МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
Каспийский государственный университет технологии и инжиниринга имени Ш.Есенова

Диярова Л.Д.
Жуманова З.Ж.

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Актау, 2010

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73
Д 50

Рецензенты:
Садыков Н.Р. – доктор физико-математических наук, профессор, проректор по УМР КГУТиИ имени Ш.Есенова
Мухамеджанов С.Т. - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Информатики и прикладной математики» КазНПУ имени Абая
Жуманова Л.К. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ТВиМС КазНУ имени Аль-Фараби

Д 50
Диярова Л., Жуманова З.Ж.
Математика для экономистов: Учебное пособие. – Актау, КГУТиИ имени Ш.Есеова, 2010г. – 187с.

ISBN 978-601-7276-32-4

Предлагаемое учебное пособие является не только учебником, но и кратким руководством к решению задач курса «Математика для экономистов». В работе даются: теоретический материал, образцы примеров и указания по их выполнению; подробное описание по выполнению самостоятельных работ. Учебное пособие предназначено для студентов экономических и смежных специальностей вузов, заочного и дистанционного обучения, лицам, получающим второе высшее образование, а также экономистам-практикам.

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73

Рекомендовано к изданию решением Учебно-методического совета КГУТиИ имени Ш.Есенова

ISBN 978-601-7276-32-4

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ……………………………………………………………5
Глава I
Элементы линейной алгебры…………………… 6
1.1 Определители ………………………………………………………6
1.2 Матрицы……………………………………………………. ………10
1.3 Системы линейных уравнений………….. …………………………16
1.4 Задачи и упражнения экономического характера………………………20
1.5 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП 1-3)……..24
1.6 Самостоятельная работа студента (СРС 1-3)…………………………25
Глава II
Элементы векторной алгебры……………………………………………..29
2.1. Векторы…………. ……………………………………………………..29
2.2 Системы координат ……………………………………………………32
2.3 Скалярное произведение векторов ……………………………………35
2.4 Векторное произведение векторов ……………………………………36
2.5 Смешанное произведение векторов……………………………………37
2.6 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП 4)………...40
Глава III
Аналитическая геометрия на плоскости………………………………...41
3.1 Простейшие задачи аналитической геометрии…………………………..41
3.2 Уравнение линии на плоскости…………………………………………45
3.3 Уравнение прямой на плоскости……………………………………….45
3.4 Линии второго порядка на плоскости…………………………………..51
3.5 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП 5-6)………56
Глава IV
Аналитическая геометрия в пространстве………………………………58
4.1 Уравнение плоскости……………………………………………………..58
4.2 Задачи на составление уравнения плоскости……………………………...62
4.3 Прямая линия в пространстве……………………………………………63
4.4 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП 7)…………67
Глава V
Введение в математический анализ……………………………………68
5.1 Функция……………………………………………………………………68
5.2 Предел, непрерывность функций…………………………………………...82
5.3 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП 8)…………90
Глава VI
Дифференциальное исчисление………………………………………………92
6.1 Производная функции……………………………………………………92
6.2 Дифференциал функции………………………………………………......97
6.3 Приложение производной………………………………………………..98
6.4 Производные и дифференциалы различных порядков…………………..99
6.5 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП 9-10)……..101

Глава VII
Исследование функции……………………………………………………104
7.1 Исследование функции с помощью первой производной………………104
7.2 Исследование функции с помощью второй производной………………112
7.3 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП 11)………129
Глава VIII
Функции нескольких переменных……………………………………………130
8.1 Определение функции нескольких переменных…………………………130
8.2 Частные производные функции нескольких переменных………………137
8.3 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП 12)………144
Глава IX
Интегральное исчисление……………………………………………………145
9.1 Неопределенный интеграл…………………………………………………145
9.2 Определенный интеграл……………………………………………………...154
9.3 Приложение определенного интеграла…………………………………...158
9.4 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП 13)………165
Глава X
Дифференциальные уравнения………………………………………………166
10.1 Дифференциальные уравнения первого порядка………………………166
10.2 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП 14)……..171
10.3 Самостоятельная работа студента (СРС 4)………………………………175
Глава XI
Ряды……………………………………………………………………………176
11.1 Ряд. Сумма ряда……………………………………………………………176
11.2 Признаки сходимости ряда……………………………………………...177
11.3 Виды рядов…………………………………………………………………179
11.4 Ряды Фурье…………………………………………………………………183
11.5 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП 15)…….186
Литература ……………………………………………………………………187

ПРЕДИСЛОВИЕ

Традиционно практическое приложение математики иллюстрируется решением примеров и задач в классическом варианте, во многих учебниках приводятся примеры, прикладываемые в механике и физике. Однако роль математики в моделировании экономических процессов не так часто рассматривается. Вместе с тем, приложение математики в экономике дает богатый математический аппарат для моделирования и исследования процессов, происходящих в экономике. Практика показывает, что математические прогнозы единственно верные и научно обоснованные. В этой связи применение элементов высшей математики является одним из необходимых методов моделирования экономических задач.

Сегодня деятельность в любой области экономики (управлении, финансово-кредитной сфере, маркетинге, учете, аудите) требует от специалиста применение современных методов работы, знания достижений мировой экономической мысли, понимания научного языка. Большинство новых методов основано на эконометрических моделях, концепциях, приемах. Без глубоких знаний математики научиться их использовать невозможно.

На сегодняшний день учебников по математике много, но в них зачастую отсутствуют экономические приложения. Предлагаемое учебное пособие особо актуально и необходимо для сегодняшних студентов экономических специальностей. В работе дается теоретический материал, причем представленные определения, теоремы и основные понятия - кратки и самые необходимые; образцы примеров и указания по их выполнения; подробное описание по выполнению самостоятельных работ. Принятая в работе последовательность изложения базируется на наиболее распространенном понимании содержания математики как о науке. Это понимание определило содержание и структуру учебного пособия. В этой связи данное учебное пособие соответствует требованиям университетского общеобразовательного стандарта в области математики. Использованы наиболее интересные педагогические находки из этой литературы в части изложения материала в более доходчивой форме, а также наиболее удачные примеры и иллюстрации экономического содержания. Особо хочется отметить нацеленность в учебном пособии на СРС и СРСП, что очень актуально для обучающихся студентов по кредитной системе. В работе даны:

- домашние задания для самостоятельного исследования и дополнения полученных знаний;
- приведены некоторые наиболее употребляемые математические модели экономических задач. В частности, приведенные экономические задачи позволяют прогнозировать объем выпускаемой продукции через несколько лет или капиталовложения для выпуска продукции данного объема и др.
- приведены типовые примеры и задачи, раскрывающие и закрепляющие теоретические знания;

Пособие будет полезно студентам экономических и смежных специальностей вузов, заочного и дистанционного обучения, лицам, получающим второе высшее образование, а также экономистам-практикам.

Глава 1
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§1.1 Определители

Определение. Определителем или детерминантом второго порядка называется число, которое находится по определенному правилу, обозначается через Δ (дельта) или det и записывается в следующей форме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Здесь a_{ij} - элемент определителя, где i - номер строки, j - номер столбца. Например, элемент a_{21} находится во второй строке и в первом столбце.

элементы побочной диагонали

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

элементы главной диагонали

Примеры:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -8 & 9 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \cdot 0 - 2 \cdot 9 = -18$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 + 1 \cdot 11 = 32$$

Определение. Определителем или детерминантом третьего порядка называется число, которое находится по определенному правилу, называемым правилом Саррюса, обозначается через Δ (дельта) или det и записывается в следующей форме:

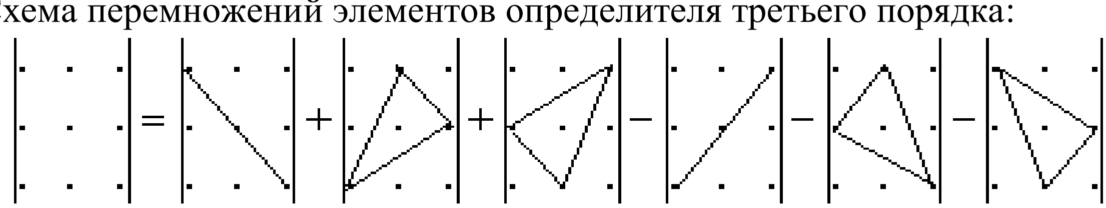
побочная диагональ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

главная диагональ

Определитель состоит из трех строк и трех столбцов, т.е. из девяти элементов.

Схема перемножений элементов определителя третьего порядка:



Определение. *Определителем n-го порядка* называется число, образованное из n^2 элементов, расположенных в квадратную таблицу из n-строк и n-столбцов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Здесь a_{ij} - элемент определителя, где i - номер строки, j - номер столбца.

По определению определители четвертого и более высоких порядков не вычисляются. При вычислении таких определителей используются свойства определителей, которые позволяют свести вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителей (n-1)-го порядка.

Определение. *Минором* M_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, который получается путем вычеркивания i-ой строки и j-го столбца.

Например, для определителя $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ минором M_{32} называется определитель второго порядка, полученный путем вычеркивания 3-ей строки и 2-ого столбца, т.е. $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Пример: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 5 & 5 & 6 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 24 = -22$; $M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 30 = 35$.

Определение. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется его минор M_{ij}, взятый со знаком «плюс» или «минус», который определяется выражением $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Например, для определителя $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ алгебраическим дополнением A_{32} называется минор, взятый со знаком «минус», так как $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32}$ т.е. $A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Пример: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 5 & 5 & 6 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

$M_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 24 = -22$; $M_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 18) = -19$.

Теорема. Определитель n-го порядка равен сумме произведений всех элементов любого из его столбцов (или строк) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}\text{, где } i=1,2,\dots,n$$

Эта формула называется *разложением определителя по элементам i-ой строки.*

Или

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj}\text{, где } j=1,2,\dots,n$$

- разложение определителя по элементам *j*-го столбца

Используя вышеуказанную теорему, можно вычислить определители любого порядка.

Свойства определителей

1. Величина определителя не изменится при ее транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. При перестановке двух строк или столбцов величина определителя не изменится, а знак поменяется на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

Например:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ -6 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

Если соответствующие элементы двух строк или двух столбцов пропорциональны, то определитель равен нулю.
Например:

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

4. Общий множитель элементов какой-либо строки или столбца можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & ka_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & ka_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки равны нулю, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

6. Если каждый элемент к-го столбца или строки определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1}+b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример: Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Разложим по первой строке, т.е.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 9 - 3 \cdot (-44) + (-3) \cdot (-34) - 4 \cdot (-18) = 324$$

Замечание.

1. Все эти свойства можно использовать для вычисления определителей;
2. Все эти свойства можно доказать непосредственным вычислением определителей.

§1.2 Матрицы

Определение. Множество из чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, составленной из m строк и n столбцов, называется *матрицей размера* $(m \times n)$:

$$\|A\| = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} называются *элементами матрицы,* где i - номер строки, j - номер столбца. Символы $\|\ \|$, $(\ )$ есть символы матрицы. Матрицы обычно обозначают заглавными буквами A, B, C, …, X, Y,. Часто матрицу записывают сокращенно в виде $A = (a_{ij})$, где $i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$

Например,

$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 & 2 \\ -8 & 4 & 8 & 3 \\ 9 & -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ - матрица размера (3×4)

$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & 8 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ - матрица размера (2×5)

$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ - матрица размера (2×2)

Замечание. Не следует отождествлять понятия матрицы и определителя: матрица – совокупность элементов, а определитель есть число, определяемое по установленным правилам.

Основные понятия, связанные с матрицами

1) Матрица, у которой число строк и столбцов равны $m = n$, называется *квадратной матрицей*, а n - *порядком матрицы*.

Например: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

2) Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, называется *определителем матрицы* и обозначается символом ΔA или $\det A$.

Прямоугольная неквадратная матрица своего определителя не имеет.

3) Квадратная матрица называется *невырожденной (неособой*), если определитель ее не равен нулю, т.е $\Delta A \neq 0$. В противном случае, если $\Delta A = 0$, матрица A называется вырожденной (особой).

4) Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы равны нулю, кроме элементов главной диагонали. $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

5) Квадратная матрица называется *симметричной* относительно главной диагонали, если $a_{ij} = a_{ji}$. Если $a_{ij} = -a_{ji}$, то матрица называется *кососимметричной*.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 7 & 4 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ - симметричная; $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ - кососимметричная.

6) Диагональная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице, называется *единичной матрицей* и обозначается E, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7) Матрица A^T называется *транспонированной* по отношению к матрице A, если столбцы матрицы A являются строками матрицы A^T.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & -8 & 6 \end{pmatrix}$;

8) Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей.*

9) Виды матриц: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ - столбцовая матрица; $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ - строчная матрица (например, валютная, где y_1-тенге, y_2- фунты стерлинги, y_3- франки, y_4-гульденов);

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$- верняя треугольная матрица; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - нижняя треугольная матрица.

10) Две матрицы А и В считаются *равными*, если они одинакового размера и и их соответствующие элементы равны между собой.

Линейные действия над матрицами

1. Произведением матрицы А на число k является новая матрица:

$B = k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$, например, обменные курсы валют.

2. Суммой двух матриц А и В одинакового размера называется третья матрица С:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Разностью двух матриц А и В одинакового размера называется третья матрица С, полученная как сумма матрицы А и В, умноженной на (-1):

$$C = A - B = A + (-1)B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \end{pmatrix}$$

Линейные действия обладают следующими условиями:

1) $A + B = B + A$
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, α, β - const.
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
5) $(-1)A = -A$; $1 \cdot A = A$
6) $0 \cdot A = 0$
7) $A - B = A + (-1)B$

Пример: Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Найти: $3A + 2B$; $3B - 4A^T$

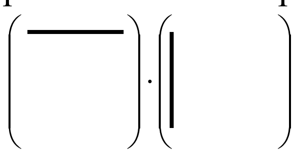
$$3A + 2B = 3\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & -5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 9 \\ 12 & 3 & 12 \\ -24 & -3 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \\ 14 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & -2 & 15 \\ 14 & 7 & 16 \\ -10 & -1 & -13 \end{pmatrix}; \quad 3B - 4A^T = 3\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -28 & 41 \\ -5 & 2 & 10 \\ 9 & -13 & 23 \end{pmatrix}$$

3. Умножение матриц.

Умножение матрицы A на матрицу B, т.е $A \cdot B$, возможно в том случае, если число столбцов первостоящей матрицы A равно числу строк матрицы B.

Схематично, умножение двух матриц возможно, если ширина матрицы A равна высоте матрицы B.



Правило умножения матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

При умножении двух матриц выполняются следующие свойства:

1) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
2) $(AB)C = A(BC)$
3) $(A+B)C = AC + BC$
4) $C(A+B) = CA + CB$

Из правила умножения матриц $A \cdot B$ не следует, что возможно умножение $B \cdot A$

<u>Примеры:</u>

1) Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Умножение $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ возможно, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

А вот произведение $B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ - невозможно, так как количество столбцов первостоящей матрицы не равно количеству строк второй матрицы.

<u>Замечание</u>: Оба произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ возможны в том случае, если A и B - квадратные матрицы одного порядка.

2) Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+12+0 & -10+3+0 & 10+9+0 \\ 7+8+6 & -14+2-10 & 14+6-14 \\ 4+4-3 & -8+1+5 & 8+3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -7 & 19 \\ 21 & -22 & 6 \\ 5 & -2 & 18 \end{pmatrix}$$

Найдем теперь $B \cdot A$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 5-14+8 & 3-4+2 & 0+4+2 \\ 20+7+12 & 12+2+3 & 0-2+3 \\ -15+35+28 & -9+10+7 & 0-10+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 39 & 17 & 1 \\ 48 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что $\begin{pmatrix} 17 & -7 & 19 \\ 21 & -22 & 6 \\ 5 & -2 & 18 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 39 & 17 & 1 \\ 48 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

Следовательно, $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Определение. Если оба произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ существуют и равны между собой, то матрицы A и B называются *перестановочными.*

Обратная матрица

Определение. Если оба произведения матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$ существуют, равны между собой и равны единичной матрице E, то матрица B называется *обратной* по отношению к матрице A и обозначается

$$B = A^{-1},$$

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$$

Теорема. Если матрица A невырожденная, т.е. $\Delta A \neq 0$, то для нее существует обратная матрица, притом единственная:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где ΔA- определитель матрицы A, A_{ij}- алгебраические дополнения транспонированной матрицы, соответствующие элементу a_{ij}.

Пример: Найти обратную матрицу, если $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: Найдем определитель

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4-20-18-4-60-6=-104\neq 0$. Это означает, что существует обратная матрица A^{-1}. Найдем все алгебраические дополнения

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-14\ ; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-8\ ; \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=12$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-13\ ; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=0\ ; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-26$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=11\ ; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-16; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-2$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-104}\begin{pmatrix} -14 & -13 & 11 \\ -8 & 0 & -16 \\ 12 & -26 & -2 \end{pmatrix}$$

Проверим:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}4&3&-2\\2&1&3\\-2&5&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-104}\begin{pmatrix}-14&-13&11\\-8&0&-16\\12&-26&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{-104}\begin{pmatrix}-104&0&0\\0&-104&0\\0&0&-104\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу размера ($m\times n$).

Любая матрица имеет много миноров. При этом некоторые из них равны нулю, некоторые отличны от нуля.

Определение. Наивысший порядок минора, отличного от нуля, называется *рангом матрицы* и обозначается $r(A)$.

Таким образом, если ранг матрицы равен k, то среди всех миноров этой матрицы k-го порядка есть по крайней мере один, отличный от нуля , а все миноры $(k+1)$-го порядка и выше равны нулю.

Часто ранг матрицы находят методом окаймляющих миноров.

Окаймляющими называются миноры, полученные окаймлением отличного от нуля минора соседними строкой и столбцом.

Если минор окажется равным нулю, то переставляют строки или столбцы так, чтобы главный минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу, был отличен от нуля. Окаймление делают до тех пор, пока все окаймляющие миноры $(k+1)$-го порядка окажутся равными нулю.

Если хотя бы один минор k-го порядка оказался отличным от нуля, то имеет место следующая теорема.

Теорема. Если матрица A имеет отличный от нуля минор k-го порядка, а все окаймляющие миноры $(k+1)$-го порядка матрицы A равны нулю, то ранг матрицы A равно k, т.е. $r(A)=k$.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие ее преобразования:

1) транспонирование матрицы;

2) перестановка местами двух строк или столбцов;

3) умножение всех элементов строки или столбца на любое число $\lambda\neq 0$;

4) прибавление к любой строке или столбцу линейной комбинации остальных строк или столбцов.

При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

Примеры: 1. Определите ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1&1&4&1\\2&2&-1&0\\-1&-1&5&3\end{pmatrix}$

Решение: Предпосылки для определения $r(A)$:

Все элементы кроме $a_{24}=0$ - ненулевые, т.е. все миноры 1-го порядка не нули;

Проверяя все миноры 2-го порядка, находим, что $\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=-3\neq 0$;

Вычисли все миноры 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Так как все миноры 3-го порядка равны нулю, но нашелся минор 2-го порядка, отличный от нуля, то $r(A) = 2$.

2. Найдите ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) не все элементы равны нулю;

2) минор 2-го порядка $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

3) минор 3-го порядка, окаймляющий минор 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

4) Оба минора 4-го порядка, полученные окаймлением определителя 3-го порядка, равны нулю.

Таким образом, ранг матрицы равен 3.

Ответ: $r(A) = 3$

§1.3 Системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad m \le n,\ m, n \in N \qquad (1.3)$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные переменные, a_{ij} - коэффициенты при неизвестных переменных, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ - свободные коэффициенты.

Совокупность чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называется решением системы, если в результате замены неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ все уравнения системы превратятся в арифметические тождества.

Решить систему – значит найти совокупность чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Рассмотрим систему линейных уравнений при $m = n$

Составим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} при неизвестных.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}; \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$ -

расширенная матрица;

Систему уравнений можно решить тремя способами

Метод Крамера

Если определитель системы линейных уравнений при $m=n$ отличен от нуля, т.е. $\Delta A\neq 0$, то эта система совместна и имеет единственное решение.

$$\Delta A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0;$$

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, …, Δ_j, ..., Δ_n.

Δ_j - определитель, составленный из тех же элементов что и ΔA, но вместо j-го столбца ставится столбец из свободных коэффициентов.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \ldots, \quad \Delta_j=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{vmatrix};$$

$$\boxed{x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta A},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta A},\ \ldots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta A}}$$

- это формулы Крамера, по которой находятся неизвестные переменные $x_1, x_2, ..., x_n$.

Матричный метод

Систему (1.3) можно представить в матричном виде:

$AX=B$ - матричная запись системы (1.3)

Если определитель матрицы $\Delta A\neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}. Отсюда следует:

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$
$$EX=A^{-1}B$$
$$X=A^{-1}B$$

$$X=\frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ . & . & \dots & .\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Таким образом, чтобы решить систему линейных уравнений, необходимо найти обратную матрицу, умножить на матрицу-столбец B,в результате полученная матрица-столбец и есть решение системы.

Метод Гаусса

Сущность метода Гаусса заключается в том, что посредством последовательного исключения неизвестных с помощью элементарных преобразований данная система уравнений (1.3) приводится к эквивалентной ступенчатой системе. Метод Гаусса для решения систем является универсальным, он применяется для любого из случаев $m \le n$. Если $m = n$, то система приводится к треугольному виду:

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1\\ \dots\dots\dots\bar{a}_{22}x_2 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n\end{cases}.$$

Часто при решении системы уравнений удобно пользоваться расширенной матрицей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\ . & . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2\\ . & . & . & . & .\\ & & \dots & \bar{a}_{nn} & \bar{b}_n\end{array}\right) \text{ или}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\ . & . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} & & \dots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1\\ & \dots & \bar{a}_{2(n-1)} & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2\\ . & . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n\end{array}\right).$$

При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса может случится так, что после выполнения некоторых элементарных преобразований появится уравнение, все коэффициенты левой части которого равны нулю. Если и свободный член этого уравнения равен нулю, то уравнению удовлетворяют любые значения неизвестных, и поэтому отбрасывая это уравнение, мы получим систему, эквивалентную исходной. Если же свободный член отличен от нуля, то уравнению не удовлетворяет никакие значения неизвестных, а поэтому полученная нами система уравнений, а значит и исходная, несовместны.

Если задана произвольная система уравнений (1.3), где $m \ne n$ или $m = n$, но $\Delta A = 0$, то возникает вопрос о совместности системы.

Теорема Кронекера-Капелли

Чтобы система линейных алгебраических уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы: $r(A) = r(\overline{A})$.

Пример: Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

1) Метод Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot 1 = 5 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 2 - 2 + 8 - 2 = 10$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 4 + 2 - 4 - 6 = -5$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 12 + 2 - 4 - 8 + 3 = -15$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2;\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1;\quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-15}{5} = -3.$$

Ответ: $(2,-1,-3)$

2) Матричный метод:

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \Delta A = 5$$

Найдем обратную матрицу

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{22} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 + 2 - 4 \\ -2 - 2 - 1 \\ -16 - 6 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Ответ: $(2,-1,-3)$

3) <u>Метод Гаусса</u>:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 1\end{array}\right)\underset{I-2III}{\overset{3I-2II}{\rightarrow}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -7 & -1 & 10\\ 0 & 3 & -1 & 0\end{array}\right)\overset{II-III}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -10 & 0 & 10\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1\\ ....3x_2-x_3=0\\ ......-10x_2=10\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1=2x_2-x_3+1=-2+3+1\\ x_3=3x_2=-3\\ ......x_2=-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1=2\\ x_2=-1\\ x_3=-3\end{cases}$$

Ответ: $(2,-1,-3)$.

<u>Выводы:</u>

1. Решение системы методом Гаусса гораздо проще, чем другими методами;
2. Нет необходимости исследовать совместность уравнений системы, так как количество линейно независимых строк (или столбцов) расширенной матрицы показывает, что $r(A)=r(\overline{A})=k$.

§1.4 Задачи и упражнения экономического характера

<u>Задание №1</u>

Для выпуска продукции четырех видов требуется четыре разных вида сырья

$$A=\begin{array}{c|c}\textbf{П} & \quad 1\quad 2\quad 3\quad 4\ \textbf{- C}\\ \hline \begin{array}{c}I\\ II\\ III\\ IV\end{array} & \begin{pmatrix}2 & 4 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 7 & 2 & 4 & 3\\ 4 & 5 & 6 & 8\end{pmatrix}\end{array}$$

- норма расходов сырья для выпуска П=(50 45 30 20) – продукции четырех видов.

Требуется: вычислить объем сырья для выпуска П четырех видов по плану П.
Q_1 - для I вида П, Q_2 - для II вида П, Q_3 - для III вида III, Q_4 - для IV вида IV

Решение:

$$П\cdot A=\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\\ Q_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50 & 45 & 30 & 20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 7 & 2 & 4 & 3\\ 4 & 5 & 6 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\cdot2+45\cdot1+30\cdot7+20\cdot4\\ 50\cdot4+45\cdot2+30\cdot2+20\cdot5\\ 50\cdot3+45\cdot3+30\cdot4+20\cdot6\\ 50\cdot6+45\cdot4+30\cdot3+20\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}435\\ 450\\ 525\\ 730\end{pmatrix}$$

Ответ: Q_1=435, Q_2=450, Q_3=525, Q_4=730.

<u>Задание №2</u>

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}c_1 & c_2\end{array}\\ \begin{array}{c}I\\ II\\ III\end{array} & \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}\end{array}$$

-Из двух видов сырья готовят три вида продукции, если план $B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$ - ценовая матрица сырья.

Требуется: вычислить объем сырья для подготовки продукции трех видов по плану.

Решение:

$$B\cdot(A\cdot C)=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}\cdot(\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}c_1+a_{12}c_2\\ a_{21}c_1+a_{22}c_2\\ a_{31}c_1+a_{32}c_2\end{pmatrix}$$

$$=b_1(a_{11}c_1+a_{12}c_2)+b_2(a_{21}c_1+a_{22}c_2)+b_3(a_{31}c_1+a_{32}c_2)$$

P.S. Задавая a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} различные значения можно составить 10 вариантов заданий.

<u>Задание№3</u>

За сутки производство производит четыре вида продукции П. Их производственные и экономические показатели:

Виды П	Объем	Сырье (кг.) для выпуска единицы П	Время (часы) для выпуска единицы П	Цена (тенге) единицы П
1	30	4	20	60
2	60	6	15	40
3	40	5	8	50
4	50	7	10	30

В виде матрицы: $\begin{pmatrix}30 & 4 & 20 & 60\\ 60 & 6 & 15 & 40\\ 40 & 5 & 8 & 50\\ 50 & 7 & 10 & 30\end{pmatrix}$

Требуется найти:

1) S - объем сырья для выпуска четырех видов П;
2) T - время;
3) P - цена (сумарная).

Решение:

Анализ условия:

Матрица объема планируемой П четырех видов для выпуска: $q=\begin{pmatrix}30 & 60 & 40 & 50\end{pmatrix}$

Матрица объема сырья для выпуска единицы П: $s=\begin{pmatrix}4 & 6 & 5 & 7\end{pmatrix}$

Матрица времени для выпуска единицы П: $t=\begin{pmatrix}20 & 15 & 8 & 10\end{pmatrix}$

Ценовая матрица единицы П: $p=\begin{pmatrix}60 & 40 & 50 & 30\end{pmatrix}$

1) $S=q\cdot s=\begin{pmatrix}30 & 60 & 40 & 50\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 6\\ 5\\ 7\end{pmatrix}=30\cdot 4+60\cdot 6+40\cdot 5+50\cdot 7=1030(\text{кг})$

2) $T=s\cdot t=\begin{pmatrix}4 & 6 & 5 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}20\\ 15\\ 8\\ 10\end{pmatrix}=4\cdot 20+6\cdot 15+5\cdot 8+7\cdot 10=2320(\text{ч})$

3) $P = s \cdot p = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = 4 \cdot 60 + 6 \cdot 40 + 5 \cdot 50 + 7 \cdot 30 = 7700$ (тенге)

Ответы: 1) $S = 1030$ кг, 2) $T = 2320$ часов, 3) $P = 7700$ тенге.

Задание №4

Две отрасли I и II выступают и как производители и как потребители и преследовали цель, чтобы добиться остаточной продукции .

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}10 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 72 \\ 123 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Требуется: Найти общий объем продукции X для поставленной цели.

Решение:

$X = AX + Y$, где A - часть продукции i-ой отрасли для подготовки единичной продукции j-ой отрасли.

Тогда $X - AX = Y \;\Rightarrow\; X(E - A) = Y \;\Rightarrow\; X = (E - A)^{-1} Y$

1) $E - A = \begin{pmatrix} 0{,}93 & -0{,}14 \\ -0{,}12 & 0{,}9 \end{pmatrix} \Rightarrow |E - A| = 0{,}93 \cdot 0{,}9 - (-0{,}14)(-0{,}12) = 0{,}8202$

2) $X = (E - A)^{-1} Y = \dfrac{1}{0{,}8202} \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}12 \\ 0{,}14 & 0{,}93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 72 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$

Ответ: Для того, чтобы получить конечную продукцию $y_1 = 72$, $y_2 = 123$ необходимо произвести $x_1 = 100$, $x_2 = 150$ единицы продукции.

Задание №5

При той же матрице прямых затрат отраслей A и при $Y_{новая} = \begin{pmatrix} 72 \cdot 2 \\ 123 \end{pmatrix}$ требуется найти общий объем продукции $X_{новая}$?

Решение:

$$X_{новая} = \frac{1}{0{,}8202} \begin{pmatrix} 0{,}9 \cdot 144 + 0{,}12 \cdot 123 \\ 0{,}14 \cdot 144 + 0{,}93 \cdot 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 176 \\ 164 \end{pmatrix}$$

P.S

1. Меняя X или Y при неизмененном A можно составить еще 7 вариантов.

Необходимые формулы:

$X = (E - A)^{-1} Y$, при известном Y

$Y = (E - A)^{-1} X$, при известном X

Задание №6

Дана матрица прямых затрат сырья для подготовки единицы П трех видов.

$$\begin{array}{r|c} \textbf{П} & c_1 \quad c_2 \quad c_3 \;\; \textbf{- C} \\ \hline A = \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \end{array}$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - количественная матрица П за один день

$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$- матрица сырья на один день для подготовки П трех видов.

Требуется:

Найти X - количество продукции, выпускаемой за один день.

Решение:

Необходимо решить систему уравнений $AX = B$, т.е систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Прежде чес решить систему необходимо исследовать условие существования решения.

Например, а) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right)$, б) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right)$, в) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

а) имеет единственное решение, т.е. $r(A) = r(\overline{A})$;

б) решения нет $r(A) \neq r(\overline{A})$;

в) имеет бесконечное множество $r(A) = r(\overline{A}) < 3$

Например:

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2700 \\ 900 \\ 160 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 160 \end{cases}$$

Решая эту систему одним из выше указанных методов, получим

$x_1 = 200$, $x_2 = 300$, $x_3 = 200$

Задание №7

Найти соотношение цен трех товаров, если наборы товаров $x_1(6{,}2{,}4)$, $x_2(1{,}8{,}9)$, $x_3(3{,}5{,}9)$ имеют одинаковую стоимость.

