 17д

A_1	A_5	A_3	A_6	A_2	A
0.228	0.2	0.171	0.157	0.129	0.115

Повторяем данную процедуру, пока не останется массив из двух элементов (табл.17е-17и).

Таблица 17е

B	A_1	A_5	A_3	A_6
0.129+0.115=0.244	0.228	0.2	0.171	0.157

Таблица 17ж

C	B	A_1	A_5
0.171+0.157=0.328	0.244	0.228	0.2

Таблица 17з

D	C	B
0.228+0.2=0.428	0.328	0.244

Таблица 17и

E	D
0.328+0.244=0.572	0.428

Первой букве последней таблицы назначаем код 0, а второй – 1(табл.17к).

Таблица 17к

E	D
0	1

В первый столбец (E) таблицы 17и записана сумма частот, соответствующих сообщениям C и B. Код, установленный для E(это 0), увеличиваем в конце на один разряд, приписывая соответственно 0 и 1(табл.17л).

Таблица 17л

D	C	B
1	00	01

Следующие таблицы (табл.17м-17п) составляем по тому же принципу:

Таблица 17м

C	B	A_1	A_5
00	01	10	11

Таблица 17н

B	A_1	A_5	A_3	A_6
01	10	11	000	001

Таблица 17о

A_1	A_5	A_3	A_6	A_2	A
10	11	000	001	010	011

Таблица 17п

A_1	A_5	A_3	A_6	A_2	A_7	A_5
10	11	000	001	010	0110	0111

Окончательное распределение кодов по алгоритму Хафмена в таблице 17п.
Стоимость кода 2*(0.228+0.2)+3*(0.171+0.157+0.129)+4*(0.086+0.029)=2.687.

Кодовое дерево имеет вид (рис.35):

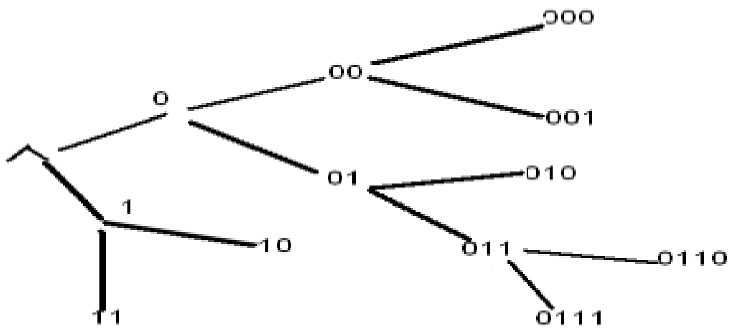


Рис.35

К заданию 9:
Машиной Тьюринга (МТ) называется система вида $T=\{A,Q,P\}$.
$A = \{a_1, a_2,, \ldots, a_m\}$- алфавит МТ;
Q=$\{q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n\}$- конечное множество, элементы которого называются состояниями МТ: q_1- *начальное* состояние, q_0-*конечное* состояние.
P- программа, состоящая из системы команд вида $q_i a_k \to q_j a_l m$, где
m-один из символов сдвига: L-налево , R- направо , E- на месте (обычно не пишется).
Машина Тьюринга состоит из

1) управляющего устройства

2) ленты, в каждой из ячеек которой может быть записан один из символов

алфавита $A = \{a_1, a_2,, \ldots, a_m\}$;

3) читающей и пишущей головки с лентопротяжным механизмом.

Шаг работы МТ. Если МТ находится в состоянии q_i и в обозреваемой ячейке записан символ a_k , то выполняется единственная команда с левой частью, образованной этой парой: $q_i a_k \to q_j a_l m$; МТ переходит в состояние q_j , в ячейке на место a_k записывается a_l и головка сдвигается по ленте согласно m (на одну ячейку влево или на одну ячейку вправо) либо остается на месте. Затем совершается следующий шаг по той же схеме.

В начальный момент МТ находится в состоянии; если в процессе работы МТ переходит в одно из заключительных состояний, то она останавливается. МТ останавливается также, если отсутствует команда, которую нужно выполнить: это называется безрезультативной остановкой.

