ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш.ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ
ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСЫ

Г.Н. НИГМЕТОВА

КОМПЛЕКСТІК АНАЛИЗ

Оқу құралы

Ақтау -2012

ӘОЖ 517(075.8)
ББК 22.16я73
Пікір берушілер: Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті профессоры, ф.-м.ғ.д. С.Т. Мұхамбетжанов
Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті профессоры, ф-м.ғ.к. М.Ш. Тілепиев
Алматы энергетика және байланыс институтының доценті, ф-м.ғ.к. М.Ж. Байсалова

Нигметова Г.Н.
Н55 Комплекстік анализ: Оқу құралы / Г.Н. Нигметова - Ақтау, Ш.Есенов атындағы КМТжИУ, 2012. - 83б.

ISBN 978-601-7349-19-6

Бұл оқу құралы Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінде оқитын математика мамандығының «Комплекстік анализ» пәнінің бағдарламасына сәйкес жасалған.

ӘОЖ 517(075.8)
ББК 22.16я73

Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің Оқу-әдістемелік Кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылды

ISBN 978-601-7349-19-6

Кіріспе

Халыққа білім беру саласындағы жаңа концепция бойынша, жаңа оқу орындарының сатылы (бакалавар, магистр) оқу жүйесіне арналған жаңа бағдарлама құрылғаны белгілі. Сондықтан да, оған сәйкестендіріліп жазылған мемлеметтік тілдегі оқулықтар мен оқу құралдарының қажеттілігі мен тапшылығы көптеген қиындықтар туғызуда. Мұндай жағдай, әсіресе, сырттай оқитын студенттерге де қиын болып тұр. Соның ішінде «Комплекстік анализ» пәні бойынша физика-математика мамандықтарына арналған қазақ тілінде оқулықтар мен оқу құралдарының жетіспей жатқандығы белгілі. Ұсынылып отырған оқу құралы физика-математика факультеттерінің барлық мамандықтарының студенттеріне арналған.

«Комплекстік анализ» оқулығы «Комплекстік анализ» пәнінің бағдарламасына сәйкес кредиттік жүйеге лайықты етіп жазылған.

Оқулықта комплекс айнымалы функциялар, оларды дифференциалдау және интегралдау, Лоран қатары, қалындылыр теориясы және оларды интегралдарды есептеуге қолдану тақырыптары бойынша теориялық материалдар, сонымен қатар оларды толықтырып, таңдап алынған үлгі-мысалдар шешімдерімен берілген. Мұнда берілген тұжырымдардың дәлелдемелері толық қамтылған, барлық қажет жағдайларда графикалық кескіндері келтірілген.

І ТАРАУ. КОМПЛЕКС САНДАР

1.1. Комплекс сан туралы ұғым

Математиканың тарихи даму барысында әр қырынан қойылып, түрліше шешім тауып отырған ең басты мәселелердің бірі- сан ұғымын дамыту болды. Сан үғымын кеңейту мәселесі алгебра ғылымының өз алдына бөлініп дербес даму жолына түсуін күрт жеделдетті, шешуі болатын теңдеулер класын көбейтті, қолданыстағы сандар теориясын байытуды, кеңейтуді талап етті.

Сан ұғымының натурал сандардан нақты сандарға дейін кеңею үрдісі тәжірибенің талаптарымен, сондай-ақ математиканың өз мұқтаждықтарымен байланысты болды. Алдымен заттарды санау үшін натурал сандар пайдаланылады. Содан кейін бөлуді орындаудың қажеттігі оң бөлшек сандар ұғымына әкеледі; әрі қарай, азайтуды орындау қажеттігі нөл мен теріс сандар ұғымдарына әкелді; ақырында оң сандардан түбір табу қажеттігі иррационал сандар ұғымына әкелді. Аталған амалдардың бәрі нақты сандар жиынында орындалады. Алайда, бұл жиында орындалмайтын операциялар да қалды, мысалы, теріс саннан квадраттық түбір табу амалы. Олай болса, сан ұғымының одан әрі кеңеюінің, нақты сандардан ерекше, жаңа сандардың пайда болуының қажеттігі бар.

Геометриялық тұрғыдан нақты сандар координаталық түзудің нүктелерімен кескінделеді. Әрбір нақты санға түзудің бір нүктесі сәйкес, ал түзудің әрбір нүктесіне бір нақты сан сәйкес келеді. Координаталық түзу түгелдей нақты сандардың бейнесімен толтырылған, яғни басқаша айтқанда «онда басқа сандарға орын жоқ». Жаңа сандардың геометриялық бейнелерін енді түзу бойында емес, координаталық жазықтықта іздеу керек деген ұйғарым туады. Бірақ координаталық XOY жазықтығының әрбір М нүктесін осы нүктенің координаталарымен анықтауға болады. Сондықтан жаңа комплекс сандар деген атпен жаңа ұғым енгізілді. 1545 жылы италиян оқымыстысы Дж. Кардано

$$\begin{cases} x+y=10, \\ xy=40 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің нақты сандар жиынында шешімі жоқ, ал оның шешімін

$$\begin{cases} x_{1/2}=5\pm\sqrt{-15}, \\ y_{1/2}=5\mp\sqrt{-15} \end{cases}$$

түрінде табады. Кардано оларды «таза теріс» немесе «софистикалық теріс» шамалар деп атаған. Бірақ ол мұндай шешуді пайдасыз деп тауып, оларды қолданбауға тырысады.

Комплекс сандардың қасиетін дұрыс бағалаған ең бірінші математик Рафаэль Бомбелли (1526-1573) болды. Ол комплекс сандарды кубтық теңдеуді шешудің «келтірілмейтін» жағдайын шешуге қолданады. Ол 1572 жылы жарық көрген «Алгебра» атты еңбегінің бірінші кітабында комплекс сандарға амалдар қолданудың алғашқы ережелерін көрсетті. Бомбелли Карданоның «софистикалық теріс сандар» кездесетін барлық өрнектердің $a+bi$ түріне келетінін тағайындады. 1637 жылы француз математигі Р. Декарт «жорымал сан» терминін енгізді, ал XVIII ғасырдың ең атақты математиктердің бірі Л. Эйлер 1977 жылы $\sqrt{-1}$ (жорымал бірлік) санын белгілеу үшін француз сөзінің imaginaire (жорымал) бірінші әрпін қолдануды ұсынды. 1831 жылы К. Гаусс «комплекс сан» терминин енгізді.

Жалпы комплекс сандарын интегралдық есептеуде, механикада, геометрияда қолданымдарына байланысты қалыптаса бастаған комплекс айнымалы функциялар теорясының дамуына француз математигі Даламбер, негізі швециялық болса да, өзін «орыс ғалымы» деп атап өткен Л.Эйлер көптеген үлестерін қосқан. Теорияның одан әрі дамуына неміс ғалымдары К.Гаусс, Б.Риман, француз ғалымы О.Кошилердің аттарымен қатар орыс ғалымдары Н.Е.Жуковский, М.А.Лаврентьев, М.В.Келдыштің де еңбектері зор.

1.2. Комплекс сандар және олардың геометриялық кескіні

Комплекс сан z деп белгілі бір тәртіппен алынған x және y қос нақты сандар айтылады және ол алгебралық түрде $z=x+iy$ деп белгіленеді, мұндағы x және y-нақты сандар, ал i- *жорымал бірлік* деп аталады, $i^2=-1$. Комплекс сандар жиыны С әрпімен белгіленеді:

$$C=\{z=(x,y):x,y\in R\}.$$

x саны z комплекс санының нақты бөлігі деп аталып, $x=Re\ z$ (Reelle деген француз сөзінен алынған) арқылы белгіленеді, ал y саны z комплекс санының *жорымал бөлігі* деп аталып, $y=Im\ z$ (Imaginaire деген француз сөзінен алынған) арқылы белгіленеді.

Егер $z_1=x_1+iy_1$ және $z_2=x_2+iy_2$ екі комплекс сандарының сәйкес нақты және жорымал бөліктері өзара тең болса, яғни $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, онда олар *тең комплекс сандар* деп аталады. Дербес жағдайда, $z=x+iy$ комплекс саны нөлге тең болады, тек сонда ғана, егер x = y = 0 болғанда. Комплекс сандар үшін «артық» және «кем» ұғымдары енгізілмейді.

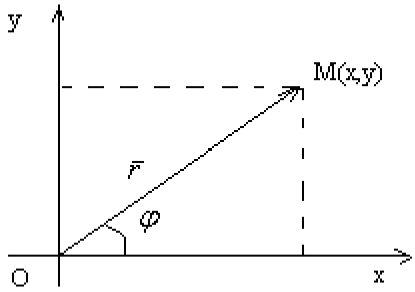
Бірінші компоненттері өзара тең, ал екінші компоненттерінің таңбасы ғана қарама-қарсы екі комплекс сан *түйіндес комплекс сандар* деп аталып мына түрде белгіленеді:

$z=x+y\,i$ және $\bar{z}=x-y\,i$.

Кез келген $z=x+iy$ комплекс санын *Oxy* жазықтығында М($x;y$) нүктесімен кескіндеуге болады (1-сурет).

Сонда $z\in C$ санын М нүктесінің аффиксі деп, а жазықтық *комплекс жазықтық* (кейде Гаусс жазықтығы) деп аталады. Комплекс сандарды осылайша кескіндегенде нақты сандар абсциссалар осінің нүктелерімен кескінделеді де, ал ординаталар осінің нүктелері таза жорымал сандарды кескіндейді.

Сондықтан абсцисса осін *нақты ось* деп, ал ордината осін *жорымал ось* деп атайды.



1-сурет

$z=x+iy$ комплекс санын $\bar{r}=\overline{OM}=(x;y)$ радиус-векторының көмегімен беруге болады. $\bar{r}$ векторының ұзындығын z комплекс санының *модулі* деп атайды және ол $|z|$ немесе r арқылы белгіленеді:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1.1)$$

Демек, φ- Ох осін $\bar{r}$ векторының бағытымен беттестіру үшін оң бағытқа бұратын бұрышты кескіндейді, егер бұру сағат тіліне қарсы бағытта іске асырылса, онда бұл бұрыш оң, қарсы жағдайда – теріс деп есептелінеді.

z=0 комплекс саны үшін аргумент анықталмайды. Әрбір $z\neq 0$ комплекс саны үшін оның аргументінің бірінен- бірінің айырмашылығы 2π болатын көп мәндері болады. Сондықтан

$$Argz=\arg z+2\pi k,$$

мұндағы $\arg z$ - аргументтің бас мәні және ол $-\pi\leq\arg z\leq\pi$.

Ескерту. Көп жағдайда есеп шығару барысында аргументтің бас мәні

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{егер } x>0;\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{егер } x<0, y>0;\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{егер } x<0, y<0\end{cases} \qquad (1.2)$$

формуласымен анықталады.

Комплекс санның r модулі мен φ аргументін комплекс санды кескіндейтін $\bar{r}=\overline{OM}$ векторының полярлық координатасы ретінде қарауға болады (1-сурет). Сонда $x=r\cos\varphi$, y= $r\sin\varphi$. Демек, $z=x+iy$ комплекс санын

$$z=r\cos\varphi+ir\sin\varphi \text{ немесе } z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

түрінде жазуға болады. Комплекс санның мұндай жазылуын комплекс санның *тригонометриялық түрі* деп атайды.

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \qquad (1.3)$$

Эйлер формуласын қолдану арқылы $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ комплекс санын

$$z=re^{i\varphi}$$

түрінде жазуға болады. Комплекс санның мұндай жазылуын комплекс санның *көрсеткіштік түрі* деп атайды.

Мысалы 1.1. $z_1=-1+i$ және $z_2=-1$ комплекс сандарын тригонометриялық және көрсеткіштік түрде жазыңыздар.

Шешуі. z_1 үшін

$$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z = arctg\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

яғни $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Сондықтан

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

z_2 үшін

$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$, $\arg z = \arg(-1) = \pi$, яғни $\varphi = \pi$.

Сондықтан $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$.

1.3. Комплекс сандарға амалдар қолдану

1. *Комплекс сандарды қосу.*

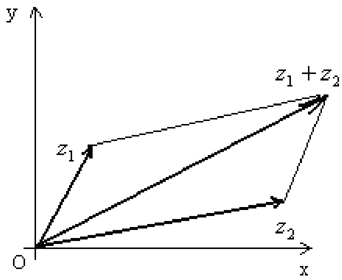
$z_1=x_1+iy_1$ және $z_2=x_2+iy_2$ екі комплекс санының *қосындысы* деп

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1.4}$$

теңдігімен анықталатын комплекс санды айтады.

Комплекс сандарды қосудың келесі қасиеттері бар:

1. Коммутативтік: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,
2. Ассоциативтік: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.



2-сурет

z_1 және z_2 комплекс сандарының қосындысына геометриялық талдау жасау үшін ол сандарды сәйкес векторлар түрінде көрсетеміз. Сонда $z_1 + z_2$ кескінін екі вектордың қосындысын табудың параллелограмм ережесі бойынша да анықтауға болады (2-сурет).

Екі комплекс санның қосындысының модулі қосылғыштар модульдерінің қосындысынан кем, не тең болатынын 2-суреттен көреміз, өйткені үшбұрыштың кез келген қабырғасы қалған екі қабырғасының қосындысынан кем:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

Мысалы 1.2. Амалдарды орындаңыздар: $(2+5i)+(4-2i)$.

Шешуі. $(2+5i)+(4-2i)=(2+4)+i\ (5-2)=6+3i$.

2. *Комплекс сандарды азайту*.

Комплекс сандарды азайту қосуға кері амал ретінде анықталады.

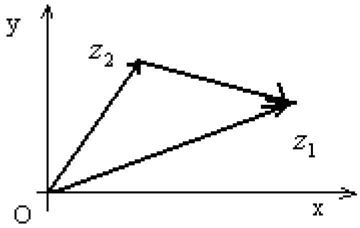
$z_1 = x_1 + y_1 i$ және $z_2 = x_2 + y_2 i$ комплекс сандарының *айырмасы* деп

$$z_2 + z = z_1 \text{ немесе } (x_2 + y_2 i) + (x + yi) = x_1 + y_1 i \tag{1.5}$$

теңдігін қанағаттандыратын $z = x + yi$ комплекс санын атайды.

Бұл анықтамадан z-ті оңай табуға болады:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{1.6}$$



3-сурет

Айырма үшін $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ анықтамасын немесе үшбұрыш ережесін қолдануға болады. Осыдан екі санның айырмасының модулінің геометриялық мағынасын алуға болады (3-сурет).

Демек, $z_1 - z_2$ айырымының модулі және нүктелерінің ара қашықтығына тең:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d,$$

ал екі комплекс санның айырымының модулі олардың модульдерінің айырмасынан артық, не тең:

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

екенін атап өтейік, яғни екі комплекс санның айырмасы жазықтықта осы сандармен кескінделетін нүктелердің ара қашықтығына тең.

Мысалы 1.3. Амалдарды орындаңыздар: $(10+7i)-(6+5i)$.

Шешуі. $(10+7i)(6+5i)=(10-6)+i\ (7-5)=4+2i$.

3. *Комплекс сандарды көбейту*.

$z_1 = x_1 + y_1 i$ және $z_2 = x_2 + y_2 i$ екі комплекс санның *көбейтіндісі* деп

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \tag{1.7}$$

теңдігімен анықталатын комплекс санды айтады.

Комплекс сандарды көбейтудің келесі қасиеттері бар:

1. Коммутативтік: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$,
2. Ассоциативтік: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$,
3. Дистрибутивтік: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Мысалы 1.4. Амалдарды орындаңыздар: $(2-3i)(-5+4i)$.

Шешуі. $(2-3i)(-5+4i)=-10+8i+15i-12i^2=-10+23i+12=2+23i$.

Тригонометриялық түрде берілген $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ және $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ комплекс сандарының көбейтіндісі мына формула арқылы анықталады:

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \qquad (1.8)$$

Бұдан мынадай қорытынды шығады:

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \qquad \arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2, \qquad (1.9)$$

Комплекс сандарды кескіндеу үшін векторларды пайдалана отырып, $z_1\cdot z_2$ көбейтіндісінің векторы z_1 векторынан соңғыны $\alpha=\arg z_2$ бұрышына бұру және $k=|z_2|$ есе созу арқылы алынады деп айтуға болады.

Дербес жағдайда , егер бірдей *n* көбейткіші бар болса,

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (1.10)$$

Бұдан $|z^n|=|z|^n$, $\arg z^n=n\arg z$. (1.11)

(1.10) формуласын *Муавр формуласы* деп атайды.

4. *Комплекс сандарды бөлу.*

Комплекс сандарды бөлу көбейтуге кері амал ретінде анықталады.

$z_1=x_1+y_1i$ және $z_2=x_2+y_2i\neq 0$ екі комплекс санның *бөліндісі* деп

$$z_2z=z_1 \qquad (1.12)$$

теңдігін қанағаттандыратын $z=x+yi$ санын атайды.

Олай болса

$$(x_2+i\,y_2)(x+i\,y)=x_1+i\,y_1$$

теңдігінен

$$\begin{cases} xx_2-yy_2=x_1, \\ xy_2+yx_2=y_1 \end{cases}$$

жүйесі шығады. Бұл жүйенің бір шешімі бар:

$$x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \qquad y=\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Сонымен,

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \qquad (1.13)$$

Мысалы 1.5. Амалдарды орындаңыздар: $\frac{1+3i}{2+i}$.

Шешуі. $\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i+6i+3}{4+1}=\frac{5+5i}{5}=1+i$.

Тригонометриялық түрде берілген $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ және $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ комплекс сандарының бөліндісі мына формула арқылы анықталады:

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) \qquad (1.14)$$

Бұл жағдайда модуль мен аргументтің мынадай қасиетін аламыз:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 . \qquad (1.15)$$

5. *Комплекс саннан түбір табу*.

Түбір табу дәрежелеуге кері амал.

z комплекс санының *n –ші дәрежелі түбірі* деп $\omega^n = z$ теңдігін қанағаттандыратын ω комплекс санын айтады, яғни $\sqrt[n]{z} = \omega$, егер $\omega^n = z$.

Егер $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ал $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ десек, онда түбірдің анықтамасы және Муавр формуласы бойынша

$$z = \omega^n \Rightarrow \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

аламыз. Бұдан $\rho^n = r, n\theta = \varphi + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$

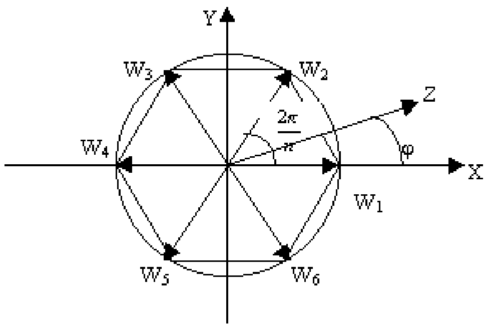
яғни

$$\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \text{ және } \rho = \sqrt[n]{r} \qquad (1.16)$$

Сондықтан $\sqrt[n]{z} = \omega$ теңдігі мына түрге келтіріледі:

$$W_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = \overline{1, n-1}. \qquad (1.17)$$

(1.17) – комплекс саннан түбір табу формуласы.



4 –сурет

Геометриялық тұрғыдан $\sqrt[n]{z}$ өрнегіндегі бұл *n* мәнді центрі координата жүйесінің бас нүктесінде және радиусы $\rho = \sqrt[n]{r}$ болатын шеңберге іштей сызылған дұрыс *n*- бұрыштың төбелері түрінде кескінделеді (4 –сурет, *n*=6).

Мысал 1.6. $\sqrt[3]{-64}$ мәнін табыңыздар.

Шешуі. Түбір астындағы өрнекті тригонометриялық түрде жазамыз:

$-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$.

(1.17) формуласы бойынша

$$\omega_k = \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right), \ k = 0, 1, 2 .$$

$k=0$ болғанда $\omega_0 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$;

$k=1$ болғанда $\omega_1 = 4\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = 4\,(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$;

$k=2$ болғанда $\omega_2 = 4\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = 2 - 2\sqrt{3}$.

1.4. Комплекс сандардың тізбегі және қатарлары

Натурал сандар жиынында анықталған, комплекс жазықтықта мәндер қабылдайтын бірмәнді функция комплекс сандар жиынының тізбегі деп аталады. Комплекс сандардың

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \tag{1.18}$$

шектеусіз тізбегі берілсін.

Егер ол кез келген мейлінше аз оң ε санында натурал n сандарының шектеусіз тізбегі үшін $|z - z_n| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда z-ті берілген (1.18) тізбектің *шектік саны* деп атайды. Шектік комплекс санның бұл анықтамасына $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ z сандарын сандық жазықтықтың нүктелері деп қарап, геометриялық түр беруге болады. Центрі z нүктесіндегі кез келген дөңгелекті осы нүктенің *аймағы* дейміз.

Сонымен бірге $|z - z_n|$ дегеніміз z пен z_n нүктелерінің ара қашықтығы екенін еске түсіріп, мынаны алуға болады: егер z нүктесінің мейлінше аз аймағында берілген (1.18) тізбегіің шектеусіз көп мүшелерін кескіндейтін нүктелер жатса, онда z нүктесі $z_1, z_2, \dots, z_n$ нүктелер тізбегінің шектік нүктесі болып табылады. Басқаша айтқанда, шектік z нүктесінің аймағында $z_1, z_2, \dots, z_n$ тізбегінің нүктелері шоғырланады.

Егер комплекс сандар тізбегінің мүшелерінің бәрінің модульдері кейбір оң M санынан кем, яғни $|z_n| < M$ болса, ол тізбекті *шектелген тізбек* деп атаймыз. Басқа жағдайда, сан тізбегі *шектелмеген* деп аталады. Нүктелер тізбегі шектелген жағдайда центрі нөлдік нүктедегі, радиусы жеткілікті үлкен тұрақты M-ге тең дөңгелек табылып, берілген тізбектің барлық нүктелері соның ішінде жататын болады.

Нүктенің шектелген тізбектерде болуы мүмкін еместігі туралы бұл жайт Больцано-Вейерштрасс теоремасынан шығады.

Больцано-Вейерштрасс теоремасы. Кез келген шектеусіз шектелген нүктелер тізбегінің ең кемінде бір шектік нүктесі болады.

Егер сандардың (1.18) тізбегінің жалғыз шектік саны z болса, онда бұл тізбек z санына жинақталады дейміз де, мына түрде белгілейміз:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Демек, бұл анықтамаға сәйкес нүктелердің жинақты тізбегі мына екі шартты қанағаттандырады:

1. бұл тізбек шектелген,
2. бұл тізбектің жалғыз шектік нүктесі бар.

Комплекс сандар тізбегінің шектік ұғымын пайдаланып, нақты сандар тізбектерінің шектері туралы белгілі теоремаларды комплекс облысқа көшіре аламыз.

Шектер теориясының негіздерінен сандардың жинақты тізбегін сипаттайтын критерийді Коши бергені мәлім.

Коши критерийі. (1.18) комплекс сандар тізбегінің жинақтылығының қажетті және жеткілікті шарты мейлінше аз оң кез келген ε үшін m натурал саны қандай да

$$\left|z_{N+m}-z_m\right|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалатын $N=N(\varepsilon)$ натурал санының болуынан тұрады.

Бұл критерий геометриялық тұрғыдан z_n *нүктелерінің тізбегі* $N=N(\varepsilon)$ *нөмірінен бастап тізбектің барлық қалған нүктелері центрі z нүктесінде радиусы ε шеңбердің ішінде жатқан жағдайда ғана жинақты болатындығын* білдіреді.

Мүшелері комплекс сандар болып келген

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \tag{1.19}$$

қатарды сандық қатар деп атайды. Егер $z_n = x_n + iy_n$ болса, онда (1.19) қатарын

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n + iy_n\right) = \left(x_1 + iy_1\right) + \left(x_2 + iy_2\right) + \ldots + \left(x_n + iy_n\right) + \ldots,$$

мұндағы x_n және y_n $(n=1,2,3,\ldots)$ – нақты сандар, түрінде жазуға болады. Әдетте, (1.19) қатарының алғашқы n мүшесінің қосындысын

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k + iy_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k + i\sum_{k=1}^{n} y_k$$

қатардың ***n–ші дербес қосындысы*** деп атайды.

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k + i\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} y_k = S$ нақты шегі бар болса, онда (1.19) қатары жинақты деп аталады және S берілген шектеусіз қатардың қосындысы болады, ал нақты шегі болмаса, онда (1.19) қатары жинақсыз деп аталады.

