УДК 622.011.4; 622.023+539.3

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С РАСЧЕТНЫМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ДВУХУЗЛОВЫМИ СТЕРЖНЕВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНОСТЯХ

Кошакаева Ф.М.

Бұл жұмыста шыбықтың сызықсыздық матрицасын құрудың алгоритмі берілген және тексерілген

In article the algorithm of construction of a nonlinear matrix of rigidity for a rod is given and tested

Исследуются упругое статическое и динамическое состояния пространственной системы «морская буровая платформа – анизотропное основание»[1-3]. Платформа представляется как стержневая система. Такие системы могут быть подвержены большим перемещениям. Возникает необходимость учета геометрической нелинейности стержневых элементов. Получение аналитических решений в геометрически нелинейных задачах является сложной математической проблемой и возможно лишь в отдельных случаях. Для решения таких задач используются современные численные методы, в частности, метод конечных элементов. Основная трудность при решении нелинейных задач методом конечных элементов состоит в построении тангенциальной матрицы жесткости $\lfloor K_T \rfloor$. В данной работе представлено построение нелинейной матрицы жесткости для стержня с двенадцатью степенями свободы.

Физические уравнения состояния трехмерного стержневого элемента в локальной системе координат $Ox'y'z'$, где направление оси Ox' совпадает с осью стержня, имеют вид:

$$\{f\}=[D_{cm}]\{\varepsilon\}, \text{где} \{f\}^T=\{N \quad Q_y \quad Q_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z\},$$

$$\{\varepsilon\}^T=\left\{\varepsilon_x \quad \chi_z' \quad \chi_y' \quad \chi \quad \chi_y \quad \chi_z\right\}.$$

Здесь $\varepsilon_x, \chi, \chi_y, \chi_z$ - осевая деформация, относительный угол закручивания и кривизны оси стержня, $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$ - продольная и поперечная силы, крутящий момент и изгибающие моменты соответственно.

Диагональные элементы матрицы $[D_{cm}]=[b_{ij}]$,(i,j=1,2,..6),определяются выражениями:

$$b_{11}=EF, b_{22}=EJ_z, b_{33}=EJ_y, b_{44}=GJ, b_{55}=EJ_y, b_{66}=EJ_z.$$

Остальные элементы матрицы упругости расчетного стержневого элемента равны нулю. Учитывается геометрическая нелинейность осевых деформаций стержня:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left[(\frac{du}{dx})^2 + (\frac{dv}{dx})^2 + (\frac{dw}{dx})^2 \right] \quad .$$

Перемещения произвольной точки оси стержня определяются следующими формулами:

$$u = (1-\frac{x}{\ell})u_i + \frac{x}{\ell}u_j, v = \left[1-3(\frac{x}{\ell})^2 + 2(\frac{x}{\ell})^3\right]v_i + \left[3(\frac{x}{\ell})^2 - 2(\frac{x}{\ell})^3\right]v_j +$$

$$+\ell\left[\frac{x}{\ell} - 2(\frac{x}{\ell})^2 + (\frac{x}{\ell})^3\right]\varphi_{z_i} + \ell\left[(\frac{x}{\ell})^3 - (\frac{x}{\ell})^2\right]\varphi_{z_j}, w = \left[1-3(\frac{x}{\ell})^2 + 2(\frac{x}{\ell})^2\right]w_i +$$

$$+\left[3(\frac{x}{\ell})^2 - 2(\frac{x}{\ell})^3\right]w_j + \ell\left[\frac{x}{\ell} - 2(\frac{x}{\ell})^2 + (\frac{x}{\ell})^3\right]\varphi_{y_i} + \ell\left[(\frac{x}{\ell})^3 - (\frac{x}{\ell})^2\right]\varphi_{y_j},$$

$$\varphi_x = (1-\frac{x}{\ell})\varphi_{x_i} + \frac{x}{\ell}\varphi_{xj},$$

$$\varphi_y = \left[1-4\frac{x}{\ell} + 3(\frac{x}{\ell})^2\right]\varphi_{y_i} + \left[3(\frac{x}{\ell})^2 - 2\frac{x}{\ell}\right]\varphi_{y_j} + \frac{6}{\ell}\left[(\frac{x}{\ell})^2 + \frac{x}{\ell}\right]w_{i_i} + \frac{6}{\ell}\left[(\frac{x}{\ell}) - (\frac{x}{\ell})^2\right]w_j,$$