Переведем в десятичную систему двоичное число $a_{39}a_{40}a_{41}$=011=3_{10} и прибавим 1. Номер задания: i=3+1=4. Заполняем таблицу 18А:

Таблица 18А

$a_{39}a_{40}a_{41}$	i	$R=a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}a_{47}$	S
011	*4*	*010010*	*abaaba*

Предположим, что под номером 4 находится следующее задание (табл.19А):

Граф переходов содержит 7 вершин : $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$. Из каждой вершины исходит столько дуг, сколько команд в соответствующей строке таблицы, однако некоторые кратные дуги могут быть склеены, если у них одинаковая правая часть: например, для пары ситуаций $q_5 a$, $q_5 b$, а также для пары $q_6 a$, $q_6 b$.

Таблица 19А

T_4	*a*	*в*	*c*	*0*
q_1	q_2R	R		q_6L
q_2	q_3cL	q_4cL		
q_3	aR	q_4aR		q_5aL
q_4	q_3bR	bR		q_5bL
q_5	L	L	q_1aR	
q_6	L	L	aL	q_0R

Окончательный вид графа переходов МТ представлен на рисунке 36.

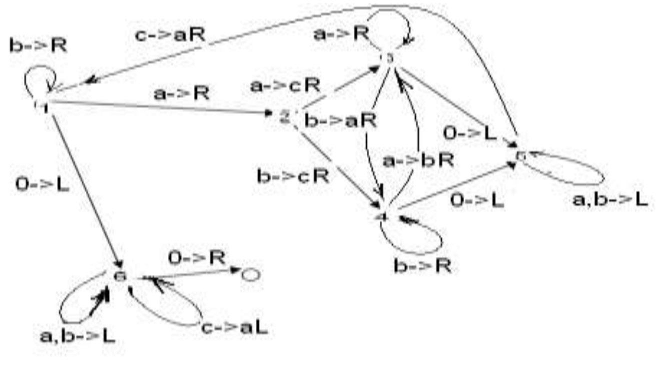


Рис.36

Протокол представляет собой последовательность $К_1 \rightarrow К_2 \rightarrow К_3 \rightarrow \ldots$конфигураций (слово на ленте и положение головки МТ), где $К_1$- начальная конфигурация, а каждая из конфигураций $К_2$,$К_3$ и т.д. получается из предыдущей в результате применения программы МТ.

Для компактности протокола и удобства рассмотрения будем изображать конфигурацию словом во внешнем алфавите, а положение головки в состоянии q_i на ячейке ленты – подстрочным индексом, т.е. символ x_i обозначает головку в состоянии q_i на ячейке ленты с символом x.

Протокол заканчивается при достижении заключительного состояния q_0.

В таблице 19Б записаны конфигурации для данного примера.

В нашем случае МТ останавливается из-за отсутствия команды, которую нужно выполнить. Последняя строка протокола изображает заключительную конфигурацию, которую перепишем в стандартном виде:

a a b a a a a b a

Таблица 19Б

Момент	Конфигурации МТ
0	a_1 b a a b a
1	a b_2 a a b a
2	a c a_4 a b a
3	a c b a_3 b a
4	a c b a b_3 a
5	a c b a a a_4
6	a c b a a b 0_3
7	a c b a a b_5 a
8	a c b a a_5 b a
9	a c b a_5 a b a
10	a c b_5 a a b a
11	a c_5 b a a b a
12	a a b_1 a a b a
13	a a b a_1 a b a
14	a a b a a_2 b a
15	a a b a c b_3 a
16	a a b a c a a_4
17	a a b a c a b 0_3
18	a a b a c a b_5 a
19	a a b a c a_5 b a
20	a a b a c_5 a b a
21	a a b a a a_1 b a
22	a a b a a a b_2 a
23	a a b a a a c a_4
24	a a b a a a c b 0_3
25	a a b a a a c b_5 a
26	a a b a a a c_5 b a
27	a a b a a a a b_1 a
28	a a b a a a a b a_1
29	a a b a a a a b a 0_2

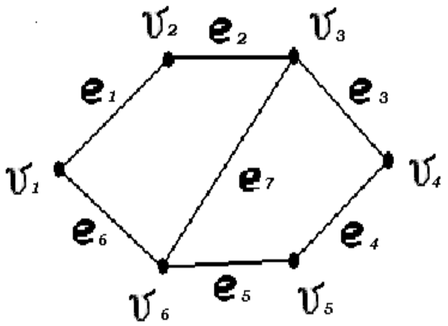
3 ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