Теорема (*қатардың жинақтылығының қажетті шарты*). Егер (1.19) қатары жинақты болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Комплекс мүшелі қатарлар теориясында ең маңыздысы абсолют жинақты қатар ұғымы. (1.19) қатарымен бірге (1.19) қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құралған жаңа қатарды қарастырайық:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|z_n\right| = \left|z_1\right| + \left|z_2\right| + \ldots + \left|z_n\right| + \ldots. \tag{1.20}$$

Теорема. Егер (1.20) қатары жинақты болса, онда берілген (1.19) қатар абсолют жинақты болады.

Егер (1.19) қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құралған (1.20) қатары жинақты болса, онда (1.19) қатарды *абсолют жинақты* деп атайды. Абсолютті жинақты болмайтын жинақты қатар *шартты жинақты* деп аталады.

Комплекс жазықтықта қатарларға амалдар қолдануда нақты сандар өрісінде қатарларға амалдар қолдануға аталған классикалық тұжырымдар сол қалпында сақталады, дәлірек айтсақ:

1. Егер екі қатар жинақты болса және сәйкес қосындылары S_1 және S_2 болса, онда олардың қосындысы (айырмасы) жинақты болып, қосындысы $S=S_1+S_2$ ($S=S_1-S_2$) болады;

2. Жинақты қатардың комплекс санға көбейтіндісі жинақты қатар болып табылады. Оның қосындысы алғашқы қатардың қосындысын осы комплекс санға көбейткенге тең болады;

3. Егер екі қатар абсолют жинақты болса және сәйкес қосындылары S_1 және S_2 болса, онда олардың көбейтіндісі жинақты болады және оның қосындысы $S=S_1 \cdot S_2$ ($S=S_1 \cdot S_2$) болады.

Ескерту. Шартты жинақты қатарларға көбейту амалын қолдануға болмайды.

1.5. Сандық сфера. Шексіз алыстаған нүкте

1. Комплекс сандарды сфера бетінде кескіндеу. Шексіз алыстаған нүкте. Егер

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \tag{1.21}$$

нүктелерінің тізбегінде центірі нөлдік нүктеде, радиусы мейлінше үлкен дөңгелектен тыс жатқан нүктелер болса, ол шектелмеген тізбек деп аталатыны белгілі. Нүктелердің шектелмеген тізбегінің шектік нүктесі мүлдем жоқ болуы да мүмкін екенін көрдік. Мұндай жағдайда (1.21) сандық тізбек шексіздікке ұмтылады деп айтатын болып келісеміз де, оны символ түрінде былайша белгілейміз:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \tag{1.22}$$

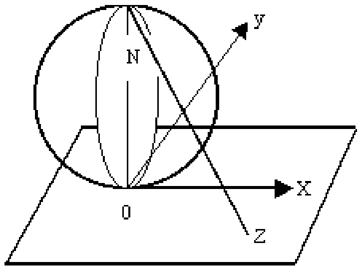
Бұл теңдік сандардың шексіз (1.21) тізбегінің шектік саны болмайтынын өрнектейді.

(1.22) теңдікке жай геометриялық түсіндірме беру үшін комплекс сандарды сфера бетіндегі нүктелермен кескіндейміз. Осы мақсатпен жазықтықты нөлдік нүктеде жасайтын сфераны аламыз (5-сурет). Сфераның O нүктесі арқылы өтетін ON диаметрі жазықтыққа перпендикуляр болады, диаметрдің сферамен қиылысатын екінші нүктесін, N нүктесін, полюс деп атаймыз; кез келген комплекс саны z жазықтықтағы нүктемен кескінделеді, осы нүктені Nz түзу арқылы полюспен қоссақ, түзу мен сфераның қиылысқан жерінде жалғыз нүктені (N-нен өзге) аламыз, бұл нүктені комплекс сан z -тің кескіні үшін қабылдаймыз.

Сонымен, әрбір комплекс сан сфераның кейбір нүктесімен кескінделеді; керісінше, сфераның әрбір нүктесіне, N полюсінен басқа, жазықтықтағы жалғыз нүкте (N нүктесі және қарастырылатын нүкте арқылы өтетін сәуленің жазықтықпен қиылысу нүктесі) сәйкес келеді; сөйтіп, N полюсінен басқа сфераның кез келген нүктесі кейбір комплекс санды кескіндейді. Сонымен, біз жазықтық және сфера нүктелерінің арасында өз ара бір мәнді және өзара үзіліссіз сәйкестік орнатамыз (N нүктесін шығарып тастап). Осы N нүктесі шығарылып тасталынған сфера барлық комплекс сандар жинағының кескіні болады. Енді N нүктесі мен сфераның басқа нүктелерін өз ара қатысын қарастыралық. Егер сан тізбегі z_n шексіздікке ұмтылса,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty,$$

онда сфера бетінде оларды кескіндейтін нүктелері шектелместен N нүктесіне жақындайды. Сол себепті N нүктесін шексіздіктің кескіні деп қабылдап, ал оған сәйкес келетін жазықтықтағы жалғыз нүктені осы жазықтықтың *шексіз алыстаған нүктесі* деп атауымызға болады.



5-сурет

Сөйтіп, комплекс сандар жазықтығында біз шексіз алыстаған түзу, яғни әр түрлі нүктелердің шексіз жиыны қарастырылатын проективтік геометриядағы жазықтықтан айырмашылығы бар жалғыз ғана шексіз алыстаған нүктені (сферада N нүктесімен кескінделетін) қабылдаймыз.

Сонымен, *стереографиялық проекция* деп аталатын бұл қарастырылған түрлендіру арқылы біз сфера нүктелері мен жазықтық нүктелерінің (жазықтықтың шексіз алыстаған жалғыз нүктесін қоса) арасында өзара бір мәнді сәйкестік орнатамыз. Нүктелері барлық комплекс сандар жиыны мен шексіздікті кескіндейтін осы сфера *комплекс сандар сферасы* немесе *Риман сферасы* деп аталады.

Егер сферадағы N нүктесінің аймағы деп сфера бетінің N нүктесі ішінде жатқан және жазықтығы ON-ге перпендикуляр кез келген шеңбермен шектелген бөлігі ретінде түсінсек, онда жазықтықтың шексіз алыстаған нүктесінің аймағы деп сфераның осы бөлігінің стереографиялық проекциясын, яғни центрі координаталар басындағы келген дөңгелектің сыртын түсінуіміз керек.

II ТАРАУ. КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР

2.1. Комплекс жазықтықтағы облыстар

Алдын ала жиынның ішкі нүктесі деген ұғымды түсіндірейік. Егер центрі P нүктесіндегі жеткілікті кішкене дөңгелектің барлық нүктелері D жиынында жатса, онда P нүктесін D жиынының *ішкі нүктесі* деп атайды. Мысалы, концентрлі екі шеңбердің арасындағы барлық нүктелерді қарастырайық, онда біз ішкі нүктелерден ғана тұратын жиында аламыз.

Жазықтықтағы нүктелерден тұратын G жиынының *облысы* деп мына екі шартты қанағаттандыратын облысты айтады:
1) Егер G жиыны ішкі нүктелерден ғана тұрса,
2) Жиынның кез келген екі нүктесін жеткілікті үлкен саннан тұратын буыны бар нүктелері сол жиында жататын сынық сызықпен қосуға болса.

Облыс G берілсе, жазықтықтың бүкіл нүктелерінің осы G облысында қатысты екі топқа бөлуге болады. Бірінші топқа G облысының барлық нүктелерін жатқызамыз, ал екінші топқа G облысында жатпайтын нүктелерді енгіземіз. G облысында жатпайтын М нүктесі екі түрлі болуы мүмкін: не центрі осы М нүктесіндегі мейлінше кішкене дөңгелектің барлық нүктелері G облысында жатпайды, онда М нүктесін G облысының *сыртқы нүктесі* деп атаймыз, не центрі осы М нүктесіндегі мейлінше кішкене дөңгелекте G облысының нүктелері де жатады, онда М нүктесін G облысының *шекаралық нүктесі* деп атаймыз. Шекарасы жоқ облыстың бір ғана мысалына комплекс айнымалының кеңейтілген жазықтығы жатады.

G облысы мен оның шекарасынан тұратын жиын тұйық облыс деп аталады да, $\overline{G}$ арқылы белгіленеді.

Облыс ұғымын анықтығаннан кейін Жордан мағынасындағы үзіліссіз сызық ұғымын анықтауға көшеміз. $x(t)$ мен $y(t)$ айнымалысы t-ның $\alpha \le t \le \beta$ кесіндісінде өзгеретін нақты үзіліссіз функциялары болсын дейік. Екі теңдеу

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (\alpha \le t \le \beta) \tag{2.1}$$

үзіліссіз сызықтың параметрлік кескінін береді. Егер t параметрінің әртүрлі екі мәніне (сызықтың басы мен ұшына сәйкес $t = \alpha$ мен $t = \beta$ мәндерін алып тастағанда) әрқашанда сызықтың әртүрлі екі нүктесі сәйкес келуін талап етсек, біздің сызығымыздың еселі нүктесі болмайды. Осындай сызықты Жордан сызығы немесе үзіліссіз сызық деп атаймыз. Егер $z = x + iy$ өрнегін

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

болатындай алсақ, бұл сызықтың аналитикалық кескінін

$$z = z(t), \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

бір ғана теңдеуімен жазуға болады. t параметрі $[\alpha, \beta]$ кесіндісінде өсе отырып, өзгергенде z нүктесі Жордан сызығын сызады, оның басы $z(\alpha)$ нүктесі, ұшы $z(\beta)$ нүктесі болады, сонымен (2.1) сызығында оң бағыт орнатылады.

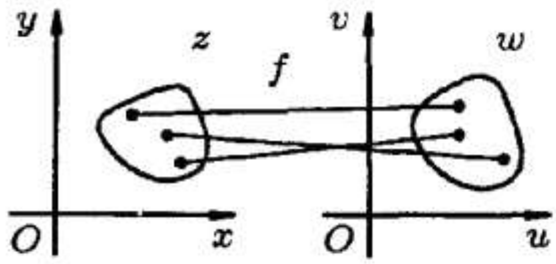
Геометриялық тұрғыдан Жордан сызығы түзу сызықты кесіндінің өз ара бір мәнді және үзіліссіз бейнесі болып табылатын жазықтықтағы нүктелер жиыны екені айқын. Егер Жордан сызығының басы мен ұшы өз ара беттессе, онда ол *тұйық сызық* деп аталады. Жордан көрсеткендей үзіліссіз тұйық сызық жазықтықты екі облысқа бөледі: біріншісі, құрамында шектеусіз алыстаған нүкте жатпайтын, берілген сызыққа қарағанда ішкі облыс деп аталатын облыс, екіншісі, шектеусіз алыстаған нүктені қамтитын, берілген сызыққа қарағанда сыртқы деп аталатын облыс. Берілген сызық осы облыстардың екеуіне де шекара болып табылады. Сызықтағы жоғарыда көрсетілген оң бағытты, біз қисықтың ішкі бөлігі осы бағытпен қозғалатын $z(t)$ нүктесінің сол жағында жататындай таңдап алдық деп жориық. Жорданның тұйық қисығы геометриялық тұрғыдан шеңбердің бір мәнді және үзіліссіз бейнесі деп қарауға болады. Шынында, α=0, β=2 деп алып, t параметрін шеңбер нүктесінің аргументі деп қарауға болады. Сонда Жорданның тұйық қисығының ішінде жатқан облыс мынадай қасиеттерге ие болады: біз осы облыста қандай болмасын үзіліссіз тұйық сызық жүргізбейік, оның да ішкі бөлігі берілген облыста жатады.

Жалпы, мұндай қасиеті бар облыс *бір байланысты*, ал ондай қасиеті жоқ облыстар *көп байланысты облыстар* деп аталады. Мысалы: көпбұрыштың ішінде жатқан жазықтықтың бөлігі шекарасы осы көпбұрыш болатын ішкі облыс болады; керісінше, жазықтықтың көпбұрыштың сыртында жатқан бөлігі көп байланыты болады, өйткені көпбұрышты қоршайтын тұйық Жордан қисығы түгелдей берілген облысқа жатпайды. Дөңгелек $r \le |z - z_0| \le R$ сақинасындағы z нүктелерінен құралған облыс та көп байланысты болады.

2.2. Комплекс айнымалы функция

Элементтері комплекс сандар болатын D және E екі жиыны берілсін. D жиынының $z = x + iy$ саны z комплекс жазықтығында, ал $\omega = u + i\upsilon$ саны екі ω комплекс жазықтығында кескінделсін.

Егер D жиынының әрбір z санына белгілі бір ереже немесе заңдылық бойынша E жиынының бір ω саны сәйкес келсе, онда E жиынында $\omega = f(z)$ *бір мәнді комплекс айнымалы функциясы* берілді дейміз (6-сурет).



6-сурет

Егер әрбір $z \in D$ санына әртүрлі бірнеше $\omega \in E$ саны сәйкес келсе, онда $\omega = f(z)$ функциясы *көп мәнді функция* деп аталады.

D жиынын $\omega = f(z)$ функциясының анықталу облысы деп, E жиынын $\omega = f(z)$ функциясының *мәндер облысы* деп атайды.

$\omega = f(z)$ функциясын

$\omega = f(z) = u + i\,\upsilon$,

түрінде жазуға болады, мұндағы

$u = u(x;y) = \mathrm{Re\,f}(z),\ \upsilon = \upsilon(x;y) = \mathrm{Im\,f}(z),\ \ (x;y) \in D$.

$u(x;y)$ функциясын $f(z)$ функциясының *нақты бөлігі* деп, ал $\upsilon(x;y)$ – *жорымал бөлігі* деп аталады.

Мысалы 2.1. $\omega = z^2$ функциясының нақты және жорымал бөліктерін табыңдар.

Шешуі: $\omega = z^2$ функциясын $u + i\,\upsilon = (x + iy)^2$ түрінде жазуға болады. Сонда

$u + i\,\upsilon = x^2 - y^2 + 2xy\,i$.

Бұдан $u = x^2 - y^2$, $\upsilon = 2xy$ шығады.

Мысалы 2.2. $\omega = z^2 + z$ функциясы берілген. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 2 - i,$ $z_3 = i, z_4 = -1$ нүктелеріндегі функцияның мәндерін табыңдар.

Шешуі: $\omega_1 = (1+i)^2 + 1 + i = 1 = 3i$,

$\omega_2 = (2-i)^2 + 2 - i = 1 = 5(1-i)$,

$\omega_3 = i^2 + i = 1 = -1 + i$,

$\omega_4 = 1 - 1 = 0$.

2.3. Комплекс айнымалы функцияның шегі және үзіліссіздігі

$\omega = f(z)$ бір мәнді функциясы z_0 нүктесінде және оның кейбір аймағында анықталсын. Комплекс жазықтықтың z_0 нүктесінің δ–аймағы деп центрі z_0 нүктесінде радиусы δ тең дөңгелекті алайық.

Егер кез келген оң ε саны үшін $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ саны табылып, $|z - z_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $z \neq z_0$ үшін $|\mathrm{f}(z) - \omega_0| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда ω_0 саны $\omega = f(z)$ функциясының z *айнымалысы* z_0 *нүктесіне ұмтылғандағы шегі* деп аталады және ол былай жазылады:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0. \tag{2.2}$$

Логикалық символдар арқылы келтірілген анықтама былай жазылады:

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad \forall z{:}0 < |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow\ |\mathrm{f}(z) - \omega_0| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \mathrm{f}(z) = \omega_0$$

Егер функцияның ω_0 шегі бар болса, онда бұл анықтамадан

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x;y) = u_0 \ \text{ және } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \upsilon(x;y) = \upsilon_0$$

шектері бар болады.

Керісінше де тұжырым дұрыс болады.

Бір (немесе бірнеше) нақты айнымалы функцияның шектері туралы теоремалар комплекс айнымалы функциялар үшін де дұрыс болып қалады.

Егер $f_1(z)$ және $f_2(z)$ функцияларының $z_0 \in G$ нүктесінде шектері бар болса, онда

1. $\lim\limits_{z\to z_0}\left(c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)\right) = c_1 \lim\limits_{z\to z_0} f_1(z) \pm c_2 \lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)$,

где c_1, c_2 – тұрақтылар;

2. $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)\cdot f_2(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)\cdot \lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)$

3. $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)}$, егер $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z) \neq 0$.

Егер $\omega = f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде анықталса және $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ теңдігі орындалса, онда *$\omega = f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде үзіліссіз* деп аталады.

Енді үзіліссіздіктің екінші анықтамасын берейік. z_0 аргументіне Δz өсімшесін берсек, онда $\omega = f(z)$ функциясы $\Delta\omega$ немесе $\Delta f(z)$ өсімшесін алады. Ол $\Delta\omega = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ формуласымен анықталады.

Егер $\omega = f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде анықталса және $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \Delta f(z) = 0$ теңдігі орындалса, онда *$\omega = f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде үзіліссіз* деп аталады.

Егер $\omega = f(z)$ функциясы G облысының барлық нүктелерінде үзіліссіз болса, онда $\omega = f(z)$ функциясы *G облысында үзіліссіз* деп аталады.

Комплекс айнымалы функцияның үзіліссіздігінің анықтамасы нақты айнымалының функциясы үшін берілген сәйкес анықтамаға ұқсас болғандықтан, үзіліссіз функцияларға қолданылатын амалдар туралы теоремаларды дәлеледеу комплекс облыста да сол нақты анализдегілердей болып қалады. Сөйтіп, *z_0 нүктесіндегі (G облысында) үзіліссіз екі $f(z)$ және $\varphi(z)$ функциясының қосындысы, айырымы және көбейтіндісі осы z_0 нүктесінде (осы G облысында) үзіліссіз болады; ал егер $\varphi(z_0) \neq 0$ (G облысында $\varphi(z_0) = 0$) болса, онда мұндай функциялардың бөліндісі де z_0 нүктесінде (G облысында) үзіліссіз болады.*

Мысалы 2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+3n\,i}{i-n}$ шегін есептеңіздер.

Шешуі. 1- әдіс: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+3n\,i}{i-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2+3n\,i)(i+n)}{(i-n)(i+n)} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1} - i\,\dfrac{3n^2+2}{n^2+1}\right) = -3i$.

2-әдіс : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+3n\,i}{i-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3i+\frac{2}{n}}{-1+\frac{i}{n}} = -3i$.

Тұйық шектелген $\overline{G}$ облысында үзіліссіз $\omega = f(z)$ функциясының қасиеті мына теоремамен айтылады:

Қандай болмасын кішкене оң ε санына сәйкес δ=δ(ε) саны табылып, G *облысының кез келген екі нүктесі* z' *пен* z'' *үшін ара қашықтығы* $|z' - z| < \delta$ *болатын, функцияның сәйкес мәндері*

$$|\omega' - \omega''| = |f(z') - f(z'')| < \varepsilon .$$

Бұл теорема тұйық $\overline{G}$ облысында кез келген функцияның бір қалыпты үзіліссіз екенін көрсетеді.

2.4. Функционалдық қатарлар

Мына қатардың

$$f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in D \qquad (2.3)$$

барлық мүшелері комплекс айнымалы z-тің кейбір D облысында анықталған бір мәнді функциялары болсын. Осы қатар D облысының әрбір z нүктесінде жинақты болады деп жориық және оның қосындысын S(z) арқылы белгілейік.

Ендеше үзіліссіз функциялардың жинақты қатарының қосындысыда үзіліссіз функция болу үшін ол қатарға қосымша шарт қою керек. Қатардың бір қалыпты жинақтылық шарты осы рөлді атқарады. D облысында жинақты болатын берілген (2.3) қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысын $S_n(z)$ арқылы белгілеп, D облысының кез келген z нүктесі үшін қатардың жинақтылық салдарынан n-нің шектелмей өскенінде нөлге ұмтылатынын S(z)-S_n(z) айырымын қарастыралық.Бұл

$$|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады деген сөз.

Сөйтіп, анықтама бойынша, егер кез келген мейілінше кішкене оң сан ε үшін натурал сан N=N(ε) табылып, барлық $n \geq N$ де D облысындағы z нүктесі үшін қандай болсын $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, (2.3) қатардың облысында S(z) функциясына бір қалыпты жинақты болады. Оның дербес қосындысы

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z).$$

(2.3) функционалдық қатарының жинақталу облысын анықтау үшін Даламбер белгісін немесе Коши белгісін

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = l(z), \qquad (2.4)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = l(z), \qquad (2.5)$$

қолданып, $l(z) < 1$ теңсіздігінің шешімі (2.3) функционалдық қатарының жинақталу облысы, ал $l(z) > 1$- жинақталмау облысы болады. $l(z) = 1$ болғанда (2.3) функционалдық қатарының жинақталу, жинақталмауы белгісіз.

Теорема. *(Қатардың қосындысының үзіліссіздігі туралы).* Егер (2.3) қатары D облысында бір қалыпты жинақты болса және ол қатардың барлық мүшелері облыстың z_0 нүктесінде үзіліссіз функциялар болса, онда қатардың қосындысы да сол нүктеде үзіліссіз функциялар болады.

Салдар. D облысында үзіліссіз, осы облыста бір қалыпты жинақты болатын функциялардың қатары сол облыста үзіліссіз функцияны өрнектейді.

Шынында, қатардың барлық мүшелері D облысының әрбір нүктесінде үзіліссіз мәні болғандықтан, теорема бойынша қатардың қосындысы D облысының әрбір нүктесінде, яғни бүкіл облыста үзіліссіз болуға тиіс.

Қатардың бір қалыпты жинақтылық белгісі. Егер D облысында (2.3) қатардың барлық мүшелері

$$\left|f_n(z)\right| \le a_n$$

шартты қанағаттандырса, мұндағы a_n -тұрақты оң сандар, сонымен бірге

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \tag{2.6}$$

сандық қатар жинақты болса, берілген (2.3) қатар D облысында бір қалыпты (әрі абсолют) жинақты болады.

Дәлелдеу.

$$\left|f_1(z)\right| + \left|f_2(z)\right| + ... + \left|f_n(z)\right| + ...$$

қатары D облысының әрбір z нүктесінде жинақты, өйткені оның мүшелері жинақты (2.6) қатардың сәйкес a_n мүшелерінен артық емес. Демек, берілген (2.3) қатар D облысының әрбір z нүктесінде абсолют жинақты болады. (2.3) қатардың қосындысы мен бірінші n мүшелерінің қосындысының сәйкес *S(z)* пен *S_n(z)* белгілеп, мынаны аламыз:

$$\left|S(z) - S_n(z)\right| \le \left|f_{n+1}(z)\right| + \left|f_{n+2}(z)\right| + ... \le a_{n+1} + a_{n+2} + ... \tag{2.7}$$

Шарт бойынша (2.4) қатар жинақты болатындықтан, оның қалдық мүшесі $a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ қандай болмасын (ε>0) үшін жеткілікті үлкен $n \ge N =$ N=N(ε) - нан бастап ε- нан кем болады. Сөйтіп, (2.7) теңдіктен D облысындағы z нүктесіне тәуелсіз мынаны аламыз:

$n \ge N =$ N=N(ε) болғанда $\left|S(z) - S_n(z)\right| < \varepsilon$.

Бұл (2.3) қатардың D облысында бірқалыпты жинақталатындығын дәлелдейді.■

2.5. Дәрежелік қатар

Мына

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ... \tag{2.8}$$

түріндегі қатарды комплекс облыстағы дәрежелік қатар деп аталады, мұндағы $c_0, c_1, ..., c_n, ...$ коэффициенттері– мәні тұрақты комплекс сандар, z-тәуелсіз комплекс айнымалы.

(2.8) дәрежелік қатардың жинақты болатын жазықтықтағы z нүктелерінің жиыны осы қатардың *жинақталу облысы* деп аталады. Кез келген (2.8) түріндегі қатар $z = 0$ нүктесінде жинақты болатындығы айқын, яғни нөлдік нүкте әрқашанда жинақтылық облысында жатады.

Абель теоремасы. 1) Егер $z = z_0 \neq 0$ нүктесінде (2.8) дәрежелік қатары жинақты болса, онда $|z| < |z_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген z үшін берілген қатар абсолют жинақты болады.

2) Егер $z = z_0 \neq 0$ нүктесінде (2.8) дәрежелік қатары жинақсыз болса, онда $|z| > |z_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген z үшін берілген қатар жинақсыз болады.