Решение: p_1, p_2, p_3 - цены этих трех товаров. По условию задачи:

$$6p_1 + 2p_2 + 4p_3 = p_1 + 8p_2 + 9p_3 = 3p_1 + 5p_2 + 9p_3 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} I - II \\ I - III \\ III - II \end{array} \begin{cases} 5p_1 - 6p_2 - 5p_3 = 0 \\ 3p_1 - 3p_2 - 5p_3 = 0 \quad (I - II) \Rightarrow 2p_1 - 3p_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2p_1 = 3p_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 3C, \; p_2 = 2C \\ 2p_1 - 3p_2 = 0 \end{cases}$$

Из $II \;\Rightarrow\; 3 \cdot 3C - 3 \cdot 2C - 5p_3 = 0 \quad \Rightarrow \; 3C = 5p_3 \quad \Rightarrow \quad p_3 = \dfrac{3C}{5}$

Для того, чтобы освободиться от знаменателя, вместо C возьмем $5C$.
Тогда $p_1 = 15C$, $p_2 = 10C$, $p_3 = 3C \Rightarrow (p_1 : p_2 : p_3) = (15:10:3)$

§1.5 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП)

СРСП 1

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 11 & N \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 21 & 4 \\ N1 & 7 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 13 & 5 \\ N-1 & x \end{vmatrix} = 0$

4. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & N & 8 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & N \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & x \\ x & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

7. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ -N & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -4 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & N \\ -4 & 2 & 9 & 7 \\ 5 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

9. Найти минор M_{23}, M_{13}, M_{43} из определителя $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -4 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & N \\ -4 & 2 & 9 & 7 \\ 5 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

СРСП 2

1. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5-N & 7 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1-N & -6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

2. $7X - 2Y + E$, где $X = \begin{pmatrix} N & N & 2 \\ -5 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & N \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 5 & N & 0 \\ 7 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

5. Найти обратную матрицу: $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -1 \\ 6 & N & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

6. Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \\ 11 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & N & -1 \\ 6 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

СРСП 3

Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить тремя способами:

1) методом Гаусса;

2) средствами матричного исчисления;

3) методом Крамера.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

§ 1.6 Самостоятельная работа студента (СРС)

СРС1

Элементы теории определителей

1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; 4) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$;

5) $\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$; 6) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$; 7) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$; 8) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$.

3. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0$; 3) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5$; 4) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$.

4. Вычислить определители третьего порядка:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & ctg\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\alpha \\ ctg\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

5. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

6. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

7. Вычислить определители 4-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -c \\ b & c & 0 & 0 \\ d & b & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

8. Используя свойства определителей, не раскрывая их, докажите:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} \beta b_1 + \gamma c_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2 + \gamma c_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3 + \gamma c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

СРС 2

Элементы теории матриц

1. Найти обратную матрицу:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; 7. $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \\ -2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} -6 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 8 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 11. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; 12. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$;

13. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; 14. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 15. $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; 16. $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

17. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 18. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; 19. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 20. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Определить ранг матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; 5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Найти произведение матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \\ -2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

СРС 3

Системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Решить систему уравнений методом Крамера и матричным методом:

1. $\begin{cases} -x+2y+z=5 \\ 2x-3y+3z=1 \\ y-5z=-9 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} -2y-5z=-12 \\ -2x-y+3z=7 \\ -x+y+z=4 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} -3x+y+3z=10 \\ -2y-z=-4 \\ 2x-y+3z=3 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} -x+2z=5 \\ 2x+2y+5z=10 \\ 3x-2y+2z=-1 \end{cases}$;
5. $\begin{cases} 2x-y-6z=-15 \\ 3x-y+z=-2 \\ -x+3z=7 \end{cases}$;
6. $\begin{cases} -x+y-z=0 \\ 3x-4y+3z=-1 \\ -2y-3z=-8 \end{cases}$;
7. $\begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ -x+3z=7 \\ x+y+3z=6 \end{cases}$;
8. $\begin{cases} 3x-2y=-5 \\ x-2y+z=-1 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$;
9. $\begin{cases} x-3y+z=-2 \\ x-2y-4z=-11 \\ -2x-y=1 \end{cases}$;
10. $\begin{cases} -x+3y=4 \\ 3x-2y+z=-3 \\ 2x+y-z=-3 \end{cases}$;
11. $\begin{cases} 4x+7y-3z=-10 \\ 2x+9y-z=8 \\ -x+6y-3z=3 \end{cases}$;
12. $\begin{cases} x-5y+3z=-1 \\ 2x+4y+z=6 \\ -3x+3y-7z=-13 \end{cases}$;
13. $\begin{cases} 2x+4y-3z=-10 \\ -x+5y-2z=5 \\ 3x-2y+4z=3 \end{cases}$;
14. $\begin{cases} -2x+5y-6z=-8 \\ x+7y-5z=-9 \\ 4x+2y-z=-12 \end{cases}$;
15. $\begin{cases} -3x+5y-6z=-5 \\ 2x-3y+5z=8 \\ x+4y-z=1 \end{cases}$;
16. $\begin{cases} 3x-9y+8z=5 \\ 2x-5y+5z=4 \\ 2x-y+z=-4 \end{cases}$;
17. $\begin{cases} x+3y-2z=-5 \\ x+9y-4z=-1 \\ -2x+6y-3z=6 \end{cases}$;
18. $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 4x-y+5z=6 \\ x-2y+4z=9 \end{cases}$;
19. $\begin{cases} -2x+y-3z=-4 \\ 4x+7y-2z=-6 \\ x-8y+5z=1 \end{cases}$;
20. $\begin{cases} x+7y-2z=3 \\ 3x+5y+z=5 \\ -2x+5y-5z=-4 \end{cases}$.

Глава 2
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§2.1 Векторы

Величины, с которыми приходиться встречаться в механике, физике и других прикладных дисциплинах, бывают двух видов:
1) величины, характеризующиеся своим числовым значением в выбранной системе единиц, называемые скалярными величинами или скалярами (температура, длина, время, площадь, объем, плотность и др.);
2) величины, которые кроме числового значения обладают также и направлением в пространстве, называемые векторами (сила, скорость, ускорение и др.).
Всякую векторную величину геометрически мы можем изобразить в пространстве с помощью отрезка определенной длины и определенного направления в пространстве.
Определение. Отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление, называется *вектором.*
Вектор служит для геометрического изображения физической векторной величины.
Определение. Два вектора называются *равными*, если выполнены следующие три условия:
1) длины векторов равны;
2) векторы *коллинеарны,* т.е. расположены на одной прямой или параллельных прямых;
3)векторы направлены в одну сторону.
Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному.

Над векторами определены следующие простейшие операции: сложение, вычитание и умножение вектора на число. Эти операции непосредственно связаны с соответствующими операциями над векторными величинами в механике.

1. Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, выходящий из их общего начала, который по величине и направлению изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (правило параллелограмма) (рис. 2.1).

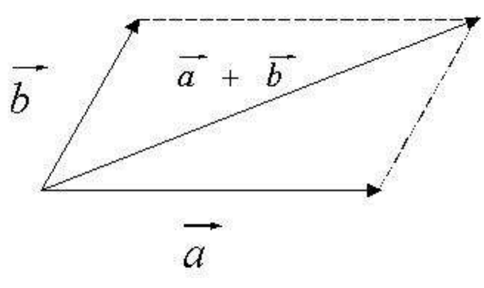


рис.2.1

Наряду с правилом параллелограмма используется равносильное ему правило треугольника: суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, который выходит из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 2.2).

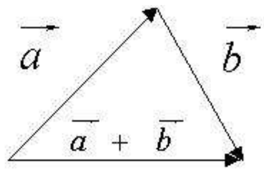


рис.2.2

Сложение нескольких векторов производится при помощи последовательного применения правила треугольника. На рис. 2.3 представлено построение суммы пяти векторов: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$.

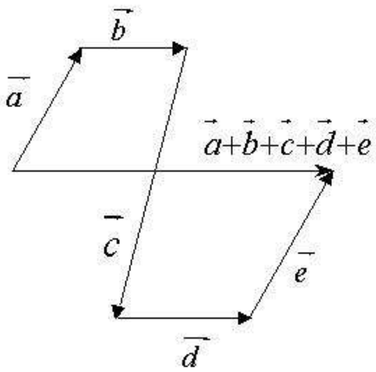


рис.2.3

2. <u>Разностью</u> $\vec{a}-\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$. Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу, то разность $\vec{a}-\vec{b}$ есть вектор, идущий из конца вектора $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 2.4).

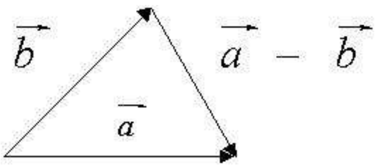


рис.2.4

3. <u>При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ</u> длина вектора умножается на $|\lambda|$, направление сохраняется при $\lambda > 0$ и заменяется противоположным при $\lambda < 0$.

Операции сложения векторов и умножения векторов на число подчиняются законам:

1. закон переместительности (коммутативный): $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, т.е. сумма не зависит от порядка слагаемых

2. закон сочетательности (ассоциативный): $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, т.е. чтобы прибавить сумму, можно прибавить последовательно каждое слагаемое

3. распределительный (дистрибутивный) закон: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\lambda=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

Отметим еще, что из определения умножения вектора на число вытекает справедливость равенств:

$$\vec{a}(\lambda_1+\lambda_2)=\vec{a}\lambda_1+\vec{a}\lambda_2$$

$$\vec{a}(\lambda_1)\lambda_2=(\vec{a}\lambda_2)\lambda_1=\vec{a}(\lambda_1\lambda_2)$$

Определение: *Проекцией* вектора $\vec{a}=AB$ на ось (направленная прямая) l называется длина отрезка A_1B_1 между основаниями перпендикуляров, опущенных из точек А и В на ось l; причем эта длина берется со знаком (+) или (-) в зависимости от того: пройдет ли отрезок A_1B_1 в направлении оси или в противоположном направлении. Проекция обозначается $пр_l\vec{a}$.

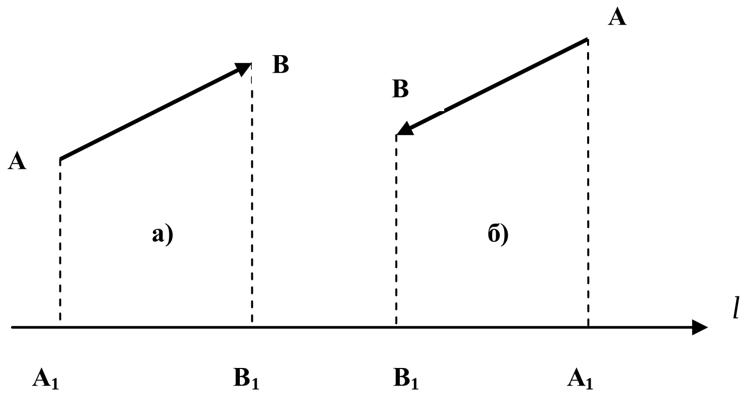


рис. 2.5

Основные свойства проекций

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось (направленная прямая) l равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на косинус угла между вектором и осью:

$$пр_l\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi,$$

где φ - угол между вектором и осью.

Равные векторы имеют равные проекции на ту же ось.

2. При параллельном переносе вектора его проекция не меняется.
3. Проекция равна нулю тогда и только тогда, когда вектор перпендикулярен к оси.
4. Проекция суммы равна сумме проекций.
5. Скалярный множитель можно вынести за знак проекции.

Определение. Вектор $\vec{d}$, представленный в виде $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+...+\gamma\vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$,…, $\vec{c}$ - различные векторы, $\alpha,\beta,...,\gamma$ - некоторые скаляры, называется *линейной комбинацией векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$,…, $\vec{c}$. Говорят также, что вектор $\vec{d}$ линейно выражается через $\vec{a}$, $\vec{b}$,…, $\vec{c}$, т.е. получается из них с помощью линейных действий. Заданные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$,…, $\vec{c}$ называются линейно зависимыми, если какой-либо из этих векторов линейно выражается через остальные. В противном случае эти вектора называются линейно независимыми между собой.

Определение. Линейная комбинация нескольких векторов называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю. Тривиальная линейная комбинация любых векторов равна нулю. Линейная комбинация не тривиальна, если хоть один из ее коэффициентов отличен от нуля.

Определение. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\ldots, \vec{d}$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация векторов этих, равная нулю. Иными словами, существуют такие числа $\alpha, \beta, \gamma, ..., \mu$, не все равные нулю, что имеет место равенство $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + ... + \mu\vec{d} = 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + ... + \mu^2 \neq 0$.

Если векторы линейно независимы, то из равенства $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + ... + \mu^2 = 0$ следует $\alpha = \beta = \gamma = ... = \mu = 0$

Заметим:

Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они *коллинеарны;*

Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они *компланарны* (параллельны одной и той же плоскости);

Четыре вектора (и более) всегда линейно зависимы в трехмерном пространстве.

Следовательно, наибольшее число линейно независимых векторов в пространстве равно трем, на плоскости таких векторов два, а на прямой линии – один.

А наибольшее число независимых векторов в n-мерном пространстве равно n, и (n+1) вектора в n-мернои пространстве будут всегда линейно зависимы

Определение. Совокупность линейно независимых векторов, через которые линейно выражается любой вектор пространства, называется *базисом* этого пространства.

Векторы, составляющие базис пространства, называются базисными. Базис называется *ортонормированным,* если его векторы попарно ортогональны и по длине равны единице.

Определение. Три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке, называют базисом в пространстве. Два неколлинеарных вектора, взятых в определенном порядке, называют базисом на плоскости.

Наибольшее число линейно независимых векторов пространства называется размерностью этого пространства.

В соответствии с этим прямую линию обычно называют одномерным пространством, плоскость является двумерным пространством, а обычное пространство – трехмерным.

§2.2 Системы координат

1. Аффинная система координат
2. Декартова система координат
3. Полярная система координат

Пусть дана тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, отнесенных к общему началу в некоторой точке O, принятой за начало координат. Если выбрано начало координат, то положение произвольной точки M в пространстве полностью характеризуется вектором $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, называемым *радиус-вектором* точки M. Так как три вектора некомпланарны, то приняв их за базис, можно представить $\vec{r} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$.

Таким образом, положение точки М характеризуется набором чисел λ, μ, ν, называемых *аффинными координатами* точки М.

Если векторы, принятые за основу системы координат, все имеют единичную длину и взаимно перпендикулярны, то система координат называется *декартовой*. В этом случае основные векторы (декартов базис) принято обозначать буквами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Сами декартовы координаты принято обозначать буквами x, y, z. Тогда $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Полярная система координат определена, если задана точка «О», называемая полюсом, и исходящий из полюса луч l, который называется полярной осью. Положение точки М фиксируется двумя числами: радиусом $r = \overrightarrow{OM}$ и углом между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$. На рис.2.6 изображена полярная система координат. Угол φ называется полярным углом. Он измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки.

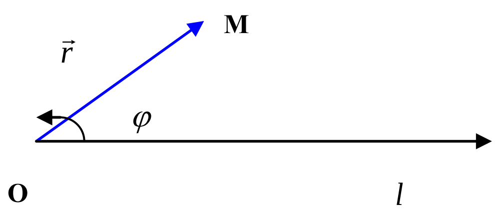


рис.2.6

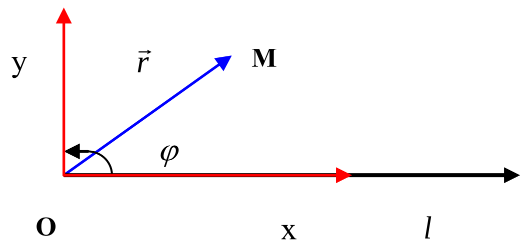


рис. 2.7

Пусть задана полярная система координат и упорядоченная пара чисел (r, φ), первое из которых неотрицательно. Тогда этой паре можно сопоставить точку, для которой эта пара чисел будут *полярными координатами.*

Если мы наложим на полярную систему координат декартову ось Ох, где начало О совпадет с полюсом О, отмерим 90^0 от оси Ох и проведем перпендикулярную ось ОУ, то точка М будет находится одновременно и в полярной и декартовой системах координат (рис.2.7). Тогда декартовы координаты точки М выразятся через ее полярные координаты:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

Рассмотрим Декартову прямоугольную систему координат и зададим произвольную точку M трехмерного пространства (рис. 2.8).

Вектор $\overrightarrow{OM}$ является радиус-вектором точки M. Из точки М проведем прямую, параллельную оси OZ, до пересечения в точке P с плоскостью XOY и из точки P проведем прямую параллельно оси OY до пересечения в точке M_1 с осью OX. Очевидно, будем иметь $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM}$. Откладывая векторы $\overrightarrow{M_1P}$ и $\overrightarrow{PM}$ от точки 0, заменяя их равными им векторами $\overrightarrow{M_1P} = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM_3}$ будем иметь $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$.

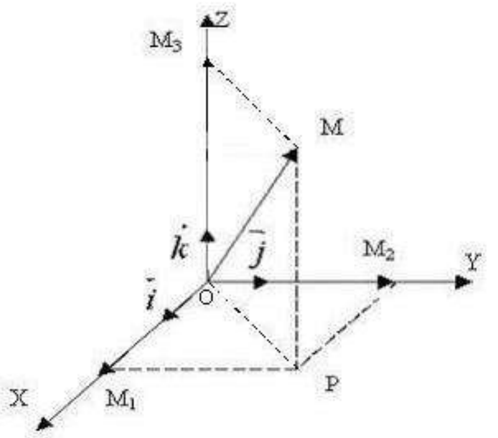


рис.2.8

Это равенство показывает, что всякий вектор можно разложить на три слагаемых вектора, лежащих на осях координат. Векторы $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}$ называются компонентами или составляющими данного вектора $\overrightarrow{OM}$. От точки 0 – начала координат в положительном направлении каждой оси координат отложим по вектору длины, равной единице. Обозначим три введенных попарно взаимно ортогональных единичных вектора соответственно через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и назовем их основными векторами. Вектор $\overrightarrow{OM_1}$, как и вектор $\vec{i}$, расположен на оси абсцисс, а поэтому имеем $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$, где x есть число, являющееся проекцией вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось абсцисс. Аналогично, имеем $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$, где y,z – проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ соответственно на оси ординат и аппликат.

Таким образом, равенство $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$ перепишется в виде

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Значение этого равенства в теории векторов исключительно большое. При помощи этого равенства устанавливается связь между геометрической и алгебраической частями теории векторов. Взаимно дополняя друг друга, они создают то, чем так выгодно отличается векторная алгебра: геометрическая теория дает возможность широко использовать геометрические представления, алгебраическая часть позволяет производить все выкладки. Вместо полной записи $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ часто пользуются сокращенной $\overrightarrow{OM} = \{\ x, y, z\ \}$ или $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$.

Применяя предложение о том, что проекция суммы векторов на любую ось равна сумме проекций этих векторов относительно каждой оси координат, мы заключаем: при сложении векторов одноименные проекции их складываются. Из правила сложения векторов вытекает правило вычитания векторов: чтобы вычесть вектор, нужно вычесть его проекции.

Запишем это так, если $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2)\vec{i} + (y_1 \pm y_2)\vec{j} + (z_1 \pm z_2)\vec{k}$$

Аналогично, чтобы умножить вектор на число, нужно умножить все его проекции на это число.

§2.3 Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин (модулей), умноженному на косинус угла между ними.
Скалярное произведение принято обозначать одним из трех способов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\vec{b}=(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Согласно определению имеем $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определение. Заметив, что $|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$ есть проекция вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$, мы можем записать $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}$. Аналогично, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$. Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию другого вектора на первый.

Определение. Если вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a}=\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=\vec{b}(b_x,b_y,b_z)$, то скалярное произведение их определяется формулой: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

<u>Например,</u> a_x-тенге, a_y-фунты, a_z-франки, $\vec{a}$- валютный вектор;

1 тенге - b_x руб., 1 фунт - b_y руб., 1 франк - b_z руб., $\vec{b}$ - вектор обменных курсов валют; тогда, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ - сумма в рублях.

<u>Основные свойства скалярного произведения</u>

1. *Модуль (длина)* вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его проекций, т.е. $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

2. *Условие перпендикулярности векторов*

Скалярное произведение равно нулю в том и только в том случае, когда векторы перпендикулярны, т.е $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ или
Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

3. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

4. Скалярное произведение коммутативно (переместительный закон)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

5. Скалярное произведение дистрибутивно (распределительный закон)

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

6. Скалярное произведение ассоциативно (сочетательный закон)

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$$

7. Косинус угла между векторами равен их скалярному произведению, деленному на произведение модулей:

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \quad \text{или} \quad \cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

8. Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$\cos\alpha = \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,x) = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,y) = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,z) = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

причем $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Следовательно, $\vec{a}_0\{\cos\beta, \cos\beta, \cos\gamma\}$ - единичный вектор по направлению $\vec{a}$.

§2.4 Векторное произведение векторов

Определение. *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется новый третий вектор $\vec{c}$, обозначаемый символом $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ или $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий следующим трем условиям:

1.модуль вектора $\vec{c}$ равен $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

2. вектор $\vec{c}$ ортогонален (перпендикулярен) векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3. вектор $\vec{c}$ относительно векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлен так же, как координатная ось OZ относительно координатных осей OX и OY. (т.е. так, что кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ представлялся происходящим против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\vec{c}$ (рис.2.9).

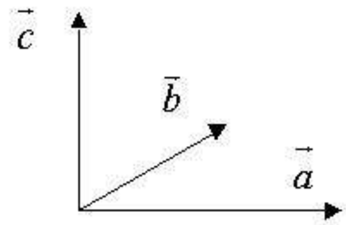


рис. 2.9

Определение. Если вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = \vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = \vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, то векторное произведение их определяется формулой:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Тогда, на основании теоремы о разложении определителя по строке или столбцу с помощью миноров и алгебраических дополнений, получим:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

<u>Заметим,</u> что координатные формы произведений двух векторов доказываются простым вычислением с учетом

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 0$ при скалярном произведении,

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ и наоборот $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$ при векторном произведении.

<u>Свойства векторного произведения</u>

1. Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$S_{парал}= |\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$$

В частности, площадь треугольника равна $S_{тр} = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}\times\vec{b}|$

Если в пространстве заданы два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих общее начало, то площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, может быть найдена через их компонентов в ортонормированном базисе по формуле:

$$S_{парал}=|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}$$

$$S_{тр} = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}$$

2. <u>Условие параллельности двух векторов.</u>

Векторное произведение равно нулю в том и только в том случае, если вектора параллельны, т.е

$$\vec{a}\times\vec{b} = 0, \text{ если } \vec{a}\,//\,\vec{b},$$

так как параллельность векторов означает вырождение параллелограмма в отрезок, площадь которого равна нулю.

В частности, $\vec{a}\times\vec{a} = 0$.

Если вектора заданы своими координатами, то условие коллинеарности : $\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0$ или $\frac{a_x}{a_y} = \frac{a_y}{a_z} = \frac{a_x}{a_z} = \frac{b_x}{b_y} = \frac{b_y}{b_z} = \frac{b_x}{b_z}$

3. Векторное произведение антикоммутативно $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\times\vec{a}\right]$

4. Векторное произведение ассоциативно (закон сочетательности), т.е.

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$$

5. Векторное произведение дистрибутивно (распределительный закон), т.е.

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$$

§2.5 Смешанное произведение векторов

Выясним, что можно сказать о произведении трех векторов. Если мы умножим скалярно вектор $\vec{a}$ на $\vec{b}$, то получим число (скаляр). При умножении этого числа на третий вектор $\vec{c}$ получим вектор, коллинеарный вектору $\vec{c}$. Совсем иное будет дело, если вектор $\vec{a}$ умножим векторно на вектор $\vec{b}$, в результате которого получим новый вектор $\vec{a}\times\vec{b}$. Представляется интересным исследовать произведения, как скалярное, так и векторное, этого вектора на вектор $\vec{c}$. В первом случае будем иметь векторно-скалярное произведение $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$, а во втором случае – двойное векторное произведение $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$.

Определение. Векторно-скалярное произведение $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ называется также *смешанным произведением трех векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и обозначается $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Определение. Если вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами: $\vec{a}=\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=\vec{b}(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=\vec{c}(c_x,c_y,c_z)$, то смешанное произведение их определяется формулой:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Уясним геометрический смысл смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

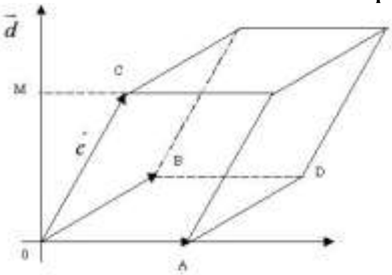


рис. 2.10

Пусть рассматриваемые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны.

Векторное произведение $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ есть вектор, по длине численно равный площади параллелограмма OADB, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, и направленный перпендикулярно к плоскости параллелограмма (рис.2.10). Скалярное произведение $\vec{d}\cdot\vec{c}=\left|\vec{d}\right|\cdot np_{\vec{d}}\vec{c}$. Проекция вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$ перпендикулярная к плоскости параллелограмма OADB, равна расстоянию точки C (конец вектора $\vec{c}$) от плоскости этого параллелограмма, взятому со знаком (+) или (-). Построим параллелепипед на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ как на ребрах. Высота этого параллелепипеда есть абсолютная величина проекции вектора $\vec{c}$, а площадь основания (параллелограмма OADB) численно равна длине вектора $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Итак, смешанное произведение $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ по абсолютной величине равно объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях, как на ребрах.

Некоторые свойства смешанного произведения трех векторов

1. При цикличнской перестановке множителей смешанное произведение не меняется, т.е. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

2. Условие компланарности трех векторов

Смешанное произведение трех векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти вектора компланарны

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=0 \Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны (лежат в одной плоскости).

Действительно, такая компланарность означает, что параллелепипед вырождается в часть плоскости, т.е. имеет нулевой объем.

или

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов, заданных своими координатами, является равенство нулю определителя третьего порядка, составленного из координат этих векторов.

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

3. Так как объем параллелепипеда, построенного на трех векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ определяется по формуле:

$$V_{параллел} = \left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|,$$

то объем треугольной пирамиды равен 1/6 модуля смешанного произведения

$$V_1 = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|$$

Объем четырехугольной пирамиды равен 1/3 объема параллелепипеда

$$V_2 = \frac{1}{3}\left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|$$

Примеры: 1. Даны: A(3;-2), B(4,1)

Найти: а) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, б) направляющие косинусы

Решение:

а) $\overrightarrow{AB} = \left(4-3, 1-(-2)\right) = (1,3)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

б) $\vec{a}_0\{\cos\beta, \cos\beta\}$- единичный вектор по направлению $\overrightarrow{AB}$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Ответ: а) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{10}$, б) направляющие косинусы $\{\cos\beta, \cos\beta\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right\}$.

2. Найти скалярное, векторное и смешанное произведения

$\vec{a}(-1;3;-5)$, $\vec{в}(2;3;-1)$, $\vec{c}(2;-6;-4;)$

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1\cdot 2 + 3\cdot 3 + (-5)\cdot(-1) = 12$

2) $$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 11\vec{j} - 9\vec{k}$$

3) $$(\overrightarrow{abc}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 12 + 60 - 6 + 30 + 6 + 24 = 126$$

§2.6 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП)

СРСП 4

1-10. Даны векторы a $(a_1; a_2; a_3)$, b $(b_1; b_2; b_3)$, c $(c_1; c_2; c_3)$ и d $(d_1; d_2; d_3)$ в некотором базисе. Найти скалярные произведения ab, cd; векторные произведения bc, ad; смешанное произведение abc и придать полученным результатам эконоический смысл.

1. a (1; 2; 3), b (-1; 3; 2), c (7; -3; 5), d (6; 10; 17).
2. a (4; 7; 8), b (9; 1; 3), c (2; -4; 1), d (1; -13; -13).
3. a (8; 2; 3), b (4; 6; 10), c (3; -2; 1), d (7; 4; 11).
4. a (10; 3; 1), b (1; 4; 2), c (3; 9; 2), d (19; 30; 7).
5. a (2; 4; 1), b (1; 3; 6), c (5; 3; 1), d (24; 20; 6).
6. a (1; 7; 3), b (3; 4; 2), c (4; 8; 5), d (7; 32; 14).
7. a (1; -2; 3), b (4; 7; 2), c (6; 4; 2), d (14; 18; 6).
8. a (1; 4; 3), b (6; 8; 5), c (3; 1; 4), d (21; 18; 33).
9. a (2; 7; 3), b (3; 1; 8), c (2; -7; 4), d (16; 14; 27).
10. a (7; 2; 1), b (4; 3; 5), c (3; 4; -2), d (2; -5; -13).

11-20. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды;

11. A_1 (4; 2; 5), A_2 (0; 7; 2), A_3 (0; 2; 7), A_4 (1; 5; 0).
12. A_1 (4; 4; 10), A_2 (4; 10; 2), A_3 (16; 8; 4), A_4 (9; 6; 4).
13. A_1 (4; 6; 5), A_2 (6; 9; 4), A_3 (2; 10; 10), A_4 (7; 5; 9).
14. A_1 (3; 5; 4), A_2 (8; 7; 4), A_3 (5; 10; 4), A_4 (4; 7; 8).
15. A_1 (10; 6; 6), A_2 (-2; 8; 2), A_3 (6; 8; 9), A_4 (7; 10; 3).
16. A_1 (1; 8; 2), A_2 (5; 2; 6), A_3 (5; 7; 4), A_4 (4; 10; 9).
17. A_1 (6; 6; 5), A_2 (4; 5; 9), A_3 (4; 6; 11), A_4 (6; 9; 3).
18. A_1 (7; 2; 2), A_2 (5; 7; 7), A_3 (5; 3; 1), A_4 (2; 3; 7).
19. A_1 (8; 6; 4), A_2 (10; 5; 5), A_3 (5; 6; 8), A_4 (8; 10; 7).
20. A_1 (7; 7; 3), A_2 (6; 5; 8), A_3 (3; 5; 8), A_4 (8; 4; 1).

Глава 3
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§3.1 Простейшие задачи аналитической геометрии

3.1.1 Проекция отрезка на ось

Пусть задан некоторый отрезок M_1M_2 и ось l. Опустим перпендикуляры на ось из точек. Обозначим их основания через P_1 и P_2, которые являются проекциями конца и начала отрезка M_1M_2.(рис.3.1)

Определение. Величина отрезка P_1P_2 оси и называется *проекцией отрезка* M_1M_2 на ось l и символически записывается

$$np_l\overrightarrow{M_1M_2} = P_1P_2$$

Проекция отрезка на ось может быть положительным, отрицательным или нулю.

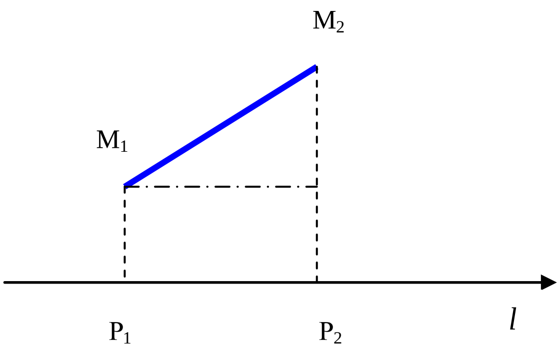


рис.3.1

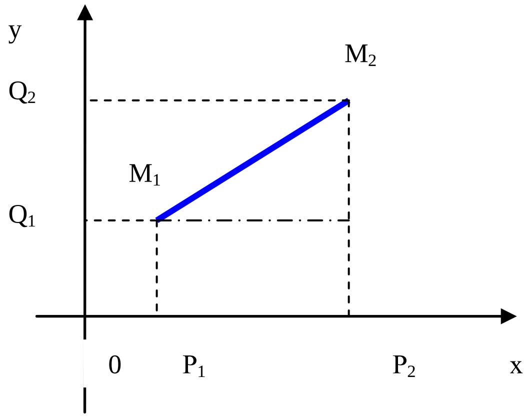


рис.3.2

3.1.2 Проекция отрезка на координатные оси

Теорема. Каковы бы не были точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, проекции отрезка M_1M_2 на координатные оси выражаются формулой

$$x = x_2 - x_1$$
$$y = y_2 - y_1$$

Таким образом, $M_1M_2\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$(рис.3.2)

3.1.3 Задача определения расстояния между двумя точками

Как бы ни были расположены на плоскости точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, расстояние d между ними определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Доказательство: Рассмотрим треугольник M_1M_2N.(рис.3.3) По теореме Пифагора имеем $d = \sqrt{|M_1N|^2 + |M_2N|^2}$.