$$\varphi_z = \left[1-4\frac{x}{\ell} + 3(\frac{x}{\ell})^2\right]\varphi_{z_i} + \left[3(\frac{x}{\ell})^2 - 2\frac{x}{\ell}\right]\varphi_{z_j} + \frac{6}{\ell}\left[(\frac{x}{\ell})^2 + \frac{x}{\ell}\right]v_{i_i} + \frac{6}{\ell}\left[(\frac{x}{\ell}) - (\frac{x}{\ell})^2\right]v_j.$$

Обозначим

$$N_{1i} = 1-\frac{x}{\ell}, N_{1j} = \frac{x}{\ell},$$

$$N_{2i} = 1-3(\frac{x}{\ell})^2 + 2(\frac{x}{\ell})^3, N_{2j} = 3(\frac{x}{\ell})^2 - 2(\frac{x}{\ell})^3,$$

$$N_{3i} = \ell\left[\frac{x}{\ell} - 2(\frac{x}{\ell})^2 + (\frac{x}{\ell})^3\right], N_{3j} = \ell\left[(\frac{x}{\ell})^3 - (\frac{x}{\ell})^2\right],$$

$$N'_{2i} = \frac{6}{\ell}\left[(\frac{x}{\ell})^2 - \frac{x}{\ell}\right]; N'_{2j} = \frac{6}{\ell}\left[\frac{x}{\ell} - (\frac{x}{\ell})^2\right],$$

$$N'_{3i} = 1-4\frac{x}{\ell} + 3(\frac{x}{\ell})^2; N'_{3j} = 3(\frac{x}{\ell})^2 - 2(\frac{x}{\ell}).$$

Матрицу узловых перемещений запишем в виде:

$$\{\delta\} = \left\{u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j, \varphi_{x_i}, \varphi_{y_i}, \varphi_{z_i}, \varphi_{x_j}, \varphi_{y_j}, \varphi_{z_j}\right\}^T$$

Тогда матрица функции форм:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{1i} & 0 & 0 & N_{1j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{2i} & 0 & 0 & N_{2j} & 0 & 0 & 0 & N_{3i} & 0 & 0 & N_{3j} \\ 0 & 0 & N_{2i} & 0 & 0 & N_{2j} & 0 & N_{3i} & 0 & 0 & N_{3j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1j} & 0 & 0 & N'_{1j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N'_{2i} & 0 & 0 & N'_{2j} & 0 & N'_{3i} & 0 & 0 & N'_{3j} & 0 \\ 0 & N'_{2i} & 0 & 0 & N'_{2j} & 0 & 0 & 0 & N'_{3i} & 0 & 0 & N'_{3j} \end{bmatrix}.$$

Введем дополнительные обозначения:

$[D]=\begin{bmatrix}[D'] & 0\\ 0 & [D'']\end{bmatrix}$, где $[D']$ - будет состоять из одного элемента $[D']=[EF]$,

$$[D'']=\begin{bmatrix}EJ_z & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & EJ_z & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & GJ & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & EJ_y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & EJ_z\end{bmatrix}.$$

Матрица деформаций $\{\varepsilon\}$ запишется в виде:

$$\{\varepsilon_0\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon'_0\\ \varepsilon''_0\end{Bmatrix},$$

$$\{\varepsilon_L\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon'_L\\ 0\end{Bmatrix},\{\delta\}=\begin{Bmatrix}\delta'\\ \delta''\end{Bmatrix}\ \varepsilon'_0=\frac{du}{dx},\varepsilon'_L=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right].$$

Обозначим:

$$[B_0]=\begin{bmatrix}[B'_0] & 0\\ [B'''_0] & [B''_0]\end{bmatrix},[B_L]=\begin{bmatrix}[B'_L] & [B''_L]\\ 0 & 0\end{bmatrix},\{\theta\}=\begin{Bmatrix}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx}\end{Bmatrix}^T,$$