$|z_0| = R$ шамасын (2.8) қатарының *жинақталу радиусы* деп, ал $|z| < R$ дөңгелегін (2.8) қатарының *жинақталу дөңгелегі* деп атайды. $|z| < R$ дөңгелегін (2.8) қатарының жинақталады, ал осы дөңгелектің сыртында – жинақталмайды.

Дәрежелік қатардың жинақталу облысын анықтайық. Ол үшін (2.8) дәрежелік қатардың коэффициенттерін негізге алып,

$$|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \ldots, \sqrt[n]{|c_n|}, \ldots \tag{2.9}$$

сандық тізбегін құрамыз. Бұл тізбектің барлық мүшелері теріс емес нақты сандар ретінде қарастырылады.

(2.9) сандар тізбегінің ең үлкен шегін l арқылы белгілелік, яғни

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\ .$$

Сонда (2.8) дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы мына формула бойынша анықталады:

$$R = \frac{1}{l}.$$

Бұл формула Коши-Адамар формуласы деп аталады.

(2.8) дәрежелік қатардың жинақталу радиусы мына формула бойынша анықталады:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad \text{немесе} \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

2.4 -мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(z-i)^n}$, $z \in C$ функционалдық қатарының жинақталу облысын табыңыздар.

Шешуі. Даламбер белгісін қолданып,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(z-i)^n}{n(z-i)^{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{z-i}\right| < 1$$

теңсіздігін деп жаза аламыз. Бұдан қатардың центрі i нүктесінде радиусы 1-ге тең дөңгелектің сыртында абсолют жинақталатындығы шығады. $|z-i| = 1$ шеңберінде қатар жинақталмайды.

2.6. Элементар аналитикалық функциялар

Комплекс облыстағы элементар функциялар нақты облыстағы элементар функциялардың жалғасы болып табылады. Бірақ бұл олардан гөрі кеңдеу, мысалға көрсеткіштік функция периодты, тригонометриялық функция $\sin z, \cos\ z$ шектелмеген, санның логарифмі көп мәнді және кез келген оң, теріс, комплекс сандардың да логарифмін табуға болады. Енді ол функцияларға қысқаша тоқталайық.

Көрсеткіштік функция.

$\omega = e^z$ көрсеткіштік функциясы

$$\omega = e^z = e^z(\cos y + i\sin y) \qquad (2.10)$$

формуласымен анықталады.

Нақты облыста анықталған көрсеткіштік функцияның барлық қасиеттері комплекс облыс үшін де орындалады, мысалы:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2},$$

$$e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1-z_2},$$

$$\left(e^z\right)^n = e^{nz}.$$

Шынында да, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot \left(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right) =$

$$= e^{x_1+x_2} \cdot \left(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right) = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

$\omega = e^z$ функциясы периодты, периоды $2\pi i$-ге тең. Бұл Эйлер формуласы мен көрсеткіштік функциясының қасиетінің көмегімен дәлелденеді:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z, \quad e^{z+2\pi i} = e^z$$

e^z функциясы әрқашан нөлден үлкен болмайтынын атап өтейік. Мысалы, $e^{\pi i} = -1 < 0$.

Логарифмдік функция.

Комплекс айнымалы логарифмдік функцияны көрсеткіштік функцияға кері ретінде енгіземіз.

Егер $e^\omega = z$ болса, онда ω саны $z \neq 0$ санының логарифмі деп аталады және ол $\omega = Ln\, z$ белгіленеді.

$e^\omega = z$ көрсеткіштік функциясының мәні әрқашан нөлден өзге болса, онда $\omega = Ln\, z$ логарифмдік функциясы комплекс жазықтықтың $z = 0$ нүктесінен басқа нүктелерде анықталған болады.

Логарифмдік функцияны анықтау үшін

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \ \omega = u + i\upsilon$$

десек, онда логарифмдік функцияның анықтамасы бойынша $e^{u+i\upsilon} = r \cdot e^{i\varphi}$, немесе $e^u \cdot e^{i\upsilon} = r \cdot e^{i\varphi}$ аламыз. Бұдан

$$e^u = r, \ \upsilon = \varphi + 2k\pi,$$

яғни $u = \ln r$, $\upsilon = \varphi + 2k\pi$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

шығады. Демек ,

$$\omega = Ln\,z = u + i\upsilon = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi).$$

Сонымен логарифмдік функция

$$Ln\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\ ,\ k = 0, \pm 1, \pm 2,... \qquad (2.11)$$

немесе

$$Ln\,z = \ln|z| + i\ Arg\ z\,,$$

мұндағы $Arg\ z = \arg\ z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2,...$ түрінде анықталады.

(2.11) формуласынан k-кез келген бүтін сан болғанда комплекс айнымалы логарифмдік функция шексіз мәндер жиынына ие болады, сондықтан $\omega = Ln\,z$ – көпмәнді функция.

$k = 0$ мәніне сәйкес келетін функцияның мәні логарифмнің бас мәні деп атайды және ол $\ln z$ деп белгіленеді:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z\,,\ \text{мұндағы}\ -\pi < \arg z \le \pi \qquad (2.12)$$

Егер z – нақты оң сан болса, онда $\arg z = 0$ және $\ln z = \ln|z|$, яғни нақты оң санның логарифмінің бас мәні мектептегі осы санның натурал логарифмімен сәйкес келеді.

(2.11) формуласын

$$Ln\,z = \ln z + 2k\pi\, i\,,\ k = 0, \pm 1, \pm 2,...$$

етіп жазуға болады.

Комплекс облыстағы логарифмдік функция мектептен білетін логарифмдік функцияның көптеген қасиеттерін қанағаттандырады, айталық:

1. $Ln\,(z_1 \cdot z_2) = Ln\,z_1 + Ln\,z_2$,
2. $Ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = Ln\,z_1 - Ln\,z_2$,
3. $Ln\,z^n = n \cdot Ln\,z$,
4. $Ln\sqrt[n]{z} = \dfrac{1}{n} \cdot Ln\,z$.

Мысалы, бірінші қасиетті дәлелдейік:

$$Ln\,(z_1 \cdot z_2) = \ln|z_1 \cdot z_2| + iArg\ (z_1 \cdot z_2) = \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(Arg\ z_1 + Arg\ z_2) =$$

$$= (\ln|z_1| + i\ Arg\ z_1) + (\ln|z_2| + i\ Arg\ z_2) = Ln\,z_1 + Ln\,z_2\,.$$

Мысалы 2.5. $Ln\,(-1)$ және $\ln(-1)$; $\ln 2\,i$ есептеңіздер.

Шешуі: $z = -1$ үшін $|z| = 1$, $\arg z = \pi$.

Демек, $Ln\,(-1) = \ln 1 + i\,(\pi + 2k\pi) = i\pi(2k+1)$, $\ln(-1) = \pi\, i$ және

$$\ln 2i = \ln|2\,i| + i\arg 2\,i = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}\,.$$

Келтірілген мысалдан теріс санның логарифмін табуға болатынын көрсетеді.

Тригонометриялық функциялар.

Комплекс айнымалы тригонометриялық функциялар

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \ ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}$$

теңдіктерімен анықталады.

Комплекс айнымалы тригонометриялық функция үшін нақты айнымалы тригонометриялық функция көптеген формулалары сақталады.

Дербес жағдайда,

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\quad \cos(-z) = \cos z$,

$\sin 2z = 2\sin z \cos z$, $\quad \sin(-z) = -\sin z$,

$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$, $\quad tg(z+\pi) = tgz$,

$\sin(z + 2\pi) = \sin z$, $\quad tg 2z = \dfrac{2tgz}{1 - tg^2 z}$,

$\sin\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos z$, $\quad \sin\left(z + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\cos z$,

$\cos z = 0$, мұндағы $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ т.с.с.

Мысалы, бірінші формуланы дәлелдейік:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} =$$

$$= \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

$\sin x$ және $\cos x$ тригонометриялық функциялары комплекс жазықтықта шектелмеген функция екенін атап өтейік:

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \sin z = \infty, \ \lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \cos z = \infty.$$

Сонымен, мысалы, $\cos i = \dfrac{e + e^{-1}}{2} \approx 1{,}54 > 1$, $\cos 3i > 10$.

Гиперболалық функциялар.

Комплекс айнымалы гиперболалық функциялар

$$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \ th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z}, \ cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z}$$

теңдіктерімен анықталады.

Гиперболалық және тригонометриялық функциялар арасындағы байланысты анықтауға болады. Ол үшін көрсетілген функциялардағы z-тің орнын iz-пен ауыстырсақ, онда

$sh\, iz = i \sin z$, $\quad \sin z = -i\, sh iz$, $\quad ch\, iz = \cos z$,

$tg\, iz = i\, tg\, z$, $\quad ctg\, iz = -i\, ctg\, z$

теңдіктерін аламыз.

Осы теңдіктерді пайдалана отырып, гиперболалық функцияларға байланысты формулаларды алуға болады. Мысалы, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

формуласындағы тригонометриялық функцияларды гиперболалық функциялармен ауыстырсақ, онда

$$(-i\,sh iz)^2+(ch\,iz)^2=1,$$

немесе $-sh^2 iz+ch^2 iz=1$ аламыз. Өйткені мұнда z – кез келген комплекс сан, олай болса iz-ті z-пен ауыстыруға болады. Сонда $ch^2 z-sh^2 z=1$ формуласын аламыз.

Енді бірнеше формулаларды келтірейік:

$$ch\,2z=ch^2 z+sh^2 z, \qquad ch(-z)=ch\,z,$$

$$sh\,2z=2sh\,z\,ch\,z, \qquad sh(-z)=-sh\,z,$$

$$ch(z_1+z_2)=ch\,z_1\,ch\,z_2+shz_1\,sh\,z_2, \qquad sh\,z+ch\,z=e^z.$$

Гиперболалық функциялардың анықтамасынан $sh\,z$ және $ch\,z$ функциялары периодты, периоды $2\pi i$-ге тең, ал $th\,z$ және $cth\,z$ функциялары да периодты, периоды πi-ге тең.

Кері тригонометриялық және кері гиперболалық функциялар.

Егер $\sin\omega=z$ болса, онда ω саны z санының *арксинусы* деп аталады және ол $\omega=Arc\sin z$ деп белгіленеді.

Гиперболалық функцияларға кері функцияларды $\omega=Arsh\,z$, $\omega=Arch\,z$, $\omega=Arth\,z$, $\omega=Arcth\,z$ таңбаларымен белгілейді.

Синустың анықтамасын пайдалана отырып,

$$z=\sin\omega=\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i},$$

немесе

$$e^{2i\omega}-2\,ize^{i\omega}-1=0$$

теңдеуін аламыз. Осы теңдеудің шешіміі

$$e^{i\omega}=iz+\sqrt{(iz)^2+1}, \text{ немесе } e^{i\omega}=iz+\sqrt{1-z^2}$$

болады да, бұдан

$$\omega=-i\,Ln\left(i\,z+\sqrt{1-z^2}\right).$$

Сонымен, кері тригонометриялық функцияны логарифмдік функция арқылы өрнектеуге болады:

$$Arc\sin z=-i\,Ln\left(i\,z+\sqrt{1-z^2}\right).$$

Қалған кері тригонометриялық және кері гиперболалық функцияларда осы сияқты анықталады:

$$Arc\cos z=-i\,Ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$Arctg\,z=-\frac{i}{2}Ln\frac{i-z}{i+z}\quad (z\neq\pm i), \qquad Arcctg\,z=\frac{i}{2}Ln\frac{z-i}{z+i}\quad (z\neq\pm i),$$

$$Arsh\,z=Ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right), \qquad Arth\,z=\frac{1}{2}Ln\frac{1+z}{1-z},$$

$$Arch\,z=Ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right), \qquad Arcth\,z=\frac{1}{2}Ln\frac{z+1}{z-1}.$$

Барлық кері тригонометриялық және кері гиперболалық функциялар көпмәнді функциялар болады.

2.7. Комплекс айнымалы функцияны дифференциалдау

Айталық $\omega = f(z)$ функциясы |D облысында анықталған бір мәнді функция болсын.

Егер $\Delta z \to 0$ (Δz нөлге ұмтылғанда) функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \tag{2.13}$$

ақырлы шегі бар болса, онда ол шек $\omega = f(z)$*функциясының* z *нүктесіндегі туындысы* деп аталады және ол $f'(z)$ таңбасымен белгіленеді.

Бұл шек Δz -тің нөлге қалай ұмтылғанына тәуелсіз.

z нүктесінде туындысы бар z нүктесінде дифференциалданатын $f(z)$ функция сол нүктеде *моногенді функция* деп аталады.

Сонымен анықтама бойынша

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z}.$$

Теорема. Егер $\omega = u(x;y) + i\upsilon(x;y)$ функциясы $z = x + iy$ нүктесінің аймағында анықталған және $u(x;y)$ и $\upsilon(x;y)$ нақты функциялары осы нүктеде дифференциалданатын функциялар болса, онда z нүктесінде $\omega = f(z)$дифференциалданатын функциясы үшін

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \tag{2.14}$$

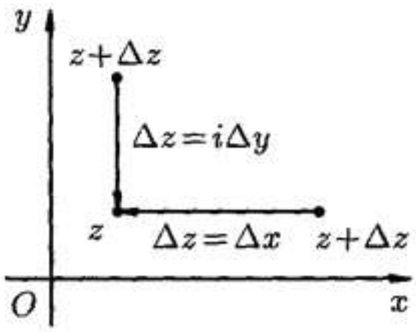
теңдіктері орындалуы қажетті және жеткілікті

(2.14) теңдіктері *Коши – Риман шарттары* деп аталады.

Дәлелдеу. Қажеттілігі. Айталық, $f(z)$ функциясы кейбір z нүктесінде белгілі бір шектеулі туындысы бар болсын делік. Сонда:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta \upsilon}{\Delta x + i\Delta y} = f'(z) \tag{2.15}$$

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ нөлге қалауымызша алынған заң бойынша ұмтылатын болғандықтан, дербес жағдайда, $\Delta y = 0$ және $\Delta x \to 0$ деп санауға болады.



7-сурет

Геометриялық тұрғыдан, (7-сурет) мұның мағынасы мынадай: біз $z+\Delta z$ нүктесін z нүктесіне нақты оське параллель түзудің бойымен жуықтауға мәжбүр етеміз. Осы жағдайда (2.15) теңдік шарты бізге мынаны береді:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta \upsilon}{\Delta x}=f'(z)$$

немесе

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}=f'(z),$$

ал мұны мына түрде жазуға болады

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=f'(z). \qquad (2.16)$$

Осы сияқты $\Delta x=0$ деп қабылдап, яғни $z+\Delta z$ нүктесін z нүктесіне жорымал оське параллель түзудің бойымен жуықтауға (7-сурет) мәжбүр етіп, (2.14) теңдіктен мынаны аламыз:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta \upsilon}{i\Delta y}=f'(z),$$

немесе

$$-i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta \upsilon}{\Delta y}=f'(z),$$

ал мұны мына түрде жазуға болады

$$-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=f'(z). \qquad (2.17)$$

(2.16) пен (2.17) теңдіктерінің оң жақтары өз ара тең, ендеше, ол теңдіктердің сол жақтары да тең болулары тиіс:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (2.18)$$

Сонда (2.18) теңдіктің екі жағындағы нақты және жорымал бөліктерді салыстырып, мынаны аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\ .\ \blacksquare$$

Жеткіліктілігі. Айталық, (2.15) шарттары орындалсын. $f(z)$функциясы z нүктесінде дифференциалданатынын дәлелдейік.

$u(x;y)$ және $\upsilon(x;y)$ функциялары $z=x+iy$ нүктесінде дифференциалданатын болғандықтан, олардың толық өсімшелерін

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1,$$

$$\Delta \upsilon=\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\Delta y+\alpha_2$$

түрінде жазуға болады, мұндағы α_1,α_2- $|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ шамасына қарағанда жоғарғы ретті шексіз аз шамалар.

Бұл шартты ескере отырып, былай жаза аламыз:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta\upsilon}{\Delta x+i\Delta y}==\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\Delta x+i\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{\alpha_1+i\alpha_2}{\Delta x+i\Delta y}$$

(2.14) шарттарын қолдансақ, онда

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\Delta y+i\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\Delta x+i\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+\alpha_3$$

аламыз, мұндағы

$$\alpha_3=\frac{\alpha_1+i\alpha_2}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Олай болса

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial\upsilon}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+\alpha_3=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\alpha_3,$$

ал α_3 шамасы $|\Delta z|$-ке қарағанда жоғарғы ретті шексіз аз шама.

Соңғы теңдіктен Δz нөлге ұмтылғанда шекке көшіп, мына теңдікті аламыз:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\ .$$

Теорема толығымен дәлелденді. ■

(2.14) Коши-Риман шарттары орындалғанда $f(z)$ функциясының туындысы мына формулалардың кез келгенімен анықтауға болады:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial\upsilon}{\partial x},\qquad f'(z)=\frac{\partial\upsilon}{\partial y}+i\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\tag{2.19}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y},\qquad f'(z)=\frac{\partial\upsilon}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\tag{2.20}$$

Шектің қасиеттері негізінде туындының негізгі қасиеттері шығады.

Қасиеттері:

Егер $f_1(z)$ және $f_2(z)$ функциялары комплекс жазықтықтың кез келген z нүктесінде диффернциалданатын болса, онда мына теңдіктер орындалады:

1. $\left(f_1(z)\pm f_2(z)\right)'=f_1'(z)+f_2'(z),$
2. $\left(f_1(z)\cdot f_2(z)\right)'=f_1'(z)\cdot f_2(z)+f_1(z)\cdot f_2'(z)$
3. $\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)'=\frac{f_1'(z)\cdot f_2(z)-f_1(z)\cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)}\qquad (f_2(z)\neq 0).$

4. Егер $\varphi(z)$функциясы z нүктесінде, ал $f(\omega)$ функциясы $\omega=\varphi(z)$ нүктесінде дифференциалданатын болса, онда күрделі $f(\varphi(z))$ функциясы z нүктесінде дифференциалданады және $\left(f(\varphi(z))\right)'=f_\varphi'(\varphi)\cdot\varphi_z'(z).$

5. Егер $\omega=f(z)$функциясының z нүктесіндегі туындысы бар және $f(z)\neq 0$ болса, онда сәйкес кері $z=\varphi(\omega)$ функциясының ω нүктесінде туындысы бар және $\varphi'(\omega)=\frac{1}{f'(z)}$.

Бұл дәрежелік қатарларының

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots, \qquad |z|<1,$$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \qquad |z|<\infty,$$

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \qquad |z|<\infty.$$

бүкіл комплекс жазықтықта абсолют жинақты болады. Осы функциялардың дифференциалдау формулаларын табайық. Дәрежелік қатардың қосындысының туындысын дәрежелік қатарды мүшелеп дифференциалдау арқылы алуға болады, яғни

$$(e^z)' = 1+\frac{2z}{2!}+\frac{3z^2}{3!}+\ldots+\frac{nz^{n-1}}{n!}+\frac{(n+1)z^n}{(n+1)!}+\ldots==1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=e^z,$$

$$(\sin z)' = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\cos z,$$

$$(\cos z)' = -\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right)=-\sin z,$$

$$(tgz)' = \left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)' = \frac{(\sin z)'\cos z-(\cos z)'\sin z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z},$$

$$(a^z)' = \left(e^{z\ln a}\right)' = \left[(e^{\ln a})^z\right]' = e^{z\ln a}\cdot\ln a = a^z\ln a.$$

Ал гиперболалық функциялар үшін

$$(shz)' = [-i\sin iz]' = -i\cos iz\cdot i = \cos(iz) = chz,$$

$$(chz)' = [\cos iz]' = -i\sin iz = shz,$$

$$(thz)' = \frac{1}{ch^2 z}, \quad (cthz)' = -\frac{1}{sh^2 z}.$$

Функциялардың туындыларының кестесі.

1. $\left(z^n\right)' = n\,z^{n-1}$,
2. $\left(\sin z\right)' = \cos z$,
3. $\left(\cos z\right)' = -\sin z$,
4. $\left(tg\ z\right)' = \frac{1}{\cos^2 z}$,
5. $\left(ctg\ z\right)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$,
6. $\left(a^z\right)' = a^z\ln a$,
7. $\left(e^z\right)' = e^z$,
8. $\left(sh\,z\right)' = ch\,z$,
9. $\left(ch\,z\right)' = sh\,z$,
10. $\left(th\,z\right)' = \frac{1}{ch^2 z}$,
11. $\left(Arc\sin z\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$,
12. $\left(Arc\cos z\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$,
13. $\left(Arctgz\right)' = \frac{1}{1+z^2}$,
14. $\left(Arcctgz\right)' = -\frac{1}{1+z^2}$.

2.8. Аналитикалық функциялар. Гармониялық функциялар

Егер $\omega = f(z)$ функциясы z нүктесінің қандай да бір аймағында дифференциалданатын функция болса, онда ол *z нүктесінде аналитикалық функция* деп аталады. Аналитикалық функция бір мәнді де, көп мәнді де бола береді. Бір мәнді аналитикалық функция *голоморфты функция* деп аталады.

Егер $f(z)$ функциясы D облысының әрбір нүктесінде моногенді болса, онда ол *D облысында аналитикалық функция* деп аталады. Демек, анықтама бойынша D облысының әрбір нүктесінде шектеулі туындысы бар бір мәнді функция сол облыста аналитикалық деп аталады.

Айталық, $\omega = f(z)$ функциясы z нүктесінде аналитикалық функция болсын. Сонда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta \omega}{\Delta z} = f'(z)$. Бұдан $\dfrac{\Delta \omega}{\Delta z} = f'(z) + \alpha$, мұндағы $\alpha \to 0$ егер $\Delta z \to 0$. Сонда функцияның өсімшесін

$$\Delta \omega = f'(z)\Delta z + \alpha\, \Delta z$$

түрінде жазуға болады.

Сонымен, функцияның өсімшесі екі қосылғыштан тұрады: бірінші қосылғыш Δz-ке қарағанда сызықты, ал екінші қосылғыш $\alpha\,\Delta z$ - бұл Δz-ке қарағанда жоғарғы ретті шексіз аз шама.

Функция өсімшесіндегі функция туындысы мен аргумент өсімшесінің көбейтіндісіне тең, Δz-ке қарағанда сызықты бас бөлігі $f'(z)\Delta z$ *функцияның дифференциалы* деп аталады да $d\omega$ түрінде белгіленеді.

Сонымен, анықтама бойынша функция дифференциалы $d\omega = f'(z)\Delta z$.

Егер $\omega = z$ болса, онда $dz = z'\Delta z = \Delta z$ болады. Сондықтан z нүктесіндегі $\omega = f(z)$ функциясының дифференциалын

$$d\omega = f'(z)d\, z \tag{2.21}$$

түрінде жазуға болады.

Алынған (2.21) теңдіктен z нүктесіндегі берілген $\omega = f(z)$ функциясы туындысының тағы да бір жаңа формуласын аламыз:

$$f'(z) = \frac{d\omega}{dz}\ .$$

$\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ Лаплас теңдеуін қанағаттандыратын кез келген $\varphi(x, y)$ функциясы *гармониялық функция* деп аталады.

Егер $f(z) = u(x, y) + i\upsilon(x, y)$ функциясы D облысында аналитикалық функция болса, онда нақты және жорымал бөліктері гармониялық функциялар болады.

Шынында да, Коши-Риман шарттарындағы бірінші теңдікті y бойынша, ал екінші теңдікті x бойынша дифференциалдасақ, онда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$$

аламыз, бұдан

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}=0$$

шығады. Олай болса, *υ(x,y)* - гармониялық функция болады. *u(x,y)* функциясының гармониялық функция екендігі осыған ұқсас дәлелденеді.

Алайда, D облысында гармониялық кез келген екі *u* және υ функцияларын алсақ, онда бұл облыста $u+i\upsilon$ аналитикалық функция болмайды. Сондықтан D облысында $u+i\upsilon$ аналитикалық функция болу үшін істеу керек: олардың бірі үшін, мысалы, *u* –ды гармониялық функция деп алып, содан кейін υ –ны

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$$

теңдеулерін анықтаймыз.

Осыдан кейін мына өрнек

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x}dx+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

толық дифференциалы болады, өйткені $\Delta u=0$. Демек, квадратура арқылы кез келген тұрақты қосылғышқа дейінгі дәлдікпен υ мына түрде анықталады:

$$\upsilon=\int -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\,.$$

Осылай анықталатын гармониялық υ функциясы *u* функциясымен түйіндес деп аталады.