$|M_1N| = x_2 - x_1 = x$, $|M_2N| = y_2 - y_1 = y$. Отсюда и получается $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

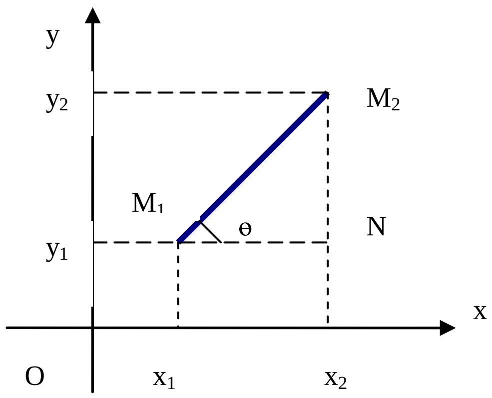


рис. 3.3

Пример:

Найти расстояние между точками: $M_1(3,-7)$ и $M_2(5,8)$.

$d=\sqrt{(5-3)^2+(8-(-7))^2}=\sqrt{4+225}=\sqrt{229}$

3.1.4 Задача вычисления полярного угла отрезка

Рассмотрим отрезок M_1M_2. Через его начальную точку M_1 проведем луч l, параллельный оси Ox и сонаправленный с ней. Обозначим через θ - угол, на который нужно повернуть луч, чтобы он направился по отрезку M_1M_2. Угол θ - называется полярным углом отрезка M_1M_2 относительно данных координатных осей. Тогда в полярной системе координат , полюсом которой является точка M_1, а полярной осью – луч l, угол θ представляет собой полярный угол точки M_2, а длина d этого отрезка есть полярный радиус точки M_2.

Обозначим:

$M_1N=x$, $M_2N=y$. Тогда $x=d\cos\theta$, $y=d\sin\theta$. Отсюда $x_2-x_1=d\cos\theta$, $y_2-y_1=d\sin\theta$. $\Rightarrow$ $\cos\theta=\dfrac{x_2-x_1}{d}$, $\sin\theta=\dfrac{y_2-y_1}{d}$.

$tg\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ - это формула для вычисления полярного угла отрезка.

3.1.5 Задача вычисления площади треугольника через координаты его вершин

Пусть даны три точки $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ не лежащие на одной прямой. Выведем формулу для вычисления площади S треугольника ABC.

Обозначим через φ - угол между отрезками AB и AC, а их длины $|AB|=d_1$, $|AC|=d_2$. Тогда площадь треугольника ΔABC выражается формулой, известной из элементарной геометрии:

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$

Обозначим через θ_1 и θ_2 - полярные углы отрезков AC и AB соответственно. Тогда имеем $\varphi=\pm(\theta_2-\theta_1)$ для обеих случаев месторасположения B и C.

Итак: $S=\pm\frac{1}{2}d_1d_2\sin(\theta_2-\theta_1)=\pm\frac{1}{2}d_1d_2(\sin\theta_2\cos\theta_1-\cos\theta_2\sin\theta_1)$

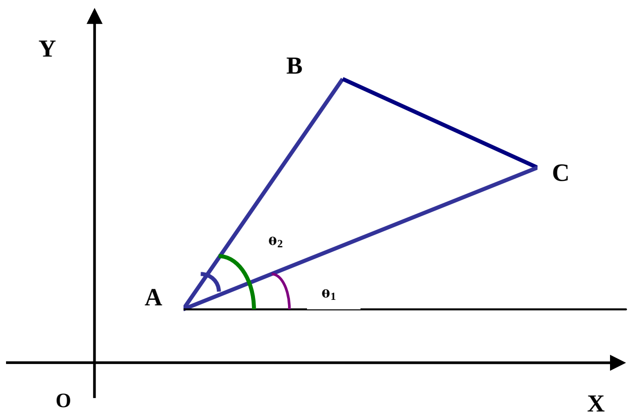


рис.3.4

Обозначим проекции отрезков AB и AC на координатные оси, соответственно $AB = \{x, y\}$, $AC = \{x', y'\}$. Тогда из предыдущей темы имеем:

$x = d_1 \cos\theta_1, \quad y = d_1 \sin\theta_1$

$x' = d_2 \cos\theta_2 \quad y' = d_2 \sin\theta_2$ Отсюда $S = \pm\frac{1}{2}(xy' - x'y)$, где

$x_2 - x_1 = x, \quad y_2 - y_1 = y$

$x_3 - x_1 = x', \quad y_3 - y_1 = y'$ или $S = \pm\frac{1}{2}[\ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\ ]$

или $S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$

<u>Пример:</u>

Найти длину высоты СК треугольника с вершинами в точках $A(-1{,}2)$, $B(5{,}6)$, $C(1{,}3)$.

Решение: Известно, что $S = \frac{1}{2}ah \quad \Rightarrow \ h = \frac{2S}{a}$

Пусть $|CK| = h$, $|AB| = a$. Тогда $|AB| = \sqrt{(5+1)^2 + (6-2)^2} = 2\sqrt{13}$

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{2}(-2)\right| = 1 \quad \Rightarrow h = \frac{2S}{a} = \frac{2}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

Ответ: $|CK| = \frac{\sqrt{13}}{13}$ единиц.

<u>3.1.6 Задача о делении отрезка в данном отношении</u>

Пусть на плоскости даны две различные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и прямая, проходящая через эти точки. Выберем на этой прямой направление и сделаем ее осью.

Пусть точка $M(x, y)$- любая текущая точка на этой прямой, отличная от $M_2(x_2, y_2)$.

<u>Определение.</u>: Число λ, определяемое равенством $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ называется отношением направленных отрезков M_1M и MM_2.

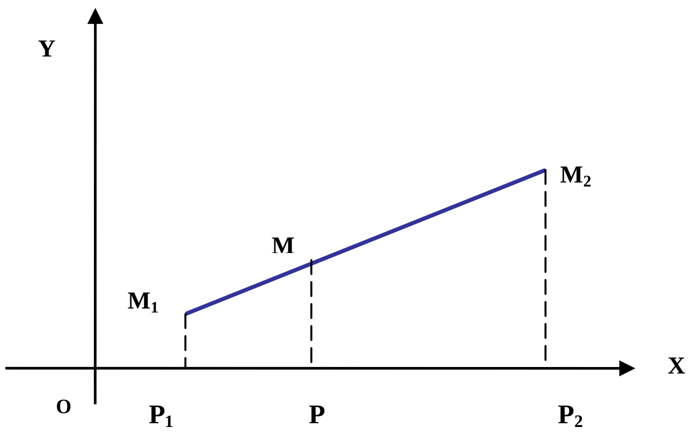


рис.3.5

Замечание:

1. При изменении направления на прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 меняют знак величины всех отрезков, поэтому отношение λ не зависит от выбора направления на прямой.

2. Число λ не зависит от выбора масштаба для измерения длин.

Найдем координаты точки $M(x,y)$, если известны координаты точек M_1 и M_2 и отношение λ в котором точка M делит отрезок M_1M_2.

Спроектируем точки на оси Ox и Oy. На основании теоремы из элементарной геометрии о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, имеем:

$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$. Но $|P_1P| = x - x_1$, $|PP_2| = x_2 - x$. Тогда $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \lambda \Rightarrow x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$

$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$. Аналогично найдем $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

Итак, координаты точки M выражаются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

Частный случай: если точка M - середина отрезка M_1M_2, тогда координаты середины выразятся:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Пример:

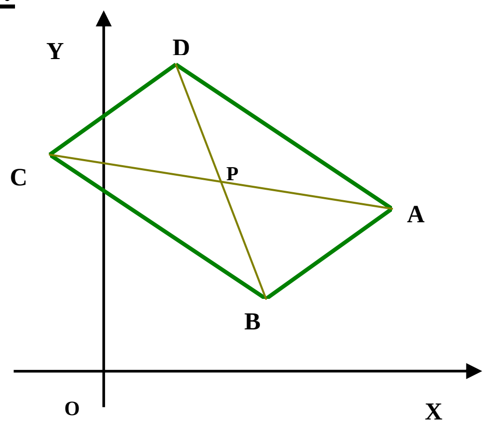


рис.3.6

Даны вершины параллелограмма $A(6,1)$, $B(3,2)$, $C(-2,7)$. Найти четвертую вершину D, противоположную B

Решение:

Известно, что в точке пересечения диагонали параллелограмма делятся пополам. Пусть $P(x,y)$- точка пересечения диагоналей. Тогда, зная координаты A и $C \Rightarrow$ $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = 4$

Тогда координаты точки D найдем по следующим формулам:

$x_D = 2x_P - x_B = 4 - 3 = 1$

$y_D = 2y_P - y_B = 8 - 2 = 6$

Ответ: $D(1,6)$

§3.2 Уравнение линии на плоскости

Пусть на плоскости заданы декартова система координат Oxy и некоторая линия L.

<u>Определение.</u> Уравнение вида $\Phi(x,y) = 0$ называется *уравнением линии* L в заданной системе координат, если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L.

Уравнение $\Phi(x,y) = 0$ - *аналитическое представление линии* - устанавливает функциональную зависимость между координатами точек этой линии.

Для аналитического представления линии бывает удобно выражать переменные координаты при помощи вспомогательной переменной t, называемой параметром:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$ - *параметрическое представление линии*,

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$- непрерывны по параметру t.

<u>Определение</u>. Линия называется *алгебраической*, если в некоторой декартовой системе координат она определяется уравнением $\Phi(x,y) = 0$. Всякая неалгебраическая линия называется *трансцендентной.*

Алгебраическая линия называется *линией n-го порядка*, если в уравнении $\Phi(x,y) = 0$ функция $\Phi(x,y)$ - есть алгебраический полином n-ой степени.

§3.3 Уравнение прямой на плоскости

<u>3.3.1 Общее уравнение прямой</u>

Всякой уравнение первой степени с двумя переменными в декартовой системе координат определяет прямую линию.

Пусть дано уравнение $$Ax + By + C = 0, \qquad (3.1)$$

где A, B, C- постоянные, хотя бы одна из которых отлична от нуля.

Существует некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению: $$Ax_0 + By_0 + C = 0 \qquad (3.2)$$

Вычитая из (1) уравнения второе (2), имеем:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (3.3)$$

(3) - уравнение прямой, проходящая через точку $M_0(x_0,y_0)$ и перпендикулярная вектору $\vec{n}\{A,B\}$, называемым *нормальным вектором*.

Уравнение вида (3.1)

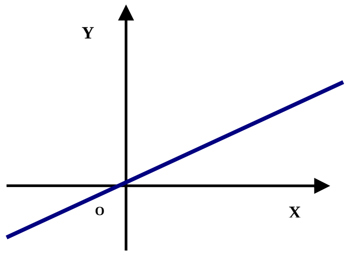
$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

называется *общим уравнением прямой*.

3.3.2. Неполные уравнения прямой.

Рассмотрим общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$.

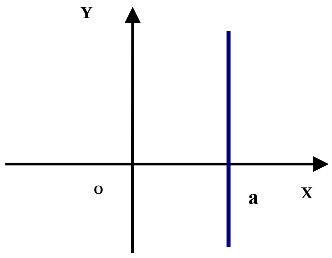
1) если $C=0 \Rightarrow Ax+By=0 \Rightarrow By=-Ax \Rightarrow y=kx$ - *прямая, проходящая через начало координат* $O(0,0)$.



$$\boxed{y=kx}$$

рис.3.8

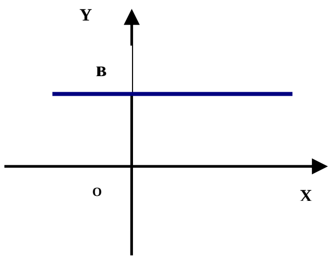
2) если $B=0 \Rightarrow Ax+C=0 \Rightarrow Ax=-C \Rightarrow x=a$ - *прямая, параллельная оси* Oy



$$\boxed{x=a}$$

рис.3.9

3) если $A=0 \Rightarrow By+C=0 \Rightarrow By=-C \Rightarrow y=b$ - *прямая, параллельная оси* Ox

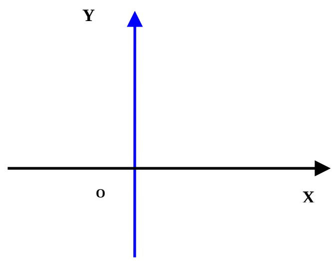


$$\boxed{y=b}$$

рис. 3.10

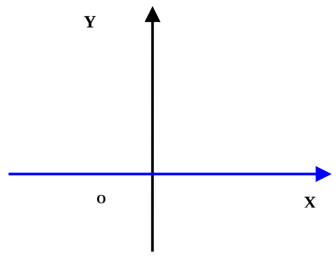
4) если $B=0, C=0 \Rightarrow Ax=0 \Rightarrow x=0$ - *ось* Oy.

5) если $A=0, C=0 \Rightarrow By=0 \Rightarrow y=0$ - *ось* Ox



$$\boxed{x=0}$$

рис.3.11



$$\boxed{y=0}$$

рис.3.12

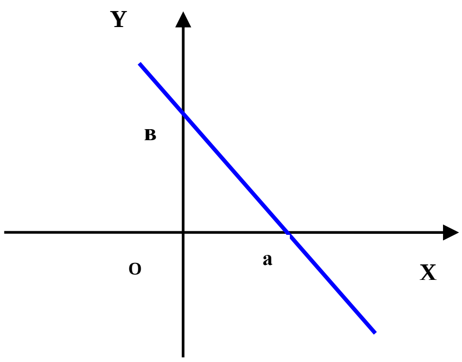
3.3.3 Уравнение прямой «в отрезках»

Рассмотрим общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$. Преобразуем его в следующий вид:

$Ax+By=-C$. Делим на $-C$ $\Rightarrow$ $\dfrac{A}{-C}x+\dfrac{B}{-C}y=1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{\frac{-C}{A}}+\dfrac{y}{\frac{-C}{B}}=1$ $\Rightarrow$

Положим $-\dfrac{C}{A}=a$, $-\dfrac{C}{B}=b$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ - *уравнение прямой «в отрезках»*.

Прямая отсекает на координатных осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно.



$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

рис.3.13

3.3.4 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

а) Чтобы составить уравнение прямой в декартовых координатах, нужно каким-то образом задать условия, определяющие положение ее относительно выбранной системы координат. Углом наклона прямой к оси OX называется тот угол, на который нужно повернуть ось OX, чтобы она совпала с данной прямой (или оказалась параллельной ей).

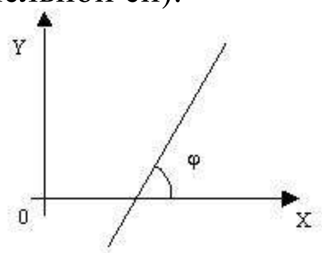
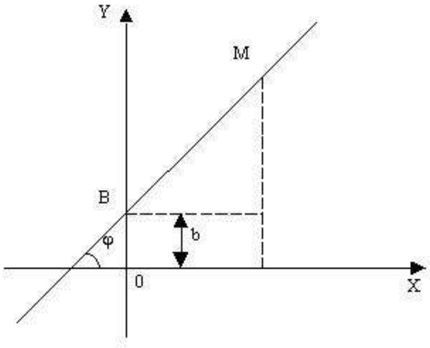


рис.3.14

Тангенс угла наклона прямой к оси OX называется угловым коэффициентом прямой. Положение прямой будет определено, если задать угловой коэффициент и величину отрезка, отсекаемого ею на оси координат.

Когда точка M движется по прямой, то ее координаты x, y удовлетворяют условию $tg\varphi = \frac{y-b}{x}$, отсюда $y = kx + b$, где $k = tg\varphi$.



$$\boxed{y = kx + b}$$

рис. 3.15

Уравнение прямой вида $y = kx + b$ называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* k *и начальной ординатой.* Уравнение получено из предположения, что прямая не параллельна оси ординат.

Рассмотрим общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$. Преобразуем его в следующий вид:

$By = -Ax - C$

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Положим $-\frac{A}{B} = k$ и $-\frac{C}{B} = b \Rightarrow \quad y = kx + b$

б) Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой, то $k = \frac{y - y_0}{x - x}$ или

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$$

- *прямая, проходящая через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *и имеющая угловой коэффициент* k

3.3.5 Угол между двумя прямыми

Рассмотрим на плоскости две прямые с угловыми коэффициентами k_1 и k_2

l_1: $y = k_1 x + b_1$

l_2 $y = k_2 x + b_2$

1) условие параллельности

если $k_1 = k_2 \Rightarrow$ две прямые параллельны

2) условие перпендикулярности

если $k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow$ две прямые перпендикулярны

3) определение угла между прямыми по формуле

$$\boxed{tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|}$$

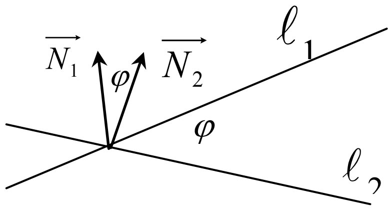


рис.3.16

В случае, если прямые заданы общими уравнениями

$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$

$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$ то

1) условие параллельности

если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$ $\Rightarrow$ две прямые параллельны

2) условие перпендикулярности

если $A_1A_2+B_1B_2=0$ $\Rightarrow$ две прямые перпендикулярны

3) если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ $\Rightarrow$ два уравнения определяют одну прямую

4) угол между двумя прямыми равен углу между двумя соответствующими векторами нормали. Отсюда угол между прямыми можно определить по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}_x\vec{b}_x+\vec{a}_y\vec{b}_y+\vec{a}_z\vec{b}_z}{\sqrt{\vec{a}_x^2+\vec{a}_y^2+\vec{a}_z^2}\cdot\sqrt{\vec{b}_x^2+\vec{b}_y^2+\vec{b}_z^2}}$$

где $\vec{a}=\vec{N}_1$, $\vec{b}=\vec{N}_2$

3.3.6 Нормальное уравнение прямой

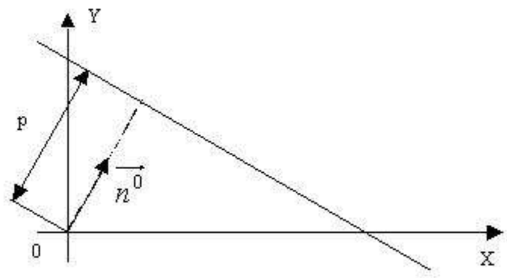


рис.3.17

Рассмотрим некоторую прямую L. Проведем через начало координат прямую n, перпендикулярную L и обозначим точку их пересечения P. На прямой n возьмем единичный вектор $\vec{n}=\overline{OP}$ и пусть $|OP|=p$, θ- угол между вектором и осью. Выразим уравнение прямой L через параметры p и θ. Так как $\vec{n}$ - единичный вектор, то $\vec{n}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$. Возьмем на прямой L точку $M(x,y)$. Тогда $np_{\vec{n}}\overline{OM}=|OP|=p$.

В силу определения скалярного произведения:

$np_{\vec{n}}\overline{OM}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM}$ и $\vec{n}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$ $\Rightarrow$ $np_{\vec{n}}\overline{OM}=x\cos\theta+y\sin\theta$ или

$$\boxed{x\cos\theta+y\sin\theta-p=0}$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением прямой*.

Теперь рассмотрим метод приведения общего уравнения прямой к нормальному виду.

Пусть $Ax + By + C = 0$ и $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ определяют одну прямую.

Тогда $$\frac{\cos\theta}{A} = \frac{\sin\theta}{B} = \frac{-p}{C} = \mu$$

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$ - нормирующий множитель.

Знак нормирующего множителя выбирается противоположным знаку свободного члена C. Помножив на число μ все члены уравнения $Ax + By + C = 0$ мы получим нормальное уравнение прямой

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой* L: $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле:

$$\boxed{d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|}$$

<u>Пример:</u> Дано общее уравнение прямой: $12x - 5y + 13 = 0$

Найти:

а) уравнение с угловым коэффициентом;

$12x - 5y + 13 = 0$

$12x + 13 = 5y$

$y = \frac{12}{5}x + \frac{13}{5} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{12}{5},\ b = \frac{13}{5}$

б) уравнение в отрезках;

$12x - 5y + 13 = 0$

$12x - 5y = -13$

$\frac{12}{-13}x + \frac{-5}{-13} = 1$

$\frac{x}{\frac{-13}{12}} + \frac{y}{\frac{13}{5}} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{13}{12},\ b = \frac{13}{5}$

в) нормальное уравнение.

Найдем нормирующий множитель: $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{144 + 25}} = \pm\frac{1}{\sqrt{169}} = \pm\frac{1}{13}$

Знак нормирующего множителя выбираем противоположным знаку свободного члена $C = 13$, т.е. $\mu = -\frac{1}{13}$

$-\frac{1}{13}12x - (-\frac{1}{13})5y + (-\frac{1}{13})13 = 0$

$-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{12}{13},\ \sin\theta = \frac{5}{13}$

§3.4 Линии второго порядка на плоскости

3.4.1 Каноническое уравнение эллипса

Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная. Требуется, чтобы эта постоянная была больше расстояния между фокусами.

Замечание: Если фокусы совпадают, то эллипс представляет собой *окружность.*

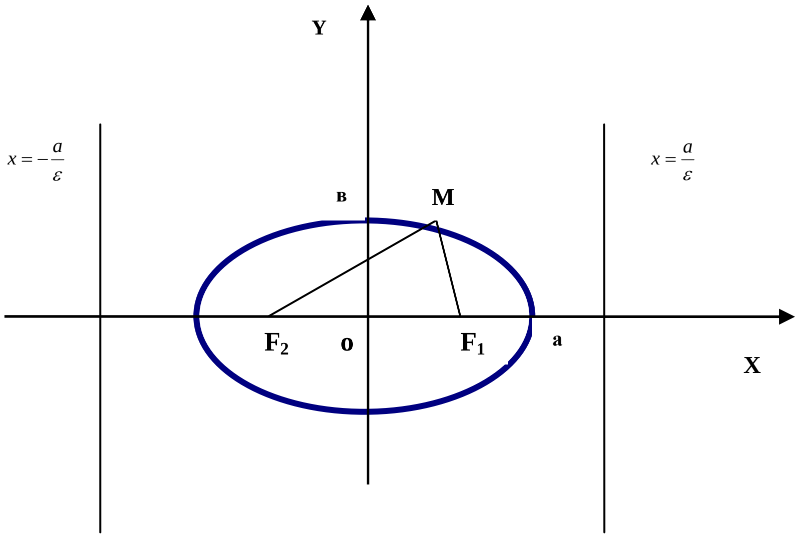


рис.3.18

$|F_1M| = r_1$, $|F_2M| = r_2$, $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$, $M(x,y)$

r_1, r_2 - фокальные радиусы.

Требуется $F_1M + F_2M > F_1F_2 \quad \Rightarrow a > c$

По определению: $|F_1M| + |F_2M| = 2a \ \Rightarrow r_1 + r_2 = 2a$

$$|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$|F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Возведя в квадрат обе части уравнения и преобразовав, получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

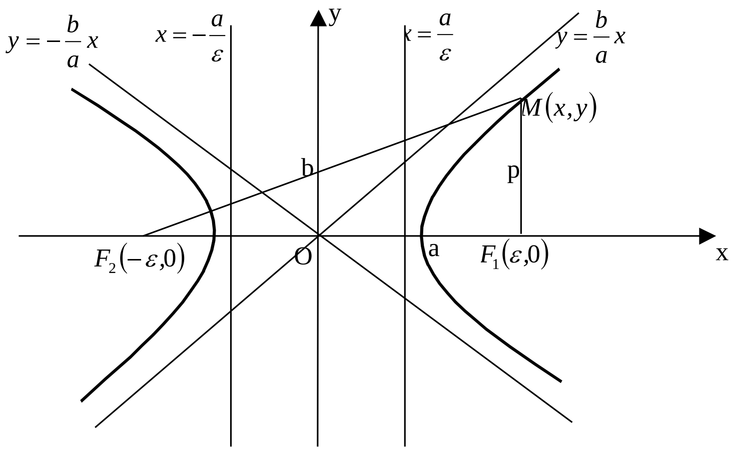
Положим $b^2 = a^2 - c^2$

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ - *каноническое уравнение эллипса*

3.4.2 Каноническое уравнение гиперболы

Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

рис.3.19



$|F_1M|=r_1$, $|F_2M|=r_2$, $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$, $M(x,y)$

r_1, r_2 - фокальные радиусы.

По определению: $|F_1M-F_2M|=2a \Rightarrow |\ r_1-r_2\ |=2a$

$$|F_1M|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$|F_2M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$|\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\ |=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a\ +\ \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Возведя в квадрат обе части уравнения и преобразовав, получим

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

Положим $b^2=c^2-a^2$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$ - каноническое уравнение гиперболы

3.4.3 Каноническое уравнение параболы

Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

$|FM|=r$ - фокальный радиус , $|MN|=d$ - расстояние до директрисы

$F(\frac{p}{2},0)$

По определению: $|FM|=r=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$

Так как $N(-\frac{p}{2}, y)$ и $|MN| = d \Rightarrow$ $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$

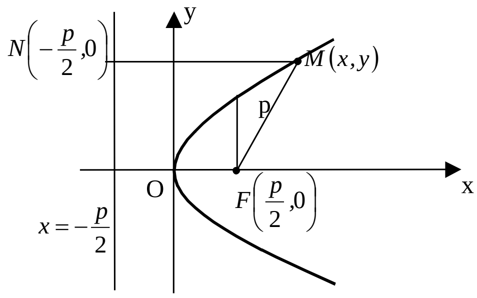


рис.3.20

Выполнив элементарные преобразования, получим

$\boxed{y^2 = 2px}$ - каноническое уравнение параболы

Определение. Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом*.

Замечание: Для эллипса $\varepsilon < 1$, для гиперболы $\varepsilon > 1$, для окружности $\varepsilon = 0$, для параболы $\varepsilon = 1$

Пример:

Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная кроме того, что:

1) его полуоси равны 5 и 2;

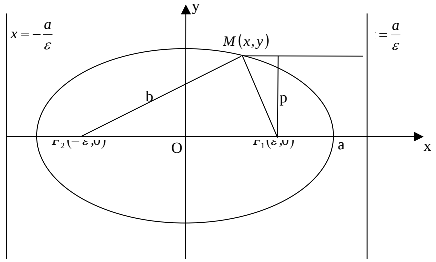
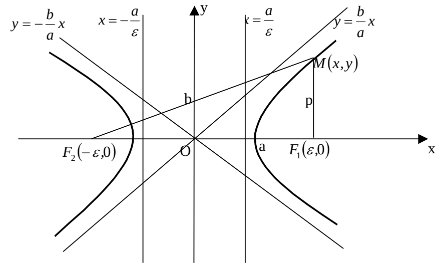
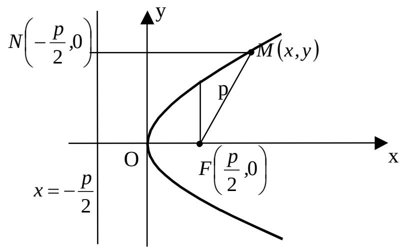
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

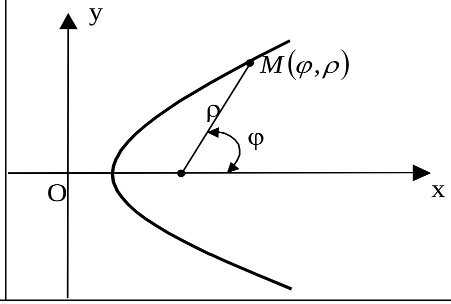
2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 2c=8;

$2a = 10 \Rightarrow a = 5;$ $2c = 8 \Rightarrow c = 4$

так как для эллипса $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Таким образом, каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

№	Канонические уравнения основные элементы	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-Эллипс	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$- Гипербола	$y^2=2px$- Парабола
1	Определение и график	 $F_1M+F_2M=2a$	 $F_2M-F_1M=2a$	 $NM=FM$
2	Фокусы	$F_1(c,0),\ F_2(-c,0)$	$F_1(c,0),\ F_2(-c,0)$	$F\left(p/2,0\right)$
3	Фокальные радиусы	$r_{1,2}=a\pm x\varepsilon$	$r_{1,2,3,4}=\pm a\pm x\varepsilon$	$r=x+p$
4	Эксцентритет	$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$	$\varepsilon=\frac{c}{a}>1$	$\varepsilon=1$
5	Оси	*2a* – большая, *2в* – малая оси		*ох* – ось
6	Директрисы	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	$x=\pm\frac{a}{c}$	$x=-\frac{p}{2}$
7	Асимптоты	—	$y=\pm\frac{b}{a}x$	—

8	Фокальные параметры	$p = \frac{b^2}{a}$ - перпендикуляр к фокусу	p
9	Общие свойства	$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ $\quad$ $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \frac{r_3}{d_3} = \frac{r_4}{d_4} = \varepsilon$ d – расстояние от точки до соответствующего фокуса	$\frac{r}{d} = \varepsilon = 1$
10	Полярное уравнение	 $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi}$	

§3.5 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП)

СРСП 5

Аналитическая геометрия на плоскости.
Линии первого порядка.

1. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x+2y+3=0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.

2.Стороны треугольника лежат на прямых $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$. Вычислить его площадь S.

3. Площадь треугольника $S=8$ кв.ед., две его вершины суть точки A(1;-2) и B(2;3) , а третья вершина C лежит на прямой $2x+y-2=0$. Определить координаты вершины C.

4. Составить уравнение прямой и построить прямую на чертеже, зная ее угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый ею на оси Oy:

1) $k=\frac{2}{3}, b=3$; 2) $k=3, b=0$; 3) $k=0, b=-2$;

4) $k=-\frac{3}{4}, b=3$; 5) $k=-2, b=-5$; 6) $k=-\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}$.

5. Определить угловой коэффициент k и отрезок b для каждой из прямых:

1) $5x-y+3=0$; 2) $2x+3y-6=0$; 3) $5x+3y+2=0$; 4) $3x+2y=0$; 5) $y-3=0$.

6. Определить угол φ между двумя прямыми:

1) $5x-y+7=0$ и $3x+2y=0$;

2) $3x-2y+7=0$ и $2x+3y-3=0$;

3) $x-2y-4=0$ и $2x-4y+3=0$;

4) $3x+2y-1=0$ и $5x-2y+3=0$.

7. Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:

1) $3x-y+5=0$, $x+3y-1=0$; 2) $3x-4y+1=0$, $4x-3y+7=0$; 3) $6x-15y+7=0$, $10x+4y-3=0$; 4) $9x-12y+5=0$, $8x+6y-13=0$.

8. Привести общее уравнение прямой к нормальному виду?

1) $4x-3y-10=0$; 2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$; 3) $12x-5y+13=0$; 4) $x+2=0$.

9. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми:

1) $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$; 2) $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$.

10. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Вычислить его площадь.

СРСП 6

Аналитическая геометрия на плоскости.
Линии второго порядка.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная кроме того, что:

1) его полуоси равны 5 и 2;

2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 2с=8;
3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами 2с=10;
4) расстояние между фокусами 2с=6 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
5) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
6) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;
7) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами 2с=4;
8) его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16;
9) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;
10) расстояние между директрисами равно 32 и $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

2. Составить уравнение гиперболы. Фокусы которого расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того:
1) его оси равны 2а=10 и 2в=8;
2) расстояние между фокусами 2с=10 и ось 2в=8;
3) расстояние между фокусами 2с=6 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
4) ось 2а=16 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
5) уравнение асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно $12\frac{4}{5}$;
6) уравнение асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ и расстояние между фокусами 2с=20;
7) расстояние между его директрисами равно $22\frac{2}{13}$ и расстояние между фокусами 2с=26;
8) расстояние между его директрисами равно $\frac{32}{5}$ и ось 2в=6;
9) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная что:
1) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси Ох, и ее параметр р=3;
2) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ох, и ее параметр р=0,5;
3) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси Оу, и ее параметр $p = \frac{1}{4}$;
4) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси Оу, и ее параметр $p = 3$;

Глава 4
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§4.1 Уравнение плоскости

Теорема. Всякой плоскости в пространстве с заданной прямоугольной декартовой системой координат соответствует уравнение первой степени и всякому уравнению первой степени в пространстве соответствует некоторая плоскость.

4.1.1 Общее уравнение прямой

Пусть дано уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, (4.1)

где A, B, C, D - постоянные, хотя бы одна из которых отлична от нуля.