1. Закон переименования связанных переменных имеет вид:
A) $\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y)$
B) $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$
C) $\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$
D) $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
E) $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

2. Закон перестановки одноименных кванторов имеет вид:
A) $\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y)$
B) $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \exists x \exists y P(x,y)$
C) $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
D) $\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$
E) $\neg \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

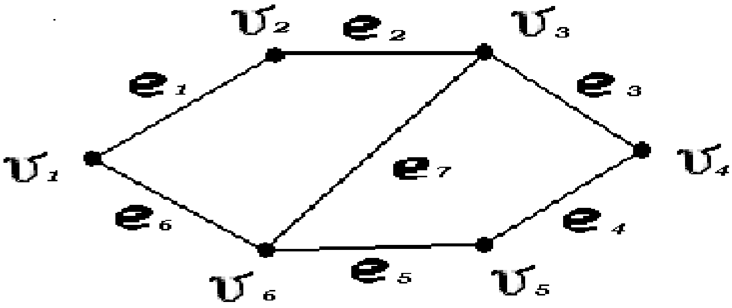
3. Закон отрицания кванторов имеет вид:
A) $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \exists x \exists y P(x,y)$
B) $\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$
C) $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
D) $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$
E) $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

4. Дан граф.



Назвать несмежные вершины
A) v_1 и v_6
B) v_1 и v_5
C) v_1 и v_2
D) v_2 и v_3
E) v_5 и v_6

5. Матрица смежности вершин графа



имеет вид

A)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	0	0	0	1
v_2	1	0	1	0	0	0
v_3	0	1	0	1	0	1
v_4	0	0	1	0	1	0
v_5	0	0	0	1	0	1
v_6	1	0	1	0	1	0

B)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	0	0	0	1
v_2	1	1	1	0	0	0
v_3	0	1	0	1	0	1
v_4	0	0	1	1	1	0
v_5	0	0	0	1	0	1
v_6	1	0	1	0	1	0

C)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	1	1	0	0	0	1
v_2	1	0	1	0	0	0
v_3	0	1	0	1	0	1
v_4	0	0	1	0	1	0
v_5	0	1	0	1	1	1
v_6	1	0	1	0	1	0

D)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	0	0	0	0	1
v_2	1	0	1	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0	1
v_4	0	0	1	0	0	0
v_5	0	0	0	1	0	1
v_6	1	0	0	0	1	0

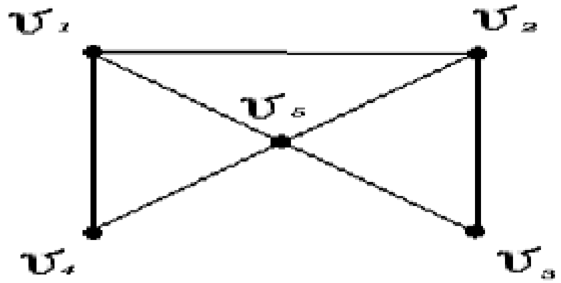
E)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	0	0	0	0
v_2	1	0	1	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0	1

v_4	0	0	1	0	1	0
v_5	0	0	0	0	0	1
v_6	0	0	1	0	1	0

6. Валентностью или степенью вершины v называется:
A) количество ребер графа
B) количество вершин графа
C) количество ребер, инцидентных вершине
Д) количество вершин, несмежных с ней
E) длина маршрута

7.Дан граф.



Маршрут v_1, v_5, v_2, v_3-это
A) простая цепь
B) простой цикл
C) непростая цепь
Д) непростой цикл
E) турнир.

8. Пересечение множеств – это
A) $A \cap B = \{x | x \in A и \quad x \in B|\}$
B) $A \cap B = \{x | x \in A \quad или \quad x \in B|\}$
C) $A \cap B = \{x | x \in A \quad и \quad x \notin B|\}$
Д) $A \cap B = \{x | x \notin A \quad и \quad x \in B|\}$
E) $A \cap B = \{x | x \notin A \quad и \quad x \notin B|\}$

9. Разность множеств -это
A) $A \setminus B = \{x | x \in A и \quad x \in B|\}$
B) $A \setminus B = \{x | x \in A \quad или \quad x \in B|\}$
C) $A \setminus B = \{x | x \in A \quad и \quad x \notin B|\}$
Д) $A \setminus B = \{x | x \notin A \quad и \quad x \in B|\}$
E) $A \setminus B = \{x | x \notin A \quad и \quad x \notin B|\}$

10.Закон двойного отрицания.