D облысында Лаплас теңдеуін және Коши-Риман шарттарын қанағаттандыратын *u=u(x,y)* және *υ =υ(x,y)* функциялары *түйіндес гармониялық функциялар* деп аталады.

u(x,y) және *υ(x,y)* функцияларының гармониялық шарты $f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$ функциясының аналитикалық болуының қажетті шарты болып табылады.

2.9. Туынды модулінің және аргументінің геометриялық мағынасы

Айталық, $\omega=f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде аналитикалық және $f'(z_0)\neq 0$ болсын. Туындының модулінің және аргументінің геометриялық мағынасын анықтайық. Бұл $\omega=u+i\upsilon$ функциясының мәндерін $u\upsilon$ жазықтығындағы нүктелермен кескіндейміз. Сонда *z* жазықтығындағы әрбір $z=x+yi$ нүктесіне $u\upsilon$ жазықтығында бір нүкте $\omega=u+i\upsilon$ сәйкес келеді. z_0 нүктесінің аймағындағы кез келген $z=z_0+\Delta z$ нүктесі қандай да бір үзіліссіз *l* сызығының бойымен z_0 нүктесін орын ауыстыру керек болсын. Сонда оған сәйкес ω жазықтығындағы $\omega=\omega_0+\Delta\omega$ нүктесі қандай да бір L сызығы бойымен орын ауыстырады, мұндағы L- бұл ω жазықтығындағы *l* сызығының бейнесі (8-сурет).

8-сурет

Туындының анықтамасы бойынша

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}.$$

Бұдан

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta\omega}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta\omega|}{|\Delta z|} \tag{2.22}$$

шығады. Геометриялық тұрғыдан $|\Delta z| = |z - z_0|$ шамасы Δz векторының ұзындығы, яғни z_0 және $z_0 + \Delta z$ нүктелерінің арасындағы қашықтықты көрсетеді, ал $|\Delta\omega|$ шамасы ω_0 және $\omega_0 + \Delta\omega$ нүктелерінің арасындағы қашықтықты көрсетеді. (2.22) теңдігі бейнелі ω_0 және $\omega_0 + \Delta\omega$ нүктелердің арасындағы шексіз аз қашықтықтың бастапқы z_0 және $z_0 + \Delta z$ нүктелер нүктелердің арасындағы шексіз аз қашықтыққа қатынасының $r = |f'(z_0)|$ -ке тең шегі l сызығының бағытына тәуелсіз екенін көрсетеді. Демек, $\omega = f(z)$ функциясының көмегімен кескіндеуде $r = |f'(z_0)|$ -ді z_0 нүктесіндегі масштаб шамасы деп қарауға болатыны анық.

Бұдан туынды модулінің геометриялық мағынасы шығады: $r = |f'(z_0)|$ шамасы $\omega = f(z)$ бейнелеуі кезінде z_0 нүктесінде қисықтың масштаб өзгеру коэффициентін анықтайды. Егер $r > 1$ болса, r шамасы созылу коэффициенті деп, ал $r < 1$ болса, онда r шамасы сығу коэффициенті деп аталады, ал $r = 1$ болғанда масштаб өзгермейді.

Мысалы 2.6. $\omega = \frac{1}{2} z^2$ бейнелеуі кезінде сызықтың $z_0 = 3 - 4i$ нүктесінде масштаб өзгеру коэффициентін табыңыздар.

Шешуі. $\omega = \frac{1}{2} z^2$ функциясы $z_0 = 3 - 4i$ нүктесінде аналитикалық функция, сонда $\omega' = z$. Демек,

$$k = |f'(z_0)| = |z_0| = |3 - 4i| = 5 > 1.$$

Олай болса, $\omega = \frac{1}{2} z^2$ бейнелуі кезінде сызықтың z_0 нүктесінде созылу коэффициенті 5-ке тең (жазықтық созылады).

z_0 нүктесіндегі туындының аргументі үшін

$$\arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\arg \Delta \omega - \arg \Delta z \right) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta \omega - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \alpha_2 - \alpha_1$$

аламыз, мұндағы α_1 және α_2 – сәйкес z және ω жазықтықтарындағы нақты осьтердің оң бағыттары мен l және L сызықтарына z_0 және ω_0 нүктелерінде жүргізілген жанамалардың арасындағы бұрыштар. Бұдан

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \arg f'(z_0). \qquad (2.23)$$

Сонда (2.23) теңдігінен $\arg f'(z_0)$ бұл $\omega = f(z)$ бейнелеу кезінде z_0 нүктесінде l сызығына жүргізілген жанаманы бұратын бұрыш екенін көреміз, яғни $\arg f'(z_0)$– бастапқы бағыт пен бейнелеу бағытының арасындағы бұрыш. l сызығының бағыты өзгерсе, α_1 мен α_2-лер өзгереді, бірақ $\arg f'(z_0)$ тұрақты болып қала береді.

$f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде аналитикалық болғандықтан, z_0 нүктесі арқылы өтетін барлық сызықтар үшін бұрылу бұрышы $\arg f'(z_0)$ тең болады. Демек, z_0 нүктесінен екінші l_1 сығығын жүргізіп, оған сәйкес ω_0 нүктесінен шығатын сызықты L_1 арқылы белгілеп, (2.23) теңдігінің осы қос сызық үшін де орындалатынын көреміз. Ол теңдік мына түрде жазылады:

$$\alpha_2' = \alpha_1' + \arg f'(z_0) \qquad (2.24)$$

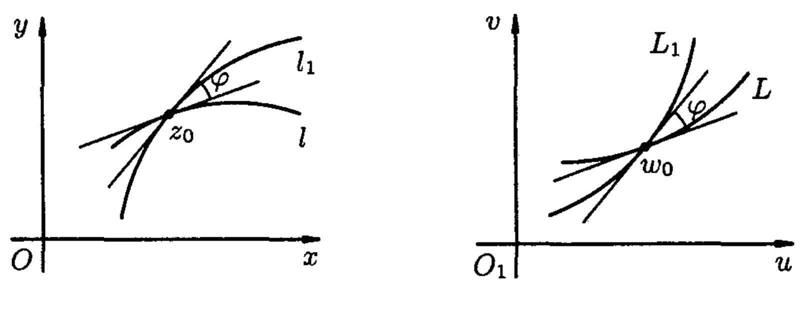
Сонымен, (2.23) және (2.24) теңдіктерінен

$$\arg f(z_0) = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2' - \alpha_1'$$

аламыз. Демек, біз мынадай қорытындыға келеміз: z_0 нүктесінен шығатын кез келген екі сызық ω_0 нүктесінен шығатын екі сәйкес сызыққа бейнеленеді, өйткені бейнеленген және берілген сызықтарға жүргізілген жанамалар арасындағы бұрыштар мен оларға сәйкес жанамалар арасындағы бұрыштар шамалары жағынан да, бағыттары жағынан да бірдей болады.
Сөйтіп, аналитикалық функцияның көмегімен $f(z)$ функциясының туынды нөлге тең болмайтын барлық нүктелерде бұрыш сақталу (консерватизм) қасиеті болады (9-сурет).

Туындының аргументінің геометриялық мағынасы $\omega = f(z)$ бейнелеуі кезінде z_0 нүктесінде сызықтың бұрылу бұрышының шамасы болады:

$$\varphi = \arg f'(z_0).$$



9-сурет

Мысалы 2.7. $f(z)=\ln z$ функциясын бейнелеуі кезінде $z_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ нүктесінде сызықтың бұрылу бұрышы мен масштаб өзгеру коэффициентін табыңыздар.

Шешуі. Функцияның z_0 нүктесіндегі туындысының мәнін табайық:

$$f'(z)=\frac{1}{z},\ f'(z_0)=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=1-i\ .$$

Демек,

$$r=\left|f'(z_0)\right|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}>1,\ \varphi=\arg f'(z_0)=\arg(-1)=-\frac{\pi}{4}\ .$$

Олай болса, $f(z)=\ln z$ бейнелеуі кезінде z_0 нүктесінде сызықтың созылу коэффициенті $\sqrt{2}$ тең және ол $-\frac{\pi}{4}$ бұрышқа бұрылады.

2.10. Конформдық бейнелеулер

Сонымен, кез келген аналитикалық бейнелеудің, яғни аналитикалық $\omega=f(z)$ функциясының көмегімен кескіндеудің, $f'(z_0)\neq 0$ болатын z_0 нүктесінде екі қасиеті бар:

1. бұрыштардың консерватизмі (сақталуы);
2. созудың тұрақтылығы.

Бұрыштардың консерватизмі мен созудың тұрақтылық қасиеттері бар бейнелеу *конформдық бейнелеу* деп аталады. Конформдық бейнелеу кезінде фигура өзіне ұқсас фигураға көшеді.

Аналитикалық бейнелеуде сәйкес бағыттар арасындағы бұрыштар шамалары жағынан ғана емес, есептеу бағыттары жағынан да сақталады.

Комплекс айнымалы z жазықтығының бұрыштардың шамасы жағынан тұрақты, ал есептеу бағыты жағынан керісінше өзгеретін, сонымен бірге созу тұрақтылық қасиеті бар ω жазықтығындағы бейнелеу *екінші текті конформдық бейнелеу* деп атайды, ал бұрыштың есептеу бағыты өзгермесе, онда ол бейнелеу *бірінші текті конформдық бейнелеу* деп атайды

Сонымен, егер $f(z)$ фукнциясы комплекс жазықтықтың қандай да бір нүктесінде аналитикалық болса және оның туындысы осы нүктеде нөлден өзгеше болса, онда $\omega=f(z)$ бейнелеуі осы нүктеде конформды болады.

Егер $\omega=f(z)$ бейнелеуі D облысының кез келген нүктесінде конформды болса, онда ол осы облыста *конформды бейнелеу* деп аталады.

Егер D облысында $\omega=f(z)$функциясы аналитикалық болып және барлық нүктеде функцияның мәні нөлден өзгеше болса, онда бейнелеу D облысында конформды болады және керісінше.

Аналитикалық функцияны бейнелеуде:

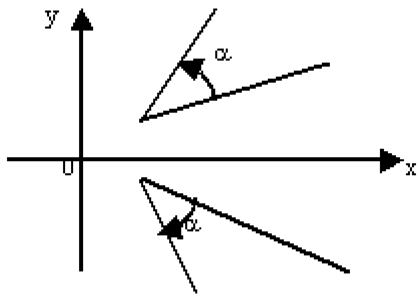
1. облыстың ішкі нүктелері ішкі нүктелерге өтеді;
2. шекаралық нүктелер шекаралық нүктелерге өтеді;
3. облыстың шекарасын орағыту бағыты сақталады.

Бізге $\omega=\bar{z}$ бейнелеуі берілген болсын. Айнымалы $\omega-$ні z жататын жазықтықта кескіндейміз. Сонда бұл қарастырып отырған бейнелеуде кез келген z нүктесі нақты оське қатысты оған симметриялы нүктеге көшетінін көреміз.

Мұндай бейнелеуде кез келген z нүктесінен шығатын және өзара кейбір α бұрышын жасайтын кез келген екі бағыт біріншімен симметриялы арасындағы бұрышы α болатын сәйкес екі бағытқа көшетіні анық.

Сондықтан $\omega=\bar{z}$ бейнелеуінде созудың тұрақтылық қасиеті бар, өйткені мұнда масштаб ешқандай өзгермейді, ал барлық бұрыштары абсолюттік шама жағынан сақталады да, есептеу бағыты қарама-қарсыға өзгереді (10-сурет).

Демек, қарастырылып отырған $\omega=\bar{z}$ бейнелеуі екінші текті конформдық бейнелеу болып табылады. $\omega=f(z)$ бейнелеуі конформды болса, онда $f(\bar{z})=\bar{\omega}$ бейнелеуіде екінші текті конформдық бейнелеу болады. Шынында да, соңғы бейнелеуді екі бейнелеулердің суперпозициясын сияқты көрсетуге болады: $\omega=f(z)$ және $f(\bar{z})=\bar{\omega}$. Бірінші бейнелеуде бұрыштар шамасы жағынан да, бағыты жағынан да сақталады, екіншіде - бұрыштардың есептеу бағыты қарама-қарсыға өзгереді. Сонымен қатар берілген бейнелеудің созу тұрақтылық қасиеті болады, өйткені бұл қасиет құраушы екі бейнелеуге де тән.



10-сурет

Сонымен, біз мынаны дәлелдедік: мәндері аналитикалық функцияның мәндеріне түйіндес функцияның көмегімен іске асырылатын кез келген түрлендірме екінші текті конформдық бейнелеу болады және керісінше.

2.11. Кейбір элементар функциялар және олардың беретін бейнелеулері

1. Сызықтық функция $\omega=az+b$**,** мұндағы $a=a_1+ia_2, b=b_1+ib_2$.

$$\omega=u(x,y)+i\upsilon(x,y)=(a_1+i\,a_2)(x+i\,y)+b_1+i\,b_2=a_1x-a_2y+b_1+i\,(a_2x+a_1y+b_2).$$

Бұл функцияның нақты бөлігі $u(x,y)=a_1x-a_2y+b_1$, жорымал бөлігі $\upsilon(x,y)=a_2x+a_1y+b_2$ тең болады.

Кез келген z үшін $\omega'=a\neq 0$ болғандықтан сызықтық функция бүкіл комплекс жазықтықта аналитикалық функция болады, ендеше бейнелеу кез келген нүктеде конформды. Масштаб өзгеру коэффициенті $r=|\omega'|=|a|$ кез келген нүктеде тұрақты.

Бұрылу бұрышын табу үшін бұл функцияны мына түрде жазамыз:

$$\omega = a\,z + b = |a|e^{i\alpha}z + b.$$

Сонымен, сызықтық функция $|a|\geq 1$ болғанда z векторын $|a|$ рет созып, (немесе $|a|<1$ болғанда $\frac{1}{|a|}$ рет сығып $\varphi=\arg a$ тең бұрышқа бұрады да, параллель $в$ векторына көшіреді, яғни ұқсас бейнелеу жүргізеді.

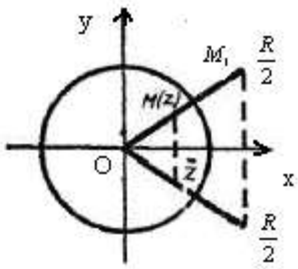
2. $\omega=\frac{1}{z}$ **функциясы.**

$$\omega=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Бұл функцияның нақты бөлігі $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, жорымал бөлігі $\upsilon(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$ Коши-Риман шарттарын қанағаттандырады, сондықтан аналитикалық функция болады. Берілген функция бүкіл кеңейтілген комплекс жазықтықта конформды болады.

$\omega=\frac{1}{z}$ функциясының геомертиялық мағынасы инверсия: бірлік шеңбер $|z|=1$ өзгеріссіз қалады да, оның ішкі жағы шеңбердің сыртқы бөлігіне және керісінше сыртқы жағы ішкі дөңгелекке бейнеленіп, O нүктесі шексіз алыстаған нүктеге, ал шексіз алыстаған нүкте $z=0$ нүктесіне бейнеленеді.

$\omega=\frac{1}{z}$ функциясы z комплекс жазықтықтағы түзу мен шеңберді ω комплекс жазықтығындағы шеңберге бейнелейді (егер түзу – шеңбердің шексіз радиусы деп есептесек).



11-сурет

Егер $OM\cdot OM_1=R^2$ болса, онда M және M_1 нүктелері центрі координаталар басында жататын радиусы R-ға тең *шеңберге қарағанда симметриялы нүктелер* деп аталады (11-сурет).

3. Жалпы сызықтық функция. Жалпы сызықтық түрлендіру

$$\omega=\frac{a\,z+b}{c\,z+d} \tag{2.25}$$

түрінде болады (мұндағы a,b,c,d- комплекс сандар және ad-bc=0, өйткені қарсы жағдайда (2.13) сызықтық функция z-тен тәуелсіз болар еді).

Бұл функция бүкіл кеңейтілген комплекс жазықтықта конформды, егер $ad - bc \neq 0$ болса. Берілген функцияны

$$f(z) = A + \frac{B}{z+C},$$

мұндағы $A = \frac{a}{c},\ B = \frac{bc-ad}{c},\ C = \frac{d}{c}$ түрінде жазсақ, онда бейнелеудің геометриялық мағынасын анықтау жеңілдейді. Ол мына төрт түрлендіруден тұрады:

1. $f_1(z) = z + C$, яғни C векторына параллель көшіру,
2. $f_2(z) = \frac{1}{f_1(z)}$, яғни $|z| = 1$ шеңберіне қарағанда инверсия,
3. $f_3(z) = B\, f_2(z)$, яғни $argB$ бұрышына бұрып, $|B|$ рет созу (не сығу),
4. $f_4(z) = A + f_3(z)$, яғни A векторына параллель көшіру.

Жалпы сызықтық түрлендіру $\omega = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$ үш параметрге тәуелді, олар үшін a,b,c,d сандарының үшеуінің біреуіне қатынасын алуға болады. Бұл параметрлерді, сонымен бірге түрлендірудің өзін анықтау үшін a,b,c,d-лерді байланыстыратын үш теңдеу керек.

Біз оларды іздеп отырған түрлендірумен әйтеуір бір z_1, z_2, z_3 нүктелері ауысатын $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ нүктелерін көрсете аламыз. z_1, z_2, z_3 нүктелерін қалауымызша алып, мына теңдеулерді аламыз:

$$\omega_k = \frac{a\,z_k + b}{c\,z_k + d},\ (k = 1, 2, 3).$$

Осы теңдеулерден және $\omega = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$ теңдеуінен a,b,c,d-лерді шығарып тастау үшін мына айырымдарды құрамыз:

$$\omega - \omega_1 = \frac{(a\,\mathrm{d} - bc)(z - z_1)}{(c\,z+d)(cz_1+d)},\ \omega - \omega_2 = \frac{(a\,\mathrm{d} - bc)(z - z_2)}{(c\,z+d)(cz_2+d)},$$

$$\omega_3 - \omega_1 = \frac{(a\,\mathrm{d} - bc)(z_3 - z_1)}{(c\,z_3+d)(cz_1+d)},\ \omega_3 - \omega_2 = \frac{(a\,\mathrm{d} - bc)(z_3 - z_2)}{(c\,z_3+d)(cz_2+d)}.$$

Мұндағы бірінші теңдеуді екіншісіне, үшіншісін төртіншісіне мүшелеп бөліп, шыққан теңдіктерді тағы да біріне-бірін мүшелеп бөліп, мынаны аламыз:

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} : \frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \qquad (2.26)$$

Бұл ізделініп отырған сызықтық түрлендіру.

Ал z_1, z_2, z_3, z және $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$ нүктелері үшін сызықтық түрлендіру кезінде бір-біріне сәйкес келетін кез келген нүктелер төрттігін алуға болатындықтан, табылған ара қатынас сызықтық түрлендірудің мынадай жалпы қасиетін білдіреді. $\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ қатынасы кез келген сызықтық түрлендіруде сақталады, яғни оның инварианты болып табылады. Бұл қатынас төрт нүктенің *ангармониялық қатынасы* деп аталады.

$\omega = \frac{1}{z}$ функциясына сызықтық түрлендірудің көмегімен $\omega = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$ функциясын алуға болады, сондықтан ол оның қасиеттеріне ие болады.

z жазықтығындағы z_1, z_2, z_3 және ω жазықтығындағы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ нүктелері үшін $\omega(z_1)=\omega_1$, $\omega(z_2)=\omega_2$, $\omega(z_3)=\omega_3$ шарттарын қанағаттандыратын жалғыз бөлшек-сызықтық бейнелеу бар екенін ескерсек, онда бұл бейнелеу

$$\frac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_2}\cdot\frac{\omega_3-\omega_2}{\omega_3-\omega_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

ангармониялық қатынас деп аталатын формуламен анықталады.

4. Дәрежелік функция және радикал.

Мына функцияны қарастыралық:

$$\omega = z^n, \tag{2.27}$$

мұндағы n – бірден артық натурал сан. Бұған кері функция

$$z = \sqrt[n]{\omega}. \tag{2.28}$$

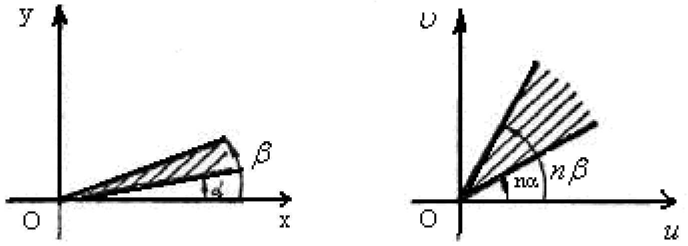
$\omega = z^n$ функциясы комплекс жазықтықта аналитикалық функция болады. $\omega' = n\,z^{n-1}$, барлық $z \neq 0$ нүктелерде $\omega' \neq 0$, ендеше $\omega = z^n$ дәрежелік функциясы $z \neq 0$ нүктелерінде конформды. Демек, осындай кез келген нүктеде $\omega = z^n$ функциясының көмегімен түрлендіргенде бұрыштар сақталатын болады.

Енді біздің функциямыздың нөлдік нүктенің аймағында қандай болатындығын қарастыралық .

$$\omega = z^n = \left(|\,z\,|e^{i\arg z}\right)^n = |\,z\,|^n e^{i\,n\,agz}$$

болғандықтан, мұндай бейнелеу кезінде $z=0$ нүктесінде бұрыштардың сақталмайтынын және n есе артатынын көреміз. Бұрыштар консерватизмі z жазықтығының шексіз алыстаған нүктесінде де бұзылады, өйткені $\frac{1}{\omega\left(\frac{1}{z}\right)}$ функциясы $z=0$ нүктесінің аймағында берілген функциямен бірдей.

Сонда z жазықтығындағы кез келген $\begin{cases}|\,z\,|\le r,\\ \alpha \le \arg z \le \beta\end{cases}$ секторы ω жазықтығындағы $\begin{cases}|\,\omega\,|\le r^n,\\ n\alpha \le \arg\omega \le n\beta\end{cases}$ секторына бейнеленеді (12-сурет).



12-сурет

5. Жуковский функциясы $\omega=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$**,** $z\neq 0$**.**

$\omega'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$ болғандықтан, Жуковский функциясы комплекс жазықтықтың $z=0$ нүктесінен басқа нүктелерде аналитикалық функция болады.

Жуковский функциясы 1) $|z|>1$, 2) $|z|<1$, 3) $\operatorname{Im} z>0$, 4) $\operatorname{Im} z<0$ облыстарының кез келгенінде бір жапырақты функция болады. Жуковский функциясы арқылы жүргізілетін конформдық бейнелеу алғашқы екі облыс үшін ω жазықтығы $[-1;1]$ кесіндісі бойынша тілік болады, ал соңғы екі облыс үшін ω жазықтығы $(-\infty;-1]$ және $[1;+\infty)$ сәулелері бойынша тілік болады.

6.Көрсеткіштік және логарифмдік функциялар.

Көрсеткіштік функцияны қарастыралық:

$$\omega=e^z. \tag{2.29}$$

Бұған кері функция логарифмдік функция болатыны белгілі:

$$z=\ln\omega. \tag{2.30}$$

z- ті декарттық, ω-ні полярлық координаталарда өрнектелік:

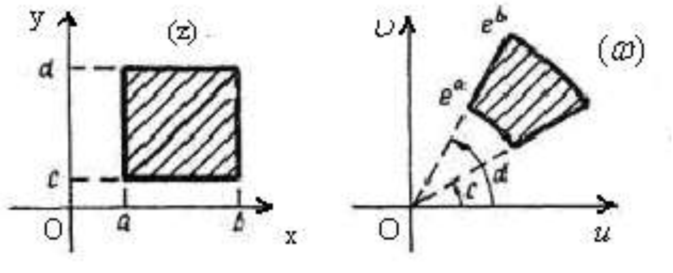
$z=x+yi$, $\omega=re^{\varphi i}$.

Сонда (2.29) теңдік мына екі формулаға ауысады:

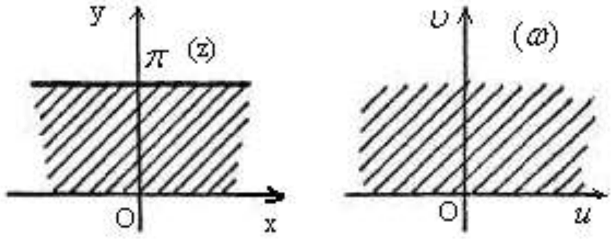
$r=e^x$, $\varphi=y$.