$\{\varepsilon'_0\}=\frac{1}{\ell}[-1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0]=[B'_0]\{\delta'\}$, т.е. $[B'_0]=\frac{1}{\ell}[-1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0]$,

ℓ-длина расчетного элемента, $\{\delta'\},\{\delta''\}$ - матрицы линейных и угловых перемещений; тогда

$$\{\varepsilon'_L\}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{du}{dx}\\ \frac{dv}{dx}\\ \frac{dw}{dx}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\{\theta\}^T[G]\{\delta\},$$

где

$$[G]=\begin{bmatrix}N'_{1_i} & 0 & 0 & N'_{1j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & N'_{2_i} & 0 & 0 & N'_{2j} & 0 & 0 & 0 & N'_{3_i} & 0 & 0 & N'_{3j}\\ 0 & 0 & N'_{2_i} & 0 & 0 & N'_{2j} & 0 & N'_{3_i} & 0 & 0 & N'_{3j} & 0\end{bmatrix},$$

[G]=[[G'] [G"]] , ненулевые элементы матриц $[G']=[g'_{ij}]$ и $[G'']=[g''_{ij}]$, (i=1,2,3;j=1,…6), равны $g'_{11}=N'_{1i},g'_{14}=N'_{1j},g'_{22}=g'_{33}=N'_{2i},g'_{25}=g'_{36}=N'_{2j}$, $g''_{23}=g''_{32}=N'_{3i}$, $g''_{26}=g''_{35}=N'_{3j}$. Тогда:

$$[B_L'] = \{\theta\}^T \left[G'\right], [B_L''] = \{\theta\}^T \left[G''\right]$$

Полная тангенциальная матрица жесткости определяется по формуле:

$$\lfloor K_T \rfloor = \lfloor K_0 \rfloor + \lfloor K_\sigma \rfloor + \lfloor K_L \rfloor,$$

где $\lfloor K_0 \rfloor$ и $\lfloor K_L \rfloor$, соответственно, матрицы жесткости элемента при малых и конечных перемещениях, $\lfloor K_\sigma \rfloor$ - матрица начальных напряжений. Формулы для вычисления этих матриц имеют вид:

$$\left[K_0\right] = \int_v \left[B_0\right]^T [D] \left[B_0\right] dV, \quad \int_v d\left[B_L\right]^T \{\sigma\} dV = [K_\sigma] d\{\delta\},$$

$$\left[K_L\right] = \int_v \left[B_0\right]^T [D] \left[B_L\right] dV + \int_v \left[B_L\right]^T [D] \left[B_L\right] dV + \int_v \left[B_L\right]^T [D] \left[B_0\right] dV.$$

Нелинейная матрица жесткости и матрица начальных напряжений для стержневого элемента соответственно равны:

$$\left[K_L\right] = EF \int \begin{bmatrix} [B_o']^T [B_L'] + [B_L']^T [B_o'] + [B_L']^T [B_L'] & [B_o']^T [B_L''] + [B_L']^T [B_L''] \\ [B_L'']^T [B_o'] + [B_L'']^T [B_L'] & [B_L'']^T [B_L''] \end{bmatrix} dx,$$

$$[K_\sigma] = \int_0^l N_x \begin{bmatrix} [G']^T [G'] & [G']^T [G''] \\ [G'']^T [G'] & [G'']^T [G''] \end{bmatrix} dx,$$

В целях отладки программы и исследования вопросов точности и сходимости решения произведен расчет нескольких тестовых задач.

Тест 1. В качестве первой задачи рассматривается наклонный упругий стержневой элемент, где иллюстрируется влияние осевых эффектов (рис.1).