А) $\overline{\overline{A}} = A$

В) $A \cap A = A$

С) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Д) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Е) $A \cap (A \cup B) = A$

11. Закон де Моргана

А) $A \cap B = B \cap A$

В) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup C$

С) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Д) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Е) $A \cap \overline{A} = \Theta$

12. $A \times B = \{(a,b) | a \in A \quad и \quad B \in b\}$, где A и B – множества Это

А) объединение множеств

В) декартово произведение множеств

С) пересечение множеств

Д) дополнение

Е) разность

13. Отношение R на множество A называется рефлексивным, если

А) для всякого a из этого множества aRa

В) на этом множестве из $aRв$ и bRc следует aRc

С) для различных элементов a и $в$ из A из того, что $aRв$ следует, что $в$ отношении с a не находится

D) на этом множестве из $aRв$ следует bRa

Е) на этом множестве из $aRв$ и $cRв$ следует aRc

14. Отношение R на множество A называется транзитивным, если

А) для всякого a из этого множества aRa

В) на этом множестве из $aRв$ и bRc следует aRc

С) для различных элементов а и в из А из того, что $aRв$ следует, что $в$ отношении с a не находится

D) на этом множестве из $aRв$ следует bRa

Е) на этом множестве из $aRв$ и $cRв$ следует aRc

15. Пусть дано множество из n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из R элементов называется:

А) размещением из n элементов по R элементов

В) сочетанием из n элементов по R элементов

С) перестановками из n элементов

D) подстановками из n по R
E) расстановками из n по R

16. $\overline{P}_n(k_1, k_2, ...k_m) = \dfrac{n!}{k_1! k_2! ... k_m!}$ это

A) сочетание с повторением
B) размещения с повторениями
C) перестановки с повторениями
D) расстановки с повторениями
E) подстановки с повторениями

17. $\overline{C}_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$. Это

A) сочетание с повторением
B) размещения с повторениями
C) перестановки с повторениями
D) расстановки с повторениями
E) подстановки с повторениями

18. Конъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание истинное тогда и только тогда, когда
A) оба высказывания истинны
B) A ложно
C) оба высказывания ложны
D) A истинно, B ложно
E) A ложно, B истинно

19. Операция, определенная заданной таблицей истинности,

A	*B*	*?*
И	*и*	*и*
И	*л*	*л*
Л	*и*	*л*
Л	*л*	*л*

называется
A)конъюнкцией
B)дизъюнкцией
C)эквиваленцией
D)импликацией
E) отрицанием

20. Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание ложное тогда и только тогда, когда
A) оба высказывания истинны

B) A ложно
C) оба высказывания ложны
D)A истинно, B ложно
E)A ложно, B истинно.

21. Дана таблица истинности формулы.

x	*y*	*z*	*F(x,y,z)*
и	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*л*
л	*и*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*
л	*л*	*л*	*и*

Найти СКНФ этой формулы.

A) $XYZ \vee \bar{X}YZ \vee \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$

B) $XYZ \vee \bar{X}YZ \vee XY\bar{Z}$

C) $XYZ \wedge \bar{X}YZ\ \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$

D) $Z \vee \bar{X}YZ \vee \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$

E) $(\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z)(\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z})(X \vee \bar{Y} \vee Z)(X \vee Y \vee \bar{Z})$