Существует некоторая точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению: $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ (4.2)

Вычитая из (4.1) уравнения второе (4.2), имеем:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (4.3)$$

(4.3) - уравнение плоскости, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярная вектору $\vec{N}\{A, B, C\}$, называемым *нормальным вектором*.

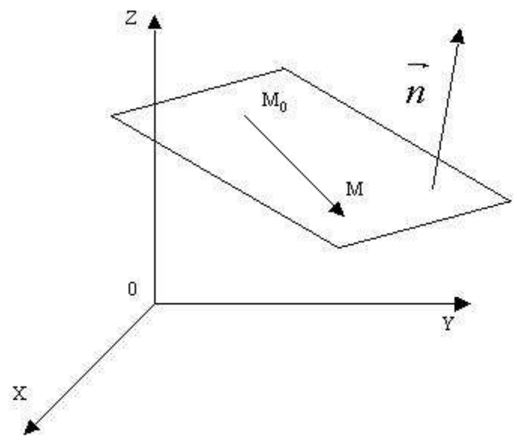


рис.4.1

Уравнение вида (4.1)

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

называется *общим уравнением плоскости*.

4.1.2. Неполные уравнения плоскости.

Рассмотрим общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

1) если $D = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By + Cz = 0$ - *плоскость, проходящая через начало координат* $O(0,0,0)$.(рис.4.2)

2) если $C = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By + D = 0$ - *плоскость, параллельная оси* Oz (рис.4.3)

3) если $B = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + Cz + D = 0$ - *плоскость, параллельная оси* Oy (рис.4.4)

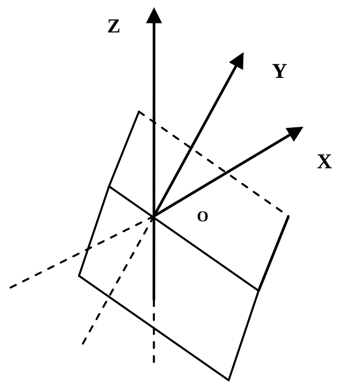


рис.4.2

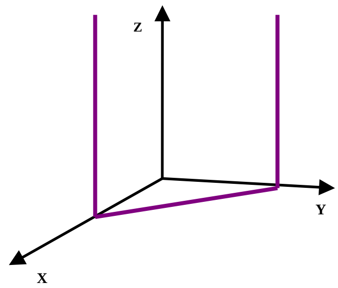
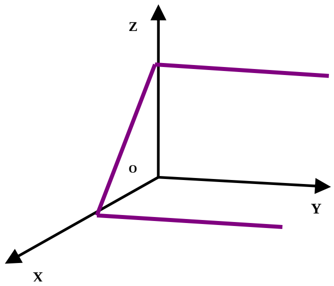
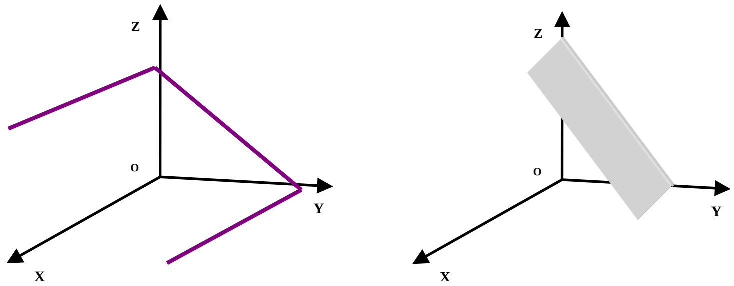


рис.4.3





а) б)

рис.4.4 рис.4.5

4) если $A = 0 \quad \Rightarrow \quad By + Cz + D = 0$ - *плоскость, параллельная оси* Ox (рис.4.5 а) и б))

5) если $A = B = 0 \quad \Rightarrow \quad Cz + D = 0$ - *плоскость, параллельная плоскости* XOY, *перпендикулярная оси* Oz (рис.4.6)

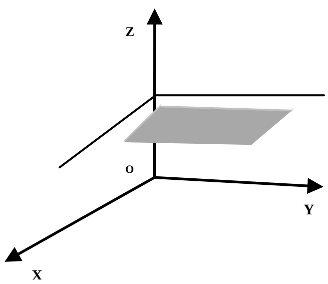


рис.4.6

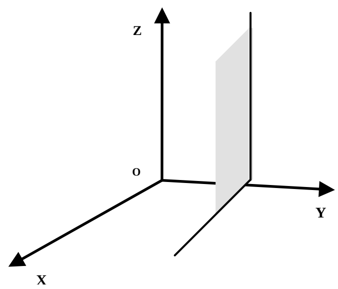


рис.4.7

6) если $A = C = 0 \quad \Rightarrow \quad By + D = 0$ - *плоскость, параллельная плоскости* XOZ, *перпендикулярная оси* Oy (рис.4.7)

7) если $B = C = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + D = 0$ - *плоскость, параллельная плоскости* YOZ, *перпендикулярная оси* Ox (рис.4.8)

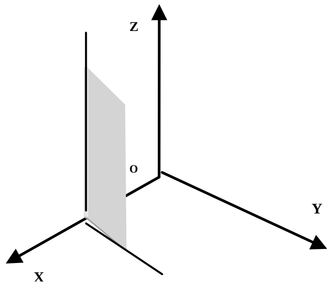


рис.4.8

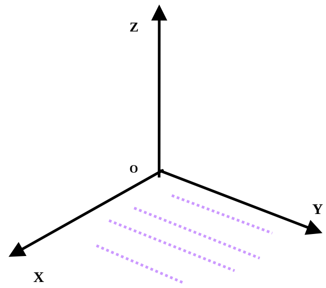


рис.4.9

8) если $A = B = D = 0 \quad \Rightarrow \quad Cz = 0 \Rightarrow z = 0$ - *плоскость* XOY (рис.4.9)

Аналогично, $x = 0$ - *плоскость* YOZ

$y = 0$ - *плоскость* XOZ

4.1.3 Уравнение плоскости «в отрезках»

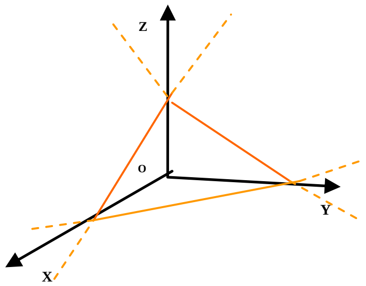
Рассмотрим общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.
Преобразуем его в следующий вид:

$Ax + By + Cz = -D$. Делим на $-D \Rightarrow \dfrac{A}{-D}x + \dfrac{B}{-D}y + \dfrac{C}{-D}z = 1 \Rightarrow$

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1 \Rightarrow$$

Положим $-\dfrac{D}{A} = a,\ -\dfrac{D}{B} = b,\ -\dfrac{D}{C} = c \Rightarrow$

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ - *уравнение плоскости «в отрезках»*. Плоскость отсекает на координатных осях Ox, Oy, Oz отрезки a, b, c соответственно.



$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

рис.4.10

4.1.4 Угол между двумя плоскостями

Рассмотрим задачу о вычислении угла между двумя плоскостями. Угол между двумя плоскостями может быть вычислен как угол между нормалями к этим плоскостям.

Если плоскости заданы своими общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

то их нормальные вектора имеют вид: $\vec{N}_1\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{N}_2\{A_2, B_2, C_2\}$.

Угол между плоскостями находится по формуле, вытекающей из скалярного произведения двух векторов:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

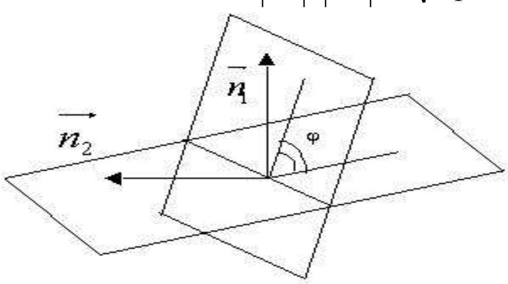


рис.4.11

1) условие параллельности $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

2) условие перпендикулярности $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

4.1.5 Нормальное уравнение плоскости

Пусть дана некоторая плоскость Q. Проведем через начало координат вектор нормали $\vec{N}$ и обозначим через M_1 точку, в которой он пересекает плоскость Q. На нормали введем положительное направление от точки O к точке M_1. Пусть α, β, γ углы, которые составляют нормаль соответственно с осями Ox, Oy, Oz. $|OM_1|=p$

Соответственно $\vec{N}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

Возьмем произвольную точку M на плоскости. Тогда $np_{\vec{N}}\overline{OM}=|OM_1|=p$.

В силу определения скалярного произведения:

$np_{\vec{N}}\overline{OM}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$. Отсюда следует $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$

$$\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0}$$

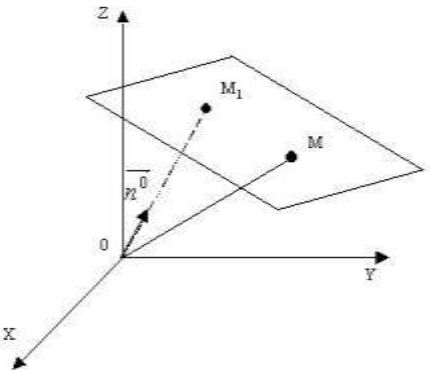


рис. 4.12

Это уравнение называется *нормальным уравнением плоскости*.

Теперь рассмотрим метод приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду.

Пусть $Ax+By+Cz+D=0$ и $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ определяют одну плоскость.

Тогда $\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\cos\beta}{B}=\frac{\cos\gamma}{C}=\frac{-p}{D}=\mu$

$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ - *нормирующий множитель*. Знак нормирующего множителя выбирается противоположным знаку свободного члена D. Помножив на число μ все члены уравнения $Ax+By+Cz+D=0$ мы получим нормальное уравнение плоскости

$$\mu Ax+\mu By+\mu C+\mu D=0$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости: $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле:

$$\boxed{d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|}$$

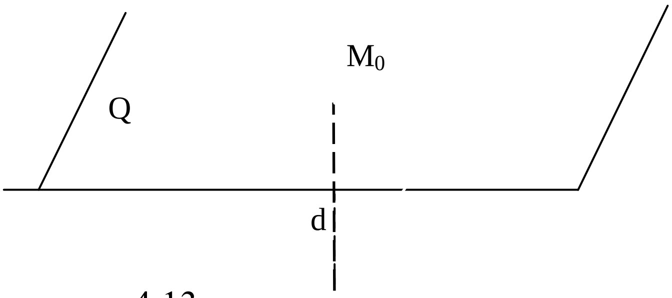


рис.4.13

§4.2 Задачи на составление уравнения плоскости

4.2.1 Уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум неколлинеарным векторам

Дано: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$

Составить уравнение плоскости

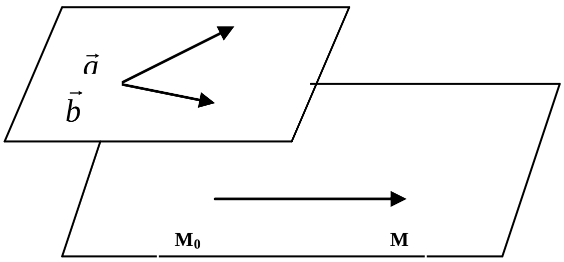


рис.4.14

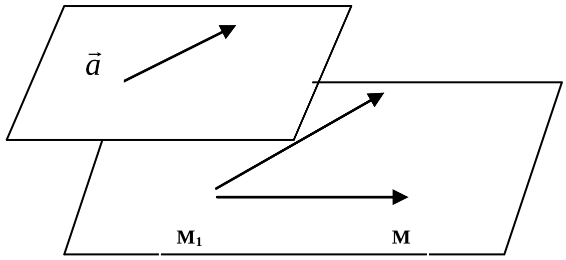


рис.4.15

Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ на плоскости. Составим вектор $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Тогда вектора $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ - компланарны. А по условию компланарности трех векторов следует

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$ Это и есть уравнение искомой плоскости.

4.2.2 Уравнение плоскости, проходящей через две точки параллельно данному вектору

Дано: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$

Составить уравнение плоскости

Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ на плоскости. Составим вектора $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Тогда вектора $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$, - компланарны. А по условию компланарности трех векторов следует

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0$$ Это и есть уравнение искомой плоскости.

4.2.3 Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Дано: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

Составить уравнение плоскости

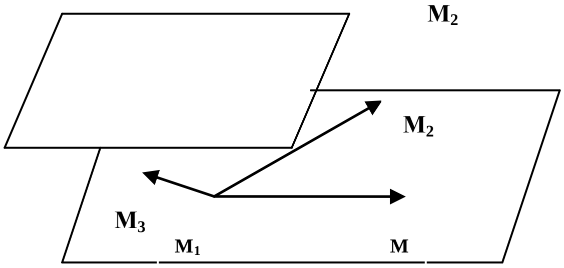


рис.4.16

Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ на плоскости. Составим вектора $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

Тогда вектора $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, - компланарны. А по условию компланарности трех векторов следует, что смешанное произведение трех векторов равно нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

§4.3 Прямая линия в пространстве

Через каждую прямую проходит бесчисленное множество плоскостей. Любые две из них, пересекаясь, определяют ее в пространстве. Следовательно, уравнения любых двух таких плоскостей, рассматриваемые совместно, определяют собой уравнения этой прямой. Вообще всякие две непараллельные плоскости с общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

определяют прямую их пересечения. Уравнения, рассматриваемые совместно, называются *общими уравнениями прямой*. От общих уравнений прямой можно перейти к ее каноническим уравнениям.

4.3.1 Каноническое уравнение прямой в пространстве

Определение. Каждый неравный нулю вектор, лежащий на данной прямой или параллельной ей, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Обозначим направляющий вектор через $\vec{s} = \{l, m, n\}$/

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка, через которую проходит прямая, а $M(x, y, z)$ - произвольная точка прямой. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ коллинеарен с направляющим вектором.

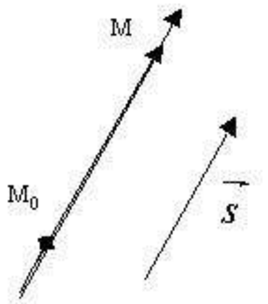


рис.4.17

Следовательно, в силу коллинеарности векторов, координаты их пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}}$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением прямой в пространстве*.

4.3.2 Параметрическое уравнение прямой в пространстве

Рассмотрим каноническое уравнение прямой в пространстве

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

Обозначим каждое из равных отношений через t:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t \qquad \Rightarrow \quad \begin{matrix}\dfrac{x-x_0}{l}=t \\ \dfrac{y-y_0}{m}=t \\ \dfrac{z-z_0}{n}=t\end{matrix} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\\ z=z_0+nt\end{cases}}$$

Данные уравнения называются *параметрическими уравнениями прямой*.

4.3.3 Определение направляющего вектора прямой

Для определения направляющего вектора прямой заметим, что этот вектор, направленный по линии пересечения плоскостей, должен быть перпендикулярен к обоим нормальным векторам $\vec{N}_1\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\vec{N}_2\{A_2,B_2,C_2\}$ этих плоскостей. Обратно, всякий вектор, перпендикулярный к $\vec{N}_1\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\vec{N}_2\{A_2,B_2,C_2\}$, параллелен обеим плоскостям, а, следовательно, и данной прямой. Но векторное произведение $\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ также обладает этим свойством. Поэтому за направляющий вектор прямой можно принять векторное произведение нормальных векторов данных плоскостей.

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

4.3.4 Каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть нужно найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Будем искать эти уравнения в канонической форме. Для решения задачи достаточно знать координаты одной из точек, лежащих на этой прямой, и направляющий вектор.

В качестве направляющего вектора $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Тогда искомая прямая

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

4.3.5 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Углом между прямыми в пространстве будем называть острый угол, образованный двумя прямыми, проведенными через произвольную точку параллельно данным прямым. Пусть уравнения двух прямых суть:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

Очевидно, за угол φ между ними можно принять угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\vec{s}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ или угол, дополняющий его до 180^0. Поэтому по формуле имеем

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2\ |}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

4.3.6 Прямая и плоскость в пространстве

Пусть уравнение прямой суть: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$, а уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

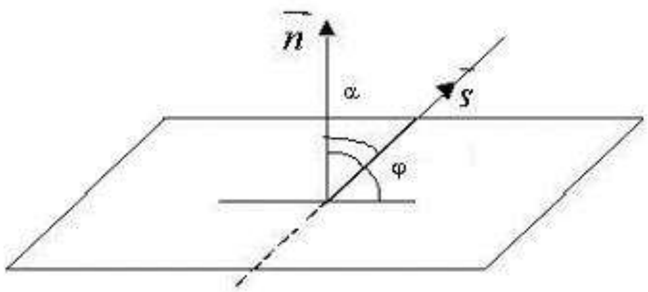


рис.4.18

Углом φ между прямой и плоскостью будем называть острый угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Угол $\dfrac{\pi}{2} + \varphi$ будет, как видно на рисунке, углом между векторами $\vec{N}=\{A,B,C\}$ и $\vec{s}=\{l,m,n\}$, заметив, что $\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi)=\pm\sin\varphi$, получим окончательно:

$$\sin\varphi=\frac{|\ Al+Bm+Cn\ |}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

В случае параллельности прямой линии $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ угол между ними равен нулю и искомое условие $Al+Bm+Cn=0$ (условие параллельности).

Условие перпендикулярности прямой и плоскости совпадает с условием параллельности векторов $\vec{N}=\{A,B,C\}$ и $\vec{s}=\{l,m,n\}$, т.е. будет

$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ (условие перпендикулярности).

Координаты точки пересечения прямой линии, представленной в параметрическом виде $\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\\ z=z_0+nt\end{cases}$ с плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ должны одновременно удовлетворять обоим уравнениям, а поэтому для их определения нужно совместно решить эти уравнения, считая x, y, z за неизвестные. Подставляя значения x, y, z из параметрического уравнения в уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, получаем:

$Ax_0+By_0+Cz_0+D+(Al+Bm+Cn)t=0$, откуда находим

$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}$, если $Al+Bm+Cn\neq 0$.

Внося найденное значение t в формулы $\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+nt\end{cases}$ получим координаты искомой точки пересечения прямой линии с плоскостью. В случае $Al+Bm+Cn=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ прямая параллельна плоскости. Наконец, если $Al+Bm+Cn=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то прямая лежит на плоскости.

<u>Пример:</u>

Написать каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1;1;-3)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{1;-3;4\}$.

Исходя из формулы $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ следует

$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{4}$. Отсюда получим параметрические уравнения:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{4}=t \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}x+1=t\\ y-1=-3t\\ z+3=4t\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}x=t-1\\ y=1-3t\\ z=4t-3\end{matrix}$$

§4.4 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП)

СРСП 7

1.Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2;1;-1)$ и имеет нормальный вектор $n=\{1;-2;3\}$.

2. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $n=\{5;0;-3\}$.

3.Точка $(2;1;-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

4. Даны две точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

5. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

1) $2x-3y+5z-7=0$, $2x-3y+5z+3=0$;

2) $4x+2y-4z+5=0$, $2x+y+2z-1=0$;

3) $x-3z+2=0$, $2x-6z-7=0$.

6. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

1) $3x-y-2z-5=0$, $x+9y-3z+2=0$;

2) $2x+3y-z-3=0$, $x-y-z+5=0$;

3) $2x-5y+z=0$, $x+2z-3=0$.

7. Две грани куба лежат на плоскостях $2x-2y+z-1=0$ и $2x-2y+z+5=0$. Вычислить объем этого куба.

8. привести к каноническому виду уравнение прямой

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$$

9. Определить угол между прямыми

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z+1=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z-2=0 \end{cases}.$$

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{12}=\frac{z-1}{-3}$ и плоскостью $6x-3y+2z=0$

Глава 5
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 5.1 Функция

5.1.1 Понятие множества

Одним из основных понятий математики является число. Понятие числа возникло в древности и на протяжении длительного времени подвергалось расширению и обобщению.

Числа целые и дробные, как положительные, так и отрицательные, вместе с числом нуль называются *рациональными числами*.

Каждое рациональное число может быть представлено в виде отношения $\frac{p}{q}$ двух целых чисел p и q,

Например, $\frac{5}{7}$, $1{,}25=\frac{5}{4}$.

В частности, целое число p можно рассматривать как отношение двух целых чисел $\frac{p}{1}$, например, $7=\frac{7}{1}$, $0=\frac{0}{1}$.

Рациональные числа могут быть представлены в виде конечных или бесконечных периодических дробей. Числа, которые представляются бесконечными, но непериодическими десятичными дробями, называются *иррациональными числами*: таковы числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 5-$\sqrt{2}$ и т.д.

Под *множеством* понимается совокупность некоторых объектов. Объекты, которые образуют множество, называются элементами или точками этого множества.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

Если множество B состоит из части элементов множества A или совпадает с ним, то множество B называется *подмножеством* множества A и обозначается $B\subset A$.

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т.е. $C=A\cup B$.

Пересечением двух множеств A и B называется множество D, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из данных множеств, т.е. $D=A\cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество E, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т.е. $E=A\setminus B$.

Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел называется *множеством действительных (вещественных) чисел* R.

Действительные числа упорядочены по величине, т.е. для каждой пары действительных чисел x и y имеет место одно, и только одно из соотношений: $x < y$, $x = y$, $x > y$

Действительные числа можно изображать точками числовой оси. *Числовой осью* называется бесконечная прямая, на которой выбраны:

1) некоторая точка O, называемая началом отсчета;
2) положительное направление, которое указывается стрелкой;
3) масштаб для измерения длин.

Каждая точка числовой оси является изображением только одного действительного числа. Таким образом, между всеми действительными числами и всеми точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие.

Между двумя произвольными действительными числами найдутся как рациональные, так и иррациональные числа.

Теорема. Каждое иррациональное число α можно с любой степенью точности выразить с помощью рациональных чисел.

Определение. *Абсолютной величиной (или модулем)* действительного числа x называется неотрицательное действительное число, удовлетворяющее условию: $|x| = \begin{cases} x, & если \quad x \geq 0 \\ -x, & если \quad x < 0 \end{cases}$

Свойства абсолютных величин:

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$
2. $|x - y| \geq |x| - |y|$
3. $|xyz| = |x| \cdot |y| \cdot |z|$
4. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

Некоторые логические символы:

$\forall$ - каждый, любой;
$\exists$ - существует, найдется;
$\in$ - принадлежит;
$\notin$ - не принадлежит;
$A \Rightarrow B$ - если A, то B;
$A \Leftrightarrow B$ - равносильно;
$N = \{1, 2, ..., n, ...\}$ - множество натуральных чисел;
$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел;
$Q = \left\{\dfrac{p}{q}, p, q \in Z\right\}$ - множество рациональных чисел.

5.1.2 Понятие функции одной переменной

Переменной величиной называется величина, которая принимает различные численные значения. Величина, численные значения которой не меняется, называется *постоянной величиной*.

В математике постоянная величина часто рассматривается как частный случай переменной, у которой все численные значения одинаковы.

<u>Некоторые понятия:</u>

1.Совокупность всех числовых значений переменной величины называется *областью изменения* этой переменной.

Отметим некоторые области изменения переменной величины, которые часто будут встречаться.

2.*Промежутком* или *интервалом* называется совокупность всех чисел x, заключенных между данными числами a и b $(a<b)$, при этом сами эти числа не принадлежат рассматриваемой совокупности чисел; его обозначают (a,b) или $]a,b[$, или с помощью неравенства $a<x<b$.

3. *Отрезком* или *сегментом* называется совокупность всех чисел x, заключенных между данными числами a и b $(a<b)$, причем оба числа принадлежат рассматриваемой совокупности чисел; его обозначают $[a,b]$ или с помощью неравенства $a\le x\le b$. Иногда отрезок называют замкнутым промежутком или замкнутым интервалом.

$[a,b)$ или $a\le x<b$ и $(a,b]$ или $a<x\le b$ - полузамкнутые промежутки.

$a\le x<+\infty$, $-\infty<x\le c$, $-\infty<x<c$, $-\infty<x<+\infty$ или соответственно $[a,+\infty)$, $(-\infty,c]$, $(-\infty,c)$, $(-\infty,+\infty)$ - полузамкнутые бесконечные интервалы и бесконечные интервалы.

Интервал $a<x_0<b$ называют окрестностью точки x_0, саму точку называют центром окрестности.

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой.

<u>Определение.</u> Если каждому значению переменной x, принадлежащей некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной y, то y есть функция от x или, в символической записи,

$$y=f(x)$$

x- независимая переменная или аргумент, y- зависимая переменная, f- закон соответствия.

<u>Определение.</u> Совокупность значений x, для которых определяются значения функции y в силу правила $f(x)$, называется областью определения функции или областью существования функции.

<u>Пример.</u> Функция $y=\sin x$ определена при всех значениях x. Следовательно, ее областью определения будет бесконечный интервал $(-\infty,+\infty)$.

Если при $x_1<x_2$ выполняется $f(x_1)<f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *возрастающей*. Если при $x_1<x_2$ выполняется $f(x_1)>f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *убывающей*. Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными*.

Функция $f(x)$ называется *четной,* если для любых значений x из области определения $f(-x)=f(x)$ и *нечетной,* если $f(-x)=-f(x)$. В противном случае функция $f(x)$ называется функцией *общего вида*. График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $f(x)$ называется ограниченной на промежутке X, ели существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$. В противном случае функция называется *неограниченной*.

Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, так как $|\sin x| \le 1$ для любого $x \in R$.

Функция $f(x)$ называется периодической с периодом $T \ne 0$, если для любых значений x из области определения функции $f(x+T) = f(x)$.

Например, функция $y = \sin x$ периодическая с периодом 2π, так как $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ для любого $x \in R$.

5.1.3 Способы задания функции

1.Табличный способ задания функции

При этом способе выписываются в определенном порядке значения аргумента $x_1, x_2, ..., x_n$ и соответствующие значения функции $y_1, y_2, ..., y_n$.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Примеры: таблица тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т.д.

2. Графический способ задания функции

Если в прямоугольной системе координат на плоскости имеем некоторую совокупность точек $M(x, y)$, при этом никакие две точки не лежат на одной прямой, параллельной оси Oy, то эта совокупность точек определяет некоторую однозначную функцию $y = f(x)$; значениями аргумента являются абсциссы точек, значениями функции – соответствующие ординаты.

Совокупность точек плоскости (xOy), абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты – соответствующими значениями функции, называется *графиком* данной функции.

3. Аналитический способ задания функции

Аналитическим выражением будем называть символическое обозначение совокупности известных математических операций, которые производятся в определенной последовательности над числами и буквами, обозначающими постоянные или переменные величины.

Отметим, что под совокупностью известных математических операций будем понимать не только математические операции, известные из курса средней школы, но и те, которые будут определяться по мере изучения курса.

Аналитическими выражениями, например, являются: $x^4 - 2$, $(\lg x - \sin x)/(5x^2 + 1)$, $2^x - \sqrt{5 + 3x}$ и т.д.

Если функциональная зависимость $y = f(x)$ такова, что f обозначает аналитическое выражение, то говорят, что функция y от x задана аналитически.

Естественной областью определения функции, заданной аналитически, является совокупность значений x, при которых имеет вполне определенное значение стоящее справа аналитическое выражение.

4. Словесный способ задания функции

Функция описывается правилом ее составления, например, функция Дирихле: $f(x)=1$, если x - рационально; $f(x)=0$, если x - иррационально.

5.1.4 Основные элементарные функции

Основными элементарными функциями называются следующие, аналитическим способом заданные функции.

1.Степенная функция: $y=x^{\alpha}$, где α - действительное число.

2. Показательная функция: $y=a^{x}$, где $a>0, a\neq 1$.

3. Логарифмическая функция: $y=\log_a x$, где основание a - положительное число, не равное единице.

4. Тригонометрические функции: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$,

$y=ctgx$, $y=\sec x$, $y=\cos ecx$

5. Обратные тригонометрические функции: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$,

$y=arcctgx$, $y=arc\sec x$, $y=\arccos ecx$

Определения:

1. *Элементарной функцией* называется функция, которая может быть задана одной формулой вида $y=f(x)$, где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

2. Функция $y=f(x)$ называется *явной*, если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной. Например, $y=x+\sin x$.

Функция y аргумента x называется *неявной*, если она задана уравнением $F(x,y)=0$, не разрешенным относительно зависимой переменной.

3. *Обратная функция.* Пусть $y=f(x)$ - есть функция от независимой переменной x, определенная на множестве X с областью значений Y. Поставим в соответствие: каждому $y\in Y$ единственное значение $x\in X$, при котором $f(x)=y$. Тогда полученная функция $x=\varphi(y)$, определенная на множестве Y с областью значений X, называется *обратной*.

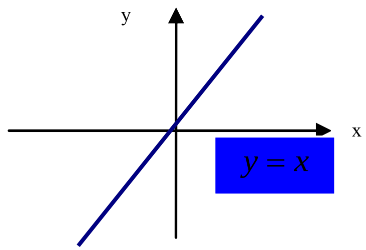
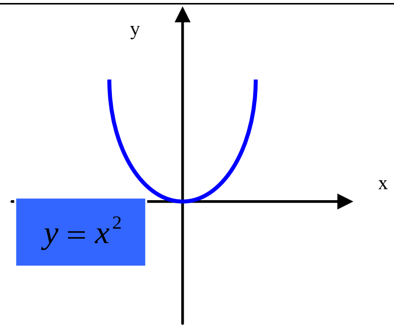
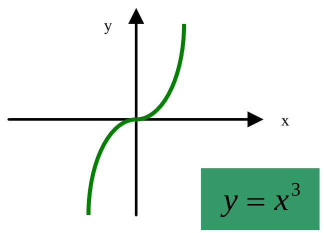
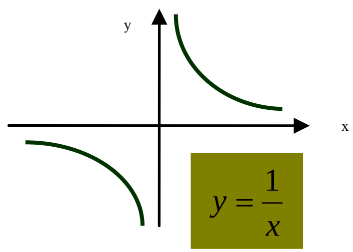
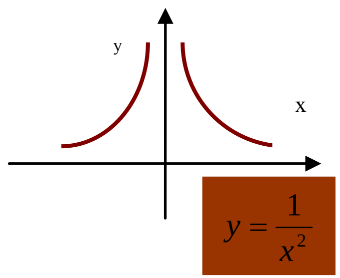
Например, для функции $y=a^{x}$ обратной будет функция $x=\log_a y$ или в обычных обозначениях $y=\log_a x$.

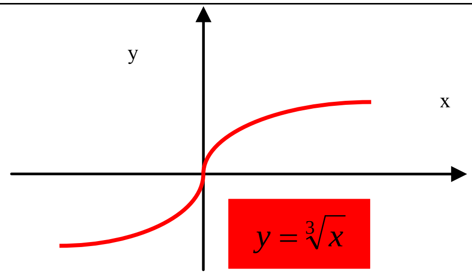
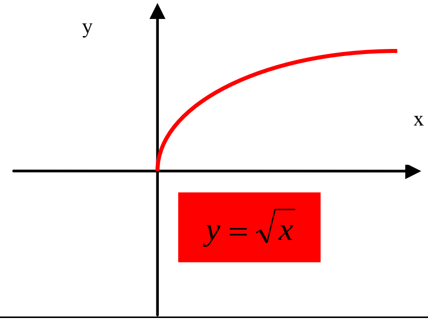
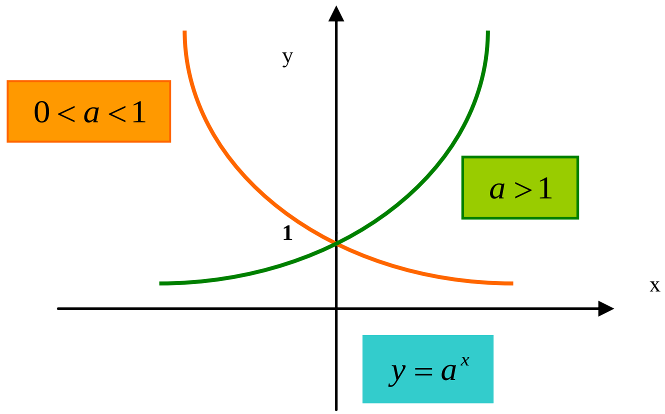
Для любой строго монотонной функции существует обратная функция.