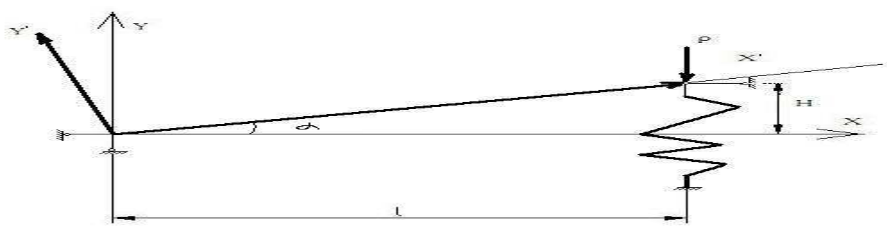

Рис. 1-Схема наклонного стержневого элемента

Хотя эта задача чрезвычайно проста, она была выбрана для решения из-за малого количества необходимых вычислений и благодаря тому, что с ее помощью можно выявить ожидаемое поведение решения более сложных задач.

Эту задачу решали ряд исследователей: [4],[5]. Следовательно, точность полученных результатов можно оценить при сравнительном анализе. В выполненных расчетах стержень испытывает только сжатие. Задача является существенно нелинейной, с большими перемещениями. При расчете использованы следующие исходные данные:

EF=10^7 кг - жесткость на сжатие, h=1см - проекция длины стержня на ось Oy, l =100см-проекция длины стержня на ось Ox, k=6 кг/см – коэффициент жесткости пружины.

Стержень рассматривается как один стержневой конечный элемент с четырьмя степенями свободы (прогиб и осевое перемещение в каждом из двух узлов). Так как стержень не подвергается изгибу и на него действует сосредоточенное в узле вертикальное усилие, то перемещения аппроксимируются с помощью формул:

$$u = (1-\frac{x}{\ell})u_i + \frac{x}{\ell}u_j, v = (1-\frac{x}{\ell})v_i + \frac{x}{\ell}v_j.$$

В матричной форме:

$\{U\} = [N]\{\delta\}$, где $\{U\} = \{u \quad v\}^T$, $[N] = \begin{bmatrix} N_{1i} & 0 & N_{1j} & 0 \\ 0 & N_{1i} & 0 & N_{1j} \end{bmatrix}$ - функции формы, где $\{\delta\} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2\}^T$ - вектор узловых перемещений.

Осевая деформация выражается следующим образом:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}(\frac{dv}{dx})^2.$$

Выразим основные матрицы:

$$\{\varepsilon_x\} = \begin{bmatrix} N'_{1i} & 0 & N'_{1j} & 0 \end{bmatrix}\{\delta\} = [B_o]\{\delta\},\ \{\theta\} = \begin{bmatrix} 0 & N'_{1i} & 0 & N'_{1j} \end{bmatrix}\{\delta\} = [G]\{\delta\},$$

$$\{\varepsilon_x\} = 0{,}5\{\theta\}^T\{\theta\} = 0{,}5\{\delta\}^T[G]^T[G]\{\delta\} = 0{,}5[B_L]\{\delta\},$$

$$[B_o] = \begin{bmatrix} N'_{1i} & 0 & N'_{1j} & 0 \end{bmatrix}, [B_L] = \{\delta\}^T[G]^T[G].$$

Матрица упругости $[D]$в такой постановке примет вид: $[D] = [EF]$.

Как видно из рисунка локальная система координат не совпадает с глобальной системой координат и повернута на угол α. Матрица перехода от ЛСК к ГСК определится выражением:

$$[L] = \begin{bmatrix} cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}, \text{где } \cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+h^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}}.$$

Граничные условия:

$$u_1 = 0, \qquad v_1 = 0, \quad u_2 = 0.$$

Результаты решения для различных значений нагрузки (P=9кг, P=12кг, P=24кг) приведены в таблице 1 и совпадают с численными решениями по работам [4], [5]. На рисунке 2 представлена кривая зависимости перемещения от нагрузки, где явно заметно качественное и количественное отличие линейного и нелинейного решений.