22. Найти формулу, соответствующую схеме

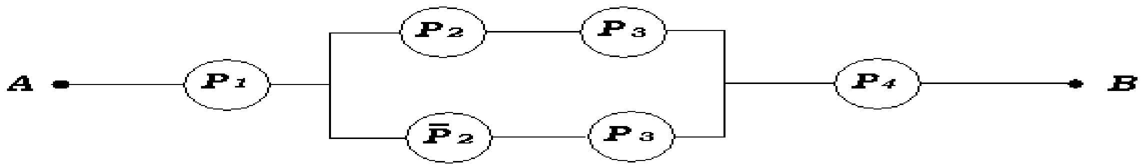
A) $(X_1 \vee X_2)(X_3 \vee \bar{X}_1)$

B) $(X_1 \vee X_2 \vee X_3)\bar{X}_1$

C) $X_1 \vee (X_2 \vee X_3 \vee \bar{X}_2 X_3)X$

D) $X_1(X_2 X_3 \vee \bar{X}_2 X_3)X_4$

E) $X_1 X_2 X_3$



23. Найти формулу, соответствующую схеме

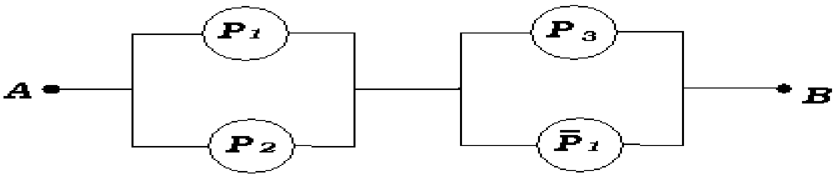
A) $(X_1 \vee X_2)(X_3 \vee \bar{X}_1)$

B) $(X_1 \vee X_2 \vee X_3)\bar{X}_1$

C) $X_1 \vee (X_2 \vee X_3 \vee \bar{X}_2 X_3)X$

D) $X_1(X_2 X_3 \vee \bar{X}_2 X_3)X_4$

E) $X_1 X_2 X_3$



24. Составить таблицу истинности формулы $A = \overline{X}YZ$

A)

X	*Y*	*Z*	*A*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

B)

X	*Y*	*Z*	*A*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

C)

X	*Y*	*Z*	*A*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

D)

X	*Y*	*Z*	*A*
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1

1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

E)

X	*Y*	*Z*	*A*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

25. Дана таблица истинности формулы. Найти СДНФ этой формулы

x	*y*	*z*	*F(x,y,z)*
и	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*л*
л	*и*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*
л	*л*	*л*	*и*

A) $XYZ \vee \bar{X}YZ \vee \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$

B) $XYZ \vee \bar{X}YZ \vee XY\bar{Z}$

C) $XYZ \wedge \bar{X}YZ\,\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$

D) $Z \vee \bar{X}YZ \vee \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$

E) $XYZ \vee \bar{X}YZ$

26. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы первый и второй тома не стояли рядом?
A)28
B)29
C)28!
D)29!
E)28*29!

27. Составить формулу, соответствующую таблице истинности

x	*y*	*z*	*F*
и	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*л*
л	*и*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*и*
л	*л*	*и*	*л*
л	*л*	*л*	*л*

A) $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)\ \ (x \vee y \vee z)$

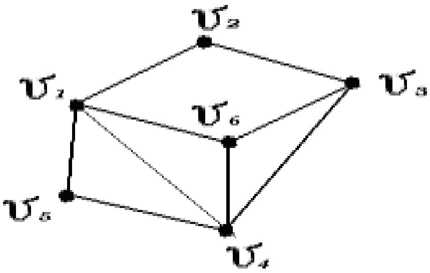
B) $(\bar{x} \vee y \vee z)\ (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})$

C) $(xyz) \vee (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$

Д) $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee (x\bar{y}z) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})$

E) $xyz\ \ (\bar{x} \vee y \vee z)$

28. Степень вершины v_6 графа G



A) 2
B) 3
C) 4
Д) 5
E) 1

29. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5. можно составить из цифр 0,1,3,5,7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?
A)5
B)46
C)55
D)12
E)42

30. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы первый и второй тома не стояли рядом?
A)28
B)29

C)28!
D)29!
E)28*29!

31. Сколько различных слов (понимается любая комбинация букв) можно составить , переставляя буквы в слове MISSISSIPPI ?
A)11!
B)4!
C)2!
D)11!/2
E)11!/(4!4!2!)

32. Среди данных формул указать те, которые ложны при любой интерпретации
1. $P(x) \wedge \overline{P}(x)$
2. $Q(x) \vee \overline{Q}(x)$
3. $(\overline{\forall} x \overline{P}(x)) \leftrightarrow (\exists x \overline{P}(x))$
4. $P(x) \to (Q(x) \vee \overline{Q}(x))$
5. $(P(x) \vee \overline{P}(x)) \to (Q(x) \wedge \overline{Q}(x))$

A) 2,3,4
B) 1,2
C) 2,3
D) 3,4
E) 1,3,5

33. Сколькими способами 3 награды (I,II,III) места могут быть распределены между 10 участниками соревнований?
A) C^3_{10}
B) 3 * 10
C) A^3_{10}
Д) P_{10}
E) P_3

34. Сколько разных «**слов**» можно получить, переставляя буквы в слове: СОЛНЦЕ

A) 7!
B) C^7_7
C) $A^1_7 {*} C^7_7$
D) 7
E) C^1_7

35. Из пункта А в пункт В можно добраться самолетом , поездом, автобусом, а из него в пункт С – пешком , на тракторе , на лошадях , на лодке. Сколькими способами можно выбрать дорогу из пункта А до пункта С через В ?