$\omega=e^z$ функциясы арқылы $x=const$ түзуі центрі координаталар басында жататын $r=const$ шеңберіне, ал $y=const$ түзуін координаталар басынан шығатын $\varphi=const$ сәулелерге бейнеленеді. Сондықтан ол z жазықтығындағы $\begin{cases} a\le x\le b, \\ c\le y\le d \end{cases}$ тіктөртбұрышын ω жазықтығыдағы $\begin{cases} c\le \arg\omega\le d, \\ e^a\le\omega\le e^b \end{cases}$ сақиналық секторға бейнелейді (13-сурет), ал $\begin{cases} -\infty<x<\infty, \\ 0\le y\le\pi \end{cases}$ жолағын $\operatorname{Im}\omega\ge 0$ жоғарғы жарты жазықтыққа бейнелейді. (14-сурет).

Көрсеткіштік функция бүкіл комплекс жазықтықта конформды, ал логарифмдік функция $z=0$ нүктесінен басқа нүктелерде конформды.



13-сурет



14-сурет

Мысалы 2.8. $-1, i, i+1$ нүктелерін $0, 2i, 1-i$ нүктелеріне бейнелейтін бөлшек-сызықтық функцияны табыңыздар.

Шешуі. (2.26) формуласын пайдалана отырып,

$$\frac{\omega-0}{\omega-2i}\cdot\frac{1-i-2i}{1-i-0}=\frac{z+1}{z-i}\cdot\frac{i+1-i}{i+1+1}$$

аламыз. Бұдан

$$\frac{\omega}{\omega-2i}=\frac{1}{5}\cdot\frac{z+1}{z-i}\ ,\quad \omega=-\frac{2i(z+1)}{4z-5i-1}$$ -ізделінді функция.

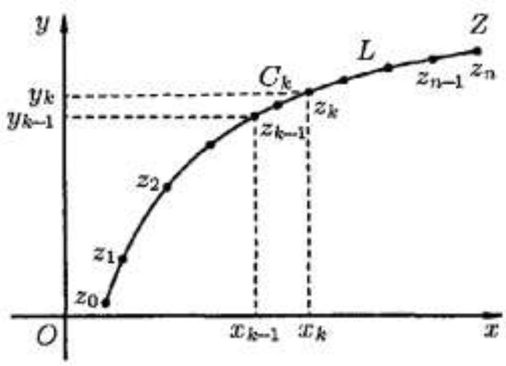
III ТАРАУ. КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Комплекс айнымалы функция интегралы және оның қасиеттері

Комплекс облыста интеграл ұғымына анықтама берелік. Шеткі нүктелері z_0 және z болатын кез келген тегіс L сызығының әрбір нүктесінде $\omega=f(z)$ үзіліссіз функциясы анықталсын (15-сурет). Бұл сызықты мына z_1 , z_2, ..., $z_{n-1}, z_n=z$ нүктелері арқылы n бөліктерге бөліп, әрбір $z_{k-1}z_k, (k=1,2,...,n)$ элементар доғасынан C_k нүктесін алып, мынадай интегралдық қосынды құрамыз:

$$S=\sum_{k=1}^{n}f(C_k)\Delta z_k,$$

мұндағы $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$.



15-сурет.

Егер $\max|\Delta z_k|\to 0$ L сызығын доғаларға бөлу және элементар доғалардағы C_k нүктелерінің орнына тәуелсіз S интегралдық қосындысының ақырлы шегі бар болса, онда ол $f(z)$ *функциясының* L *сызығы бойынша интегралы* деп аталады да және ол былай белгіленеді:

$$\int_L f(z)dz .$$

Сонымен:

$$\int_L f(z)dz = \int_L u\,dx - \upsilon\,dy + i\int_L \upsilon\,dx + u\,dy \qquad (3.1)$$

(3.1) формуласын төмендегідей түрде жазсақ, оны оңай еске сақтауға болады:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + i\upsilon)(dx + idy).$$

Егер L сызығы $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$, $(t_1 \le t \le t_2)$ параметрлік теңдеуімен берілсе, онда (3.1) формуласы мына түрге келтіріледі:

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt . \qquad (3.2)$$

Комплекс айнымалы функция интегралының негізгі қасиеттерін келтіреміз:

1. $\int_L dz = z - z_0$.
2. $\int_L (f_1(z) \pm f_2(z))dz = \int_L f_1(z)dz \pm \int_L f_2(z)dz$.
3. $\int_L af(z)dz = a\int_L f(z)dz$, a – комплекс сан.
4. $\int_L f(z)dz = -\int_{L-} f(z)dz$,

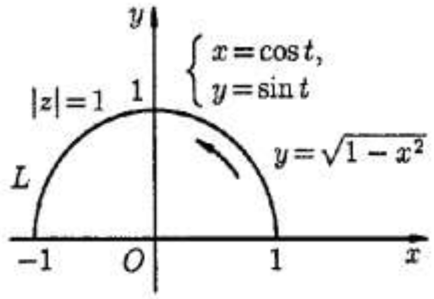
мұндағы L және L_{-} сәйкес оң және теріс бағытта өтетін бір ғана жолды көрсетеді.

5. $\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz \pm \int_{L_2} f(z)dz$, мұндағы $L = L_1 + L_2$.
6. (*Интегралдың модулін бағалау*). Егер L сызығының бойында $|f(z)| \le M$

теңсіздігі орындалса, онда $\left|\int_L f(z)dz\right| \le M\,l$,

мұндағы l – L қисығының ұзындығы, M-тұрақты сан.

3.1-мысал. $I = \int_L \operatorname{Im} z\,dz$ интегралын есептеңіздер, мұндағы L – $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$ жарты шеңбер (16-сурет).



16-сурет.

Шешуі. (3.1) формуласын қолданып,

$$I=\int_L y(dx+idy)=\int_L y\,dx+i\int_L y\,dy==\int_1^{-1}\sqrt{1-x^2}\,dx+i\int_1^{-1}\sqrt{1-x^2}\,\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_1^{-1}-i\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^{-1}=-\frac{\pi}{2}$$

аламыз.

(3.2) формуласын қолданып, $(z=\cos t+i\sin t)$:

$$I=\int_0^{\pi}\sin t(-\sin t+i\cos t)dt=\int_0^{\pi}-\frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt+i\int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi}+i\frac{1}{2}\sin^2 t\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}.$$

Егер $F'(z)=f(z)$ теңдігі орындалса, онда $F(z)$ функциясын $f(z)$ функциясының *алғашқы бейнесі* деп атайды.

$f(z)$ функциясының барлық алғашқы бейнесінің жиынтығын $f(z)$ функциясының *анықталмаған интегралы* деп атайды және ол мына түрде жазылады:

$\int f(z)dz=F(z)+C$.

Егер бір байланысты D облысында $f(z)$ аналитикалық функция болса, онда осы облыста жататын z_0 және z нүктелері үшін

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz=F(z)-F(z_0) \qquad (3.3)$$

Ньютон-Лейбниц формуласы орындалады.

Коши теоремасы. Егер $f(z)$ функциясы бір байланысты D облысында аналитикалық функция болса, онда осы облыста жататын кез келген L тұйық контур бойымен осы функциядан алынған интегралы нөлге тең болады, яғни

$$\oint_L f(z)dz=0. \qquad (3.4)$$

Дәлелдеу. (3.1) формуласы бойынша :

$\oint_L f(z)dz=\oint_L u\,dx-\upsilon dy+i\oint_L \upsilon\,dx+udy$

алып, әрқайсысын Грин формуласы бойынша екі еселі интегралдар

$$\oint\limits_L u\,dx - \upsilon dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right) dxdy,$$

$$\oint\limits_L \upsilon\,dx + u dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) dxdy$$

түрінде өрнектесек, $f(z) = u + i\upsilon$ аналитикалық функция болғандықтан, Коши–Римана шарттарын қанағаттандырады да, әрбір екі еселі интеграл нөлге тең болады. Демек, $\oint\limits_L f(z)dz = 0$. ■

Коши теоремасы көп байланысты облыс үшін де дұрыс.

Коши теоремасы. (көп байланысты облыс үшін). Көп байланысты D облысының сағат тілінің бағытына қарсы (оң) бағытталған L сыртқы контуры L_1, L_2,…,L_n ішкі контурлары болса, онда $f(z)$ осы облыста аналитикалық функция болғанда

$$\oint\limits_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{L_k} f(z)dz$$

орындалады.

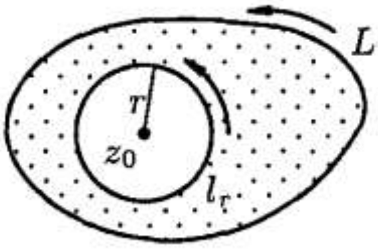
Салдар. Егер бір байланысты D облысында $f(z)$ аналитикалық функция болса, онда $f(z)$ функциясының интегралының мәні интегралдау жолына тәуелсіз болып, тек осы жолдың z_0 бастапқы және z соңғы нүктелерінің орнымен ғана анықталады.

3.2. Коши интегралы

Теорема. Егер контуры L тұйық бір байланысты D облысында $f(z)$ аналитикалық функция болса, онда сол облыстың әрбір ішкі z_0 нүктесі үшін мына

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad (3.5)$$

формула орындалады, мұндағы интегралдау L контуры бойынша оң бағытта жүргізіледі.



17-сурет.

Дәлелдеу. Центрі z_0 нүктесінде, радиусы өте аз r болатын D облысының ішінде жататын l_r шеңберін жүргіземіз (l_r шеңбері L сызығымен қиылыспау керек). Сонда $\frac{f(z)}{z-z_0}$ аналитикалық функция болатындай L және l_r контурларымен шектелген екі байланысты D_1 облысын (шрихталған облыс 17-сурет) аламыз. Егер D облысынан $|z-z_0|<r$ дөңгелегін шығарып тастасақ, онда l_r шеңберінің бағыты оң десек, онда Коши теоремасы бойынша:

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \oint_{l_r} \frac{f(z)dz}{z-z_0}.$$

бұдан

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r} \frac{f(z_0)+f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i} f(z_0)\oint_{l_r}\frac{dz}{z-z_0} +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

шығады, бірақ $\oint_{l_r}\frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$.

Демек,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i} f(z_0)\cdot 2\pi i + \frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz,$$

яғни

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\,. \tag{3.6}$$

(3.6) теңдіктің сол жағындағы айырманы бағалайық. $f(z)$ аналитикалық функциясы $z_0 \in D$ нүктесінде үзіліссіз болғандықтан, кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $r > 0$ саны табылып, $|z-z_0| \le r$ үшін (l_r шеңберінде $|z-z_0| = r$) $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$ теңсіздігі шығады.

Интегралдың модулін бағалау қасиетін қолданып:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{l_r}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}dz \le \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r}2\pi r = \varepsilon$$

аламыз.

ε саны мейлінше аз шама болғандықтан, ал соңғы теңсіздіктің сол жағы ε-ға тәуелсіз, олай болса ол нөлге тең:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} - f(z_0) = 0,$$

Бұдан (3.5) формула шығады. ■

(3.5) теңдігінің сол жағын *Кошидің интегралы* деп, ал (3.5) формуласын *Кошидің интегралдық формуласы* деп атайды. Коши формуласы комплекс айнымалы функциялар теориясының негізгі формулаларының бірі болады. Бұл D облысының кез келген ішкі z_0 нүктесіндегі $f(z)$ аналитикалық функциясының мәнін сол облыстың L контуры бойынша алынған интегралы арқылы табуға мүмкіндік береді.

Кошидің интегралдық формуласын мына түрде жазуға болады:

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)\,. \tag{3.7}$$

Осы уақытқа дейін біз бір мәнді комплекс айнымалы функциясын облыста, егер оның осы облыстың әрбір нүктесінде шектеулі туындысы болса, аналитикалық деп атап келдік. Нақты айнымалы функция жағдайында шектеулі туындысы бар фактіден туындының үзіліссіздігі шықпайды. Ал комплекс айнымалы функция үшін ерекше маңызы бар ұсыныс орын алады: *егер комплекс айнымалы бір мәнді* $f(z)$ *функциясының D облысының барлық нүктесінде бірінші ретті туындысы болса, онда оның осы облыста барлық жоғары ретті туындылары болады.*

Кошидің интегралдық формуласын қолдану арқылы мына теоремаларды дәлелдеуге болады.

Теорема. Егер бір байланысты D облыста және оның L шекарасында $f(z)$ аналитикалық функция болса, онда D облысында жататын кез келген z_0 нүктесінде ол функцияның кез келген ретті туындысы $f^{(n)}(z_0),(n=1,2,...)$ бар болады және ол туындылар мына формуламен табылады:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ , \tag{3.8}$$

мұндағы $z_0 \in D, z \in L$.

Кошидің интегралдық формуласын n рет дифференциалдау арқылы (3.8) формуласын аламыз.

(3.8) формуласын мына түрде жазуға болады:

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Берілген формула интегралдың кейбір түрлерін есептеуге орындауға мүмкіндік береді.

Осы тараудың 1.1 пунктінде аналитикалық функция теориясының негізгі ұсынысын дәлелдедік, осының негізінде бір байланысты D облысында аналитикалық кез келген $f(z)$ функциясы үшін $\oint_L f(z)dz = 0$ теңдігі орын орын алады, мұндағы L- D облысында жататын кез келген үзінді тегіс тұйық контур. Италия математигі Морера көрсеткендей, бұл негізгі ұсыныс қайтымды.

Морера теоремасы. Егер бір байланысты D облысында үзіліссіз $f(z)$ функциясы осы облыста жататын кез келген үзінді тегіс тұйық контур үшін

$$\oint_L f(z)dz = 0$$

теңдігін қанағаттандырса, онда $f(z)$ функциясы осы облыста аналитикалық функция болады.

3.2-мысал. Интегралды есептеңіздер: $\int\limits_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)dz$

Шешуі. Интеграл астындағы функция $f(z)=3z^2+2z$ аналитикалық болғандықтан, Ньютон-Лейбниц формуласын қолданып,

$$\int\limits_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)dz=(z^3+z^2)\Big|_{1-i}^{2+i}=(2+i)^3+(2+i)^2-(1+i)^3-(1+i)^2=7+19i$$

табамыз.

3.3 -мысал. Интегралды есептеңіздер: $\int\limits_0^i \sin^2 zdz$.

Шешуі. Нақты айнымалы функцияны интегралдау әдістерін қолданамыз:

$$\int\limits_0^i \sin^2 zdz=\frac{1}{2}\int\limits_0^i(1-\cos 2z)dz=\frac{1}{2}\left(z-\frac{\sin 2z}{z}\right)\Bigg|_0^i=\frac{1}{2}i-\frac{1}{4}\sin 2i=\frac{i}{4}(2-sh2).$$

IV ТАРАУ. АНАЛИТИКАЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚАТАРЛАРЫ

4.1. Тейлор қатары

Теорема. $|z-z_0|<R$ дөңгелегінде кез келген $\mathrm{f}(z)$ аналитикалық функциясы осы дөңгелекте

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{4.1}$$

бір ғана дәрежелік қатарына жіктеледі және оның коэффициенттері

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi \quad , \quad (n=0,1,2,3,...), \tag{4.2}$$

формуласымен анықталады, мұндағы l_r- центрі z_0 нүктесі болатын дөңгелектің ішінде жатқан кез келген шеңбер.

(4.1) дәрежелік қатары қарастырылып отырған дөңгелектегі $f(\mathrm{z})$ функциясы үшін *Тейлор қатары* деп атайды.

$f(z)$ бір мәнді функциясы аналитикалық функция болатындай комплекс жазықтықтың нүктелері $f(z)$функциясының *дұрыс нүктелері* деп аталады. $f(z)$ функциясының аналитикалық функция боламайтындай комплекс жазықтықтың нүктелері $f(z)$ функциясының *ерекше нүктелері* деп аталады. Мысалы, $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ функциясы үшін кез келген z $(z\neq 1)$ нүктесін дұрыс нүкте, ал $z=1$ ерекше нүкте болады.

Сонымен, егер z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының дұрыс нүктесі болса, онда бұл функция осы нүктенің аймағында $z-z_0-$ға қатысты дәрежелік қатарға жіктеледі, сонымен қатардың жинақтылық дөңгелегі шеңбердің центрі z_0 нүктесінде болып, z_0 нүктесіне ең жақын $f(z)$ функциясының ерекше нүктесі арқылы өтеді. Бұл бір жағынан, дәрежелік қатардың жинақтылық радиусымен, екінші жағынан, осы қатармен кескінделетін функцияның арасындағы тығыз байланысты тағайындайды.

Кейбір элементар функциялардың Маклорен қатарына жіктелуі келтірейік:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \qquad |z| < 1$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad |z| < \infty$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad |z| < \infty$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n n}{} + \ldots, \qquad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots, \qquad |z| < 1$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}z^n + \ldots, \qquad |z| < 1.$$

4.2. Аналитикалық функцияның нөлдері

D облысында голоморфты $f(z)$ *функцияның нөлі* деп,

$$f(z_0) = 0$$

теңдігі орындалатын осы облыстың кез келген z_0 нүктесін айтады.

Біздің $f(z)$ функциясының D облысында жататын нөлдері жиыны шектеулі және шектеусіз болуы мүмкін. Алайда егер $f(z)$ нөлге теңбе-тең болмаса, D облысының ешқандай нүктесі $f(z)$ функциясының нөлдер жиынының шекті нүктесі бола алмайды. Демек, $f(z)$ функциясының нөлдер жиынының барлық шекті нүктелері D облысының шекарасында болуы керек. Осыдан, дербес жағдайда, $f(z)$ функциясының кез келген нөлінің аймағында центр ретінде жеткілікті кіші радиусы бар шеңберді, осы шеңбердің центрлерінен басқа шеңбер ішінде ешқандай нөлдер болмайтындай сызуға болатыны келіп шығады.

Бұдан былай берілген функция голоморфты болатын $f(z)$ ($f(z) \neq 0$) функциясының D облысында жататын барлық нөлдері жиынын нүктелердің тізбегі ретінде қарастыруға болады, яғни барлық нөлдерді натурал сандар көмегімен нөмірлеуге болатынын оңай көруге болады.

Егер D облысында голоморфты $f(z)$ функциясы осы облыстың z_0 нүктесінде нөлге тең болса, оның z_0 нүктесінің кейбір аймағындағы жіктелуі мына түрде болады:

$$f(z) = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots, \tag{4.3}$$

өйткені $c_0 = f(z_0) = 0$.

(4.3) жіктелудің барлық c_n коэффициенті нөлге тең бола алмайды, өйткені z_0 нүктесінің кейбір аймағының барлық жерінде нөлге тең $f(z)$ функциясы бұл жағдайда жалғыздық теорема бойынша D облысында нөлге теңбе-тең болар еді. Олай болса, c_n коэффициенттерінің арасында нөл еместері де бар; осындай коэффициентердің ең кіші нөмірін $m, (m \geq 1)$ арқылы белгілейік.

Сонда мынаны аламыз:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0,$$

демек, (4.3) жіктелуі төмендегідей түрге келеді:

$$f(z) = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \ldots + c_n (z - z_0)^n + \ldots, \quad (4.4)$$

мұндағы $c_m \neq 0$.

Бұл жағдайда z_0 нүктесін $f(z)$ функциясы үшін m – ретті нөл деп атаймыз. Егер $m = 1$ болса, онда жай нөл деп, ал $m > 1$болғанда еселі нөл деп атайды.

4.3. Дәрежелік қатардың коэффициенттері үшін Коши теңсіздігі

Егер

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \quad (4.5)$$

дәрежелік қатары $|z| < R$ дөңгелегінде жинақты болса және ол дөңгелекте модулі әр уақытта М-нен кем $f(z)$ функциясын кескіндесе, онда төмендегі теңсіздік орын алады:

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \quad (4.6)$$

Егер дәрежелік қатардың коэффициенттері үшін интегралдық формуланы пайдалансақ, онда (4.6) теңсіздік бірден алынады:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

мұндағы интегралдау қалауымызша алынған $|\xi| = r \quad (r < R)$ шеңбері бойымен жүргізіледі. $|c_n|$-ны бағалап, мынаны табамыз:

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Соңғы теңсіздік барлық $r \quad (r < R)$ үшін орындалатындықтан, r-ды R-ға ұмтылдыра отырып, шекке өту арқылы, ең соңында мынаны табамыз:

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n}.$$

Лиувилль теоремасы. Егер барлық жазықтықта голоморфты $f(z)$ функциясы модулі бойынша шектелген болса, онда ол функция теңбе-тең тұрақты болады.

Дәлелдеу. Шынында, қарастырылып отырған жағдайда

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ... \qquad (4.7)$$

жіктеуі жазықтықтың кез келген z нүктесінде орын алады. Кошидің теңсіздігін пайдалана отырып, мынаны аламыз:

$$|c_n| \le \frac{M}{R^n} \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

мұндағы M тұрақты сан, ал R-ды қалағанымызша үлкен деп есептеуге болады. Демек, егер $n \ge 1$ болса, $c_n = 0$ болады, ал (4.7) салдарынан $f(z) = c_0$ болады. ■

4.1-мысал. $f(z) = e^z - 1 - z$ функциясы үшін z_0=0 нөлінің ретін анықтаңыздар.

Шешуі. $f(z)$ функциясын z-тің дәрежесі бойынша жіктейміз:

$$e^z - 1 - z = (1 + z + z^2/2! + z^3/3! + ...) - 1 - z = z^2/2! + z^3/3! + ...$$

Өйткені алынған жіктеудегі коэффициент $c_2 = 1/2$ болады, яғни нөлге тең емес, ал $c_0 = c_1 = 0$. Олай болса, берілген функция үшін z_0=0 нүктесі $n = 2$ ретті нөл болатындығын көреміз.

V ТАРАУ. БІР МӘНДІ ФУНКЦИЯНЫҢ ОҢАШАЛАНҒАН ЕРЕКШЕ НҮКТЕЛЕРІ

5.1. Аналитикалық функцияны Лоран қатарына жіктеу

Теорема. $r < |z - z_0| < R$ $(0 \le r < R \le \infty)$ сақинасында голоморфты болатын $f(z)$ функциясы осы аймақта $(z - z_0)$-дің дәрежесі бойынша қатарға жіктеледі:

$$\mathrm{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (5.1)$$

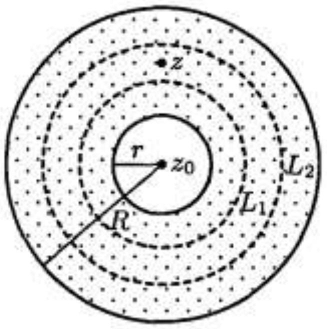
мұндағы

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\mathrm{f}(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...), \qquad (5.2)$$

ал L – берілген сақинаның ішінде жатқан центрі z_0 нүктесіндегі кез келген шеңбер.

(5.1) қатары берілген сақинадағы $f(z)$ функциясы үшін Лоран қатары деп аталады.

Дәлелдеу. $r < |z - z_0| < R$ сақинасының ішінен кез келген z нүктесін аламыз және центрі z_0 нүктесі болатын берілген сақинаның ішінен z нүктесі олардың арасында жататындай етіп L_1 және L_2 екі шеңберін жүргіземіз (18-сурет).



18-сурет

Шарт бойынша $f(z)$ функциясы L_1 және L_2 шеңберлерін бірге алғанда осы шеңбер арасындағы сақинада голоморфты болады. Олай болса, көп байланысты облыс үшін Коши формуласын қолданып, мына теңдікті аламыз:

$$\mathrm{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1+L_2}\frac{\mathrm{f}(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{\mathrm{f}(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{\mathrm{f}(\xi)}{\xi-z}d\xi, \qquad (5.3)$$

мұндағы L_1 және L_2 интегралдау жолдарының екеуі де оң бағытта өтеді.

Тейлор формуласын қорытып шығарған сияқты (5.3) теңдігінің оң жағындағы қосылғыштарды түрлендіреміз.

(5.3) формуланың бірінші интегралындағы ξ нүктесі L_2 шеңберінің нүктесін білдіретінін ескеріп, мына $|z-z_0|<|\xi-z_0|$, яғни $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1$ теңсіздік орындалады. Сондықтан $\frac{1}{\xi-z}$ бөлшегін мына түрде жазуға болады:

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\xi-z_0}+\frac{z-z_0}{(\xi-z_0)^2}+\ldots+\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}. \qquad (5.4)$$

Шыққан (5.4) қатар L_2 шеңберінде барлық ξ нүктелері үшін бір қалыпты жинақты болады, өйткені

$$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1$$

(5.3) формуланың екінші интегралындағы ξ нүктесі L_1 шеңберінің нүктесін білдіретінін ескеріп, мына $|\xi-z_0|<|z-z_0|$, яғни $\left|\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right|<1$.