Таблица 1 – Сравнительная характеристика решения задачи различными методами

Нагрузка, P(кг)	Перемещения, см	
	По работам [4], [5]	По разработанному алгоритму

	Линейные	Нелинейные	Линейные	Нелинейные
9	-0,56	-1,46	-0,56	-1,48
12,0	-0,75	-2,00	-0,75	-2,08
24,0	-1,50	-2,88	-1,50	-2,88

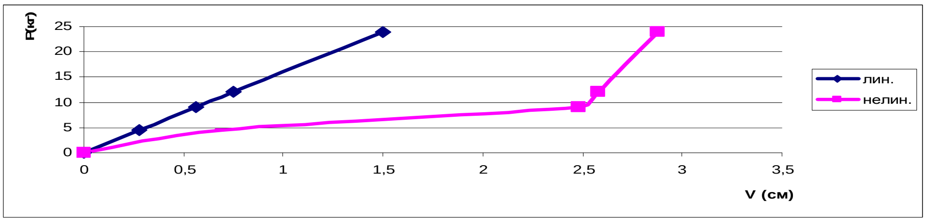

Рис. 2 - Кривая зависимости перемещения от нагрузки

Тест 2. В качестве второй задачи рассматривается упругая консольная балка с изгибающим моментом на свободном конце, изображенная на рисунке 3.

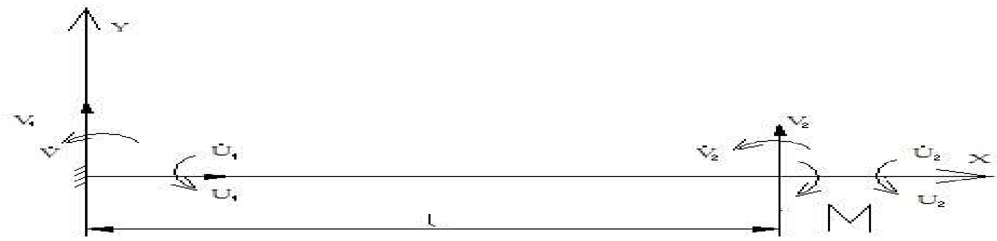

Рис.3-Схема расчетного элемента

Задача включает чисто изгибные эффекты, простота задачи позволяет получить простые аналитические формулы, описывающие геометрически нелинейные эффекты. Наибольшее значение прогиба и осевого перемещения будут на свободном конце балки и равны:

$$u = \ell - \rho \sin\varphi \ , \quad v = \rho(1-\cos\varphi),$$

u, v- соответственно горизонтальное и вертикальное перемещения балки,

l - длина балки, ρ - кривизна балки, φ -угол поворота свободного конца.

В качестве конкретной задачи выбрана балка со следующими данными:

M=10^5 кг см- внешняя статическая нагрузка, l=100см- длина балки,

F=10 см^2- площадь поперечного сечения балки, I=5 см^4-момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси в плоскости изгиба,

E=2*10^6кг/см^2-модуль упругости.

Так как нейтральный слой при чистом изгибе не растягивается, то

$\varphi = \dfrac{l}{\rho} = \dfrac{Ml}{EI}$ =1 рад, откуда $l = \rho$.

Подставляя полученные значения φ, ρ, l, получим:

u=100(1-sin1) =15,83 см, v=100(1-cos1) =45,97 см.

В форме МКЭ балка рассматривалась как один конечный элемент с восемью степенями свободы (прогиб, осевое перемещение и два угла поворота в каждом из двух узлов). С учетом того, что задача рассматривается в плоском варианте, перемещения произвольной точки оси стержня выражаются в виде:

$$u = N_{2i}\,u_1 + N_{3i}\,\varphi_{x1} + N_{2i}\,u_2 + N_{3j}\,\varphi_{x2},$$

$$v = N_{2i}\,v_1 + N_{3i}\,\varphi_{y1} + N_{2i}\,v \;\; + N_{3j}\,\varphi_{y2}.$$

В матричной форме

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, [N] = \begin{bmatrix} N_{2i} & N_{3i} & 0 & 0 & N_{2j} & N_{3j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{2i} & N_{3i} & 0 & 0 & N_{2j} & N_{3j} \end{bmatrix} -$$

функция формы, $\{\delta\} = \{u_1, \varphi_{x1}, v_1, \varphi_{y1}, u_2, \varphi_{x2}, v_2, \varphi_{y2}\}$- матрица узловых перемещений.