A) 12

B) 7

C) 3

Д) 4

E) 5

36. Среди данных формул указать те, которые истинны при любой интерпретации:

1. $P(x) \wedge \overline{P}(x)$
2. $Q(x) \vee \overline{Q}(x)$
3. $(\overline{\forall} x \overline{P}(x)) \leftrightarrow (\exists x \overline{P}(x))$
4. $P(x) \rightarrow (Q(x) \vee \overline{Q}(x))$
5. $(P(x) \vee \overline{P}(x)) \rightarrow (Q(x) \wedge \overline{Q}(x))$

A) 2,4

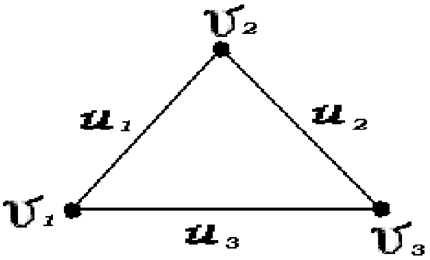
B) 1,2

C) 2,3

D) 3,4

E) 4,5

37. Матрица инцидентности для графа G имеет вид



A)

	u_1	u_2	u_3
v_1	1	0	1
v_2	1	1	0
v_3	0	1	1

B)

	u_1	u_2	u_3
v_1	0	0	0
v_2	1	1	0
v_3	1	1	1

C)

	u_1	u_2	u_3
v_1	1	0	1
v_2	0	0	0
v_3	1	1	1

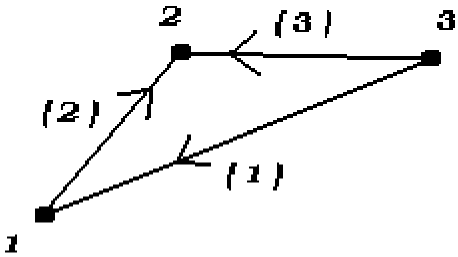
D)

	u_1	u_2	u_3
v_1	1	0	1
v_2	1	1	0
v_3	0	0	0

E)

	u_1	u_2	u_3
v_1	0	0	1
v_2	1	0	0
v_3	1	1	0

38. Матрица весов $C[i,j]$, графа G



имеет вид

A) $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty \\ \infty & 0 & \infty \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

B) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ \infty & 0 & \infty \\ 0 & 2 & \infty \end{pmatrix}$

C) $C = \begin{pmatrix} \infty & 0 & \infty \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & \infty \end{pmatrix}$

D) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & \infty \\ \infty & 0 & \infty \end{pmatrix}$

E) $C = \begin{pmatrix} 2 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

39. Автомобильные номера состоят из трех букв (всего используется 30 букв) и четырех цифр (используется все 10 цифр). Сколько автомобилей можно занумеровать таким образом, чтобы никакие два автомобиля не имели одинакового номера?

A) $A^{3}_{30}*A^{4}_{10}$

B) $A^{3}_{30}+A^{4}_{10}$

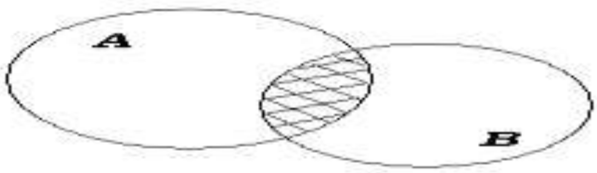
C) $\overline{A}^{3}_{30}\cdot\overline{A}^{4}_{10}$

Д) $C^{3}_{30}\cdot C^{4}_{10}$

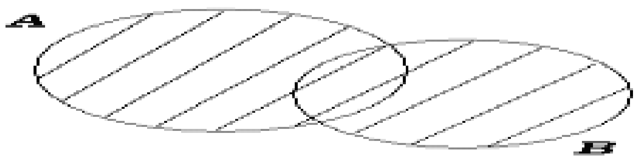
E) $\overline{C}^{3}_{30}\cdot\overline{C}^{4}_{10}$

40. Какая из диаграмм Венна соответствует операции $A\cap B=\{x|x\in A и \quad x\in B|\}$?