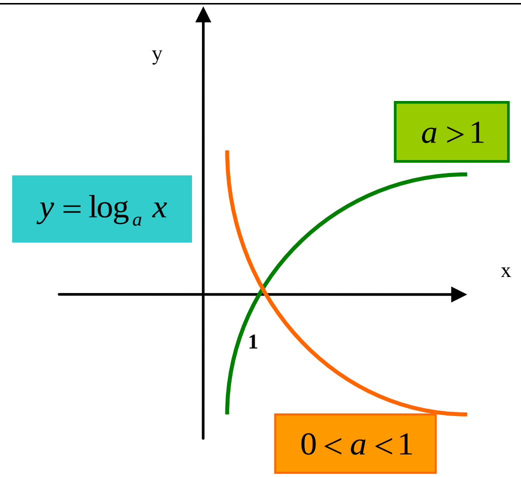
4. *Сложная функция*. Пусть функция $y=f(u)$ есть функция от переменной u, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная u в свою очередь является функцией $u=\varphi(x)$ от переменной x, определенной на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция $y=f[\varphi(x)]$ называется *сложной функцией* (или композицией функций, суперпозицией функций или функцией от функции).

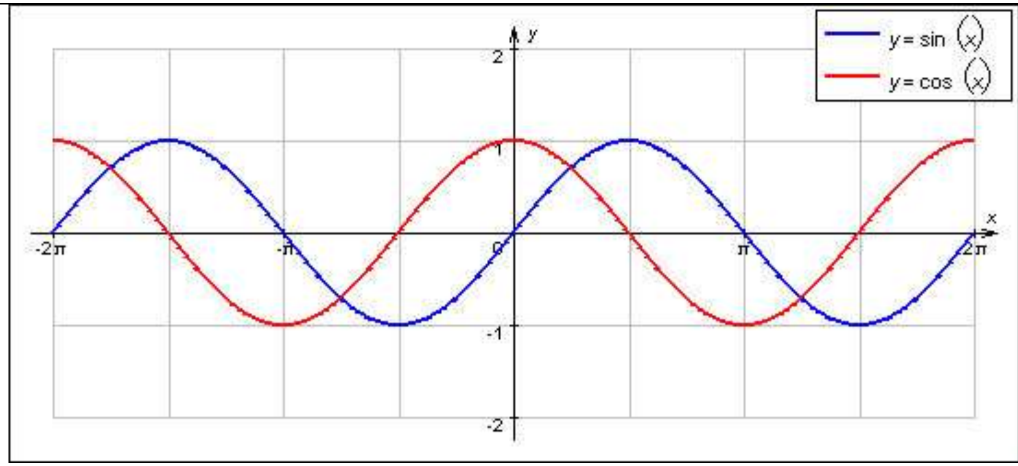
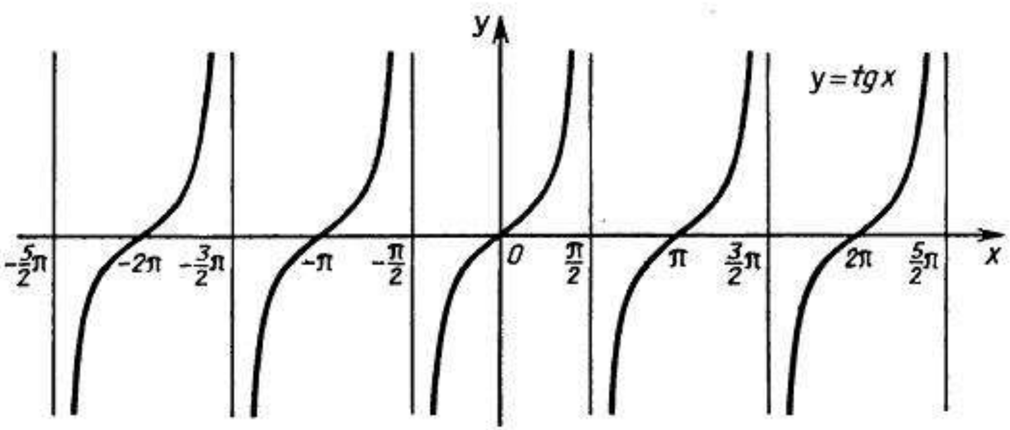
Например, $y=\ln(\cos x)$ - сложная функция, где $y=\ln u$, а $u=\cos x$.

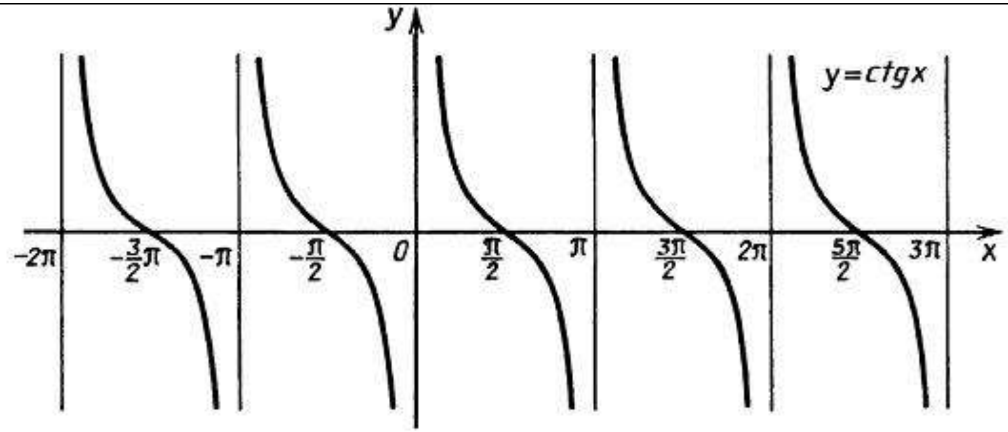
Основные элементарные функции

№	функция	Область определения X	Область значения У	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	Графики функций
1. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ							
1	$y = x^n$ $n \in N$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$, если n - нечетно; $[0,\infty)$, если n - четно	Нечетная, если n - нечетно; Четная, если n - четно	Возрастает на $(-\infty,+\infty)$, если n - нечетно; Убывает на $(-\infty,0]$ и возрастает на $(0,\infty)$, если n - четно	Непериодическая	  
2	$y = x^{-n}$ $n \in N$	$(-\infty,0) \cup \cup (0,\infty)$	$(-\infty,0) \cup \cup (0,\infty)$, если n - нечетно; $[0,\infty)$, если n - четно	Нечетная, если n - нечетно; Четная, если n - четно	убывает на $(-\infty,0)$ и на $(0,\infty)$, если n - нечетно; возрастает на $(-\infty,0]$ и убывает на $(0,\infty)$, если n - четно	Непериодическая	 

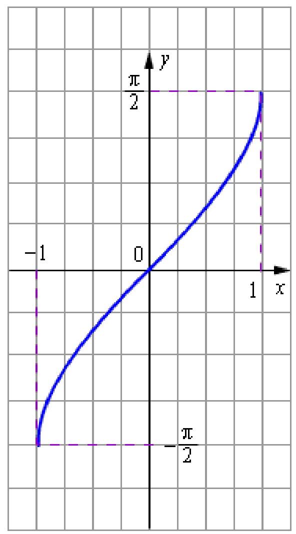
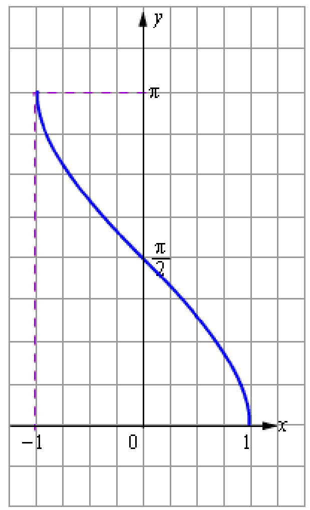
3	$y=\sqrt[n]{x}$ $n \in N$ $n>1$	$(-\infty,+\infty)$, если n - нечетно; $[0,\infty)$, если n - четно	$(-\infty,+\infty)$, если n - нечетно; $[0,\infty)$, если n - четно	Нечетная, если n - нечетно; Общего вида, если n - четно	Возрастает на $(-\infty,+\infty)$, если n - нечетно; возрастает на $[0,\infty)$, если n - четно	Непериодическая	 
2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ								
4	$y=a^x$ $a>0$, $a \neq 1$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\infty)$	Общего вида	Возрастает на $(-\infty,+\infty)$, если $a>1$; убывает на $(-\infty,+\infty)$, если $0<a<1$.	Непериодическая	

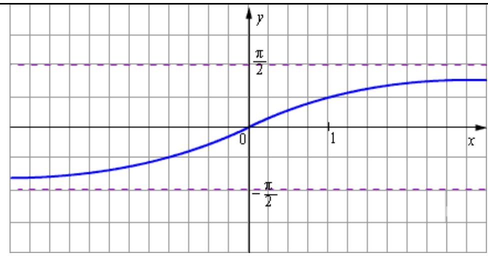
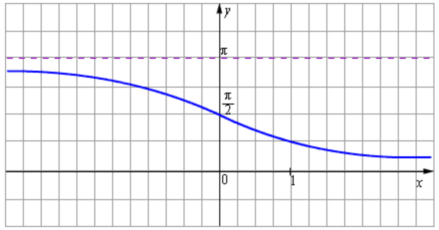
3. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ							
5	$y=\log_a x$ $a>0, a\neq 1$	$(0,\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	Общего вида	Возрастает на $(0,\infty)$, если $a>1$; убывает на $(0,\infty)$, если $0<a<1$.	Непериодическая	
4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ							
6	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	нечетная	Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$; убывает на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$	Периодическая с периодом $T=2\pi$	
7	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	четная	Возрастает на	Периодическая с	

					$[-\pi+2\pi n,$ $2\pi n]$; убывает на $[2\pi n,$ $\pi+2\pi n]$, $n\in Z$	периодом $T=2\pi$	
8	$y=tgx$	$(-\frac{\pi}{2}+\pi n,$ $\frac{\pi}{2}+\pi n)$, $n\in Z$	$(-\infty,+\infty)$	нечетная	Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n,\right.$ $\left.\frac{\pi}{2}+\pi n\right]$; $n\in Z$	Периоди ческая с периодом $T=\pi$	

9	$y = ctgx$	$(\pi n,$ $\pi + \pi n)$, $n \in Z$	$(-\infty,+\infty)$	нечетная	Убывает на $(\pi n,\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$	Периодическая с периодом $T = \pi$	

5. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

10	$y = \arcsin x$ $y = \arccos x$	$[-1,1]$ $[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $[0, \pi]$	Нечетная Центрально-симметрична относительно точки $(0, \frac{\pi}{2})$	Строго возрастает Строго убывающая		 $y = \arcsin x$  $y = \arccos x$

11	$y = arctgx$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	Непрерывная и ограниченная	Строго возраста ющая		 $y = arctgx$
	$y = arcctgx$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$	Непрерывная и ограниченная Центрально-симметрична относительно точки $(0, \frac{\pi}{2})$	Строго убывающ ая		 $y = arcctgx$

Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические функции.

К числу алгебраических функций относятся элементарные функции следующего вида:

1. *Целая рациональная функция* или *многочлен (полином)*

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n,$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ - постоянные числа, называемые *коэффициентами*;

n - целое неотрицательное число, называемое *степенью многочлена*.

Например, $y = ax + b$ - линейная функция;

$y = ax^2 + bx + c$ - квадратичная функция.

2. *Дробная рациональная функция*

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}$$

Например, $y = \frac{a}{x}$

3. *Иррациональная функция*

Если в формуле $y = f(x)$ в правой части производятся операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональными нецелыми показателями, то функция y от x называется иррациональной.

Например, $y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + 5x^2}}$, $y = \sqrt{x}$ и т.п.

<u>Определение.</u> Функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной.

Например, $y = \cos x$, $y = 8^x$, $y = \log_3 x$ и т.п.

Преобразования графиков:

Пусть задан график функции $y = f(x)$, тогда:

1) график функции $y = f(x) + d$ строится следующим образом:

график $y = f(x)$ параллельно сдвигается вдоль оси Oy на d единиц в положительном направлении (т.е. вверх) при $d > 0$ и в отрицательном направлении (т.е.вниз) при $d < 0$;

2) график функции $y = kf(x)$ строится следующим образом:

график $y = f(x)$ растягиваем в $|k|$ раз вдоль оси Oy при $|k| > 1$ и сжимаем в $\left|\frac{1}{k}\right|$ раз вдоль оси Oy при $0 < |k| < 1$;

3) график функции $y = f(x + b)$ строится следующим образом:

график $y = f(x)$ параллельно переносим вдоль оси Ox на b единиц в положительном направлении при $b < 0$ и в отрицательном направлении при $b > 0$;

4) график функции $y = f(kx)$, $k \neq 0$ строится следующим образом:

график $y = f(x)$ сжимаем в k раз вдоль оси Ox при $k > 1$ и растягиваем при $0 < k < 1$;

5.1.6 Функции в экономике

Функции широко применяются в экономической теории и практике: от простейших линейных до функций, получаемых по определенному алгоритму с помощью рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени.

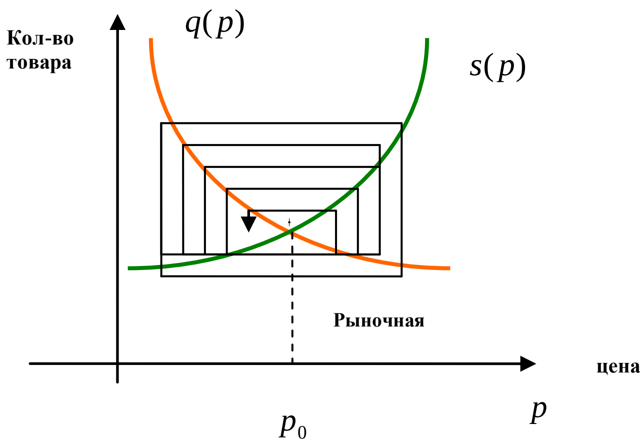
Наиболее часто используемые в экономике функции:

1. *Функция полезности (функция предпочтений)* – зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия;
2. Производственная функция – зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов;
3. Функция выпуска (частный вид производственной функции) – зависимость объема производства от наличия или потребления ресурсов;
4. Функция издержек (частный вид производственной функции) – зависимость издержек производства от объема продукции;
5. Функции спроса, потребления и предложения - зависимость объема спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов, (например, цены, доход и т.п.).

Учитывая, что экономические явления и процессы обусловливаются действие различных факторов, для их исследований широко используются функции нескольких переменных. Среди этих функций выделяются мультипликативные функции, позволяющие представить зависимую переменную в виде произведения факторных переменных, обращающего его в нуль при отсутствии действия хотя бы одного фактора.

Используются также сепарабельные функции которые дают возможность выделить влияние различных факторных переменных на зависимую переменную, и в частности, аддитивные функции, представляющие одну и ту же зависимую переменную как при суммарном, но раздельном воздействии нескольких факторов, так и при одновременном их воздействии.

Пример:



$s(p)$- кривая предложения, $q(p)$- кривая спроса.

Рассматривая в одной системе координат кривые спроса и предложения, можно установить равновесную (рыночную цену) данного товара в процессе формирования цен в условиях конкурентного рынка (*паутинообразная модель:* $q(p)=s(p)$.

Существуют и другие функции, например, функция Торнквиста – функция спроса на различные товары от малоценного до товаров роскоши; функция Кобба-Дугласа $V = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$, $\alpha_1+\alpha_2=1$, K – капитал, L - трудовые ресурсы.

§ 5.2 Предел, непрерывность функций

5.2.1 Предел числовой последовательности

Определение. Если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вполне определенное число a_n, то говорят. Что задана *числовая последовательность* $\{a_n\}$: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Числовая последовательность – это функция натурального аргумента: $a_n = f(n)$.Числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называются членами последовательности, а число a_n - общим или n-м членом данной последовательности.

Определение. Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если для любого , даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N (зависящий от ε, $N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номером $n > N$ верно неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

или $a_n \to A$ при $n \to \infty$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

5.2.2 Предел функции

Определение. Постоянное число a называется пределом переменной величины x, если для каждого наперед заданного произвольно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое значение переменной x, что все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству $|x-a| < \varepsilon$, и обозначается $\lim x = a$ или $x \to a$.

Пример:

Переменная величина x последовательно принимает значения

$x_1 = 1+1,\ x_2 = 1+\frac{1}{2},\ x_3 = 1+\frac{1}{3},\ \ldots,\ x_n = 1+\frac{1}{n},\ \ldots$

Докажем, что эта переменная величина имеет предел, равный единице. Имеем $|x_n - 1| = \left|(1+\frac{1}{n})-1\right| = \frac{1}{n}$. Для любого ε все последующие значения переменной начиная с номера n, где $\frac{1}{n} < \varepsilon$, или $n > \frac{1}{\varepsilon}$ будут удовлетворять неравенству $|x_n - 1| < \varepsilon$. Что и требовалось доказать.

Замечание:

1. Постоянную величину C часто рассматривают как величину переменную, все значения которой одинаковы: $x = C$.

2. Переменная величина не может иметь двух пределов.
3. Не следует думать, что каждая переменная величина имеет предел.

Определение. Переменная x стремится к бесконечности, если для каждого наперед заданного положительного числа M можно указать такое значение x, начиная с которого все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству $|x| > M$.

Если переменная x стремится к бесконечности, то ее называют *бесконечно большой* переменной величиной и пишут $x \to \infty$.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки a или в некоторых точках этой окрестности. Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b ($y \to b$) при x, стремящемся к a ($x \to a$), если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно указать такое положительное число δ, что для всех x, отличных от a и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Предел функции обозначается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Замечание:

1. Если функция $f(x)$ стремится к пределу b_1 при $x \to a$ так, что x принимает только значения, меньшие a, то пишут $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$ и называют b_1 *пределом функции $f(x)$ в точке a слева*. Если x принимает только значения большие, чем a, то пишут $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$ и называют b_2 *пределом функции $f(x)$ в точке a справа*. Если пределы справа и слева существуют и равны, т.е. $b_1 = b_2 = b$, то b и будет пределом функции в точке a. Обратное утверждение также справедливо.
2. Для существования предела функции при $x \to a$ не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = a$.
3. Зная смысл символов $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, очевидным является и смысл выражений:

«$f(x)$ стремится к b при $x \to +\infty$» и «$f(x)$ стремится к b при $x \to -\infty$», которые символически записываются так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Определение. Функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$, т.е. является бесконечно большой величиной при $x \to a$, если для каждого положительного числа M, как бы велико оно ни было, можно найти такое положительное число δ, что для всех x, отличных от a и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)| > M$. Если функция стремится к бесконечности при $x \to a$, то пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ или } f(x) \to \infty \text{ при } x \to a.$$

Если $y = f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$ и при этом принимает только положительные или отрицательные значения, соответственно пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Если $y = f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to \infty$, то пишут

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

и, в частности, может быть: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Функция $y = f(x)$ при $x \to a$ или $x \to \infty$ может не стремиться к конечному пределу или к бесконечности.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной при $x \to a$, если существует окрестность с центром в точке a, в которой данная функция ограничена.

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной при $x \to \infty$, если существует такое число $N > 0$, что при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, функция $f(x)$ ограничена.

Теорема. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, при этом b есть конечное число, то функция $f(x)$ является ограниченной при $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq 0$, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ есть ограниченная функция при $x \to a$.

Определение. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ или при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.

Пример: Функция $\alpha = (x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x \to 1$, так как

$$\lim_{x\to 1} \alpha(x) = \lim_{x\to 1} (x-1)^2 = 0$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ представляется в виде суммы постоянного числа b и бесконечно малой α: $y = b + \alpha$, то $\lim y = b$ при $x \to a$ или $x \to \infty$.

Обратно, если $\lim y = b$, то можно написать $y = b + \alpha$, где α - бесконечно малая.

Теорема. Если $\alpha = \alpha(x)$ стремится к нулю при $x \to a$ или $x \to \infty$ и не обращается в нуль, то $y = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ стремится к бесконечности.

Теорема. Алгебраическая сумма двух, трех и вообще определенного числа бесконечно малых есть функция бесконечно малая.

Произведение функции бесконечно малой $\alpha = \alpha(x)$ на функция ограниченную $z = z(x)$ при $x \to a$ или $x \to \infty$ есть величина (функция) бесконечно малая.

Частное $\dfrac{\alpha(x)}{z(x)}$ от деления величины бесконечно малой $\alpha(x)$ на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

Следствие.

1. Если $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$, то $\lim \alpha\beta = 0$, так как $\beta(x)$ есть величина ограниченная.
2. Если $\lim \alpha = 0$ и $C = const$, то $\lim C\alpha = 0$.

5.2.3 Основные теоремы о пределах

1. Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще определенного числа переменных равен алгебраической сумме пределов этих переменных:

$$\lim(u_1+u_2+...+u_k)=\lim u_1+\lim u_2+...+\lim u_k$$

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x}{x^3}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x_2})=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x_2}=1+0=1$$

2. Предел произведения двух, трех и вообще определенного числа переменных равен произведению пределов этих переменных:

$$\lim u_1\cdot u_2\cdot...\cdot u_k=\lim u_1\cdot\lim u_2\cdot...\cdot\lim u_k$$

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim C\cdot u=C\cdot\lim u,\ C=Const.$$

3. Предел частного двух переменных равен частному пределов этих переменных, если предел знаменателя отличен от нуля.

$$\lim\frac{u}{v}=\frac{\lim u}{\lim v},\ \text{если}\ \lim v\neq 0$$

Пример:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^3+3x}{x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(6x^3+3x)}{\lim\limits_{x\to1}(x+2)}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to1}(2x^3+x)}{\lim\limits_{x\to1}x+2}=\dfrac{9}{3}=3$

2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$

4. Если между соответствующими значениями трех функций $u=u(x)$, $v=v(x)$, $z=z(x)$ выполняются неравенства $u\le z\le v$, причем $u=u(x)$, $v=v(x)$ стремятся к одному и тому же пределу b при $x\to a$ или $x\to\infty$, то $z=z(x)$ при $x\to a$ или $x\to\infty$ стремится к тому же пределу.

5. Если при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция y принимает неотрицательные значения $y\ge 0$ и при этом стремится к пределу b, то b есть неотрицательное число: $b\ge 0$.

6. Если между соответствующими значениями двух функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$, стремящихся к пределам при $x\to a$ или $x\to\infty$, выполняется неравенство $v\ge u$, то имеет место $\lim v\ge\lim u$.

7. Если переменная величина v возрастающая, т.е. всякое ее последующее значение больше предыдущего, и если она ограничена, т.е. $v<M$, то эта переменная величина имеет предел $\lim v=a$, где $a\le M$.

5.2.4 Замечательные пределы

1. *Первым замечательным пределом* называется $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Из первого замечательного предела следуют:

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{x}{\arcsin x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{tgx}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{arctgx}{x}=1$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ 3x\to 0}}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{tg\,x}{x}}{\frac{\arcsin x}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \frac{x}{2}\to 0}}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{2}{2^2}=\dfrac{1}{2}$

2. Числом e (*вторым замечательным пределом*) называется предел числовой последовательности $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$

Функция $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$ (где x пробегает все значения числовой оси – не только целые) имеет предел, равный числу e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Полагая $y=\dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{1}{y}$ при $x\to\infty$ $y\to 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e}$

Из второго замечательного предела следуют:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1:$ $\left|\begin{array}{c} e^x-1=y\Rightarrow e^x=1+y\Rightarrow x=\ln(1+y)\\ x\to 0\Rightarrow y=e^o-1\to 0\\ \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=1\end{array}\right|$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a:$ $\left|a^x-1=y\Rightarrow x=\dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}\right|$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu:$ $\left|\begin{array}{c}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\dfrac{e^{\ln(1+x)^\mu}-1}{x}=\\ \dfrac{e^{\ln(1+x)^\mu}-1}{\ln(1+x)^\mu}\cdot\dfrac{\ln(1+x)^\mu}{x}\end{array}\right|$

Рассмотрим задачу о непрерывном вычислении процентов.

Первоначальный вклад в банк составил Q_0 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно $p\%$ годовых. Необходимо найти размер вклада Q_t через t лет.

При использовании простых процентов размер вклада ежегодно будет увеличиваться на одну и ту же величину $\dfrac{p}{100}Q_0$, т.е.

$Q_1=Q_0\cdot\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$, $Q_2=Q_0\cdot\left(1+\dfrac{2p}{100}\right)$, …, $Q_t=Q_0\cdot\left(1+\dfrac{pt}{100}\right)$

На практике значительно чаще применяются сложные проценты. В этом случае размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз, т.е. $Q_1 = Q_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$, $Q_2 = Q_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^2$, …, $Q_t = Q_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^t$

Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а n раз, то при том же ежегодном приросте $p\%$ процент начисления за $\frac{1}{n}$-ю часть года составит $\frac{p}{n}$%, а размер вклада за t лет при nt начислениях составит $Q_t = Q_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}$.

Будем полагать, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие ($n=2$), ежеквартально ($n=4$), ежемесячно ($n=12$), каждый день ($n=365$) и т.д., непрерывно ($n\to\infty$). Тогда размер вклада за t лет составит

$$Q_t = \lim_{n\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100\cdot n}\right)^{nt}\right] = Q_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100\cdot n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}} = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

$Q_t = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}$ - выражает показательный (экспоненциальный) закон роста (при $p>0$) или убывания (при $p<0$). Она может быть использована при непрерывном начислении процентов.

Пример:

Рассмотрим таблицу, где приводятся размеры вкладов Q_t при $Q_0 = 1$ ден.ед., $p = 5\%$, t=20 лет.

	Формула простых процентов	Формула сложных процентов					Формула непрерывного начисления процентов
		n=1	n=2	n=4	n=12	n=365	
Размер вклада, ден.ед.	2,0000	2,6355	2,6851	2,7015	2,7126	2,7181	2,7182

Погрешность вычисления суммы вклада по формуле непрерывного начисления процентов по сравнению с формулой сложных процентов, начисляемых ежегодно при одной и той же процентной ставке $p = 5\%$ оказалась незначительной (около 2,5%).

Замечание: Хотя на практике непрерывное начисление процентов применяется редко, оно оказывается весьма эффективным при анализе сложных финансовых проблем, в частности, при обосновании и выборе инвестиционных решений.

5.2.5 Непрерывность функции

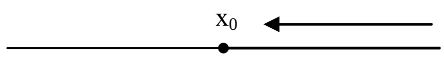
Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* при значении $x = x_0$ (или в точке x_0), если она определена в некоторой окрестности точки x_0 (и в самой точке x_0) и если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Теоремы.

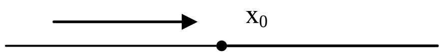
1. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то сумма этих функций есть также непрерывная функция в точке x_0.
2. Произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная.
3. Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная, если знаменатель в рассматриваемой точке не обращается в нуль.
4. Если $u = \varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.
5. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Определение. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (а,в), где а<в, то говорят, что функция *непрерывна на этом интервале.*

Если функция определена при $x = x_0$ и при этом $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то говорят , что функция непрерывна справа в точке $x = x_0$



Если функция определена при $x = x_0$ и при этом $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, то говорят , что функция непрерывна слева в точке $x = x_0$



Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (а,в) и непрерывна на концах интервала, соответственно справа и слева, то говорят, что функция непрерывна на замкнутом интервале или отрезке $[a,b]$.

Если в какой-то точке $x = x_0$ для функции $y = f(x)$ не выполняется по крайней мере одно из условий непрерывности, т.е. если при $x = x_0$ функция не определена или не существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то функция *разрывна*, а точка $x = x_0$ в это случае называется *точкой разрыва*.

Если функция $y = f(x)$ такова, что существуют конечные пределы $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, но или $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, или значение функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ не определено, то $x = x_0$ называется *точкой разрыва 1-го рода.*

Теорема.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a,b]$ $(a \le x \le b)$, то на отрезке $[a,b]$ найдется по крайней мере одна точка $x = x_1$ такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению $f(x_1) \ge f(x)$, где x - любая другая точка отрезка, и найдется по крайней мере одна точка x_2 такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению $f(x_2) \le f(x)$.

$f(x_1)$- наибольшее значение функции на отрезке $[a,b]$, $f(x_2)$ - наименьшее значение функции на отрезке $[a,b]$.

Теорема.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками а и в найдется по крайней мере одна точка $x = c$, в которой функция обращается в нуль $f(c) = 0$, $(a < c < b)$.

Теорема.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $[a,b]$. Если на концах отрезка функция принимает неравные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то каково бы ни было число μ, заключенное между A и B, найдется такая точка $x = c$, заключенная между точками а и в, что $f(c) = \mu$.

Сравнение бесконечно малых

1. Если отношение $\dfrac{\beta}{\alpha}$ имеет конечный и отличный от нуля предел, т.е. если $\lim\dfrac{\beta}{\alpha} = A \ne 0$, а следовательно $\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1}{A} \ne 0$, то бесконечно малые β и α называются *бесконечно малыми одного порядка.*

2. Если отношение двух бесконечно малых $\dfrac{\beta}{\alpha}$ стремится к нулю, т.е. $\lim\dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, а ($\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$), то бесконечно малая β называется бесконечно малой величиной высшего порядка, чем бесконечно малая α, а бесконечно малая α называется бесконечно малой низшего порядка, чем бесконечно малая β.

3. Бесконечно малая β называется бесконечно малой k-го порядка относительно бесконечно малой α, если β и α^k - бесконечно малые одного порядка.

4. Если отношение двух бесконечно малых $\dfrac{\beta}{\alpha}$ стремится к единице, т.е. $\lim\dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, то бесконечно малые β и α называются эквивалентными бесконечно малыми и пишут $\alpha \approx \beta$.

5.2.6 Раскрытие неопределенностей при нахождении пределов

I. *Неопределенность вида* $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \begin{vmatrix} n=3 \\ m=3 \end{vmatrix} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1+\frac{1}{x^3})}{x^3(2+\frac{1}{x^3})} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x^3})}{(2+\frac{1}{x^3})} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x^3})} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+0)}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+0)} = \frac{1}{2};$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-5x^5}{x^6+4}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{matrix}n=7\\ m=6\end{matrix}\right\}\Rightarrow \max=7\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7(1-\frac{5}{x^2})}{x^7(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^7})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-\frac{5}{x^2})}{(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^7})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-0)}{(0+0)}=\infty$;

3)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+4}{1-x^3-x^4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{matrix}n=3\\ m=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow \max=4\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^4})}{x^4(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x}-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^4})}{(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x}-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{0}{-1}=0$$

Замечание: При раскрытии неопределенности типа $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$**:**

1) если $n=m$ предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}$ равен постоянному числу $\dfrac{a_0}{b_0}$;

2) если $n>m$ предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}$ равен ∞;

3) если $n<m$ предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}$ равен 0.

II. *Неопределенность вида* $\left|\dfrac{0}{0}\right|$

4)

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{2+x}-3)(\sqrt{2+x}+3)}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)}=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x})^2-3^2}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)}=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{2+x}+3}=\frac{1}{6}$$

5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{5x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|т.к.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{5\cdot\frac{3}{3}x}=\frac{3}{5}\lim_{3x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{3x}=\frac{3}{5};$$

III. *Неопределенность вида* $\left|1^\infty\right|$ или $\left|(\dfrac{\infty}{\infty})^\infty\right|$

6)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1-2}{2x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^x=\left|\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-2}\cdot\frac{-2}{2x+1}\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2x+1}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2}{2x+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2}{2x+1}\cdot x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x+2}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(\frac{x+2}{2})^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left|\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e\right|=$$

$$=\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$$

§5.3 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП)

СРСП 8

Найти пределы функции, не пользуясь правилом Лопиталя.

Вариант 1

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{x^3+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x^3+7}{x+2}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}$

Вариант 2

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-6x^2+5x^5}{x^6-5x^5+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+4}{1-x^3-x^4}$ 4) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$

Вариант 3

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6-7x^7+8}{1-x^5}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{x^3-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+5)-\ln 5}{5x}$

Вариант 4

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+6}{5x^5-x^7+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+6x-4}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctgx}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{x}$

Вариант 5

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+3}{x^4+3x^3+2}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x-4}{x-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2^x-1}$.