Сонда

$$\frac{1}{\xi-z}=-\frac{1}{z-\xi}=-\frac{1}{(z-z_0)-(\xi-z_0)}=-\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)}=$$

$$=-\left(\frac{1}{z-z_0}+\frac{\xi-z_0}{(z-z_0)^2}+...+\frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}+...\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}. \qquad (5.5)$$

L_1 шеңберінің барлық ξ нүктелері үшін бір қалыпты жинақты болатын (5.5) қатарды аламыз , өйткені

$$\left|\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right|<1.$$

(5.4) және (5.5) жіктеулерді (5.3) формуладағы интегралдарға қойып, және ξ-ге қатысты бір қалыпты жинақтылықтың салдарынан мүшелеп интегралдауды орындап, мынаны аламыз:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{(z-z_0)^n f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}(z-z_0)^{-n}(\xi-z_0)^{n-1}f(\xi)d\xi. \qquad (5.6)$$

Қысқартып жазуды осылайша ұйғарып:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{\mathrm{f}(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi, \quad (n=1,2,3,...), \qquad (5.7)$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{\mathrm{f}(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi, \quad (n=1,2,3,...), \qquad (5.8)$$

(5.6) теңдікті мына түрде жазамыз:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n. \qquad (5.9)$$

c_n мен c_{-n} (5.7) және (5.8) формулаларын біріктіріп бір формула түрінде жазуға болады:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{\mathrm{f}(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi, \quad (n=0,\pm1,\pm2,...), \qquad (5.10)$$

мұндағы L интегралдау контуры центрі z_0 нүктесіндегі берілген L_1 және L_2 сақинасының ішінде жатқан кез келген шеңбер. ■

$f(z)$ аналитикалық функциясының берілген $r<|z-z_0|<R$ сақинасында Лоран қатарына жіктелуі біреу ғана болатынын дәлелдеуге болады.

Шынында, айталық кейбір сақинаға іштей орналасқан барлық z нүктелерде екі Лоран қатарына жіктелу бар болсын:

$$\mathrm{f}(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c'_n(z-z_0)^n. \qquad (5.11)$$

Екі жіктелуді (5.11) $(z-z_0)^{-k-1}$-ға көбейтіп және қатардың екеуінде бір қалыпты жинақты болатын сақина ішінде жатқан центрі z_0 нүктесіндегі кез келген шеңбер бойынша интегралдап, мынаны аламыз:

$$2\pi i c_k=2\pi i c'_k \text{ немесе } c_k=c'_k \quad (k=0,\pm1,\pm2,...).$$

Алдыңғы пункттегі айтылғаннан, Лоранның (5.1) жинақтылық қатарының нақты облысы ішінде $\mathrm{f}(z)$функциясы голоморфты болатын центрі z_0 нүктесінде дөңгелек сақина және $|z-z_0|=R$ мен $|z-z_0|=r$ шеңберлерінің әрқайсысында кем дегенде бір-бәрден осы функцияның ерекше нүктесі бар екендігі шығады. Дербес жағдайда, егер $f(z)$ функциясының $|z-z_0|=R$ шеңберінің ішінде ерекше нүктесі болмаса, онда оның Лоран жіктелуі Тейлор қатарына айналады.

$\mathrm{f}(z)$ функциясы үшін

$$\mathrm{f}(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

Лоран қатары екі бөліктен тұрады. Лоран қатарының бірінші бөлігі, яғни

$$\mathrm{f}_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n ,$$

қатары Лоран қатарының *дұрыс бөлігі* деп аталады; бұл қатар $|z-z_0|<R$ шеңберінің ішінде $f_1(z)$ голоморфты функциясына жинақталады. Лоран қатарының екінші бөлігі, яғни

$$\mathrm{f}_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} ,$$

қатары Лоран қатарының *бас бөлігі* деп аталады; бұл қатар $|z-z_0|>r$ шеңберінің сыртында $f_2(z)$ голоморфты функциясына жинақталады.

$r<|z-z_0|<R$ сақинасында $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ қатары

$$\mathrm{f}(z)=\mathrm{f}_1(z)+\mathrm{f}_2(z)$$

голоморфты функциясына жинақталады.

Дербес жағдайда, егер $f(z)$ функциясының $|z-z_0|<R$ шеңберінің ішінде ерекше нүктелері болмаса, онда оның Лоран қатарына жіктелуі Тейлор қатарына айналады.

5.1-мысал. $z_0=0$ нүктесінің аймағында $\mathrm{f}(z)=e^{\frac{1}{z}}$ функциясын Лоран қатарына жіктеңіздер.

Шешуі. $e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots,$

белгілі жіктеуін пайдаланамыз. $u=\frac{1}{z}$ деп алайық, сонда

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots, \qquad z\neq 0 .$$

5.2. Бір мәнді функцияның ерекше нүктелерінің классификациясы

1.Оңашалаған ерекше нүктелердің үш түрі. L шеңберінің ішінде оның z_0 центрі бір мәнді $f(z)$ функциясының ерекше нүктесі болғандағы жағдай аса көңіл аударайық . Бұл жағдайда Лоран жіктеуі:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad (5.12)$$

L шеңберінің ішінде жатқан, $z=z_0$ нүктесінен басқа, кез келген z нүктесінде жинақты болады және L шеңберінің центрінен басқа нүктелердің бәрінде де голоморфты болатын $f(z)$ функциясын кескіндейді. Бұл жағдайда z_0 нүктесі $f(z)$ *оңашалаған ерекше нүктесі* деп аталынады да, ал ол функция бұл нүктенің аймағында ($z=z_0$ нүктесінен басқа) жіктеумен кескінделеді. Егер $z=z_0$ ерекше нүктесінің аймағында $f(z)$ функциясының басқа ерекше нүктесі болмаса, онда $z=z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының *оңашаланған ерекше нүктесі* деп аталады. Бір мәнді $f(z)$ функциясының оңашалаған ерекше нүктелерін классификациялау әдісін аламыз. Мұнда үш жағдай болуы мүмкін:

1. (5.12) Лоран жіктеуінде $z-z_0$-дің теріс дәрежелері мүлде жоқ, яғни Лоран қатарның бас бөлігі болмайды. Бұл жағдайда z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының *жөнделінетін ерекше нүктесі* деп аталады.

2. (5.12) Лоран жіктеуінде $z-z_0$-дің теріс дәрежелерінің тек шектеулі саны бар. Бұл жағдайда z_0 нүктесін $f(z)$ функциясының *полюсі* деп аталады.

3. (5.12) Лоран жіктеуінде $z-z_0$-дің теріс дәрежелерінің шексіз жиыны бар. Бұл жағдайда z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының *елеулі (маңызды) ерекше нүктесі* деп аталады.

Бір мәнді функцияның оңашалаған ерекше нүктелерін үш түрге бөліп, енді әрбір көрсетілген түрлердің аймағында функцияның өзгеріс сипатын анықтайық (оңашалаған ерекше нүктесінің аймағы деп $0<|z-z_0|<R$ шартын қанағаттандыратын барлық нүктелерінің жинағын түсінеміз, мұндағы R радиусты $f(z)$ функциясы барлық z нүктелерінде голоморфты болатындай мейлінше аз етіп аламыз).

2. Жөнделінетін ерекше нүкте. Егер z_0 - жөнделінетін ерекше нүкте болса, онда z_0 нүктесінің аймағында (5.12) жіктеуі

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

түрінде болады. Бұл жағдайда дәрежелік қатарға айналады, демек, z_0 нүктесінің барлық аймағында соның ішінде z_0 нүктесінің өзінде де жинақты болады; оның қосындысы z_0 нүктесінің барлық аймағында, соның ішінде z_0 нүктесінің өзінде голоморфты функцияны береді. Берілген $f(z)$ функциясы, егер $z \neq z_0$ болса, біздің қатарымыздың қосындысымен бірдей болады. Демек, егер

$$f(z_0)=c_0$$

деп ұйғарсақ, онда біз берілген $f(z)$ функциясын z_0 нүктесінде голоморфты функция етіп жасай аламыз. Сонымен, егер біз функциямызды осы ерекше нүктеде тиісті түрде анықтасақ, бірінші түрдегі ерекше нүкте алдыңғы жағдайдан жоқ болып кетеді, егер z_0 нүктесі жөнделінетін ерекше нүкте болса, онда мынаны аламыз:

$$\lim_{z\to z_0} \mathrm{f}(z) = c_0, \quad (c_0 \neq \infty)$$

дербес жағдайда, M және η оң сандары бар болып,

$$0 < |z - z_0| < \eta \text{ болғанда } |f(z)| < M \tag{5.13}$$

орындалады.

(5.13) теңсіздігінен *жөнделінетін ерекше нүктенің аз аймағында берілген функция шектелген болатындығы шығады*. Алдағы уақытта мұның кері жағының болатынын көреміз, *егер оңашалаған ерекше нүктенің аймағында функция шектелген болса, онда бұл нүкте жөнделінетін ерекше нүкте болады.*

3. Полюс. Бұл жағдайда (5.12) жіктеудің $z - z_0$ теріс дәрежелі шектеулі саны болады. (5.12) Лоран жіктеуіне енетін $\dfrac{1}{z - z_0}$ ең жоғарғы дәрежесін m арқылы белгілей отырып, мынаны аламыз:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} \tag{5.14}$$

мұндағы $c_{-m} \neq 0$. Егер m=1 болса, z_0 полюсі жай, ал m>1 болса, оны еселі деп айтады; m санын полюстің реті деп айтады. (5.14) жіктеудің екі жағын $(z - z_0)^m$ $(z \neq z_0)$ көбейтіп, мынаны табамыз:

$$(z - z_0) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+m} + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_{-2}(z - z_0)^{m-2} + \ldots + c_{-m}$$

Алынған (5.14) теңдіктің оң жағында бос мүшесі c_{-m} нөл болмайтын дәрежелік қатар тұр.

Демек, z_0 нүктесі $(z - z_0)^m f(z)$ функциясы үшін жөнделінетін ерекше нүкте болып табылады, сонымен қатар мынадай болады:

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) = c_{-m} \neq 0 \tag{5.15}$$

Дербес жағдайда, (5.15) теңдіктен мынау шығады:

$$\lim_{z\to z_0} |z - z_0|^m |f(z)| = |c_{-m}|. \tag{5.16}$$

$|c_{-m}|$-дан кіші кез келген оң санды q арқылы белгілеп, онда (5.16) салдардан

$$0 < |z - z_0| < \eta \text{ болғанда} |z - z_0|^m |f(z)| > q$$

немесе

$$0 < |z - z_0| < \eta \text{ болғанда } |f(z)| > \frac{q}{|z - z_0|^m} \tag{5.17}$$

болатын жеткілікті аз η оң санын табамыз.

Соңғы (5.17) теңсіздік z нүктесі z_0 нүктесіне ұмтылғанда шексіздікке ұмтылатындығын көрсетеді, ал мұны символмен былай жазамыз:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

Қысқаша айтқанда, полюсте функция шексіздікке айналады.

Теорема (нөл мен полюс арасындағы байланыс туралы). Егер z_0 нүктесі $f(z)$ функциясы үшін m –ретті нөлі (немесе m –ретті полюсі) болса, онда бұл нүкте $\frac{1}{f(z)}$ функциясы үшін m –ретті полюсі (немесе m –ретті нөлі) болады.

Дәлелдеу. Айталық, $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінде m –ретті нөлі болсын. Осындай z_0 нүктесінің кейбір аймағында $f(z)$ функциясы

$$f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+... \tag{5.18}$$

дәрежелік қатармен берілетіні белгілі, мұндағы $c_m\neq 0$ немесе $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, бұл жағдайда $\varphi(z)$ функциясы z_0 нүктесінде голоморфты және нөлге тең емес. (5.18) салдарынан $\frac{1}{f(z)}$ кері шама былай беріледі:

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{5.19}$$

әрі $\psi(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$ функциясы z_0 нүктесінде голоморфты және нөлден ерекше. Сонда

$$\psi(z)=\psi(z_0)+\psi'(z_0)(z-z_0)+...$$

ескеріп, (5.13) теңдігінен z_0 $(z\neq z_0)$ нүктесінің аймағында мынаны аламыз:

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{\psi(z_0)}{(z-z_0)^m}+\frac{\psi'(z_0)}{(z-z_0)^{m-1}}+...$$

осыдан $\frac{1}{f(z)}$ функциясы үшін z_0 нүктесі m –ретті полюс болатындығы шығады.

Керісінше, z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының m –ретті полюсі деп жорып, осы нүктенің аймағында $(z\neq z_0)$ мынадай болатынын табамыз:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{5.20}$$

мұндағы z нүктесі z_0 нүктесіне ұмтылғанда $\varphi(z)$ функциясы нөлден басқа шекке ұмтылады. Демек, оны z_0 нүктесінде голоморфты және нөлге тең емес функция ретінде қарастыруға болады. (5.20) теңдіктің көмегімен

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\cdot\frac{1}{\varphi(z)}=(z-z_0)^m\cdot\psi(z)$$

өрнегін құрып және жоғарыдағы есептеуді қолдана отырып, мынаны табамыз:

$$\frac{1}{f(z)} = \psi(z_0)\cdot(z-z_0)^m + \psi'(z_0)\cdot(z-z_0)^{m+1} + \dots,$$

мұндағы $\psi(z_0) \neq 0$, ал бұдан, егер $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ деп ұйғарсақ, z_0 нүктесі $\frac{1}{f(z)}$ функциясының m –ретті нөлі болатындығы шығады.■

4. Елеулі (маңызды) ерекше нүкте. Біз жөнделінетін z_0 нүктесі жағдайында z нүктесі z_0 нүктесіне ұмтылғанда $f(z)$ функциясы анықталған шектеулі c_0 шекке ұмтылатынын көрдік; полюс жағдайында да функция шексіздікке тең анықталған шекке ұмтылады.

Сохоцкий теоремасы. Тұрақты А саны қандай да болсын, шектеулі не шектеусіз болсын, елеулі ерекше z_0 нүктесіне жинақты болатын $z_1, z_2, \dots, z_n$ тізбегі табылып, ол мынаған тең болады:

$$\lim_{z_n \to z_0} \mathrm{f}(z_n) = A.$$

Мұны қысқаша былай тұжырымдауға болады: елеулі ерекше нүктенің мейлінше аз аймағында $f(z)$ функциясы алдын ала берілген кез келген санға, шектеулі немесе шектеусіз санға мейлінше жуық мәндерді қабылдайды.

Ескертпе. Сохоцкий теоремасына геометриялық сипаттама беру үшін ω жазықтығының нүктелерімен елеулі ерекше z_0 нүктесінің мейлінше аз аймағында $0 < |z - z_0| < \delta$ қабылдайтын $\omega = f(z)$ функциясының мәндерін бейнелейміз. Сохоцкий теоремасы ω жазықтығының кез келген A нүктесі z_0 нүктесінің мейлінше аз аймағында $\omega = f(z)$ функциясының қабылдайтын мәндер жиынының шектік нүктесі болатындығын дәлелдейді.

Дәлелдеу. Алдымен $A = \infty$ деп жориық. $\lim_{z_n \to z_0} z_n = z_0$ болатындай z_n нүктелер тізбегі табылып, $\lim_{z_n \to z_0} \mathrm{f}(z_n) = \infty$ теңдігі орындалатынын көрсетейік. Қысқаша түрде $P(z - z_0)$ арқылы (5.12) Лоран жіктеуінің $z - z_0$ оң дәрежелерін және бос мүшесі бар дұрыс бөлігін, ал $Q\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$ арқылы $z - z_0$ теріс дәрежелі бар бас бөлігін белгілеп, (5.12) формуланы мына түрде жаза аламыз:

$$f(z) = P(z - z_0) + Q\left(\frac{1}{z - z_0}\right) \tag{5.21}$$

Ал $P(z - z_0)$ дұрыс бөлікті алатын болсақ, z нүктесінің z_0 нүктесіне кез келген ұмтылуында былай болады:

$$\lim_{z \to z_0} P(z - z_0) = c_0. \tag{5.22}$$

$Q\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$ бас бөлігінде

$$\frac{1}{z-z_0}=z' \tag{5.23}$$

деп ұйғарып, мынаны аламыз:

$$Q\left(\frac{1}{z-z_0}\right)=Q(z')=c_{-1}z'+c_{-2}z'^2+...+c_{-n}z'^n+... \tag{5.24}$$

$Q\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ қатары $z=z_0$ нүктеден басқа барлық нүктеде жинақты болатындықтан, (5.24) қатар комплекс айнымалы z' жазықтығында жинақты болатыны сөзсіз. Лиувилль теоремасы бойынша $Q(z')$ функциясы барлық комплекс айнымалы z' жазықтығында шектелген болып қала алмайды, яғни қандай да натурал N санын алмайық, z'_N, $|z''_N|>N$ нүктесі табылып, $|Q(z'_N)|>N$ болады. N санына $1,2,\ldots,n,..$ мәндерін бере отырып, шексіздікке ұмтылатын,

$$\lim_{z'_n\to\infty}Q(z'_n)=\infty$$

теңдігі орындалатындай $z_1,z_2,...,z_n,...$ нүктелер тізбегін аламыз. (5.23)-нің негізінде бастапқы айнымалы z-ке қайта оралып, z''_n нүктелер тізбегі z_0 нүктесіне жинақты болатын $z_1,z_2,...,z_n,...$ нүктелер тізбегіне түрленетінін көреміз, сонда:

$$\lim_{z_n\to z_0}Q\left(\frac{1}{z_n-z_0}\right)=\infty \tag{5.25}$$

z нүктесін z_0 нүктесіне, z_n нүктелер тізбегі арқылы, ұмтылуға мәжбүр ете отырып, (5.22) және (5.25) теңдіктің негізінде (5.21) теңдігінен:

$$\lim_{z_n\to z_n}f(z_n)=\infty$$

болатынын көреміз.

Енді A кез келген шектеулі комлекс сан болсын, z_0 нүктесінің қандай да болсын аз аймағында $f(z)=A$ орындалатындай z нүктесі табылатын жағдай болуы мүмкін. Бұл жағдайда Сохоцкий теоремасы өз күшін сақтайды. Сондықтан z_0 нүктесінің жеткілікті аз аймағында $f(z)$ функциясы A-ға тең емес деп болжауымызға болады. Егер осылай болса, онда

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A}$$

функциясы елеулі ерекше нүктесі (себебі $z=z_0$ нүктесі $f(z)-A$ үшін елеулі ерекше нүкте) болатын, $z=z_0$ нүктеден басқа, z_0 нүктесінің аймағында голоморфты болады. Дәлелдеуіміз бойынша z_0 нүктесіне жинақты болатын

$$\lim_{z_n\to z_n}\varphi(z_n)=\infty$$

орындалатын z_n нүктелер тізбегі табылады, бұдан:

$$\lim_{z_n \to z_0} f(z_n) = A$$

екені шығады. Дәлелдеу керектігі де осы.■

5. Оңашаланған ерекше нүктенің аймағындағы функцияның өзгеріс-сипаты. Біз бір мәнді функцияның оңашаланған ерекше нүктелердің жоғарыда көрсетілген үш түрінің әрқайсысының аймағында өзгеріс-сипатын зерттеп, жөнделінетін ерекше нүктенің жеткілікті аз аймағында функцияның шектелгенін, полюстің жеткілікті аз аймағында оның (модулі бойынша) барынша үлкен болатындығын және, ең соңында, елеулі ерекше нүктенің мейлінше аз аймағында функцияның анықталмағандығын көрдік. Бұл зерттеуді қорыта келе, біз кері жағдайда да, оңашаланған ерекше нүктенің, осындай нүктенің аймағында берілген функция шектелген, шектеусіз үлкен немесе анықталмаған бола ма, сонысына қарай ол нүкте жөнделінетін полюс немесе елеулі ерекше нүкте болатындығын көреміз.

Біз бір мәнді функцияның оңашаланбаған ерекше нүктелер, сондай-ақ аймақтарында берілген функция бір мәнді болмайтын ерекше нүктелер (мысалы, $\ln z$ пен $\sqrt[n]{z}$ функциялары үшін $z=0$ нүктесі) жағдайын қарастырмаймыз. z_0 нүктесі полюс үшін шекті болатын жағдай бір мәнді функцияның оңашаланбаған ерекше нүктесінің жай типі болады, мысалы $\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)}$ функциясы үшін $z=0$. Осындай ерекше нүктесі үшін Сохоцкийдің теоремасы өз күшін сақтайтынын көрсету қиын емес. Шынында да, $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінің жеткілікті аз аймағында А-ға тең болмасын деп жорық; егер біз $f(z)$ функциясының барлық полюстерінде $\varphi(z)=0$ деп ұйғарсақ, $z=z_0$ нүктесінде $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$ функциясының оңашаланған елеулі ерекше нүктесі болатынын көру қиын емес. Сонымен, бұл мәселе дәлелденген Сохоцкий теоремасына келіп тіреледі.

Ескерту. Сохоцкийдің теоремасын бір мәнді функцияның елеулі ерекше нүктенің аймағындағы өзгеріс-сипаты жайлы аса терең зерттеудің бастамасы болды. Сохоцкий ұйғарымы елеулі нүктенің мейлінше аз аймағында функция алдын ала берілген кез келген санға мейлінше жуық мәндерді қабылдайтынын көрсетеді. Пикар өте жалпы да және маңызды мына теореманы дәлелдеді: елеулі ерекше нүктенің мейлінше аз аймағында $f(z)$ функциясы, мүмкін біреуден басқа болар, кез келген шектеулі мәнді (және де шексіз көп рет) қабылдайды.

5.2-мысал. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4}$ функциясының ерекше нүктелерін табыңыздар.

Шешуі. $z=0$ нүктесі берілген функцияның ереше нүктесі болады. $z\to 0$ болғанда берілген функцияның шегін табамыз:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^4}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\frac{1}{z^3}=\infty .$$

Демек, $z=0$ нүктесі полюс болады.

$$\lim_{z\to 0} z^2\frac{\sin z}{z^4}=\infty,\ \lim_{z\to 0} z^3\frac{\sin z}{z^4}=1\neq 0$$

екеніне көз жеткізуге болады.

Сонымен, $z=0$ нүктесі үшінші ретті полюс болады.

5.3-мысал. $f(z)=\dfrac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2}$ функциясының ерекше нүктелерін табыңыздар.

Шешуі. $z_1=0$ және $z_2=-2$ нүктелері берілген функцияның жай полюстері, ал $z_3=1$ – екінші ретті полюсі.

5.3.Шексіздіктегі аналитикалық функцияның өзгеріс-сипаты

1.Шексіз алыстаған нүктенің аймағы. Осы уақытқа дейін оңашаланған ерекше нүктенің аймағындағы бір мәнді функцияның өзгеріс-сипатын зерттей отырып, біз бұл нүктені шектеулі деп жорығанбыз. Оңашаланған ерекше z_0 нүктесінің аймағы деп, центрі z_0 нүктесіндегі мейлінше кіші радиусты дөңгелектің ішінде жатқан, z_0 нүктесінен ерекше, осындай барлық z нүктелерінде функция голоморфты болатын барлық z_0 нүктелерінің жиынын атағанбыз. Нөл нүктесін центр ретінде алып радиусы R шеңбер сызалық та, жеткілікті үлкен R үшін берілген $f(z)$ функциясының радиусы R дөңгелектің сыртында ерекше нүктелері жоқ дейік. Бұл жағдайда біз шексіз алыстаған нүктені берілген функцияны оңашаланған ерекше нүктесі деп атаймыз. Осы R радиусты дөңгелектің сыртында жатқан (болмаса радиусы R-ден үлкен) жазықтықтың барлық нүктелерін біз шектеусіз алыстаған нүктенің *аймағы* деп атаймыз. Сонымен, берілген $f(z)$ функциясын шексіз алыстаған нүктенің аймағында, яғни $|z|>R$ болғанда голоморфты деп жориық. деп ұйғарып, біз

$$\varphi'(z)=f\left(\frac{1}{z'}\right)=f(z) \tag{5.26}$$

функциясының, $z'=0$ нүктесінен басқа, $|z'|<\dfrac{1}{R}$ болғанда анықталғандығын және голоморфты болатындығын көреміз. Сондықтан, z жазықтығының шексіз алыстаған нүктесінің аймағында z' жазықтығының нөл нүктесінің аймағы сәйкес келеді де, $f(z)$ және $\varphi'(z)$ функциялары сәйкес z және z' нүктелерде бірдей мәндер қабылдайды.