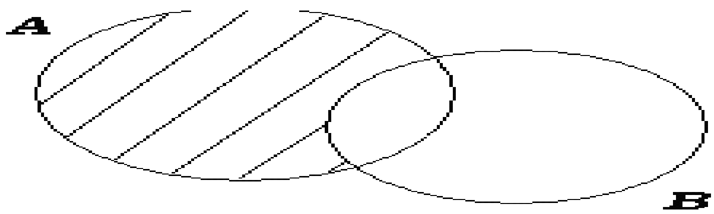
A)



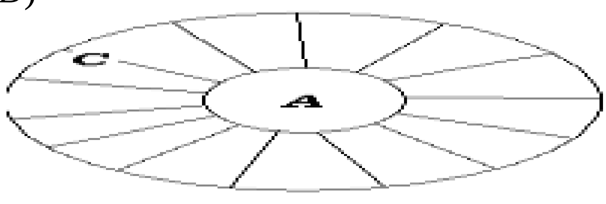
B)



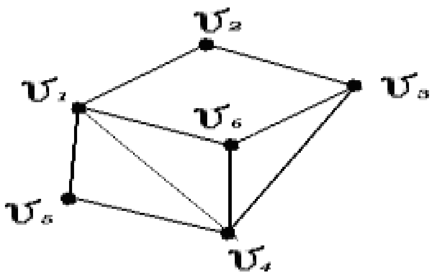
C)



D)



41. Является ли граф эйлеровым?

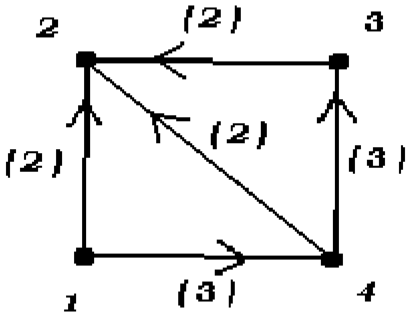


A) да

B) нет

C)	двудольный
Д)	полный
E)	тривиальный

42. Матрица весов для графа G



имеет вид

A) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & 0 \\ \infty & 2 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

E)
$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 2 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

43. Закон склеивания имеет вид:

A) $x \vee (x \wedge y) \equiv x$

B) $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \equiv y$

C) $x \rightarrow y \equiv \neg y \rightarrow \neg x$

D) $x \wedge y \equiv y \wedge x$

E) $(x \leftrightarrow y) \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

44. Z- универсальное множество всех целых чисел, Z_2 -множество всех четных целых чисел. Описать словесно множество $\bar{Z}_2$.

A) Множество четных целых чисел

B) Множество четных чисел, меньших 10.

C) Множество целых чисел, меньших 10.

D) Множество нечетных целых чисел.

E) Множество четных целых чисел, меньших 10.

45. Какие из высказываний A, B, C и D являются истинными, если:

1) $A \wedge (2*2=4)$ - истинное высказывание;

2) $B \wedge (2*2=4)$ -ложное высказывание;

3) $C \vee (2*2=5)$ -истинное высказывание;

4) $D \vee (2*2=5)$ -ложное высказывание?

A) A и D

B) C и D

C) B и C

D) D

E) A и C

46. Какие из формул являются тавтологиями?

1) $\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\bar{X} \wedge \bar{Y})$