Вариант 6

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+3x+5x^4}{x^4-12x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-7}{x^3-2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+3}{x^4+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctg\,2x}{\sin 3x}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

Вариант 7

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x+3}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln x]$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2-1}{x}$.

Вариант 8

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x+9}{x^2+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+5x^3+x+5}{x^6-x^7-7}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; 4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot tg2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x-1}{1-2^x}$

Вариант 9

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x+7}{x^3-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x^3-4x^2+1}{x^2+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx}{\sin x}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{3}{x})^x$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-7^x}{x}$.

Вариант 10

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+1}{7-x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+7}{x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-16}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{arctgx}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+7x+4}{x^2+2x+1})^x$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-8^x}{x}$.

Вариант 11

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-7x}{5x-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+4}{x^5-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x^3+8}{x+7}$; 4) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2-7x+10}$

5) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx})$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{5x-7}{5x+2})^x$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+4)-\ln 4}{x}$.

Вариант 12

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^3+1}{2x^3+1+3x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-6x^4+5}{x^4-4x^3+7}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{1-x^3-x^4}$; 4) $\lim\limits_{x\to14}\dfrac{4-\sqrt{2+x}}{x-14}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{5x-2}{7+5x})^{5x}$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\ln(x+3)-\ln 3}$.

Вариант 13

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{5x^2-2x+1}{x^2-4x+2})^x$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$.

Глава 6
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 6.1 Производная функции

6.1.1 Определение производной функции

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная в некотором промежутке. При каждом значении аргумента x из этого промежутка функция $y = f(x)$ имеет определенное значение.

1.дадим аргументу x приращение Δx

2. тогда функция получит приращение Δy.

Таким образом, при значении x будем иметь $y = f(x)$, при значении аргумента $x + \Delta x$ будем иметь $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

3. найдем приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x)$

4. составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

5. найдем предел этого отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$

Если этот предел существует, то его называют производной данной функции.

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее произвольным образом стремится к нулю и обозначается

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Производная функции $f'(x)$ является также функцией от x.

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения: $y', y'_x, \dfrac{dy}{dx}$. Конкретное значение производной при $x = a$ обозначается $f'(a)$ или $y'|_{x=a}$. Операция нахождения производной от функции $y = f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Пример: Найти производные функций, используя определение производной:

1. $y = x^2$

а) в произвольной точке x

1) дадим аргументу x приращение Δx

2) тогда функция получит приращение Δy.

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$

3) найдем приращение функции $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

4) составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

5) найдем предел этого отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Отсюда следует, что производная $(x^2)' = 2x$

б) при $x = 3$. $(x^2)' = 2x = 2 \cdot 3 = 6$

2. $y = \sin x$

1) дадим аргументу x приращение Δx

2) тогда функция получит приращение Δy.

$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$

3)найдем приращение функции

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2}$$

4) составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$

5) найдем предел этого отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

Применим первый замечательный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2} \cdot 2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x$$

Отсюда следует, что производная $(\sin x)' = \cos x$

<u>6.1.2 Геометрическое значение производной</u>

Пусть дана функция $y = f(x)$

Возьмем фиксированную точку $M_0(x_0, y_0)$ и текущую точку $M_1(x_1, y_1)$:

$x_1 = x_0 + \Delta x$, $y_1 = y_0 + \Delta y$ $\Rightarrow$ $x_1 - x_0 = \Delta x$, $y_1 - y_0 = \Delta y$

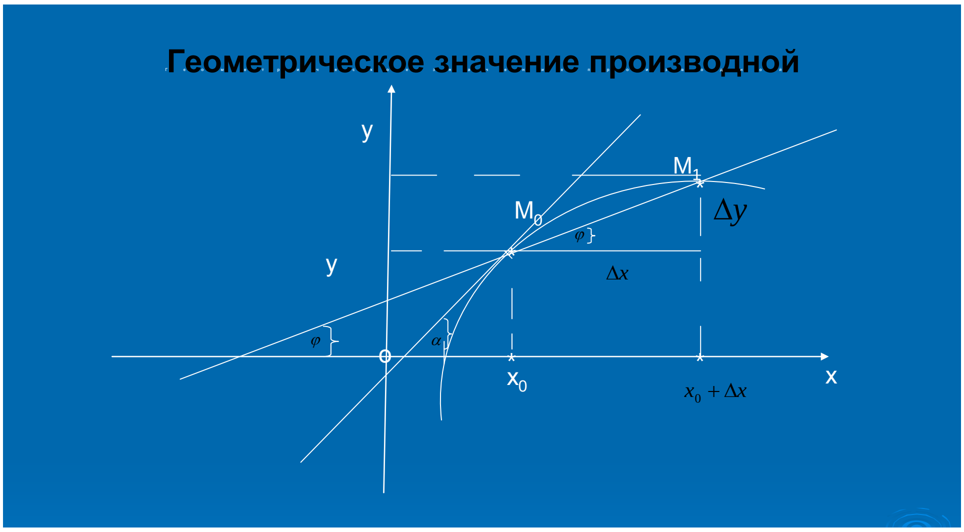
Проведем прямую M_0M_1 - секущая, которая при пересечении с положительным направлением оси Ox образует угол φ.

Рассмотрим образованный прямоугольный треугольник M_0M_1P. $\Rightarrow$ $tg\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Пусть $M_1 \to M_0$ $\Rightarrow$ $\Delta x \to 0$ $\Rightarrow$ секущая M_0M_1 $\to$ касательной $\Rightarrow \varphi \to \alpha$ $\Rightarrow$ $tg\varphi \to tg\alpha$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$$

Таким образом, $f'(x) = tg\alpha$, то есть значение производной $f'(x)$ при данном значении аргумента x равняется тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси Ox касательной к графику функции $y = f(x)$в соответствующей точке $M_0(x_0, y_0)$.



<u>Экономический смысл производной</u>

Издержки производства y – функция количества выпускаемой продукции x; Δx - прирост продукции; Δy - приращение издержек производства;

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ - среднее приращение издержек производства на единицу продукции.

Производная $f'(x)$ выражает предельные издержки производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции

1. Предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, и другие;
2. Соотношение между средним и предельным доходом;
3. Эластичность функции и ее свойства.

<u>Механический смысл производной</u>

$f'(x)$ – есть скорость движения в данный момент времени или скорость неравномерного движения

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

<u>6.1.3. Таблица основных формул дифференцирования</u>

1. $C = Const \quad (C)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
6. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
10. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
11. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$
12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
13. $(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x)$
14. $(u+v-w)' = u'+v'-w'$

15. $(uv)' = u'v + uv'$

16. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

17. Если $\left.\begin{matrix} y = f(u) \\ u = \varphi(x) \end{matrix}\right\}$ - сложная функция $\Rightarrow$ $y'_x = f'_u \cdot \varphi'_x(x)$

18. Если $y = f(x), x = \varphi(y) \Rightarrow$
$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$

19. $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

20. Гиперболические функции

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad shx = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$thx = \frac{shx}{chx}, \quad cthx = \frac{chx}{shx}, \quad ch^2x - sh^2x = 1$$

$$sh'x = chx, \quad ch'x = shx, \quad th'x = \frac{1}{ch^2x},$$

$$cth'x = -\frac{1}{sh^2x}$$

6.1.4.Производные элементарных функций. Производная сложной, параметрически заданной, неявной, сложно-показательной функций.

Производные элементарных функций:

1) $y' = (x^4 - \sqrt{x} + 5)' = (x^4)' - (x^{\frac{1}{2}})' + (5)' = 4x^3 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 0 = 4x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $y' = (2^x + \sin x - \frac{5}{x})' = (2^x)' + (\sin x)' - (\frac{5}{x})' = 2^x \ln 2 + \cos x - 5 \cdot (x^{-1})' =$

$= 2^x \ln 2 + \cos x - 5 \cdot (-1 \cdot x^{-1-1}) = 2^x \ln 2 + \cos x + \frac{5}{x^2}.$

3) $y' = (7tgx \cdot e^x)' = 7 \cdot \left[(tgx)' \cdot e^x + tgx \cdot (e^x)'\right] = 7 \cdot \left[\frac{e^x}{\cos^2 x} + e^x tgx\right] = 7e^x \cdot \left[\frac{1}{\cos^2 x} + tgx\right].$

4) $y' = (\frac{\cos x}{1+x^3})' = \frac{(\cos x)'(1+x^3) - \cos x(1+x^3)'}{(1+x^3)^2} = \frac{\sin x(1+x^3) - \cos x(3x^2)}{(1+x^3)^2}$

Производные сложной функции:

5) $y' = (\sin^3(4x-5))' = 3\sin^2(4x-5) \cdot (\sin(4x-5))' = 3\sin^2(4x-5) \cdot \cos(4x-5) \cdot (4x-5)' =$

$= 3\sin^2(4x-5) \cdot \cos(4x-5) \cdot (4) = 12\sin^2(4x-5) \cdot \cos(4x-5)$

6) $y' = (arctgx^2)' = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}$

7) $y' = (\ln\cos 7x)' = \frac{1}{\cos 7x} \cdot (\cos 7x)' = \frac{-\sin 7x}{\cos 7x} \cdot (7x)' = -7tg7x$

Производные неявной функции:

8) $y^3 + x^2 = \sin x$

$(y^3)' + (x^2)' = (\sin x)'$

$3y^2 y' + 2x = \cos x$

$3y^2 y' = \cos x - 2x$

$y' = \frac{\cos x - 2x}{3y^2}$

9) $y = x + arctgy$

$y' = x' + (arctgy)'$

$y' = 1 + \frac{1}{1+y^2} \cdot y'$

$y' - \frac{1}{1+y^2} \cdot y' = 1$

$y'(1 - \frac{1}{1+y^2}) = 1$

$y'(\frac{y^2}{1+y^2}) = 1$

$y' = \frac{1+y^2}{y^2}$

10) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

$(\sqrt{x})' + (\sqrt{y})' = (\sqrt{a})'$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} y' = 0$

$\frac{1}{2\sqrt{y}} y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \div \frac{1}{2\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

Производные сложно-показательной функции:

11) $y = x^x$

прологарифмируем обе стороны

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \cdot \ln x$

а теперь найдем производную неявной функции:

$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)'$

$\frac{1}{y} \cdot y' = (x)' \ln x + x(\ln x)'$

$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$

$y' = y(\ln x + 1)$

$y' = x^x(\ln x + 1)$

12) $y = tgx^{2x}$

$\ln y = \ln tgx^{2x}$

$\ln y = 2x \cdot \ln tgx$

$(\ln y)' = (2x \cdot \ln tgx)'$

$\frac{1}{y} \cdot y' = (2x)' \ln tgx + 2x(\ln tgx)'$

$\frac{1}{y} \cdot y' = 2\ln tgx + 2x\frac{1}{tgx} \cdot (tgx)' = 2\ln tgx + \frac{2x}{tgx \cdot \cos^2 x}$

$y' = y(2\ln tgx + \frac{2x}{\sin x \cdot \cos x})$

$y' = (tgx)^{2x}(2\ln tgx + \frac{4x}{\sin 2x})$

Производные функции, заданной параметрически:

13) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $\quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}ctgt$

14) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ $\quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1 - 3t^2}{-2t}$

15) $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ $\quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$

§ 6.2 Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Производная этой функции определяется равенством

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \text{, где } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

так как в общем случае $f'(x) \neq 0$, то при постоянном x и переменном $\Delta x \to 0$ произведение $f'(x)\Delta x$ есть бесконечно малая величина первого порядка относительно Δx. Произведение же $\alpha \cdot \Delta x$ есть бесконечно малая величина высшего порядка относительно Δx, так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

Таким образом, приращение Δy состоит из двух слагаемых, из которых первое слагаемое есть главная часть приращения, линейная относительно Δx. Произведение $f'(x)\Delta x$ называют *дифференциалом функции* и обозначают через dy или $df(x)$.

$$dy = f'(x)dx$$

Найдем дифференциал функции $y = x$.

$$dy = dx = \Delta x$$

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

Пример:

$y = \arcsin x$; $\quad dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

Задача нахождения дифференциала функции равносильна нахождению производной, так как, умножив последнюю на дифференциал аргумента, получим дифференциал функции. Так, например:

$d(u + v) = du + dv$

$d(uv) = udv + vdu$ и т.д.

Дифференциал сложной функции:

$y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, или $y = f(\varphi(x)) \Rightarrow dy = f'(u)du$

§ 6.3 Приложение производной

Теорема Ферма. Если дифференцируемая на промежутке X функция $y = f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) дифференцируема на интервале (a, b);
3) на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная функции равна нулю: $f'(\xi) = 0$.

<u>Теорема Лагранжа.</u> Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:
1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируема на интервале (a,b);
Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a,b)$, в которой производная равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке, т.е.: $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

<u>Правило Лопиталя.</u> Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.

Итак, если имеется неопределенность вида $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$ или $\left|\dfrac{0}{0}\right|$, то

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

<u>Примеры:</u> 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \dfrac{2}{1} = 2$

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{ax^2 + b}{cx^2 - d} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2ax}{2cx} = \dfrac{a}{c}$

§ 6.4 Производные и дифференциалы различных порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a,b]$.

<u>Определение.</u> Производная от первой производной называется *производной второго порядка* или второй производной от первоначальной функции $y = f(x)$ и обозначается символом y'' или $f''(x)$:

$$y'' = (y')' = f''(x)$$

Производная от второй производной называется производной третьего порядка или третьей производной и так далее. Вообще, *производной n-го порядка* от функции $y = f(x)$ называется производная (первого порядка) от производной (n-1)-го порядка и обозначается символом $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x)$$

Порядок производной берется в скобки для того, чтобы его не принять за показатель степени. Производные четвертого и выше порядков иногда обозначают римскими цифрами: y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, …

<u>Примеры:</u>

1. Найти производные высших порядков функции $y = x^3$

$y' = 3x^2$, $y'' = (3x^2)' = 6x$, $y''' = (6x)' = 6$, $y^{(4)} = (6)' = 0$

2. Найти n-ую производную функции $y = e^{kx}$ ($k = const$).

$y' = ke^{kx}$

$y'' = (ke^{kx})' = k^2 e^{kx}$

……………….

$y^{(n)} = k^n e^{kx}$

3. Найти n-ую производную функции $y = \sin x$.

$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$y'' = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$

$y''' = -\cos x = \sin(x + 3\frac{\pi}{2})$

………………………

$y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

Приведем некоторые правила дифференцирования для производных n-го порядка:

$(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$

$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + ... + uv^{(n)}$ - *формула Лейбница.*

Производная второго порядка функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

Пример:

Найти производную второго порядка от неявной функции $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Дифференцируем по x все члены этого равенства, учитывая, что y есть функция от x: $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$

Дифференцируем снова по x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y + x\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}}{y^2}$$

После упрощения: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}$

Так как $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$

Определение. Пусть имеем функцию $y = f(x)$, где x - независимая переменная. Дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$.

Дифференциал от дифференциала функции называется *вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка* и обозначается

$$d(dy) = d^2y,$$

так как $d(dy)=\left[f'(x)dx\right]' dx = f''(x)(dx)^2$

Принято, записывая степень дифференциала, опускать скобки, например,

$$(dx)^2 = d^2x,\ (dx)^3 = d^3x \text{ и т.д.}$$

Вообще, *дифференциалом n-го порядка* называется первый дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка:

$$d(d^{n-1}y) = d^n y$$

Дифференциал второго порядка от сложной функции $y = F(u)$, $u=\varphi(x)$

$$dy = F'_u(u)du$$

$$d^2y = d(F'_u(u)du)$$

но здесь $du=\varphi'(x)dx \ \Rightarrow \ d^2y = d(F'_u(u))du + F'_u(u)d(du) = F''_{uu}(u)(du)^2 + F'_u(u)d^2u$,

где $d^2u = \varphi''(x)(dx)^2$

§ 6.5 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП)

СРСП 9

Найти производные функций:

№1 1. $y = 3\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{x^3} + \sqrt[3]{3}$ 2. $y = \ln 2x + e^{2x}$ 3. $y = \dfrac{1}{\cos(1-x^2)}$

4. $x^y + y^x = 4^x$ 5. $y = (\sin x + 1)^x$

№2 1. $y = x^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$ 2. $y = \dfrac{x^3 - 4x}{2^x}$ 3. $y = \sqrt{ctg\,2x}$

4. $\arcsin\dfrac{x}{y} - y = x$ 5. $y = (x+1)^{\frac{1}{x}}$

№3 1. $y = \dfrac{4}{x+1} + (x+1)^2$ 2. $y = arctg\sqrt{x}$ 3. $y = x^3(\ln x + 4)$

4. $\ln x + \ln y = \ln 5 + \ln\dfrac{y}{x}$ 5. $y = (5x^2)^{\sin x}$

№4 1. $y = \dfrac{7}{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}$ 2. $y = \arcsin\sqrt{x}$ 3. $y = \cos^3 x - 3ctgx + 3$

4. $\sin x + \sin y = \sin xy$ 5. $y = (7x^4)^x$

№5 1. $y = \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{7}{x^6} - \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}$ 2. $y = \dfrac{1}{7}ctg^7 x$ 3. $y = \dfrac{1}{\sin(1-x)}$

4. $y^3 - 2x^2y + y + 4 = 0$ 5. $y = (\cos 4x)^{\sin x}$

№6 1. $y = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{5}$ 2. $y = \dfrac{arctgx}{x}$ 3. $y = \sin^4(x-1)$

4. $y^4 - 4y + 2x = 0$ 5. $y = (x^2 - 2x + 7)^x$

№7 1. $y = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x}} + x\sqrt{x} + 3$ 2. $y = 3\sin^2 x - \sin^3 x$ 3. $y = 2^{3x^2-2}$

4. $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$ 5. $y = (x)^{\frac{1}{x}}$

№8 1. $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$ 2. $y = \sin 2x + \cos 2x$ 3. $y = arctgx^2$

4. $y = 1 + xe^y$ 5. $y = (\ln x)^{3x}$

№9 1. $y = ax^2 + bx + c$ 2. $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$ 3. $y = \arcsin \dfrac{2}{x}$

4. $tg\dfrac{y}{2} = tg\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$ 5. $y = (4x)^{\ln x}$

№10 1. $y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 2. $y = \dfrac{1}{4} tg^4 x$ 3. $y = \dfrac{1}{\ln(1-x)}$

4. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$ 5. $y = (\sin 3x)^{\cos x}$

№11 1. $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x} + \sqrt{x}$ 2. $y = \dfrac{x \sin x}{1 + tgx}$ 3. $y = \arccos \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$

4. $y = x + arctgy$ 5. $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$

№12 1. $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}$ 2. $y = \dfrac{tgx}{x}$ 3. $y = arctg(x-1)$

4. $y^3 - 3y + 2x = 0$ 5. $y = (x)^{x^2}$

№13 1. $y = \sqrt{3 - 4x + 5x^2}$ 2. $y = x^2 \ln^3 x$ 3. $y = \arcsin\sqrt{1-3x}$

4. $y = \cos(x - y)$ 5. $y = (\dfrac{1}{\sin x})^x$

№14 1. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 2. $y = 3\cos^3 x - arctgx$ 3. $y = x^3 \ln x$

4. $\dfrac{y}{x} = arctg\dfrac{x}{y}$ 5. $y = (x)^{\frac{1}{\sin x}}$

№15 1. $y = 3\sqrt{7x - 4x^2 + 2}$ 2. $y = 5^x(x^2 - 1)$ 3. $y = \dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$

4. $(e^x - 1)(e^y - 1) = 0$ 5. $y = (tgx)^{\frac{1}{x}}$

№16 1. $y = 2\sqrt{4x+3}$ 2. $y = \ln\sin(2x+5)$ 3. $y = \dfrac{1}{tg^2 2x}$

4. $\dfrac{y}{x} - xy = \sin x$ 5. $y = (x)^{-tgx}$

№17 1. $y = \dfrac{5x^4}{3} + \sqrt[4]{x} + 4$ 2. $y = (x+2)tg3x$ 3. $y = e^{-\cos x}$

4. $\ln y + x^2 y + \sqrt{x} = 2$ 5. $y = (x+2)^{\frac{1}{x+2}}$

№18 1. $y = \dfrac{3}{\sqrt{x^3 + x + 1}}$ 2. $y = x^2\sqrt{1 - x^2}$ 3. $y = (e^{\cos x} + 3)^2$

4. $x - y + arctgy = 0$ 5. $y = (x)^{\ln x}$

№19 1. $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + x^4 - 4$ 2. $y = \dfrac{\arcsin x}{x+1}$ 3. $y = \sqrt[3]{\ln^2 x}$

4. $6^x + 6^y = 6^2$ 5. $y = (6x^6)^x$

№20 1. $y = x\sqrt[3]{x} + 2^x$ 2. $y = (2^x + 2)^2$ 3. $y = \dfrac{x}{tgx}$

4. $y = x^3 + y^3$ 5. $y = (tgx)^{\sqrt{x}}$

СРСП 10

Найти $\frac{dy}{dx}$ для заданных функций: а) $y = f(x)$: б) $x = \varphi(t), \quad y = \Psi(t)$.

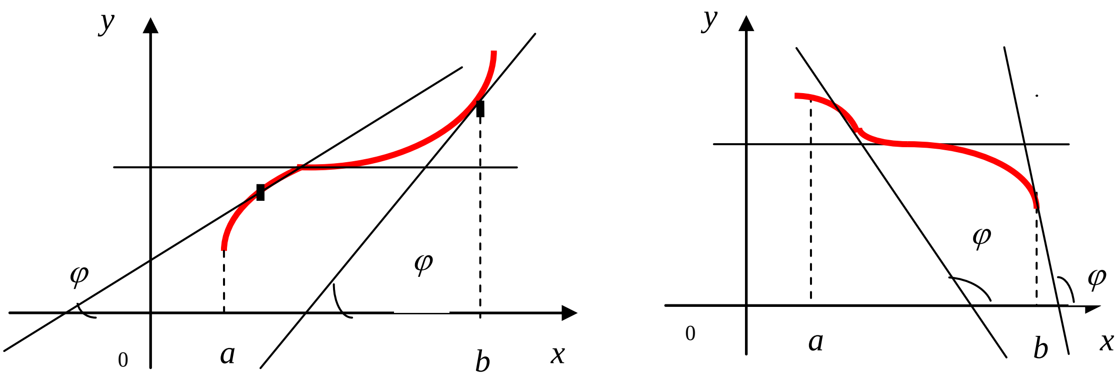
1. а) $y = x/(x^2 - 1)$; б) $x = \cos(t/2)$, $y = t - \sin t$;
2. а) $y = \ln ctg\,2x$; б) $x = t^3 + 8t$, $y = t^3 + 2t$;
3. а) $y = x^3 \ln x$; б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$;
4. а) $y = x arctg x$; б) $x = e^{2t}$, $y = \cos t$;
5. а) $y = arctg x$; б) $x = 3\cos^2 t$, $y = 2\sin^3 t$;
6. а) $y = x^3 \ln x$; б) $x = t^3 + 8t$, $y = t - \sin t$;
7. а) $y = x arctg x$; б) $x = \cos(t/2)$, $y = t^3 + 2t$;
8. а) $y = x/(x^2 - 1)$; б) $x = e^{2t}$, $y = 2\sin^3 t$;
9. а) $y = \ln ctg\,2x$; б) $x = \cos(t/2)$, $y = \cos t$;
10. а) $y = arctg x$; б) $x = 3\cos^2 t$, $y = 1 - \cos t$;

Глава 7
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

§7.1 Исследование функции с помощью первой производной

7.1.1 Возрастание и убывание функции

Теорема. 1) Если функция $f(x)$, имеющая производную на отрезке $[a,b]$, возрастает на этом отрезке, то ее производная на отрезке $[a,b]$ не отрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.
2) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в промежутке (a,b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то это функция возрастает на отрезке $[a,b]$.
Замечание: Доказанная теорема выражает следующий геометрический факт. Если на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в каждой точке на этом отрезке образует с осью Ox острый угол φ или – в отдельных точках – горизонтальна; тангенс этого угла не отрицателен: $f'(x) = tg\varphi \geq 0$ (рис. 7.1 а)). Если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a,b]$, то угол наклона касательной – тупой (или – в отдельных точках – касательная горизонтальна); тангенс этого угла не положителен (рис. 7.1 б).



а) б)

рис.7.1

Аналогично иллюстрируется и вторая часть теоремы. Теорема позволяет судить о возрастании или убывании функции по знаку ее производной.

Пример: Определить области возрастания и убывания функции $y = x^4$.
Решение. Производная равна $y' = 4x^3$; при $x > 0$ имеем $y' > 0$ - функция убывает

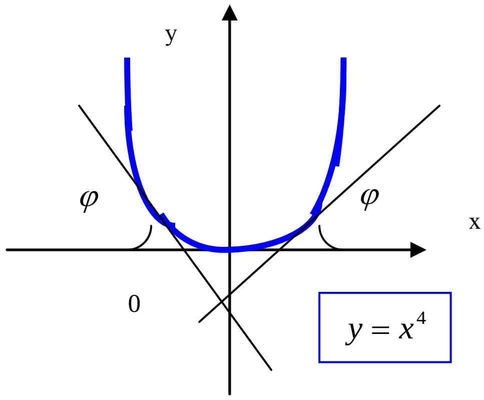


рис.7.2

7.1.2 Максимум и минимум функций

Определение максимума. Функция $f(x)$ в точке x_1 имеет максимум (maximum), если значение функции $f(x)$ в точке x_1 больше, чем ее значения во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Иначе говоря, функция $f(x)$ имеет максимум при $x = x_1$, если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ при любых Δx (положительных и отрицательных), достаточно малых по абсолютной величине.

Так, например, функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 7.3, имеет максимум при $x = x_1$.

Определение минимума. Функция $f(x)$ имеет минимум (minimum) при $x = x_2$, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любых Δx - как положительных, так и отрицательных, - достаточно малых по абсолютной величине (рис. 7.3).

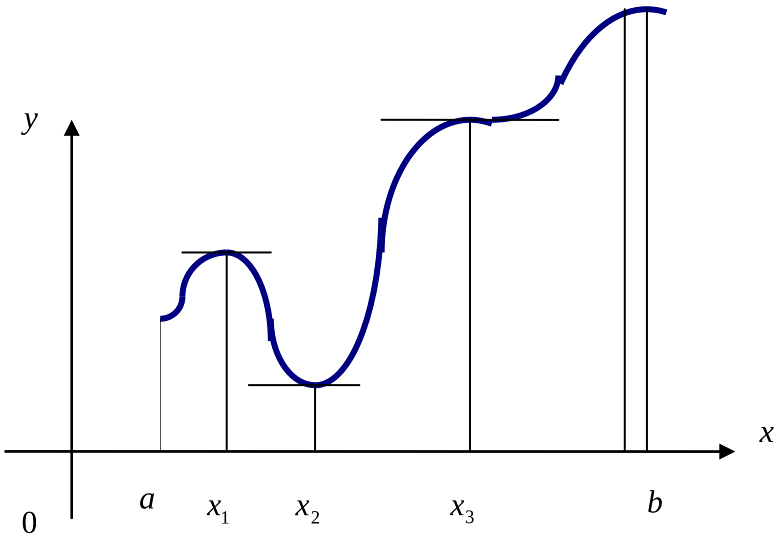


рис.7.3

Например, функция $y = x^4$, рассмотренная в конце предыдущего параграфа (см. рис. 7.2), при $x = 0$ имеет минимум, так как $y = 0$ при $x = 0$ и $y > 0$ при других значениях x.

В связи с определением максимума и минимума следует обратить внимание на следующие обстоятельства:

1. Функция, определенная на отрезке, может достигать максимума и минимума только при значениях x, заключенных внутри рассматриваемого отрезка.

2. Не следует думать, что максимум и минимум функции являются, соответственно, ее наибольшим и наименьшим значениями на рассматриваемом отрезке: в точке максимума функция имеет наибольшее значение лишь по сравнению с теми значениями, которые она имеет во всех точках, достаточно близких к точке максимума, а точке минимума – наименьшее значение лишь по сравнению с теми значениями, которые она имеет во всех точках, достаточно близких к точке минимума.

Так, на рис. 7.4 изображена функция, определенная на отрезке $[a, b]$, которая при $x = x_1$ и $x = x_3$ имеет максимум, при $x = x_2$ и $x = x_4$ имеет минимум, но минимум функции при $x = x_4$ больше максимума функции при $x = x_1$. При $x = b$ значение функции больше любого максимума функции на рассматриваемом отрезке.

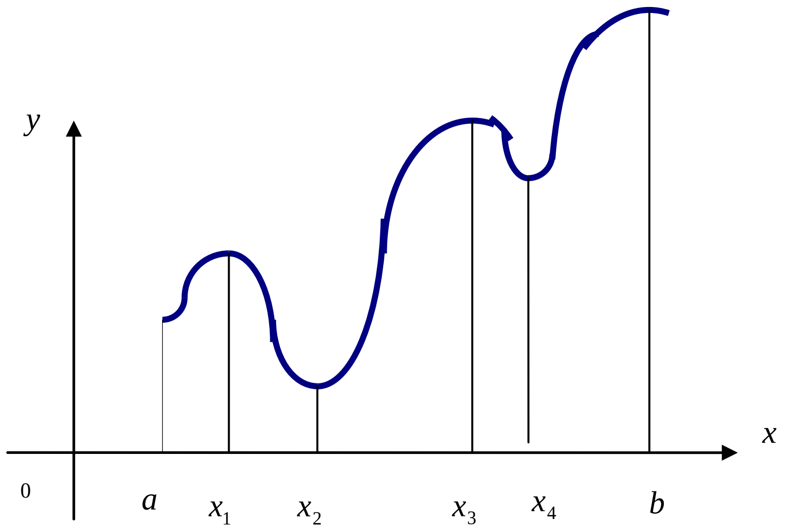


рис.7.4

Максимумы и минимумы функции называют *экстремумами* или экстремальными значениями функции.

Экстремальные значения функции и их расположение на отрезке $[a, b]$ в известной степени характеризуют изменение функции в зависимости от изменения аргумента.

<u>Теорема 1</u> (необходимое условие существование экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ максимум или минимум, то ее производная обращается в нуль в этой точке, т.е. $f'(x_1) = 0$.

Доказанной теореме соответствует следующий очевидный геометрический факт: если в точках максимума и минимума функция $f(x)$ имеет производную, то касательная к кривой $y = f(x)$ в этих точках параллельна оси Ox. Действительно, из того, что $f'(x_1) = tg\,\varphi = 0$, где φ - угол между касательной и осью Ox, следует, что $\varphi = 0$ (рис. 7.3).

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следствие: если при всех рассматриваемых значениях аргумента x функция $f(x)$ имеет производную, то она может иметь экстремум (максимум или минимум) только при тех значениях, при которых производная обращается в нуль. Обратное заключение неверно: не при всяком значении, при которых производная обращается в нуль, обязательно существует максимум и минимум. Так, на рис. 7.3 изображена функция, у которой $x = x_3$ производная обращается я в нуль (касательная горизонтальна), но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. Точно так же функция $y = x^3$ (рис. 7.5) при $x = 0$ имеет производную, равную нулю: $(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0$, но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно, как бы ни была близка точка x к точкеO, всегда $x^3 < 0$ при $x < 0$ и $x^3 > 0$ при $x > 0$.

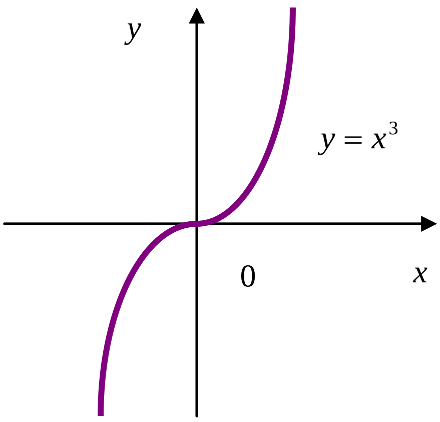


рис.7.5

Мы исследовали тот случай, когда функция во всех точках некоторого отрезка имеет производную. Как же обстоит дело в тех точках, где производная не существует? Мы покажем на примерах, что в таких точках может быть или максимум, или минимум, но может и не быть ни того, ни другого.