Осевое перемещение $\varepsilon_x = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{2}\left[(\dfrac{du}{dx})^2 + (\dfrac{dv}{dx})^2\right]$, кривизна $\rho = \dfrac{d^2 v}{dx^2}$.

Матрицы напряжений $\{N, M\}^{T}$ и деформации $\{\varepsilon_x, \rho\}^{T}$ связаны с матрицей упругости $[D] = \begin{bmatrix} EF & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}$. Тогда матрица [B] будет иметь вид:

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_{2i} & N'_{3i} & 0 & 0 & N'_{2j} & N'_{3j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N''_{2i} & N''_{3i} & 0 & 0 & N''_{2j} & N''_{3j} \end{bmatrix},$$

где «$'$»– знак производной.

Нелинейная матрица деформации примет следующий вид:

$$\{\varepsilon_L\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_L \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ где } \varepsilon'_L = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right].$$

Данную зависимость можно реализовать следующими обозначениями и преобразованиями:

$$\{\theta\}^T = \begin{Bmatrix} \dfrac{du}{dx} & \dfrac{dv}{dx} \end{Bmatrix},$$

$$[\theta] = \begin{bmatrix} N'_{2i} & N'_{3i} & 0 & 0 & N'_{2j} & N'_{3j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N''_{2i} & N''_{3i} & 0 & 0 & N''_{2j} & N''_{3j} \end{bmatrix}\{\delta\} = [G]\{\delta\},$$

$$\left\{\varepsilon'_L\right\} = \frac{1}{2}\{\theta\}^T\{\theta\} = \frac{1}{2}[[G]\{\delta\}]^T[G]\{\delta\} = \frac{1}{2}\{\delta\}^T[G]\{\delta\} = \frac{1}{2}\left[B'_L\right]\{\delta\},$$

$$\left[B'_L\right] = \{\delta\}^T[G]^T[G].$$

Нелинейная матрица дифференцирования $\lfloor B_L \rfloor$ представляется следующим образом:

$$\left[B_L\right]=\begin{bmatrix} B_L^{'} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Граничные условия защемленного конца задаются в виде:

$$u_1=0, \dot{v}_1=0, v_1=0, \quad \dot{v}_1=0.$$

Результаты расчета представлены в таблице 2, перемещения свободного конца близки к аналитически полученным результатам, что свидетельствует о большой точности программы.

Полученные численные результаты позволяют сделать вывод, что рассматриваемый алгоритм может применяться для расчета геометрически нелинейных стержневых систем, находящихся под воздействием статической нагрузки.

Таблица 2-Сравнительная характеристика перемещения свободного конца балки различными методами

Результаты решения	u_2 (см)	v_2(см)
По [4]	-15,853	45,970
По[5]	-15,850	45,197
По алгоритму	-15,810	45,980

Предложенный алгоритм использован для расчета и анализа упругого состояния конкретной платформы. Анализ влияния больших перемещений на упругие перемещения узлов платформы показал:

- учет геометрической нелинейности существенно изменяет результаты,

полученные для линейной системы «платформа – основание»; значения полученных перемещений в 1,5-2,2 раза превышают значения соответствующих перемещений при линейном расчете.

Литература:

1.Айталиев Ш.М. Морские сооружения – форпосты освоения нефтегазовых месторождений Каспия// Вестник Инженерной академии РК, 2003.-№2 (10).

2. Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Божанов Е.Т., Дюсембаев И.Н., Нигметов М.Ж. Проблемы устойчивого функционирования инженерных сооружений на шельфе Казахстанского сектора Каспия// Третья ассамблея Ассоциации университетов Прикаспийских государств. Актау, 1998.

3.Масанов Ж.К., Кошакаева Ф.М. Упругое статическое состояние пространственных морских стержневых систем на анизотропном основании при больших перемещениях, Алматы, Вестник КазАТК, 2005

4.Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. - Москва: Стройиздат, 1978.

5.Ананян В.В.Деформирование и предельная несущая способность физически и геометрически нелинейных стержневых систем: дис. канд.тех.наук:. 01.02.03.- Москва, 1986.