2) $\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\bar{X} \vee \bar{Y})$

3) $\overline{X \vee Y} \leftrightarrow (\bar{X} \vee \bar{Y})$

4) $\overline{X \vee Y} \leftrightarrow (\bar{X} \wedge \bar{Y})$

A) 1,3

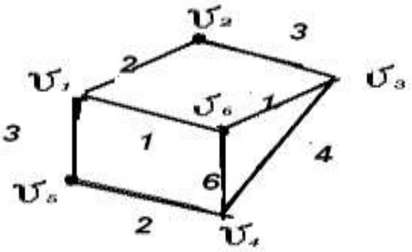
B) 2,3

C) 1,2

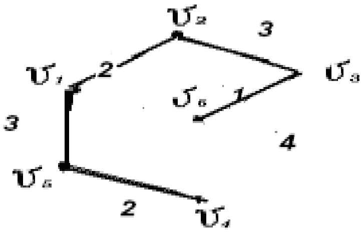
D) 2,4

E) 1,4

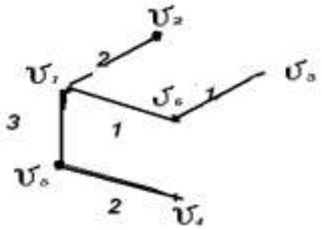
47. Дан граф с весами



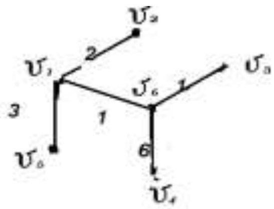
Найти кратчайший остов.



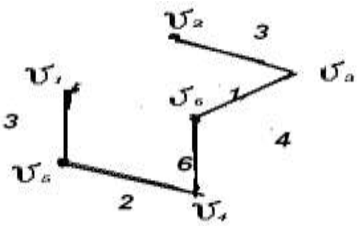
A)



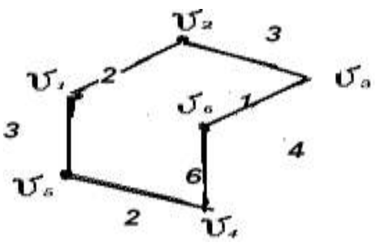
B)



C)

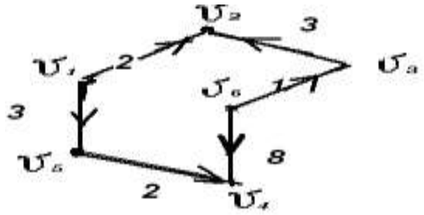


D)



E)

48.



Матрица весов орграфа имеет вид:

A) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$

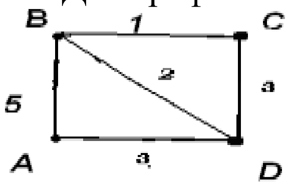
B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 8 & \infty & 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & 1 & 3 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & 8 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$

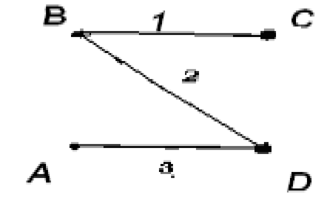
E) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ 8 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 2 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$

49. Дан граф с весами

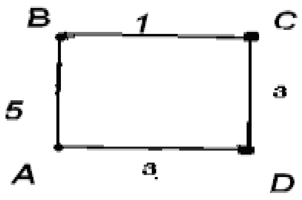


Найти кратчайший остов

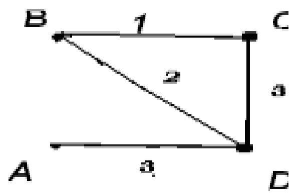
A)



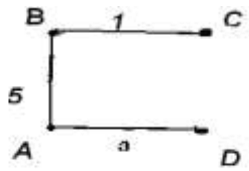
B)



C)



D)



E)

50. Достаточное условие гамильтонова графа
A) связный граф, все вершины которого имеют четную степень;
B) все вершины имеют нечетную степень
C) $d^{+}v=0$
D) $d^{-}v=0$
E)если для любой вершины v графа $d\,v \geq p{:}2$, где p - число вершин графа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1.Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Санкт-Петебург: Питер,2004г.
2.Липский В. Комбинаторика для программистов. Москва: Мир, 1988г.
3.Кулабухов С.Ю. Дискретная математика. Таганрог, 2001г.
4.Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Дискретная математика. Москва-Новосибирск:ИНФРА-М_НГТУ
5.Евстигнеев В.А. Применение теории графов в программировании. Москва: Наука, 1985.
6.Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. Москва: Наука.1977г.
7. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики.(Под общ. редакцией С.В.Яблонского и О.Б.Лупанова).М.Наука,1974
8.Ветухновский Ф.Я.Дискретная математика. Юнита10. М.СГУ,2002.

СОДЕРЖАНИЕ

Формат 60х84 1\12
Объем 79 стр., 6,6 печатных листа
Тираж 20 экз.
Отпечатано
В Редакционно- издательском отделе
КГУТиИ им.Ш.Есенова
г.Актау, 32мкр.