Пример 1: Функция $y = |x|$ не имеет в точке $x = 0$ (в этой точке кривая не имеет определенной касательной), но в этой точке данная функция имеет минимум: $y = 0$ при $x = 0$, тогда как для всякой точки x, отличной от нуля, имеем $y > 0$ (рис. 7.6).

Пример 2: Функция $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{3/2}$ не имеет производной при $x = 0$, так как $y' = -(1 - x^{\frac{2}{3}})^{1/2} x^{-1/3}$ обращается в бесконечность при $x = 0$, но в этой точке функция имеет максимум: $f(0) = 1,\ f(x) < 1$ при x, отличном от нуля (рис. 7.7)

Пример 3: Функция $y = \sqrt[3]{x}$ не имеет производной при $x = 0$ ($y' \to \infty$ при $x \to \infty$). В этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума: $f(0) = 0$; $f(x) < 0$ для $x < 0$; $f(x) > 0$ для $x > 0$ (рис. 7.8).

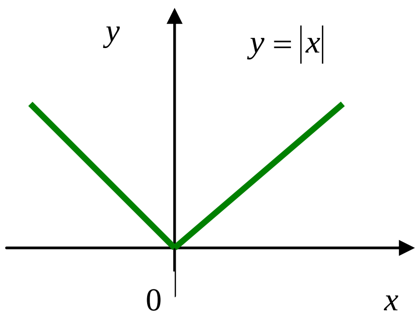


рис.7.6

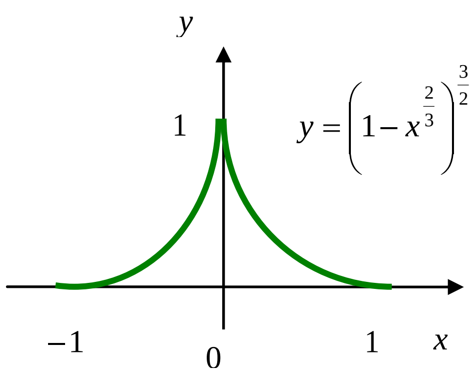


рис.7.7

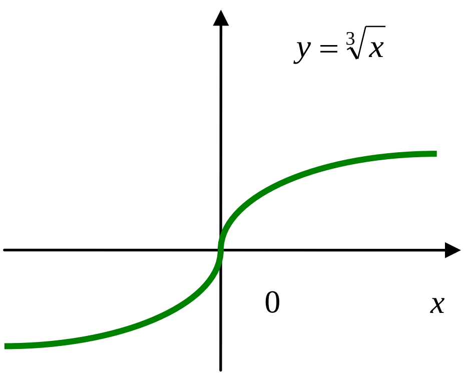


рис.7.8

Таким образом, функция может иметь экстремум лишь в двух случаях: либо в тех точках, где производная существует и равно нулю; либо в тех точках, где производная не существует.

Заметим, что если производная не существует в какой-либо точке (но существует в ближайших точках), то в этой точке производная терпит разрыв.

Значения аргумента, при которых производная обращается в нуль или терпит разрыв, называются критическими точками или критическими значениями.

Из предыдущего следует, что не при всяком критическом значения функция имеет максимум или минимум. Однако, если в какой-либо точке функция достигает максимума или минимума, то эта точка наверняка является критической. Поэтому для разыскания экстремумов функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем, исследуя отдельно каждую критическую точку, выясняют, будет ли в этой точке максимум или минимум функции или же не будет ни максимума, ни минимума.

Исследование функции в критических точках опирается на следующие теоремы.

Теорема 2 ***(достаточные условия существования экстремума).*** Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_1). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = x_1$ функция имеет максимум. Если же при переходе через точку x_1 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Таким образом, если

а) $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ при } x < x_1, \\ f'(x) < 0 \text{ при } x > x_1, \end{cases}$ то в точке x_1 функция имеет максимум;

б) $\begin{matrix} f'(x) < 0 \text{ при } x < x_1, \\ f'(x) > 0 \text{ при } x > x_1, \end{matrix}$ то в точке x_1 функция имеет минимум.

При этом надо иметь в виду, что условия а) или б) должны выполняться для всех значений x достаточно близких к x_1, т.е. во всех точках некоторой достаточно малой окружности критической точки x_1.

Рис. 7.9 наглядно иллюстрирует смысл теоремы 2.

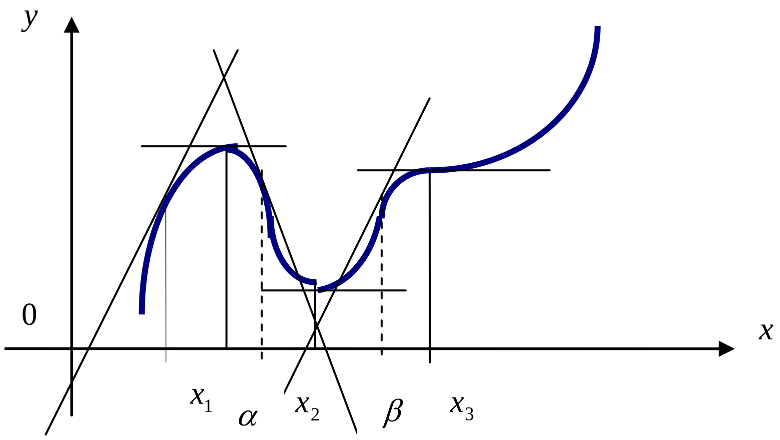


рис.7.9

7.1.3. Схема исследования дифференцируемой функции на максимум и минимум с помощью первой производной

На основании предыдущего параграфа можно сформулировать следующее правило для исследования дифференцируемой функции $y = f(x)$ на максимум и минимум:

1. Ищем первую производную функции, т.е. $f'(x)$.
2. Находим критические значения аргумента x; для этого:

а) приравниваем первую производную нулю и находим действительные корни полученного уравнения $f'(x) = 0$;

б) находим значения x, при которых производная $f'(x)$ терпит разрыв.

3. Исследуем знак производной слева и справа от критической точки. Так как знак производной остается постоянным в интервале между двумя критическими точками, то для исследования знака производной слева и справа, например, от критической точки x_2 (рис. 7.9) достаточно определить знак производной в точках α и β ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, где x_1 и x_2 - ближайшие критические точки).
4. Вычисляем значение функции $f(x)$ при каждом критическом значении аргумента.

Таким образом, имеем следующее схематическое изображение возможных случаев:

Знаки производной $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_1			Характер критической точки
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
+	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	-	Точка максимума
-	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	+	Точка минимума
+	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	+	Нет ни максимума, ни минимума (функция возрастает)
-	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	-	Нет ни максимума, ни минимума (функция убывает)

<u>Пример1:</u> Исследовать на максимум и минимум функцию $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Решение. 1) Находим первую производную: $y' = x^2 - 4x + 3$.

2) Находим действительные корни производной: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Следовательно, $x_1 = 1, x_2 = 3$

Производная всюду непрерывна. Значит, других критических точек нет.

3) Исследуем критические значения и результаты исследования фиксируем на рис. 7.10.

Исследуем первую критическую точку $x_1 = 1$. Так как $y' = (x-1)(x-3)$, то при $x < 1$ имеем $y' = (-)\cdot(-) > 0$;
при $x > 1$ имеем $y' = (-)\cdot(-) > 0$.

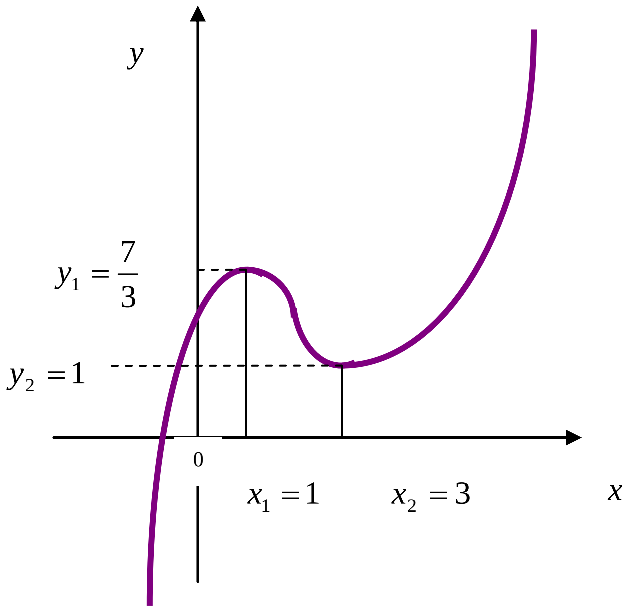


рис. 7.10

Значит, при переходе (слева направо) через значение $x_1 = 1$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, при $x = 1$ функция имеет максимум, а именно: $(y)_{x=1} = \frac{7}{3}$.

Исследуем вторую критическую точку $x_2 = 3$:
при $x < 3$ имеем $y' = (+)\cdot(-) < 0$;
при $x > 3$ имеем $y' = (+)\cdot(+) > 0$.

Значит, при переходе через значение $x = 3$ функция имеет минимум, а именно: $(y)_{x=3} = 1$.

На основании проведенного исследования строим график функции (рис. 7.10).

<u>Пример 2:</u> Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

Решение. 1) Находим первую производную:

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

2) Находим критические значения аргумента:

а) находим точки, в которых производная обращается в нуль:

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0, \quad x_1 = \frac{2}{5}$$

б) находим точки, в которых производная терпит разрыв (в данном случае обращается в бесконечность). Такой точкой будет, очевидно, точка $x_2 = 0$

(Отметим, что при $x_2 = 0$ рассматриваемая функция определена и непрерывна.)

Других критических точек нет.

3) Исследуем характер полученных критических точек. Исследуем точку $x_1 = {}^2/_5$. Заметим, что $(y')_{x<2/5} < 0$, $(y')_{x>2/5} > 0$, заключаем, что при $x = {}^2/_5$ функция имеет максимум. Значение функции в точке минимума, равно

$$(y)_{x=2/5} = \left(\frac{2}{5} - 1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

Исследуем, вторую критическую точку $x = 0$. Заметив, что $(y')_{x<0} > 0$, $(y')_{x>0} < 0$, заключаем, что при $x = 0$ функция имеет максимум, причем $(y)_{x=0} = 0$.

График исследуемой функции изображен на рис. 7.11.

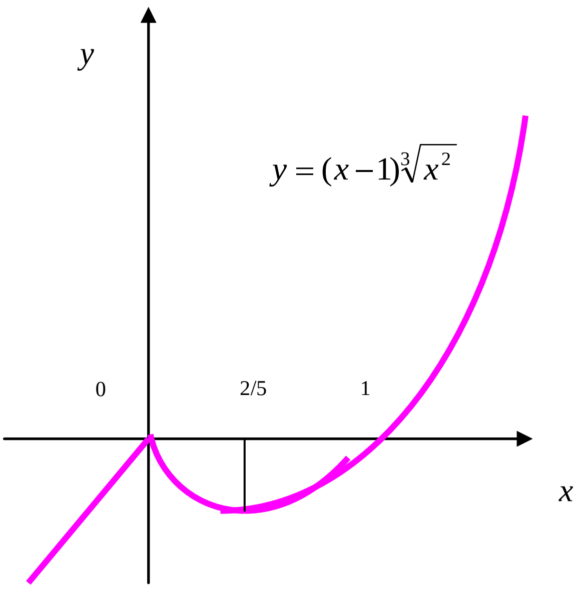


рис.7.11

§7.2. Исследование функции с помощью второй производной

<u>7.2.1 Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной</u>

Пусть при $x = x_1$ производная функции $y = f(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(x) = 0$. Пусть, кроме того, вторая производная $f''(x)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $f'(x_1) = 0$; тогда при $x = x_1$ функция имеет максимум, если $f''(x_1) < 0$, и минимум, если $f''(x_1) > 0$.

Схему исследования экстремума с помощью второй производной можно изобразить в следующей таблице:

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Характер критической точки
0	-	Точка максимума
0	+	Точка минимума
0	0	Неизвестен

Пример 1: Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = 2\sin x + \cos 2x.$$

Решение. Так как функция является периодической периода 2π, то достаточно исследовать функцию на отрезке $[0, 2\pi]$.

1. Находим производную:

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2(\cos x - 2\sin x\cos x) = 2\cos x(1 - 2\sin x).$$

2. Находим критические значения аргумента:

$$2\cos x(1 - 2\sin x) = 0,$$

$$x_1 = {}^{\pi}/_{6}, \quad x_2 = {}^{\pi}/_{2}, \quad x_3 = {}^{5\pi}/_{6}, \quad x_4 = {}^{3\pi}/_{2}.$$

3.Находим вторую производную:

$$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x.$$

Исследуем характер каждой критической точки:

$$(y'')_{x_1 = x/6} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Следовательно, в точке $x_1 = {}^{\pi}/_{6}$ имеем максимум:

$$(y)_{x=\pi/6} = -2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Далее, $(y'')_{x=\pi/2} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 2 > 0.$

Следовательно, в точке $x_2 = {}^{\pi}/_{2}$ имеем минимум: $(y)_{x=\pi/2} = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$

В точке $x_3 = {}^{5\pi}/_{6}$ имеем: $(y'')_{x=5\pi/6} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = -3 < 0.$

Следовательно, при $x_3 = {}^{5\pi}/_{6}$ функция имеет максимум:

$$(y)_{x=5\pi/6} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Наконец, $(y'')_{x=3\pi/2} = -2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1) = 6 > 0.$

Следовательно, в точке $x_4 = {}^{3\pi}/_2$ имеем минимум: $(y)_{x=3\pi/2} = 2(-1) - 1 = -3.$

График исследуемой функции изображен на рис. 7.12

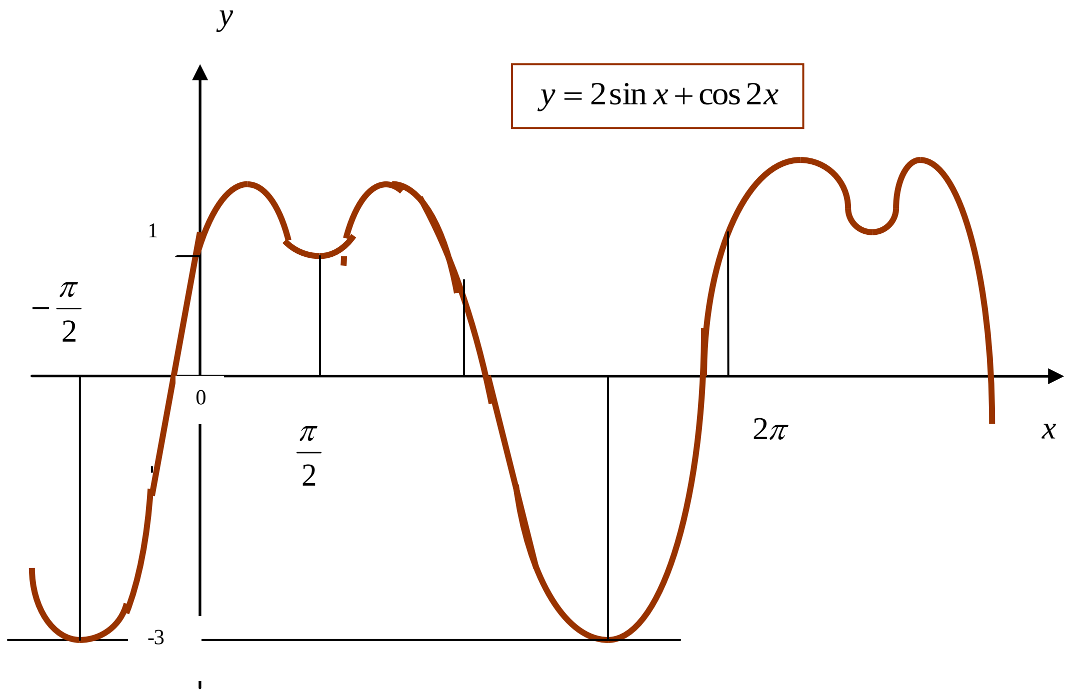


рис.7.12

Покажем, далее, на примерах, что если в некоторой точке $x = x_1$ имеем $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1) = 0$, то в этой точке функция $f(x)$ может иметь либо максимум, либо минимум, либо не иметь ни максимума, ни минимума.

Пример 2: Исследовать на максимум и минимум функцию

$$x = 1 - x^4.$$

Решение. 1) Находим критические точки:

$$y' = -4x^3\,, \quad -4x^3 = 0\,, \quad x - 0.$$

2) Определяем знак второй производной при $x = 0$:

$$y'' = -12x^2, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Следовательно, выяснить характер критической точки с помощью знака второй производной в данном случае нельзя.

3) Исследуем характер критической точки первым способом

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} < 0.$$

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет максимум, а именно: $(y)_{x=0} = 1.$

График рассматриваемой функции изображен на рис. 7.13

Пример 3: Исследовать на максимум и минимум функцию $y = x^6$.

Решение. Находим:

$y' = 6x^5,\ y' = 6x^5 = 0,\ x = 0;$

$y'' = 30x^4,\ (y'')_{x=0} = 0.$

Следовательно, получаем: $(y')_{x<0} < 0, \quad (y')_{x>0} > 0$

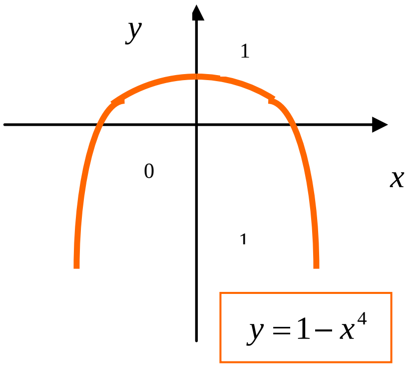


рис.7.13

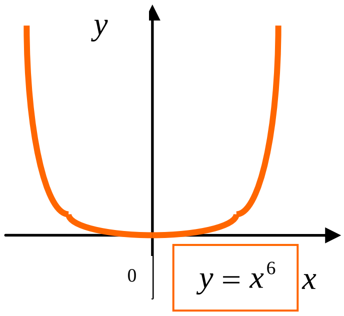


рис.7.14

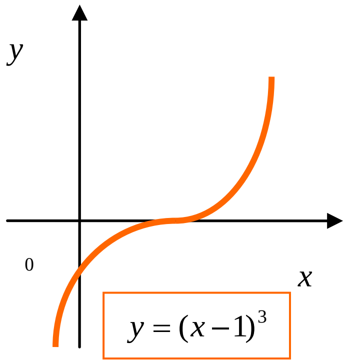


рис.7.15

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет минимум (рис. 7.14).

Пример 4: Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = (x-1)^3.$$

Решение. Второй способ:

$$y' = 3(x-1)^2, \qquad 3(x-1)^2 = 0, \quad x = 1;$$

$$y'' = 6(x-1), \quad (y'')_{x=1} = 0;$$

таким образом, второй способ ответа не дает. По первому способу находим:

$$(y')_{x<1} > 0, \quad (y')_{x>1} > 0.$$

Следовательно, при $x = 1$ функция не имеем ни максимума, ни минимума (рис. 7.15).

7.2.2 Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке функция достигает наибольшего значения. Будем предполагать, что на данном отрезке функция $f(x)$ имеет конечное число критических точек. Если наибольшее значение достигается внутри отрезка $[a, b]$, то очевидно, что это значение будет одним их максимумов функции (если имеется несколько максимумов), а именно, наибольшим максимумом. Но может случиться, что наибольшее значение будет достигаться на одном из концов отрезка.

Итак, функция на отрезке $[a, b]$ достигает своего наибольшего значения либо на одном из концов этого отрезка, либо в такой внутренней точке этого отрезка, которая является точкой минимума.

Из предыдущего вытекает следующее правило: если требуется найти наибольшее значение непрерывной функции на отрезке $[a, b]$, то надо:

1) найти все максимумы функции на отрезке;
2) определить значения функции на концах отрезка, т.е. вычислить $f(a)$ и $f(b)$;

3) из всех полученных выше значений функции выбрать наибольшее; оно и будет представлять собой наибольшее значение функции на отрезке.

Аналогичным образом следует поступать и при определении наименьшего значения функции на отрезке.

<u>Пример:</u> Определить на отрезке $[-3;3/2]$ наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 3$.

Решение. 1) Находим максимумы и минимумы функции на отрезке $\left[-3;\frac{3}{2}\right]$:

$y' = 3x^2 - 3$, $\quad 3x^2 - 3 = 0$, $x_1 = 1, x_2 = -1$, $\quad y'' = 6x$, тогда

$$(y'')_{x=-1} = -6 < 0.$$

Следовательно, в точке $x = -1$ имеет место максимум: $(y)_{x=-1} = 5$.

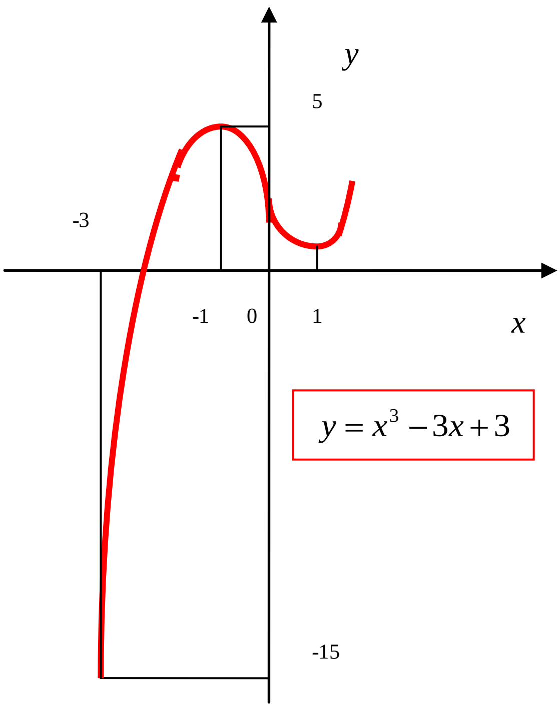


рис.7.16

Определяем значение функции на концах отрезка:

$$(y)_{x=3/2} = \frac{15}{8}, \qquad (y)_{x=-3} = -15.$$

Таким образом, наибольшее значение рассматриваемой функции на отрезке $[-3;3/2]$ есть $(y)_{x=-1} = 5$, а наименьшее значение есть $(y)_{x=-3} = -15$. График рассматриваемой функции изображен на рис. 7.16.

<u>7.2.3 Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба</u>

Рассмотрим на плоскости кривую $y = f(x)$, являющуюся графиком однозначной дифференцируемой функции $f(x)$.

Определение. Мы говорим, что кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Мы говорим, что кривая обращена выпуклостью вниз на интервале (b, c), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть выпуклой, а обращенную выпуклостью вниз – вогнутой.

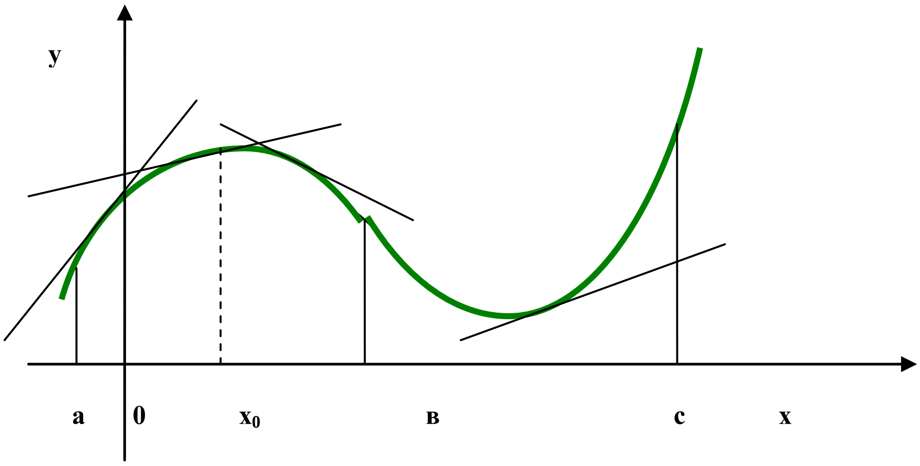


рис.7.17

На рис. 7.17 показана кривая, выпуклая на интервале (a, b) и вогнутая на интервале (b, c).

Направление выпуклости кривой является важной характеристикой ее формы. Настоящий параграф посвящен установлению признаков по которым можно было бы, исследуя функцию $y = f(x)$, судить о направлении выпуклости ее графика на различных интервалах.

Теорема 1. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т.е. $f''(x) < 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вверх (кривая выпукла).

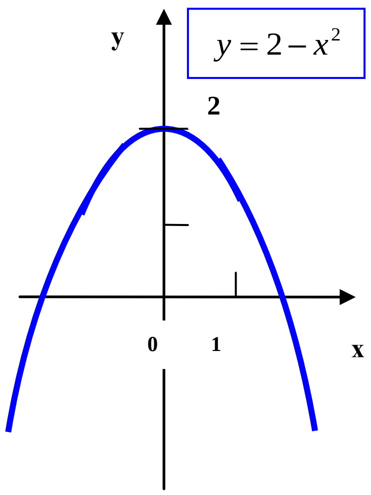
Теорема 1'. Если во всех точках интервала (b, c) вторая производная функции $f(x)$ положительна, т.е. $f''(x) < 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вниз (кривая вогнута).

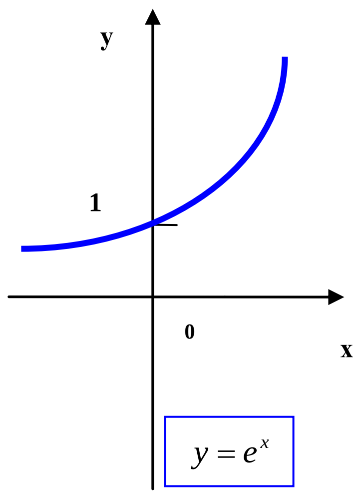
Пример1: Установить интервалы выпуклости и вогнутости кривой, заданным уравнением $y = 2 - x^2$.

Решение. Вторая производная $y'' = -2 < 0$ для всех значений x.

Следовательно, кривая всюду обращена выпуклостью вверх (рис. 7.18).

Пример 2: Кривая задана уравнением $y = e^x$.
Так как $y'' = e^x > 0$ для всех значений x, то, следовательно, кривая всюду вогнута, т.е обращена выпуклостью вниз (рис. 7.19)





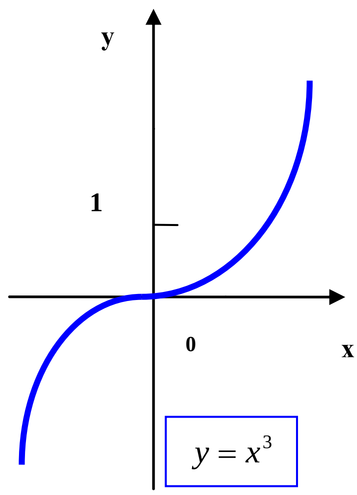
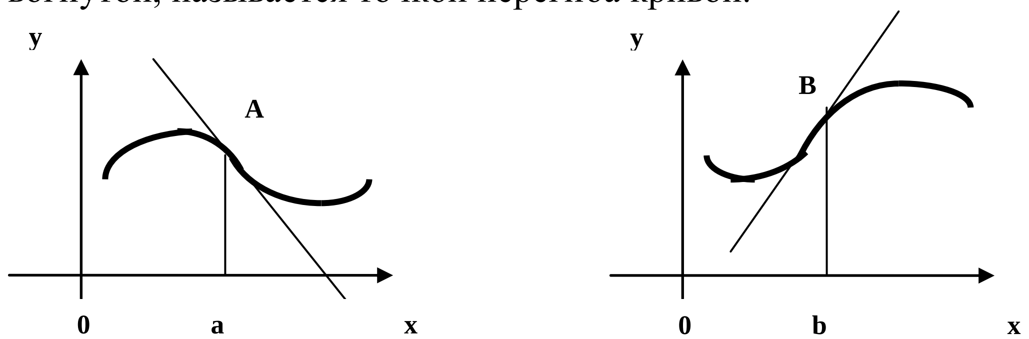


рис. 7.18 рис.7.19 рис.7.20

Пример 3: Кривая определяется уравнением $y = x^3$.
Так как $y'' = 6x$, то $y'' < 0$ при $x < 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$. Следовательно, при $x < 0$ кривая обращена выпуклостью вверх, а при $x > 0$ - выпуклостью вниз (рис. 7.20).

Определение. Точка, определяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется точкой перегиба кривой.



а) б)

рис.7.21

На рис. 7.20, 7.21 а) и б) точки O, A и B суть точки перегиба

Очевидно, что в точке перегиба касательная, если она существует, пересекает кривую, так как с одной стороны от этой точки кривая лежит под касательной, а с другой стороны – над нею.

Установим теперь достаточные условия того, что данная точка кривой является точкой перегиба.

Теорема 2. Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через значение $x = a$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба.

Пример 4: Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса).

Решение. 1) Находим первую и вторую производные:

$$y' = -2xe^{-x^2},$$
$$y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

2) Первая и вторая производные существует всюду. Находим значения x, при которых $y'' = 0$:

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0,$$
$$x_1 = -{}^1\!/_{\sqrt{2}},\ \ x_2 = {}^1\!/_{\sqrt{2}}.$$

3) Исследуем полученные значения:

при $x < -{}^1\!/_{\sqrt{2}}$ имеем $y'' > 0$,

при $x > -{}^1\!/_{\sqrt{2}}$ имеем $y'' < 0$.

вторая производная меняет знак при переходе через точку x_1, следовательно, при $x_1 = -{}^1\!/_{\sqrt{2}}$ на кривой имеется точка перегиба; ее координаты: $\left(-{}^1\!/_{\sqrt{2}}, e^{-1/2}\right)$;

при $x < -{}^1\!/_{\sqrt{2}}$ имеем $y'' < 0$,

при $x > -{}^1\!/_{\sqrt{2}}$ имеем $y'' > 0$.

Следовательно, при $x_2 = {}^1\!/_{\sqrt{2}}$ на кривой также имеется точка перегиба; ее координаты: $\left({}^1\!/_{\sqrt{2}}, e^{-1/2}\right)$. Впрочем, существование второй точки перегиба вытекает непосредственно из симметрии кривой относительно оси Oy.

Из предыдущего следует, что

при $-\infty < x < -{}^1\!/_{\sqrt{2}}$ кривая вогнута,

при $-{}^1\!/_{\sqrt{2}} < x < {}^1\!/_{\sqrt{2}}$ кривая выпукла,

при ${}^1\!/_{\sqrt{2}} < x < +\infty$ кривая вогнута.

Из выражения первой производной $y' = -2xe^{-x^2}$

следует, что $y' > 0$ при $x < 0$, т.е. функция возрастает,

$y' < 0$ при $x > 0$, т.е. функция убывает,

$y' = 0$ при $x = 0$.

В этой точке функция имеет максимум, а именно: $y = 1$.

На основании проведенного исследования легко построить график кривой (рис. 7.22).

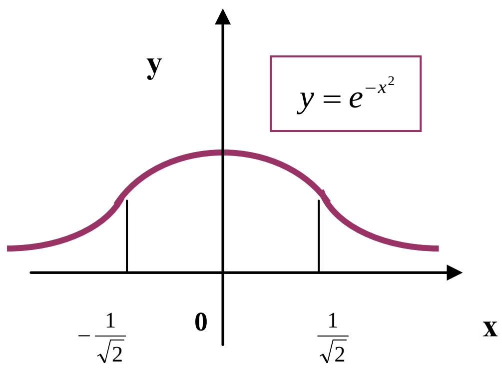


рис.7.22

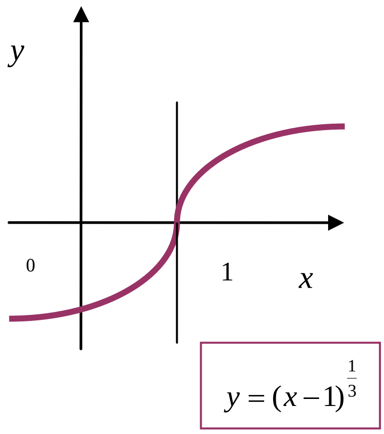


рис.7.23

<u>Пример 5</u>: Найти точки перегиба кривой $y = x^4$.