Бұдан нөл нүктесін m ретті полюсі немесе жөнделінетін ерекше нүктесі бар $f(z)$ функциясының елеулі ерекше нүктесі деп атауға келісейік. Мұны

$\varphi'(z)$ функциясы үшін нөл нүктесі m ретті полюсі немесе жөнделінетін ерекшелігі бар елеулі ерекше нүкте бола ма, жоқ па соған байланысты алайық.

2.Шексіз алыстаған нүктенің аймағындағы Лоран жіктеуі. Шексіз алыстаған нүктенің аймағында $f(z)$ функциясына арналған Лоран жіктеуін алу үшін, нөл нүктесінің аймағындағы $\varphi'(z)$ функциясы үшін сәйкес жіктеуді жазайық:

$$\varphi'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z'^n \tag{5.27}$$

$z' = \frac{1}{z}$ деп ұйғарып, (5.26) -тің негізінде мынаны аламыз:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \tag{5.28}$$

мұндағы $c_n = b_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

(5.27) жіктеуін z' теріс дәрежелерінің шексіз жиынында, осы дәрежелердің шектеулі санының болу я болмауына қарай (5.28) жіктеуінде де z оң дәрежелерінің шексіз жиыны, оң дәрежелердің шектеулі санының болу, я болмауына сәйкес келетіндігін ескертелік. Бұдан шексіз алыстаған нүкте $f(z)$ функциясы үшін:

а) егер (5.28) жіктеуінде z оң дәрежелерінің шексіз жиыны болса, елеулі ерекше нүкте,

б) егер (5.28)) жіктеуінде z оң дәрежелерінің шектеулі саны енсе, сонымен қатар c_m нөлден басқа ($m \geq 1$) олардың ең соңғысының коэффиценті болса, онда m ретті полюс,

в) егер (5.28) жіктеуінде z оң дәрежелері мүлдем жоқ болса, жөнделінетін ерекше нүкте болып табылатындығын байқаймыз.

Соңғы жағдайда $f(z)$ функциясының шексіз алыстаған нүктедегі мәні ретінде қабылдап, біз бұл ерекшеліктен құтыла аламыз, өйткені $\varphi'(z)$ функциясы нөлдік нүктеде голоморфты функция болады. Сондықтан, егер жағдайында $f(\infty) = c_0$ болса, в) жағдайында $f(z)$ шексіз алыстаған нүктеде голоморфты функция болады.

Мысалдар. 1. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ функциясының шексіз алыстаған нүктеде жөнделінетін ерекше нүктесі бар, өйткені $|z| > 1$ болғанда былай болады:

$$\frac{1}{1-z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

$f(\infty) = 0$ деп қабылдап, біз $f(z)$ функциясының шексіздікте бірінші ретті нөлі бардеп айта аламыз.

2. z^m дәрежелі бүтін рационал функцияның m ретті полюсі болатын шексіз алыстаған нүктесі бар.

3. e^z, $\sin z$, $\cos z$ функцияларының шексіздікте елеулі ерекше нүктесі бар.

3.Шексіз алыстаған нүктенің функцияның өзгеріс-сипаты. $f(z)$ функциясының шексіз алыстаған нүктенің аймағындағы өзгеріс-сипатын анықтау, жаңа белгілеудің көмегімен $\varphi'(z)$ функциясының нөлдік нүктесінің аймағында өзгеріс-сипатын зерттеуге келтіретіндіктен (5.2. параграфтың 1-пункиіндегі барлық қорытынды шексіз алыстаған нүкте жағдайына бірден ауысады.

Сонымен, егер $f(z)$ функциясының шексіздікте полюсі болса, онда қандай да болсын үлкен оң С саны үшін шексіз алыстаған нүктенің аймағы бар болып, барлық нүкте үшін $|f(z)| > C$ орындалады, немесе қысқаша:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$$

Ал $f(z)$ функциясының шексіз алыстаған елеулі ерекше нүкте жағдайында Сохоцкий теоремасын былай айтуға болады:

А саны қандай болмасын, шектеулі немесе шектеусіз болсын елеулі ерекше ∞ нүктесіне ұмтылатын $z_1, z_2, ..., z_n$ нүктелер тізбегі табылып, онда

$$\lim_{z_n\to\infty} f(z_n) = A,$$

немесе қысқаша: шексіз алыстаған елеулі ерекше нүктенің кез келген аймағында $f(z)$ функциясы алдын ала берілген кез келген санға мейлінше жуық мәндерді қабылдайды.

Енді $f(z)$ функциясының жөнделінетін шексіз алыстаған ерекше нүктенің жеткілікті кіші аймағында, бұл функция шектелген болады, яғни екі тұрақты R және М оң саны табылып, барлық z – те $|z| > R$ мынадай болады: $|f(z)| < M$.

Екінші жағынан, көрсетілген ерекшеліктердің үш түрі оңашаланған ерекше нүкте үшін бірден-бір мүмкін жағдайы болғандықтан, онда, керісінше, шексіздік оңашаланған ерекше нүкте болатын $f(z)$ функциясы мүлде мұнда былай болады:

а) егер функция осы нүктенің жеткілікті кіші аймағында (модулі бойынша) үлкен болса, онда ол полюс;

ә) егер функция шексіз алыстаған нүктенің жеткілікті кіші аймағында анықталмаған болса, онда ол елеулі ерекше нүкте;

б) егер функция шексіз алыстаған нүктенің жеткілікті кіші аймағында шектелген болса, онда ол жөнделінетін ерекше нүкте.

5.4. Аналитикалық функцияның жай кластары

1.Бүтін функциялар. Ерекше нүктенің сипатына байланысты әр түрлі функциялар класын анықтауға болады. Мәселен кез келген бүтін рационал функцияның шексіздікте оның полюсінің жұмысын атқаратын бір ерекше нүктесі барлығы белгілі.

Керісінше, егер бір мәнді $f(z)$ функциясының шексіздікте бірден бір ерекше нүктесі –полюсі болса, онда бұл функция бүтін рационал функция болады. Шынында да, $f(z)$ функциясының Лоран жіктеуінде шексіз алыстаған нүктенің аймағы үшін z оң дәрежелерінің тек шектеулі саны ғана бар. Ішінде z оң дәрежелері бар Лоран жіктеуінің бір бөлігі $A_p z^p + A_{p-1} z^{p-1} + ... + A_1 z$ арқылы белгілейік $f(z)$ функциясының шексіз алыстаған нүкте аймағындағы бас бөлігі және оның бір берілген функциядан алып тастаймыз. Шыққан айырым

$$F(z) = f(z) - \left(A_p z^p + A_{p-1} z^{p-1} + ... + A_1 z\right) \tag{5.29}$$

кез келген z нүктесінде голоморфты болады; шексіздікте оның жөнделінетін ерекше нүктесі болады, өйткені шексіз алыстаған нүктенің аймағындағы оның Лоран жіктеуі бірден-бір жалғыздығынан z-тің оң дәрежелерін болмайды. Егер

$$F(\infty) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

деп ұйғарсақ, біз $F(z)$ функциясын барлық, «кеңейтілген» жазықтықта комплекс айнымалы z-тің голоморфты функциясы деп атай аламыз.

Осындай функция барлық жазықтықта бір қалыпты шектелген бола тұрып Лиувииль теоремасы бойынша тұрақты c-ға теңбе-тең. Демек, мынаны аламыз:

$$F(z) = f(z) - \left(A_p z^p + A_{p-1} z^{p-1} + ... + A_1 z\right) = c \ ,$$

бұдан

$$f(z) = c + A_p z^p + A_{p-1} z^{p-1} + ... + A_1 z$$

яғни $f(z)$ рационал функция екендігі шығады.

Одан әрі жинақтылық радиусы R=∞ шексіз дәрежелік қатармен кескінделетін функцияны біз *бүтін трансцендентті функция* деп атаймыз. Осындай функцияның елеулі ерекше нүктесі бола алатын шексіздікте бір ерекше нүктесі бар. Керісінше де: шексіздікте өзінің елеулі ерекше нүктесі бола алатын бір ерекше нүктесі бар кез келген бір мәнді $f(z)$ функция бүтін трансцендентті функция болатындығын көру қиын емес. Шынында да, шексіз алыстаған нүктенің аймағындағы $f(z)$ функциясының бас бөлігін $A_1 z + A_2 z^2 + ... + A_p z^p + ...$ арқылы белгілеп

$$F(z) = f(z) - (A_1 z + A_2 z^2 + ... + A_p z^p + ...) \tag{5.30}$$

айырымын құраймыз.

Бұрын айтылғандай, бұл $F(z)$ функциясы барлық жазықтықта бір қалыпты шектелген, ал сондықтан да Лиувилль теоремесы бойынша ол тұрақты сан c болады. Демек, былай болады: $F(z) = c$, бұдан (5.30) теңдік бойынша былай болады:

$$f(z) = c + A_1 z + A_2 z^2 + ... + A_p z^p + ...,$$

яғни $f(z)$ бүтін трансцендентті функция.

Барлық баяндалғанды біріктіре отырып, біз шексіз алыстаған нүктеден басқа, барлық жазықтықта голоморфты кез келген функцияны *бүтін функция* деп атай аламыз, сонымен қатар бұл функция шексіз алыстаған нүктенің полюсі немесе жөнделінетін ерекшелігі бар елеулі ерекше нүктенің болу, болмауына байланысты трансцендентті, рационалды немесе тұрақты сан болады.

2. Мероморфты функциялар. Бүтін функциялар класынан анағұрлым жалпы түрдегі мероморфты функциялар класы. *Мероморфты функция* деп, полюстен басқа, жазықтықтың шектеулі бөлігінде ерекше нүктесі болмайтын кез келген бір мәнді функцияны атайды. Дербес жағдайда, кез келген рационал функция осы класқа жатады.

Шынында, *рационал функцияның*

$$f(z)=\frac{p_0z^n+p_1z^{n-1}+...+p_n}{q_0z^m+q_1z^{m-1}+...+q_m}$$

барлық «кеңейтілген» z-жазықтықта өзінің еркше нүктелері ретінде тек қана полюстер болады. ($n>m$ болғанда шексіз алыстаған нүкте n−m ретті полюсі болады. n≤ m болғанда шексіз алыстаған нүкте жөнделінетін ерекшелікте болады, демек, осы нүктеде функцияның тиісті түрде анықтасақ, оны дұрыс нүктеде есептеуге болады).

Бұған кері жағдайдың да бар екенін көрсетелік: *егер бір мәнді функцияның «кеңейтілген» жазықтықта, полюстерден басқа, ерекше нүктелері болмаса, онда ол рационал функция болады.*

Дәлелдеу. Берілген $f(z)$ функциясының шексіздікте тек қана полюсі болғандықтан, ол шектеусіз алыстаған нүктенің кейбір аймағында |z|>R голоморфты функция болады. Бұл функцияның |z|≤R дөңгелегінде тек қана полюстерінің шектелуі саны ғана болуы мүмкін, өйткені қарсы жағдайда, полюстердің шекті нүктесі полюстерге жатпайтын ерекше нүкте болады, ал бұл шарт бойынша мүмкін емес. Сонымен, $f(z)$ функциясының барлық мүмкін болатын полюстері шектеулі санда болады; оларды $z_1, z_2, ..., z_k$ арқылы белгілейік; сонымен бірге, шексіз алыстаған нүкте де полюс болуы мүмкін; әр полюстің аймағында біз $f(z)$ функциясын Лоран қатарына жіктеп және z нүктесі үшін оның бас бөлігін

$$h_\lambda(z)=\frac{c_{-1}^{(\lambda)}}{z-z_\lambda}+\frac{c_{-2}^{(\lambda)}}{(z-z_\lambda)^2}+...+\frac{c_{-\lambda_\alpha}^{(\lambda)}}{(z-z_\lambda)^{\lambda_\alpha}} \quad \lambda=1,2,...,k$$

арқылы белгілейміз, ал ∞ нүктесі үшін

$$g(z)=A_1z+A_2z^2+...+A_pz^p$$

арқылы белгілейміз.

Берілген $f(z)$ функциясынан рационал

$$R(z)=h_1(z)+h_2(z)+...+h_k(z)+g(z),$$

функциясын алып тастасақ, мынаны аламыз:

$$F(z)=f(z)-R(z) \qquad (5.31)$$

$f(z)$ функциясының өзінің бір ерекше нүктелері ретінде $z_1, z_2, \dots, z_k$ және шексіз алыстаған нүктесі бар; осы нүктелердің әрқайсысы $F(z)$ функциясының жөнделінетін ерекшелігі болады, өйткені оның осы нүктелердің әрқайсысының аймағындағы Лоран жіктеуі, осы жіктеудің бірден−бір жалғыздығының негізінде бас бөлігі болмайды. Демек, егер жөнделінетін ерекше нүктелердегі функцияның мәндерін тиісті түрде тағайындасақ, оны комплекс айнымалы z-тің «кеңейтілген» жазықтығында голоморфты деп есептеуге болады. Ең соңында, Лиувилль теоремасы бойынша біз $F(z)$ функциясын тұрақты c санына теңбе–тең деп қорытамыз. Сонымен $F(z)=c$, ал бұдан (5.31) теңдік бойынша мынау шығады:

$$f(z)=R(z)+c \ ,$$

яғни $f(z)$ рационал функция болады, керегі де осы болатын.

3.Рационал функцияны жай бөлшектерге жіктеу. $h(z)$ функциясының рационал $f(z)$ функцияның z полюсіне сәйкес жай бөлшек (және жалғыз) болатындығын ескеріп, біз 2-пункт бойынша, оның үстіне, мынаны тұжырымдаймыз: *кез келген рационал функцияны, оның бүтін бөлігін бөліп тастау арқылы жай бөлшектерге жіктеуге болады және де бұл оның бірден−бір жолы болады.*

4.Алгебраның негізгі теоремасы. Лиувилль теоремасы бойынша жоғары алгебраның негізгі теоремасы дұрыстығына көз жеткізу қиын емес.

Теорема. Кез келген бүтін рационал функцияның

$$g(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n, \quad (n\geq 1)$$

ең болмағанда бір нөлі болады.

Дәлелдеу. Қарсы жорып, біз *g(z)* функциясы жазықтықтың ешқандай z нүктесінде нөлге айналмасын делік. Бұл жағдайда

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}$$

функциясы барлық жазықтықта голоморфты болады. Енді

$$f(z)=\frac{1}{z^n\left(a_0+\frac{a_1}{z}+...+\frac{a_n}{z^n}\right)}$$

болатынын ескеріп, бұдан мынаны қорытамыз:

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0 .$$

Демек, егер f(∞)=0 деп қабылдасақ, шексіз алыстаған нүкте $f(z)$ функциясының нөлі болады. Лиувилль теоремасы бойынша осындай $f(z)$ функциясы тұрақтыға теңбе-тең болу қажет, атап айтқанда, нөлге, өйткені $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$. Алынған қайшылық алгебраның негізгі теоремасының дұрыстығын дәлелдейді.■

VI ТАРАУ. ҚАЛЫНДЫЛАР ТЕОРИЯСЫ

6.1.Қалындылар және оларды есептеу

Егер $f(z)$ функциясының z_0 оңашаланған ерекше нүктесі түзуленетін тұйық сағат тілінің бағытына қарсы бағытталған L сызығының ішкі нүктесі болып, ол сызықтың бойында және барлық $z\neq z_0$ ішкі нүктелерінде $f(z_0)$ аналитикалық функция болса, онда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz$$

интегралы $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіне қатысты қалындысы деп аталады да, оны $\operatorname{Res} f(z_0)$ немесе $\operatorname{Res}(f(z); z_0)$ деп белгілейді.

Сонымен,

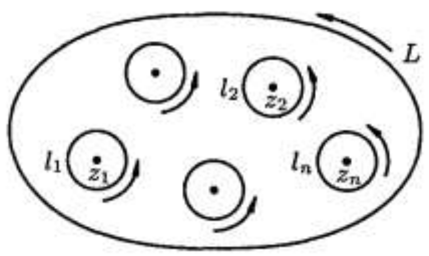
$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)dz. \tag{6.1}$$

Коши теоремасы. Контуры L болатын $\overline{D}$ тұйық облысында аналитикалық $f(z)$ функциясының шектеулі санды z_k $(k = 1, 2, ..., n)$ ерекше оқшауланған нүктелері бар бар болса онда

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k) \tag{6.2}$$

болады.

Дәлелдеу. Теореманы дәлелдеу үшін әрбір z_k $(k = 1, 2, ..., n)$ ерекше нүктелерін центр ретінде алып, l_k $(k = 1, 2, ..., n)$ шеңберлерін сызамыз және олар қос-қостан қиылыспау үшін және L контурының ішінде тұтас жату үшін оларды өте кішкентай етіп аламыз (19-сурет).



19-сурет

$f(z)$ функциясы күрделі $L + l_1^- + l_2^- + ... + l_k^-$ контурымен шектелген тұйық облыстың әр нүктесінде голоморфты болғандықтан, көп байланысты облыс үшін Коши теоремасы бойынша

$$\oint_L f(z)dz = \int_{l_1} f(z)dz + \oint_{l_2} f(z)dz + ... + \oint_{l_n} f(z)dz,$$

мұндағы интегралдау $L, l_1, l_2, ..., l_k$ контурының оң бағыты бойынша жүргізіледі.

(6.1) формуласы бойынша:

$$\int_{l_1} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1),$$

$$\int_{l_2} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_2),$$

……………………….

$$\int_{l_n} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_n)$$

Демек,

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1) + ... + 2\pi i \operatorname{Res} f(z_n). \quad \blacksquare$$

Бұл теорема функцияның интегралын есептеуге қолданылады.

6.2. Оңашаланған ерекше нүктеге қатысты функция қалындысы

1.Жөнделінетін ерекше нүкте. Егер $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктесек, онда қатардың c_{-1} коэффициенті $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіне қатысты қалындысына тең болатынын көреміз:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz \quad \text{немесе} \quad \operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}.$$

Егер $z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының жөнделінетін ерекше нүктесі болса, онда

$$\operatorname{Res} f(z_0) = 0$$

(бұл жағдайда (5.1) Лоран жіктеуінде бас бөлігі жоқ, сондықтан $c_{-1} = 0$).

2. Полюс. Айталық, z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының жай полюсі болсын. Бұл жағдайда Лоран жіктеуінің бас бөлігінде тек қана бірінші теріс дәрежеде $(z - z_0)$ ғана болады:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0}.$$

Бұл жіктеудің екі жағын бірдей $(z - z_0)$ көбейтіп, мынаны аламыз:

$$(z - z_0) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+1} + c_{-1} \qquad 6.3)$$

Бұл теңдіктің оң жағы дәрежелік қатар болғандықтан, оның қосындысы z_0 нүктесінде үзіліссіз болады. Демек, (6.3) теңдікте z- тің z_0-ге ұмтылғандағы шекке көшіп, мынаны аламыз:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \qquad (6.4)$$

Бұл формула жай полюске қатысты функцияның қалындысын есептеуге мүмкіндік береді.

Айталық, z_0 нүктесі $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ функциясының жай полюсі болсын, мұндағы $\varphi(z_0) \neq 0$ және $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Сонда (6.4) формуласы бойынша

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \qquad (6.5)$$

яғни

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, z_0\right) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (6.6)$$

(6.6)- бұл екі функцияның қатынасы түрінде берілген $f(z)$ функциясының қалындысы.

(6.4) формуласын кез келген m –ретті полюс үшін де қорытып шығаруға болады. Бұл жағдайда Лоран жіктеуі мына түрде жазылады:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}. \qquad (6.7)$$

Осы (6.7) жіктеудің екі жағын $(z-z_0)^m$ көбейтіп,мынаны аламыз:

$$(z-z_0)^m f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n+m}+c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+...+c_{-1}(z-z_0)^{m-1} \qquad (6.8)$$

(6.8) теңдікті (m –1) рет дифференциалдасақ,онда оның оң жағында бос мүшесі $c_{-1}(m-1)!$ болатын дәрежелік қатарды аламыз:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=(m-1)!c_{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+m)(n+m-1)...(n+2)(z-z_0)^{n+1}.$$

Бұдан шекке көшсек, онда

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=(m-1)!c_{-1}.$$

Сонымен m –ретті z_0 полюсіне қатысты $f(z)$ функциясының қалындысы

$$\operatorname{Re}s\ f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

формуласымен анықталады.

3.Елеулі нүкте. Егер z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының елеулі (маңызды) ерекше нүктесі болса, онда $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіне қатысты қалындысы (6.1) формуласымен есептеледі, яғни $f(z)$ функциясын z_0 нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктеу керек.

6.1-мысал. $f(z)=\dfrac{z+2}{z^3-z^4}$ функциясының ерекше нүктелеріндегі қалындысын табыңыздар.

Шешуі. $f(z)$ функциясы үшін ерекше нүктелер: $z=1$ – жай полюс, $z_2=0$ – үшінші ретті полюс.

Демек, формула бойынша

$$\operatorname{Re}s(f(z);1)=\frac{z+2}{\left(z^3-z^4\right)'}\Bigg|_{z=1}=\frac{1+2}{3-4}=-3.$$

$$\operatorname{Re}s(\mathrm{f}(z);0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left((z-0)^3\frac{z+2}{z^3-z^4}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z+2}{1-z}\right)''=\frac{1}{2}\cdot 6=3.$$

6.2-мысал. Интегралды есептеңіздер: $\oint\limits_L\dfrac{e^z}{z^2+4}dz$, мұндағы L – шеңбер $|z|=3$.

Шешуі. Интеграл астындағы функцияның L контурының ішінде екі ерекше нүктесі бар: $z_{1,2}=\pm 2i$ жай полюс. Қалындылар туралы теореманы қолданып,

$$\oint\limits_L\frac{e^z}{z^2+4}dz=2\pi i(\operatorname{Re}s\ f(z_1)+\operatorname{Re}s\ f(z_2))=2\pi i\left(\frac{e^z}{2z}\Bigg|_{z=2i}+\frac{e^z}{2z}\Bigg|_{z=-2i}\right)=2\pi i\left(\frac{e^{2i}}{4i}-\frac{e^{-2i}}{4i}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^{2i}-e^{-2i})=\pi i\sin 2=\pi\, sh\, 2i$$

аламыз.

6.3. Шексіз алыстаған нүктеге қатысты функцияның қалындысы

Осыған дейін z_0 ерекше нүктеге қатысты функцияның қалындысын қарастырғанда, біз z_0 нүктесін шектеулі болады деп ұйғарып келдік. Қалынды ұғымын шексіз алыстаған нүкте жағдайында да қолдануға болады.

Шексіз алыстаған нүкте $f(z)$ функциясының оңашаланған ерекшелігі болып табылады деп жорып, L арқылы осы нүктенің аймағында тұтас жатқан кез келген тұйық контурды белгілейік, мысалы, L үшін радиусы мейлінше үлкен шеңберді алуға болады. Бұрынғысынша *шексіз алыстаған нүктеге қатысты* $f(z)$ *функциясының қалындысы* деп $\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz$ интегралының мәнін мынадай айырмашылықпен қабылдайтын болалық: L контуры бойынша интегралдау енді теріс бағытта жүргізілетін болады, өйткені шексіз алыстаған нүкте әр уақытта сол жақта жататындай, L контуры сағат тілінің бағыттарымен өтуге тиісті. Шексіз алыстаған нүктенің аймағында $f(z)$ функцияларының Лоран жіктеуі мынадай :

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+...+c_1z+c_2z^2+... \qquad (6.9)$$

Бұл (6.9) қатар L контурында бір қалыпты жинақты болатындықтан да, оны біз L - бойымен мүшелеп интегралдай аламыз; бұл жағдайда, екіншіден басқа, барлық мүше интегралданғаннан кейін нөлге айналатынын ескеріп, мынаны табамыз:

$$\int_{L^-} f(z)dz=c_{-1}\int_{L^-}\frac{dz}{z}=-c_{-1}2\pi i,$$

бұдан

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L^-} f(z)dz=-c_{-1}, \qquad (6.10)$$

яғни шексіз алыстаған нүктеге қатысты $f(z)$ функциясының қалындысы қарама-қарсы таңбамен алынған Лоран жіктеуіндегі бірінші теріс дәреженің коэффицентіне тең.

Шектеулі қашықтықта жатқан жөнделінетін ерекше нүкте жағдайында қалынды әр уақытта да нөлге тең болады. Шексіз алыстаған нүкте үшін мұның болмауы да мүмкін. Мысалы $\frac{1}{z}$ функциясының шексіздікте жөнделінетін ерекшелігі болады, ал оған сәйкес қалынды -1-ге тең.

Шексіз алыстаған нүктеге қатысты функцияның қалынды ұғымын пайдалана отырып , мына теореманың дұрыстығына көз жеткізуге болады.

Теорема. Егер $f(z)$ функциясы, ерекше нүктелердің шектеулі санынан басқа, комплекс айнымалы z-тің кеңейтілген жазықтығының кез келген нүктесінде голоморфты болса, онда оның барлық ерекшеліктеріне (шексіз алыстаған нүктені қосқанда) қатысты қалындыларлың қосындысы әрқашан нөлге тең болады.

Дәлелдеу. Центр ретінде нөл нүктесін алып, радиусын барынша үлкен L шеңберін сызамыз. Осы шеңбердің ішінде функцияның ерекше нүктелері (шексіз алыстаған нүктеден басқасы) жатады.

Қалындылар туралы негізгі теорема бойынша $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L} f(z)dz$ интегралының мәні L -дың ішінде жатқан $f(z)$ функциясының барлық ерекше нүктелеріне қатысты қалындыларының қосындысына тең. Екінші жағынан сол функцияның шексіз алыстаған нүктеге қатысты қалындысы $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L^-} f(z)dz$ арқылы кескінделеді. Демек, барлық қалындылардың қосындысы мынаған тең:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L^-} f(z)dz = 0$$

$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ **интегралын есептеу.** Айталық $f(z)$–тұйық үзінді тегіс Г контурының ішінде және сол контурдың өзінде, Г контурының ішінде жатқан шектеулі полюстерден басқа нүктелердің бәрінде голоморфты болсын. Сонымен қатар Г контурында $f(z)$ функциясы нөлге айналмасын деп жориық. Сонда $a_1, a_2, ..., a_k$ арқылы $f(z)$ функциясының Г контурының ішіндегі нөлдерін, ал $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ арқылы олардың сәйкес реттерін және $b_1, b_2, ..., b_m$ мен $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ арқылы $f(z)$ функциясының Г контурының ішіндегі сәйкес полюстерін және осы полюстердің сәйкес реттерін белгілесек, Г контурының ішінде және Г контурының өзінде голоморфты болатын кез келген $\varphi(z)$ функциясы үшін мына формуланы аламыз:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\varphi(a_i) - \sum_{j=1}^{k}\beta_j\varphi(b_j)\ . \qquad (6.11)$$

Оң жақта тұрған нәтижені $f(z)$ функциясының нөлдеріндегі φ(z) мәндерінің қосындысы мен $f(z)$ функциясының полюстеріндегі φ(z) мәндерінің қосындысының айырымы деп оқуға болады; сонымен бірге сәйкес нүктенің (нөл немесе полюс) еселігі қанша болса, сонша рет әрбір қосылғыш мәні алынатындығын еске алған. (6.11) формуланы дәлелдеу үшін

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

интегралына қалындылар туралы негізгі теореманы қолданамыз.

$$F(z) = \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$$

функциясының Г контурының ішіндегі ерекше нүктелері $f(z)$ функциясының не нөлдерінде, не полюстерінде жатуы мүмкін. Алдымен a_i нөлдерін қарастырамыз. Оның аймағында Тейлор қатарларына жіктеуге болады:

$$f(z) = A_i(z-a_i)^{\alpha_i} + ...,$$

$$f'(z) = A_i\alpha_i(z-a_i)^{\alpha_i - 1} + ...,$$

$$\varphi(z) = \varphi(a_i) + \ldots,$$

сонымен қатар $A \neq 0$. Бұдан $F(z)$ үшін мынаны аламыз:

$$F(z) = \frac{[\varphi(a_i) + \ldots] \cdot [A_i \alpha_i + \ldots]}{A_i (z - a_i) + \ldots}$$

Бұл $F(z)$ функциясының $z = a_i$ нүктесінде ($\varphi(a_j) \neq 0$ болғанда) бір ретті полюсі болатындығын білдіреді. $F(z)$ функциясының a_i – ға қатысты қалындысы (6.5) формула бойынша табылады:

$$\frac{\varphi(a_i) A_i \alpha_i}{A_i} = \alpha_i \varphi(a_i).$$

Мынаны ескерген жөн $\varphi(a_i) = 0$ болғанда $f(z)$ функциясы $z = a_i$ нүктесінде голоморфты болғанымен, біздің тапқан қалындымыз нөлге айналады; сондықтан қалынды туралы негізгі теореманы қолдана отырып, біз $\varphi(a_l) \neq 0$ мен $\varphi(a_l) = 0$ жағдайлары арасындағы айырымды жасамасақ та болады. Нақты осындай жолмен $f(z)$ функциясының $в_i$ полюсіне қатысты $F(z)$ функциясының қалындысын табамыз. $в_i$ нүктесінің аймағында мына қатарға жіктейміз:

$$f(z) = B_j (z - b_j)^{-\beta_j} + \ldots,$$

$$f'(z) = -B_j \beta_j (z - b_j)^{-\beta_j - 1} + \ldots,$$

$$\varphi(z) = \varphi(b_j) + \ldots,$$

сонымен қоса, $B_i \neq 0$. Бұдан $F(z)$ функциясы үшін мынаны аламыз:

$$F(z) = \frac{\lfloor \varphi(b_j) + \ldots \rfloor \cdot \lfloor -B_j \beta_j + \ldots \rfloor}{B_j (z - b_j) + \ldots}$$

(бөлшектің мүшелерін $(z - b_i)\beta_j$ көбейткеннен кейін). Бұл $F(z)$ функциясының $в$ нүктесінде бір ретті полюсі болатындығын білдіреді $\varphi(b_j \neq 0 \ \text{болса})$ қатысты қалындысын тағы да (6.5) формула бойынша табамыз:

$$\frac{\varphi(b_j)(-B_j b_j)}{B_j} = -\beta_j \varphi(b_j).$$

Сонымен, $F(z)$ функциясының Г ішіндегі барлық ерекше нүктелеріне қатысты қалындыларының қосындысы мынаған тең:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(a_i) - \sum_{j=1}^{k} \beta_j \varphi(b_j),$$

бұл (6.11) формуланы береді.

Бұл формуланы маңызды дербес жағдайларын атап өтелік. Алдымен $\varphi(z) = 1$ деп жориық. Сонда (6.11) формула мына түрге келеді:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i - \sum_{j=1}^{k} \beta_j$$

мұндағы $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = N$ - бұл $f(z)$ функциясының Г контурының ішіндегі нөлдерінің санын, ал $\sum_{j=1}^{k}\beta_j = P$ осы функцияның полюстер санын білдіреді де әр нөл немесе полюс оның еселігі қанша болса, сонша рет есептелінеді.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

интегралын Г контурына қатысты $f(z)$ *функциясының логарифмдік қалындысы* деп атап (бұлай атау $\frac{f'(z)}{f(z)}$ қатынасы $f(z)$ функциясының логарифмдік туындысы болуымен байланысты: $\frac{d}{dz}[\ln f(z)]$, мынадай қорытындыға келеміз:

Тұйық Г контурына қатысты $f(z)$ функциясының Г контурының ішіндегі логарифмдік қалындысы әрбір нөл және әрбір полюс оның еселігі қанша болса, сонша рет есептелгенде $f(z)$ функциясының нөл саны мен полюстер санының айырымына тең.

Бұл ұсынысты $f(z)$ функциясына қолдана отырып, мұндағы z_0- кез келген комплекс сан, Г ішіндегі $f(z)=z_0$ теңдеуінің түбірлер саны мен ондағы $f(z)$ функциясының полюстер санының айырымына тең болатын

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz$$

интегралын табамыз, ал мұндағы $f(z)$ функциясы Г контурының *ішіндегі полюстердің шектеулі санынан басқа тұйық Г контурының ішінде голоморфты функция және де ол Г контурында z_0−ге айналмайды.* Дербес жағдайда, Г ішіндегі барлық нүктелер голоморфтық болғанда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz$$

интегралы Г контурының ішіндегі $f(z)=z_0$ теңдеуінің түбірлер санын береді.

(6.11) формуланың бұдан басқа маңызды дербес жағдайын $\varphi(z)=z$ деп ұйғарып аламыз. Сонда былай болады:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}z\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_i-\sum_{j=1}^{k}\beta_j b_j \tag{6.12}$$

Осы формуланың оң жағы: Г *ішінде жатқан $f(z)$ функциясының нөлдер қосындысы мен осы функцияның полюстер қосындысының айырымына* тең, сонымен қатар әрбір нөл мен әрбір полюс оның еселігі қанша болса, сонша қосылғыш алынады.

Ең соңында, $\varphi(z)=z^n$ деп,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}z^n\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_l^n-\sum_{j=1}^{k}\beta_j b_j^n$$

формуланы табамыз. Ол Г ішінде жатқан n дәрежелі нөлдердің қосындысына мен $f(z)$ полюстерінің айырымын береді.

6.4. Қалыңдылар теориясының қолданылуы

Алгебраның негізгі теоремасы. (6.12) формуланың бірнеше қолданылуы бар. Біз осы формуланың тек бір ғана қолданылуымен, атап *айтқанда кез-келген n-дәрежелі бүтін рационал*

$$f(z) = a_0 z_n + a_1 z^{n-1} + ...+, \quad n \geq 1$$

функциясының *n* нөлі болатынын, оның әрбір нөлі реті қанша болса, сонша рет есептеп көрсетумен шектелмекпіз. Біз *n* дәрежелі бүтін рационал функцияның тек қана бір ерекше нүктесі – шексіздіктегі екінші ретті полюсі болатындығын білеміз, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} f(z) = \infty$. Сондықтан барлық нүктелерінде $|z| \geq R$ шартын қанағаттандырғанда f(z) функциясының модулі бірден үлкен болатын, центрі нөлдік нүктедегі радиусы R дөңгелек табылады; сонымен f(z) функциямыздыңи барлық нөлдері $|z| < R$ дөңгелегінің ішінде жатады. (6.12) формуланың негізінде берілген функцияның барлық нөлдерінің саны

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz \tag{6.13}$$

болады, мұндағы интегралдау атап өткен дөңгелектің С шеңбері бойынша жүргізіледі. Енді $N = n$ болатынын дәлеледеу ғана қалды. Осы мақсатпен:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -N$$

функциясының шексіз алыстаған нүктеге қатысты $\frac{f'(z)}{f'(z)}$ қалыңдыны кескіндейтінін, демек N кері таңбамен алынған осы қалыңдыға тең болатынын білеміз. Шексіз алыстаған нүктені қоспағанда

$$f(z) = z^n\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + ... + \frac{a_n}{z^n}\right) = z^n \varphi(z),$$

ал бұдан мынаны аламыз:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}\ln f(z) = \frac{n}{z} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{n}{z} + \varphi(z), \tag{6.14}$$

мұндағы $\psi(z)$- шексіз алыстаған нүктеде екінші ретті нөлден кем емес нөлі бар функция. (6.14) қатыстан шексіз алыстаған нүкте үшін $\frac{f'(z)}{f(z)}$ функциясының қалындысы- *n*. Сөйтіп, N=*n*, дәлелдеу керегі осы болатын.

Қалындылар теориясын анықталған интегралды есептеуге қолдану. Бұл пунктте қалындылар теориясының анықталған интегралдарды есептеудегі кейбір қолданылуына тоқталайық.

Нақты осьті қосқанда жоғарғы жарты жазықтықтың барлық нүктелерінде, нақты осьтің жоғарғы жағында орналасқан ерекше $z_1, z_2, ..., z_k$ нүктелерден басқа, голоморфты $f(z)$ функциясы берілсін дейік. Сонымен бірге шексіз алыстаған нүкте $f(z)$ функциясының ең болмағанда екінші ретті нөл нүктесі деп жориық. Бұл жағдайда $z_1, z_2, ..., z_k$ нүктелеріне қатысты

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{i-1}^{k} \operatorname{Re} sf(z_i) \qquad (6.15)$$

формуласы болады.

Шынында да, шексіз алыстаған нүктенің аймағында $f(z)$ функциясының Лоран жіктеуі мына түрде болады:

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots . \qquad (6.16)$$

Шекаралығы С жарты шеңбері мен нақты осьтің (-R,+R) кесіндісінен тұратын жарты дөңгелектің ішінде барлық $z_1, z_2, ..., z_k$ ерекше нүктелерболатындай центрі нөлде орналасқан мейлінше үлкен R радиусты С жарты шеңберін жоғары жарты жазықтықта сызамыз. Қалындылар туралы негізгі теорема бойынша $z_1, z_2, ..., z_k$ нүктелеріне қатысты мынадай болады:

$$\int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i-1}^{k} \operatorname{Re} sf(z_i) . \qquad (6.17)$$

Енді R радиусы шексіздікке ұмтылғанда $\int_C f(z)dz$ интегралының нөлге ұмтылатындығын көрсетейік. Шынында да, С жарты шеңберінің барлық нүктелерінде (6.16) бойынша:

$$|f(z)| \le \frac{|c_{-2}|}{R^2} + \frac{|c_{-3}|}{R^3} + \dots = \frac{|c_{-2}|}{R^2} + \frac{1}{R^2}\left[\frac{|c_{-3}|}{R} + \dots\right]. \qquad (6.18)$$

Жеткілікті үлкен R мәнінен бастап, (6.18) теңсіздіктегі жақшадағы өрнек мейлінше аз, мысалы бірден кіші, бола алады. Демек, жеткілікті үлкен R мәнінен бастап, (6.18) теңсіздіктен шығатын

$$|f(z)| \le \frac{|c_{-2}| + 1}{R^2} \qquad (6.19)$$

С жарты шеңберінің барлық нүктесінде орындалады. (6.19) теңсіздікті пайдаланып, $\int_C f(z)dz$ интегралының модулінің шамасын бағалайық:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| < \frac{|c_{-2}| + 1}{R^2} \cdot \pi R = \pi \cdot \frac{|c_{-2}| + 1}{R},$$

яғни $\lim\limits_{R\to\infty} \int_C f(z)dz = 0$. Осыны ескере отырып, (6.17) формуладан R радиусы шексіздікке ұмтылғандағыишекке көшсек, $z_1, z_2, ..., z_k$ нүктелеріне қатысты (6.15) формуланы аламыз.

6.3-мысал . $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ интегралын есептеңіздер.

Шешуі. Интеграл астындағы $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ функциясы $z_0=i$ жай полюсі болатын нүктеден басқа, жоғарғы жарты жазықтықтықтың бәрінде голоморфты функция болады, өйткені $(z^2+1)'=2z$.

Сондықтан

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=2\pi\, i\,\mathrm{Res}(\mathrm{f(z)};\, i)=2\pi\, i\lim_{z\to i}\left(\left(z-i\right)\frac{1}{(z^2+1)}\right)=\pi .$$

6.4-мысал . $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ интегралын есептеңіздер, мұндағы $n\geq 1$.

Шешуі. Интеграл астындағы $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$ функциясы (6.15) формуланың ұйғарымдылық шарттарын қанағаттандыратыны сөзсіз, сонымен қатар жоғары жарты жазықтықта $z_0=i$ нүктесінде n-ретті полюс болады.

Сәйкес қалындыны табу үшін мына өрнекті құрамыз:

$$\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{\left(z-i\right)^{n+1}}{\left(z^2+1\right)^{n+1}}\right]=\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dz^n}(z+i)^{-n-1}=\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)...\cdot 2n}{n!}\cdot\frac{1}{(z+i)^{2n+1}} .$$

Бұл өрнектегі *z*- тің *i*- ге ұмтылғандағы шекке көше отырып, ізделінді қалындының мәнін аламыз:

$$\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)...\cdot 2n}{n!}\cdot\frac{1}{(2\,i)^{2n+1}}=\frac{\left(2n\right)!}{(n!)^2\cdot 2^{2n}2i} .$$

Демек, (6.15) формуласы бойынша мынадай болады:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}=\frac{\left(2n\right)!}{\left(n!\right)^2\cdot 2^{2n}} .$$

Кей жағдайда жай алмастырудың көмегімен ізделінді интегралды Кошидің негізгі формуласын дифференциалдау жолымен шыққан формула бойынша есептелінетін интегралға түрлендіруге болады.

Өзін-өзі тексеру үшін тест сұрақтары

1. $\int_{AB} z^{\,2}dz$ интегралын есептеңіз, мұндағы АВ – түзудің бөлігі. $z_A=1$, $z_B=i$

A) - (i + 1) / 3 ;
B) (i - 1) / 3 ;
C) (1 - i) / 3;
D) 0 ;
E) (i + 1) / 3.

2. Егер f(z) функциясының Лоран қатарына жіктелуінде z – z_0 – дің теріс дәрежесінен тұратын m мүшесі болса, онда z_0 нүктесі ... болады.
A) үзілісіз;
B) жөнделінетін ерекше;
C) елеулі ерекше;
D) m – ретті полюс;

E) полюс.

3. $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$ интегралын есептеңіз, мұндағы γ - шеңбер $(x-4)^2+(y-3)^2=1$

A) 5 ;
B) 4;
C) 0 ;
D) 3;
E) 2.

4. $\int\limits_{i}^{1+i} zdz$ интегралын есептеңіз .

A) $1/2+2i$;
B) $1/2+i$;
C) $1/2-i$;
D) 0 ;
E) $2i+1$.

5. $\int\limits_{i}^{2+i} zdz$ интегралын есептеңіз .

A) $2+2i$;
B) $2+i$;
C) $2-i$;
D) 0 ;
E) $2i+1$.

6. $f(z)=\frac{1}{1-\cos z}$ функцияның $z_0=0$ ерекше нүктесінің түрін анықта.

A) елеулі;
B) жөнделінетін;
C) жай полюс;
D) 2-ретті полюс;
E) оңашаланған;

7. $\int\limits_{1}^{-i} z^2 dz$ интегралын есептеңіз .

A) $-(i+1)/3$;
B) $(i-1)/3$;
C) $(1-i)/3$;
D) 0 ;
E) $(i+1)/3$.

8. $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ қатарының түрін анықта.

A) Абель теоремасы;

B) Тейлор қатары;
C) Маклорен қатары;
D) Сан қатары ;
E) Лоран қатары.

9. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ қатарының түрін анықта.

A) Абель теоремасы;
B) Тейлор қатары;
C) Маклорен қатары;
D) Сан қатары ;
E) Лоран қатары.

10. Егер $f(z_0)=0$ болса , онда z_0 нүктесі . . . деп аталады.

A) ерекше нүкте;
B) жөнделінетін ерекше нүкте;
C) елеулі ерекше нүкте;
D) f(z) функциясының нөлі;
E) оңашаланған ерекше нүкте.

11. Егер f(z) функциясы z_0 нүктесінде анықталмаған және z_0 нүктесінің аймағында басқа нүктелерде аналитикалық функция болса, онда z_0 нүктесі f(z) функциясының . . . деп аталады.

A) ерекше нүктесі;
B) жөнделінетін ерекше нүктесі;
C) елеулі ерекше нүктесі;
D) f(z) функциясының нөлі;
E) оңашаланған ерекше нүктесі.

12. Қатардың жинақталуының қажетті шарты.

A) $\lim_{n\to 0} z_n = 0$;
B) $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$;
C) $\lim_{n\to 0} z_n = \infty$;
D) $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$;
E) $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$.

13. l контурымен шектелген D тұйық облысында f(z) аналитикалық функциясының шектеулі $z_1, z_2, \dots z_n$ оқшауланған ерекше нүктелері болса, онда ...

A) $res\ f(z_n)=\oint_L f(z)dz$;
B) $res\ f(z_n)=2\pi i\oint_L f(z)dz$;
C) $\oint_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\ f(z_k)$;
D) $\oint_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} res\ f(z_k)$;

E) $\oint\limits_L f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n} res\ f(z_k)$.

14. $res\left(\frac{\varphi(z)}{g(z)}; z_0\right)$ мәні неге тең?

A) $\frac{\varphi(z_0)}{g(z_0)}$;

B) $\frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}$;

C) $\frac{\varphi'(z_0)}{g(z_0)}$;

D) $\frac{\varphi'(z_0)}{g'(z_0)}$;

E) 0.

15. Егер f(z) функциясының Лоран қатарына жіктелуінде $z - z_0$ – дің теріс дәрежесінен тұратын мүшелері болмаса, онда z_0 нүктесі ... нүкте болады.

A) үзілісіз;
B) жөнделінетін ерекше;
C) елеулі ерекше;
D) m – ретті полюс;
E) полюс.

16. $f(z)\frac{1}{(z-a)^3}$ функциясының z = a нүктесінің түрін анықта.

A) жай полюс;
B) елеулі ерекше нүкте;
C) үшінші ретті полюс;
D) жөнделінетін ерекше нүкте;
E) екінші ретті полюс.

17. $f(z)\frac{z}{(z-1)(z-2)}$ функциясының z = 2 ерекше нүктесіндегі қалындысын тап.

A) 4;
B) ∞;
C) 2;
D) -2;
E) 0;

18. Егер f(z) функциясы бір байланысты облыста аналитикалық функция болып, D облысында жатқан L тұйық тегіс сызық болса, онда $\oint\limits_L f(z)dz = 0$ болады. Бұл кімнің теоремасы?

A) Абель;
B) Коши;
C) Лейбниц;
D) Кошидің интегралдық;
E) Ньютон- Лейбниц.

19. Егер f(z) функциясының Лоран қатарына жіктелуінде $(z - z_0)$ – дің теріс дәрежесінен тұратын мүшелері шексіз көп болса, онда z_0 нүктесі ... болады.
A) үзілісіз;
B) жөнделінетін ерекше;
C) елеулі ерекше;
D) m – ретті полюс;
E) полюс.
20. $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ – бұл кімнің формуласы?
A) Ньютон- Лейбниц;
B) Грин;
C) Лейбниц;
D) Кошидің интегралдық;
E) Абель.
21. Егер D облысындағы кез-келген z үшін $F'(z)=f(z)$ теңдігі орындалса, онда F(z) функциясы f(z) функциясының . . . деп атайды.
A) анықталған интеграл;
B) меншіксіз интеграл;
C) туынды;
D) анықталмаған интеграл;
E) алғашқы образы.
22. Егер f(z) функциясының z_0 нүктесінде n ретті туындысы бар болса , онда ...
A) $f^{(n)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$;
B) $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$;
C) $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n}}dz$;
D) $f^{(n)}(z_0)=\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$;
E) $f^{(n)}(z_0)=\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n}}dz$.
23. $u_1+u_2+ \ . \ . \ . + u_n + \ . \ . \ .$ қатарының мүшелері комплекс сан болса, онда ол комплекс облыстағы ... қатары деп атайды.
A) сандық;
B) дәрежелік;
C) таңбасы ауыспалы;
D) функцияналдық;
E) дәрежелік-сандық.
24. Егер $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ шегі болмаса , онда z_0 нүктесі ... болады.
A) полюс;
B) m- ретті полюс;
C) жай полюс;

D) жөнделінетін ерекше нүкте;
E) елеулі ерекше нүкте.

25. Егер z_0 нүктесі f(z) функциясының m – ретті полюсі болса, онда z_0 нүктесі 1/f(z) функциясының m – ретті ... болады.
A) нөлі;
B) полюсі;
C) туындысы;
D) дифференциалы;
E) ерекше нүкте.

Әдебиеттер

1. Демин С.Е., Демина Е.Л. Теория функций комплексного переменного.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука », 1979.
3. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М., «Наука », 1978.
4. Волковыский Л.И., Лунц Г.А., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., «Наука », 1975.
5. П.Е.Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. М., «Высшая школа», часть 2, 1999.
6. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике. М., «Наука», 1986.
7. Дмитрий Письменный. Конспект лекций по высшей математике. Москва Айрис Пресс, ч.2, 2003.

МАЗМҰНЫ

Пішімі 60х84 1/12
Көлемі 83 бет 6,9 шартты баспа табағы
Таралымы 20 дана.
Ш.Есенов атындағы КМТжИУ
Редакциялық - баспа бөлімінде басылды.
Ақтау қаласы, 32 ш/а.