Решение. 1) Находим вторую производную: $y'' = 12x^2$.

2) Определяем точки, в которых $y'' = 0$: $12x^2 = 0, x = 0$

3) Исследуем полученное значение $x = 0$:

$y'' > 0$ при $x < 0$ - кривая вогнута,

$y'' > 0$ при $x > 0$ - кривая вогнута.

Следовательно, кривая не имеет точек перегиба (рис. 7.2).

<u>Пример 6</u>: Найти точки перегиба кривой. $y = (x-1)^{1/3}$.

Решение. 1) Находим первую и вторую производные:

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3},$$

$$y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}.$$

2) Вторая производная нигде не обращается в нуль, но при $x = 1$ она не существует $(y'' = \pm\infty)$.

3) Исследуем значение $x = 1$:

$y'' > 0$ при $x < 1$ - кривая вогнута,

$y'' > 0$ при $x > 1$ - кривая выпукла

Следовательно, при $x = 1$ имеется точка перегиба; это – точка $\{1; 0\}$.

Заметим, что $y' = \infty$ при $x = 1$, т.е. кривая в этой точке имеет вертикальную касательную (рис.7.23).

7.2.4 Асимптоты

Очень часто приходится исследовать форму кривой $y = f(x)$, а значит, и характер изменения соответствующей функции при неограниченном возрастании (по абсолютной величине) абсциссы или ординаты переменной точки кривой или абсциссы и ординаты одновременно. При этом важным частным случаем является тот, когда исследуемая кривая при удалении ее переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая A называется асимптотой кривой, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю (рис. 7.24).

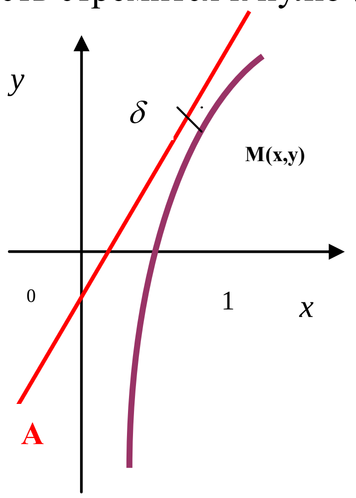


рис.7.24

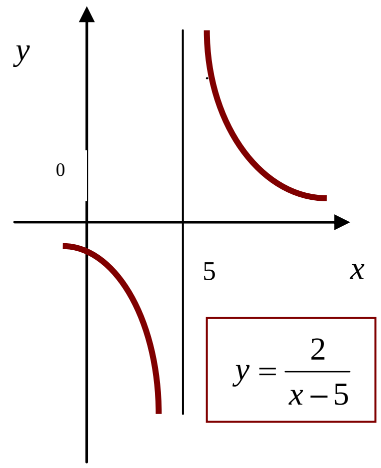


рис.7.25

Мы будем в дальнейшем различать асимптоты вертикальные (т.е. параллельные оси ординат) и наклонные (т.е. непараллельные оси ординат).

1. Вертикальные асимптоты. Из определения асимптоты следует, что если $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$, или $\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ есть асимптота кривой $y = f(x)$; и обратно, если прямая $x = a$ есть асимптота, то выполняется одно из написанных равенств.

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот нужно найти значения $x = a$, при приближении к которым функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности. Тогда прямая $x = a$ будет вертикальной асимптотой.

Пример 1: Кривая $y = \frac{2}{x-5}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 5$, так как $y \to \infty$ при $x \to 5$ (рис. 7.25).

Пример 2: Кривая $y = tgx$ имеет бесконечность много вертикальных асимптот: $x = \pm {}^{\pi}/_{2}, x = \pm {}^{3\pi}/_{2}, x = \pm {}^{5\pi}/_{2}, \dots$

Это следует из того, что $tgx \to \infty$, когда x стремится к значениям ${}^{\pi}/_{2}$, ${}^{3\pi}/_{2}$, ${}^{5\pi}/_{2}$, … или $-{}^{\pi}/_{2}$, $-{}^{3\pi}/_{2}$, $-{}^{5\pi}/_{2}$, … (рис. 7.26).

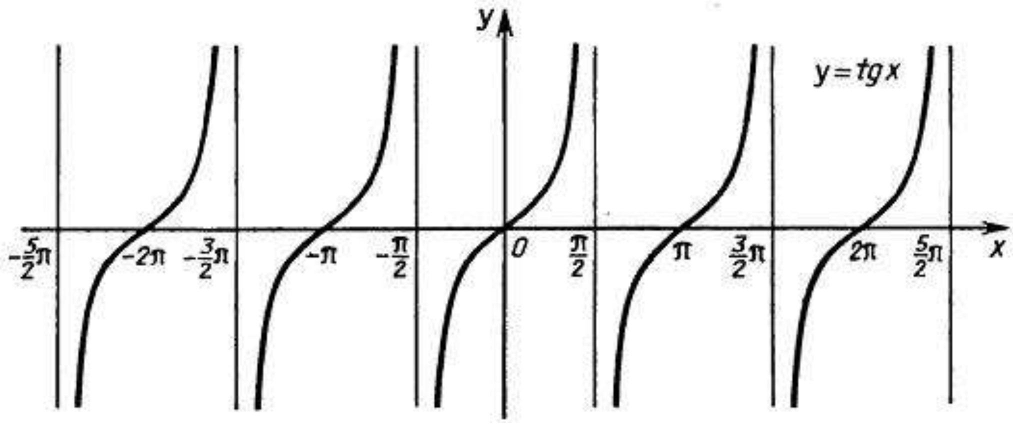


рис.7.26

<u>Пример 3:</u> Кривая $y = e^{1/x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, так как $\lim_{x \to +0} e^{1/x} = \infty$ (рис. 7.27).

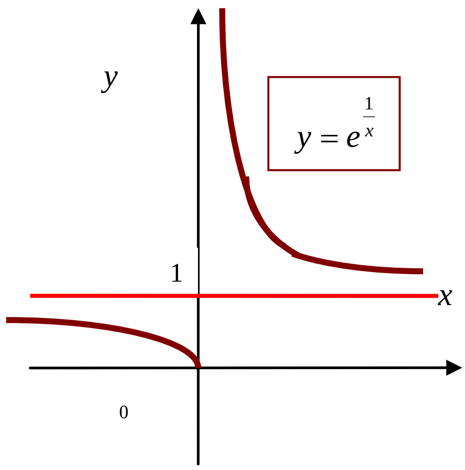


рис.7.27

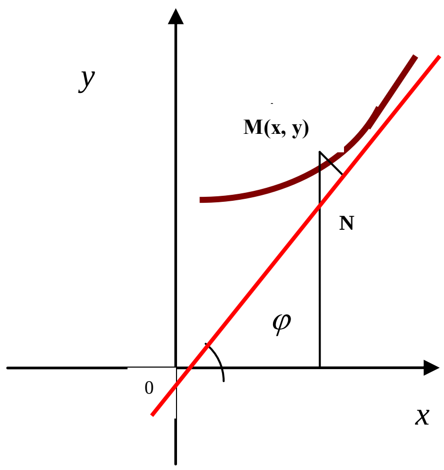


рис.7.28

2. Наклонные асимптоты. Пусть кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту, уравнение которой имеет вид $y = kx + b$. (1)
Определим числа k и b (рис. 7.28). Пусть $M(x, y)$ – точка, лежащая на кривой, и $N(x, y)$ – точка, лежащая на асимптоте. Длина отрезка $[MP]$ равна расстоянию от точки M до асимптоты. По условию

$$\lim_{x \to +\infty} |MP| = 0. \qquad (2)$$

Если обозначим через φ угол наклона к оси Ox, то из ΔNMP найдем:

$$|NM| = \frac{|MP|}{\cos\varphi}.$$

Так как φ - постоянный угол (не равный ${}^{\pi}/_{2}$), то в силу предыдущего равенства

$$\lim_{x \to +\infty} |MN| = 0, \qquad (2')$$

и наоборот, из равенства (2') следует равенство (2). Но

$$|NM| = \big||QM| - |QN|\big| = |y - y'| = |f(x) - (kx + b)|,$$

и равенство (2') принимает вид

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0. \qquad (3)$$

Итак, если прямая (1) есть асимптота, то выполняется равенство (3), и наоборот, если при постоянных k и b выполняется равенство (3), то прямая $y = kx + b$ есть асимптота. Определим теперь k и b. Вынося x за скобки в равенстве (3), получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Так как $x \to +\infty$, то должно выполняться равенство

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

При b постоянном $\lim_{x\to\infty} \frac{b}{x} = 0$. Следовательно, $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0$, или

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad (4)$$

Зная k, из равенства (3) находим b:

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx]. \qquad (5)$$

Итак, если прямая $y = kx + b$ есть асимптота, то k и b находятся по формулам (4) и (5). Обратно, если существуют пределы (4) и (5), то выполняется равенство (3) и прямая $y = kx + b$ есть асимптота. Если хотя бы один из пределов (4) или (5) не существует, то кривая асимптоты не имеет.

Заметим, что мы проводили исследование применительно к рис. 7.28 при $x \to +\infty$, но все рассуждения справедливы и для случая $x \to -\infty$.

<u>Пример 4:</u> Найти асимптоты кривой

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x}.$$

Решение. 1) Ищем вертикальные асимптоты:

$$y \to +\infty \text{ при } x \to 0,$$
$$y \to -\infty \text{ при } x \to 0.$$

Следовательно, прямая $x = 0$ есть вертикальная асимптота данной кривой.

2) Ищем наклонные асимптоты:

$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+2x-1}{x}}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right] = 1$, т.е. $k = 1$,

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [y - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x}\right] = 2$$

т.е. $b = 2$.

Следовательно, прямая $y = x + 2$ есть наклонная асимптота данной кривой.

Для исследования взаимного расположения кривой и асимптоты рассмотрим разность ординат кривой и асимптоты при одном и том же значении x:

$$\frac{x^2+2x-1}{x} - (x + 2) = -\frac{1}{x}.$$

При $x > 0$ эта разность отрицательна, а при $x < 0$ - положительна; следовательно, при $x > 0$ кривая лежит ниже асимптоты, при $x < 0$ - выше асимптоты (рис. 7.29).

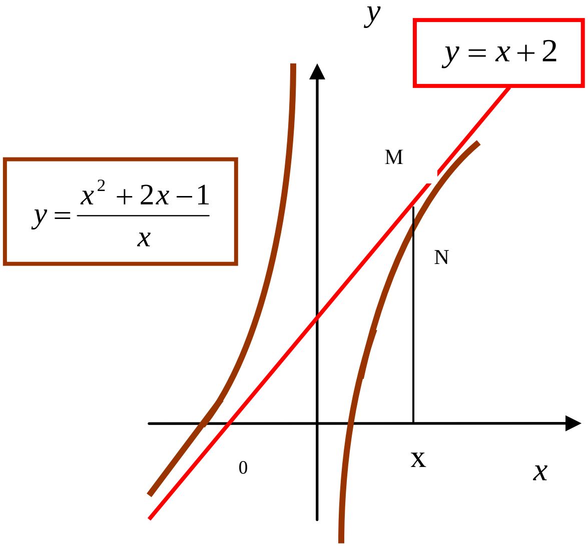


рис.7.29

Пример 5: Найти асимптоты кривой $y = e^{-x} \sin x + x$.

Решение. 1) Вертикальных асимптот, очевидно, нет.

2) Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} \sin x + x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{-x} \sin x}{x} + 1 \right] = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [e^{-x} \sin x + x - x] = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} \sin x = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ есть наклонная асимптота при $x \to +\infty$.

Заданная кривая не имеет асимптоты при $x \to -\infty$. Действительно, $\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x}$ не существует, так как

$$\frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \sin x + 1.$$

(Здесь первое слагаемое неограниченно возрастает при $x \to -\infty$ и, следовательно, предела не имеет.)

<u>7.2.5 Общий план исследования функций и построения графиков</u>

Под «исследованием функции» обычно понимается разыскивание:

1) Естественной области существования функции;
2) Точек разрыва функции;
3) Интервалов возрастания и убывания функции;
4) Точек максимума и минимума, а также максимальных и минимальных значений функции;
5) Областей выпуклости и вогнутости графика, точек перегиба;
6) Асимптот графика функции.

На основании проведенного исследования строится график функции (иногда целесообразно намечать элементы графика параллельно с исследованием).

<u>Замечание 1:</u> Если исследуемая функция $y = f(x)$ - четная, т.е. такая, что при изменении знака аргумента значение функции не изменяется, т.е. если

$$f(-x) = f(x),$$

то достаточно исследовать функцию и построить ее график при положительных значениях аргумента, принадлежащих области определения функции. При отрицательных значениях аргумента график функции строится на том основании, что график четной функции симметричен относительно оси ординат.

<u>Пример 1:</u> Функция $y = x^2$ – четная, так как $(-x)^2 = x^2$ (см. график параболы в главе 5).

<u>Пример 2:</u> Функция $y = \cos x$ – четная, так как $\cos(-x) = \cos x$ (см. график косинусоиды в главе 5).

<u>Замечание 2:</u> Если функция $y = f(x)$ – нечетная, т.е. такая, что при изменении аргумента функция меняет знак, т.е. если

$$f(-x) = -f(x),$$

то эту функцию достаточно исследовать при положительных значениях аргумента. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

<u>Пример 3:</u> Функция $y = x^3$ – нечетная, так как $(-x)^3 = -x^3$ (см. график кубической функции в главе 5).

<u>Пример 4:</u> Функция $y = \sin x$ – нечетная, так как $\sin(-x) = -\sin x$ (см. график синусоиды в главе 5).

<u>Замечание 3:</u> Так как знание одних свойств функции позволяет сделать вывод о других ее свойствах, то иногда порядок исследования целесообразно выбирать, исходя из конкретных особенностей данной функции. Так, например, если мы выясняли, что заданная функция непрерывна и дифференцируема, и нашли точки максимума и минимума этой функции, то тем самым мы уже определили и области возрастания и убывания функции.

<u>Пример 5:</u>

Исследовать функцию $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1) Область существования функции – интервал $-\infty < x < +\infty$. Сразу отметим, что при $x < 0$ имеем $y < 0$, а при $x > 0$ имеем $y > 0$.

2) Функция всюду непрерывна.

3) Исследуем функцию на максимум и минимум: из равенства

$$y' = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0$$

находим критические точки: $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Исследуем характер критических точек:

при $x < -1$ имеем $y' < 0$;

при $x > -1$ имеем $y' > 0$.

Следовательно, при $x = -1$ функция имеет минимум:

$$y_{min} = (y)_{x=-1} = -0{,}5.$$

Далее, при $x < 1$ имеем $y' > 0$;

при $x > 1$ имеем $y' < 0$.

Следовательно, при $x = 1$ функция имеет максимум:

$$y_{max} = (y)_{x=1} = 0{,}5.$$

4)Определим области возрастания и убывания функции:

при $-\infty < x < -1$ имеем $y' < 0$ - функция убывает,

при $-1 < x < 1$ имеем $y' > 0$ - функция возрастает,

при $1 < x < +\infty$ имеем $y' < 0$ - функция убывает.

5) Определим области выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба: из равенства

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0$$

получаем:

$$x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = 0,\ \ x_3 = \sqrt{3}.$$

Исследуя y'' как функцию от x_1 находим:

при $-\infty < x < -\sqrt{3}$ $\ y'' < 0$ – кривая выпуклая,

при $-\sqrt{3} < x < 0$ $\quad y'' > 0$ - кривая вогнутая,

при $0 < x < \sqrt{3}$ $\quad y'' < 0$ – кривая выпуклая,

при $\sqrt{3} < x < +\infty$ $\quad y'' > 0$ - кривая вогнутая.

Следовательно, точка с координатами $x = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}/4$ есть точка перегиба; точно так же точки $(0,0)$ и $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$ есть точки перегиба.

6) Определим асимптоты кривой: при $y \to +\infty$ $\ y \to 0$, при $y \to -\infty$ $\ y \to 0$.

Следовательно, прямая $y = 0$ есть единственная наклонная асимптота. Вертикальных асимптот кривая не имеет, так как ни для одного конечного значения x функция не стремится к бесконечности.

График исследуемой кривой изображен на рис. 7.30.

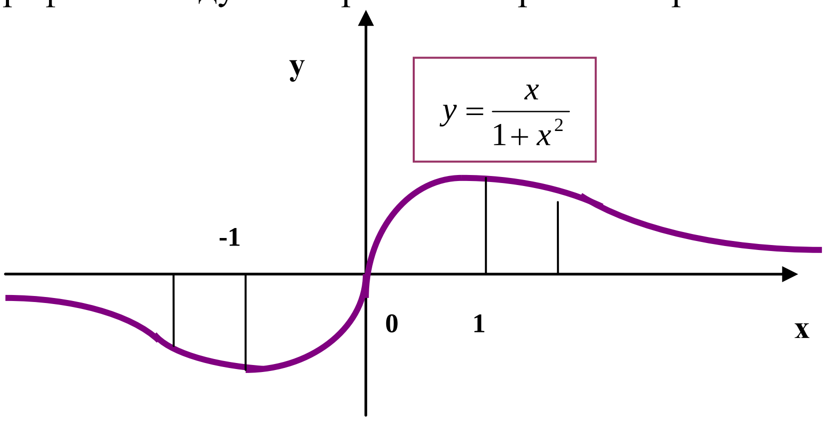


рис.7.30

Пример 6: Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$ $(a > 0)$ и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена при всех значениях x.

2) Функция всюду непрерывна.

3) Исследуем функцию на максимум и минимум:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2a - x)^2}}.$$

Производная существует всюду, за исключением точек $x_1 = 0$ и $x_2 = 2a$

Исследуем предельные значения производной при $x \to -0$ и при $x \to +0$:

$$\lim_{x \to -0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a - x)^2}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a - x)^2}} = +\infty.$$

при $x < 0$ будет $y' < 0$, при $x > 0$ будет $y' > 0$.

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет минимум. Значение функции в этой точке равно нулю.

Исследуем теперь функцию в другой критической точке $x_2 = 2a$. При $x \to 2a$ производная также стремится к бесконечности. Однако в данном случае для всех значений x, близких к $2a$ (находящихся как справа, так и слева от точки $2a$), производная отрицательна. Следовательно, в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. В точке $x_2 = 2a$, так же как и вблизи этой точки, функция убывает, касательная к кривой в этой точке вертикальна.

При $x = 4a/3$ производная обращается в нуль. Исследуем характер этой критической точки. Рассматривая выражение первой производной, замечаем, что при $x < 4a/3$ будет $y' > 0$, при $x > 4a/3$ будет $y' < 0$.

Следовательно, при $x = 4a/3$ функция имеет максимум:

$$y_{max} = \frac{2}{3}a\sqrt[3]{4}.$$

4)На основании проведенного исследования получаем области возрастания и убывания функции:

при $-\infty < x < 0$ функция убывает,

при $0 < x < 4a/3$ функция возрастает,

при $\frac{4a}{3} < x < +\infty$ функция убывает.

5) Определяем области выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба: вторая производная

$$y'' = -\frac{8a^2}{9x^{4/3}(2a - x)^{5/3}}$$

ни в одной точке не обращается в нуль. Однако существует две точки, в которых вторая производная терпит разрыв: эти точки

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 2a.$$

Исследуем знак второй производной вблизи каждой из этих точек:

при $x < 0$ имеем $y'' < 0$ - кривая обращена выпуклостью вверх;

при $x > 0$ имеем $y'' < 0$ - кривая обращена выпуклостью вверх.

Значит, точка с абсциссой $x = 0$ не является тоской перегиба.

При $x < 2a$ имеем $y'' < 0$ - кривая обращена выпуклостью вверх; при $x > 2a$ имеем $y'' > 0$ - кривая обращена выпуклостью вниз. Значит, точка $(2a, 0)$ на кривой является точкой перегиба.

6) Определяем асимптоты кривой:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{2ax^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2ax^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x^2} = \frac{2a}{3}.$$

Следовательно, прямая $y = -x + \dfrac{2a}{3}$ есть наклонная асимптота кривой $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$. График исследуемой функции изображен на рис. 7.31.

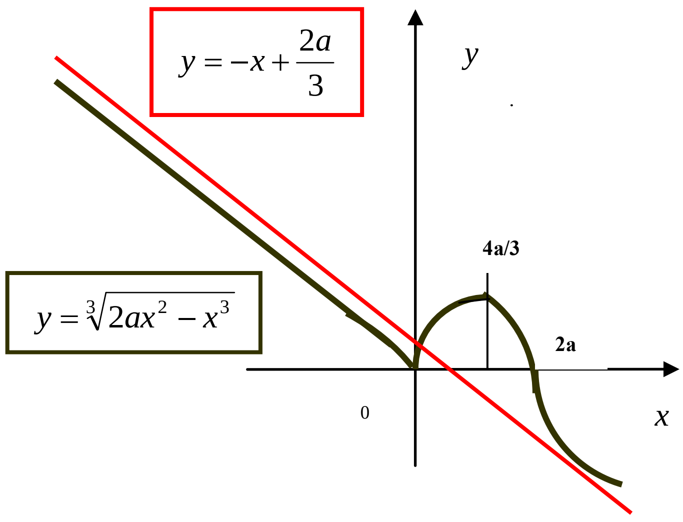


рис.7.31

§7.3 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП)

СРСП 11

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке [a; b].

1. $f(x) = x^3 - 12x + 7; \quad [0; 3]$**;**

2. $f(x) = x^5 - (5/3)x^3 + 2; \quad [0; 2]$**;**

3. $f(x) = \left(\sqrt{3/2}\right)x + \cos x; \quad [0; \pi/2]$**;**

4. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2; \quad [-3; 1]$**;**

5. $f(x) = x^3 - 3x + 1; \quad [1/2; 2]$**;**

6. $f(x) = x^4 + 4x; \quad [-2; 2]$**;**

7. $f(x) = \left(\sqrt{3/2}\right)x - \sin x; \quad [0; \pi/2]$**;**

8. $f(x) = 81x - x^4; \quad [-1; 4]$**;**

9. $f(x) = 3 - 2x^2; \quad [-1; 3]$**;**

10. $f(x) = x - \sin x; \quad [-\pi; \pi]$**.**

Глава 8
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§8.1 Определение функции нескольких переменных

Рассматривая функции одного переменного, мы указывали, что при изучении многих явлений приходится встречаться с функциями двух и более независимых переменных. Приведем несколько примеров.

Пример 1: Площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y, выражается формулой

$$S = xy$$

Каждой паре значений x и y соответствует определение значение площади S; S есть функция двух переменных.

Пример 2: Объем V прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны x, y, z, выражается формулой

$$V = xyz$$

Здесь V есть функция трех переменных x, y, z.

Пример 3: Дальность R полета снаряда, выпущенного с начальной скоростью ϑ_0 из орудия, ствол которого наклонен к горизонту под углом φ, выражается формулой

$$R = \frac{\vartheta_0^2 sin2\varphi}{g}$$

(если пренебречь сопротивлением воздуха). Здесь g - ускорение силы тяжести. Для каждой пары значений ϑ_0 и φ эта формула дает определенное значение R, т.е. R является функцией двух переменных ϑ_0 и φ.

Пример 4:

$$u = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Здесь u есть функция четырех переменных x, y, z, t.

Определение 1. Если каждой паре (x, y) значений двух, независимых друг от друга, переменных величин x и y, из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины z, то мы говорим, что z есть *функция двух независимых переменных* x и y, определенная в области D.

Символически функция двух переменных обозначается так:

$z = f(x, y)$, $\quad z = F(x, y)$ и т.д.

Функция двух переменных может быть задана, например, с помощью таблицы или аналитически с помощью формулы, как это сделано в рассмотренных выше четырех примерах. На основании формулы можно составить таблицу значений функции для некоторых пар значений независимых переменных.

Определение 2. Совокупность пар (x, y) значений x и y, при которых определяется функция $z = f(x, y)$, называется *областью определения* или *областью существования* этой функции.

Область определения функции наглядно иллюстрируется геометрически. Если каждую пару значений x и y мы будем изображать точкой $M(x, y)$ в плоскости Oxy, то область определения функции изобразится в виде некоторой совокупности точек на плоскости. Это совокупность точек будем также называть областью определения функции. В частности, областью определения может быть и вся плоскость. В дальнейшем мы будем главным образом иметь дело с такими областями, которые представляют собой части плоскости, ограниченные линиями. Линию, ограничивающую данную область, будем называть *границей области*. Точки области, не лежащие на границе, будем называть *внутренними точками области*. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой или незамкнутой*. Если же к области относятся и точки границы, то область называется *замкнутой.* Область называется *ограниченной*, если существует такое постоянное C, что расстояние любой точки M области от начала координат O меньше C, т.е. $|OM| < C$.

Пример 5: Определить естественную область определения функции

$$z = 2x - y$$

Аналитическое выражение $2x - y$ имеет смысл при любом значениях x и y. Следовательно, естественной областью определения функции является вся плоскость Oxy.

Пример 6: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Для того, чтобы z имело действительное значение, нужно, чтобы под корнем стояло неотрицательное число, т.е. x и y должны удовлетворять неравенству $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$

Все точки $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют указанному неравенству, лежат в круге радиуса 1 с центром в начале координат и на границе этого круга.

Пример 7: $z = \ln(x + y)$.

Так как логарифмы определены только для положительных чисел, то должно удовлетворяться неравенство $x + y > 0$ или $y > -x$

Это значит, что областью определения функции z является половина плоскости, расположенная над прямой $y = -x$, не включая самой прямой (рис. 8.1).

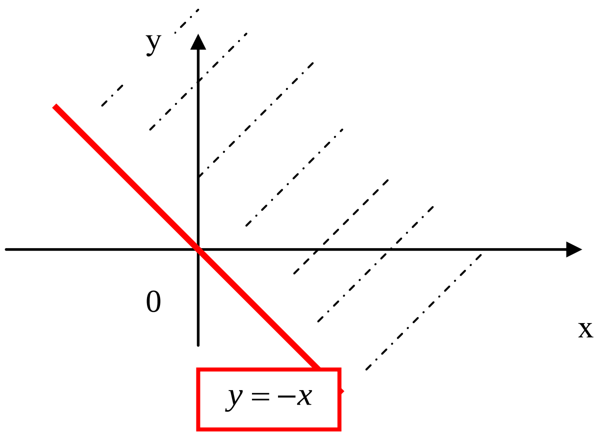


рис.8.1

Определение 3. Если каждой рассматриваемой совокупности значений переменных $x, y, z, \dots, u, t$ соответствует определенное значение переменной w, то будем называть w функцией независимых переменных $x, y, z, \dots, u, t$ и писать $w = F(x, y, z, \dots, u, t)$ или $w = f(x, y, z, \dots, u, t)$ и т.п.

Так же как и для функции двух переменных, можно говорить об области определения функции трех, четырех и более переменных.

Так, например, для функции трех переменных областью определения является некоторая совокупность троек чисел (x, y, z). Заметим тут же, что каждая тройка чисел задает некоторую точку $M(x, y, z)$ в пространстве $Oxyz$. Следовательно, областью определения функции трех переменных является некоторая совокупность точек пространства.

Аналогично этому можно говорить об области определения функции четырех переменных u= $f(x, y, z, t)$ как о некоторой совокупности четверок чисел (x, y, z, t). Однако область определения функции четырех или большего числа переменных уже не допускает простого геометрического истолкования.

8.1.1 Геометрическое изображение функции двух переменных

Рассмотрим функцию

$$z = f(x, y), \qquad (8.1)$$

определенную в области G на плоскости Oxy (эта область может быть, в частности, и всей плоскостью), и систему прямоугольных декартовых координат $Oxyz$ (рис. 8.2).

В каждой точке (x, y) восставим перпендикуляр к плоскости Oxy и на нем отложим отрезок, равный $f(x, y)$.

Тогда мы получим в пространстве точку P с координатами $x, y, z = f(x, y)$.

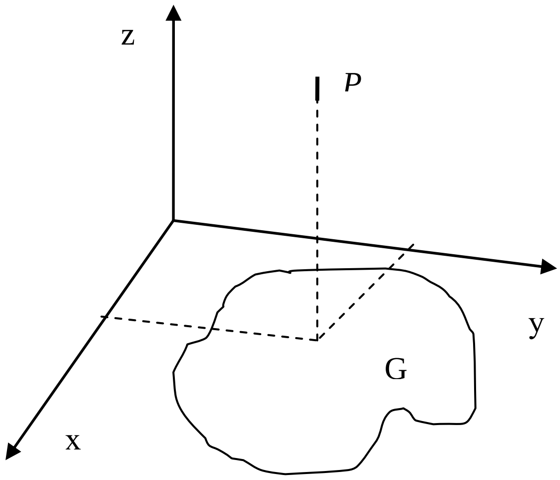


рис.8.2

Геометрическое место точек P, координаты которых удовлетворяют уравнению (8.1), называется графиком функции двух переменных. Из курса аналитической геометрии мы знаем, что уравнение (8.1) в пространстве определяет некоторую поверхность. Таким образом, графиком функции двух переменных является поверхность, проектирующаяся на плоскость Oxy в области определения функции. Каждый перпендикуляр к плоскости Oxy пересекает поверхность $z = f(x, y)$ не более чем в одной точке.

8.1.2. Частное и полное приращение функции

Рассмотрим линию PS пересечения поверхности

$$z = f(x, y)$$

с плоскостью $y = const$, параллельной плоскости Oxz (рис. 8.3).

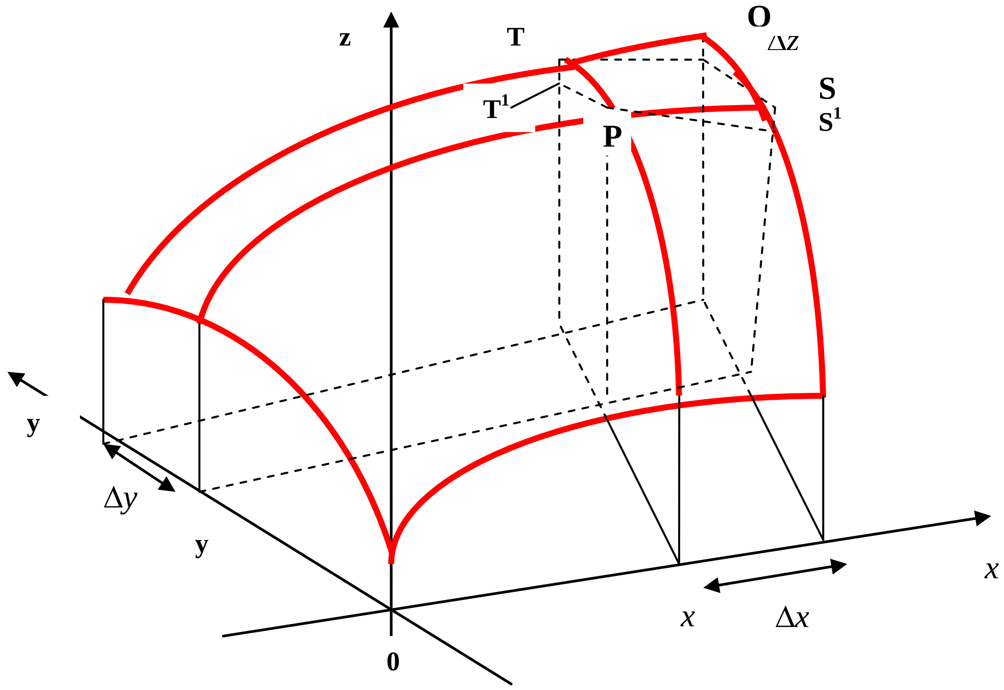


рис.8.3

Так как в этой плоскости y сохраняет постоянное значение, то z вдоль кривой PS будет меняться только в зависимости от изменения x. Дадим независимой переменной x приращение Δx; тогда z получит приращение, которое называют частными приращением z по x и обозначают через $\Delta_x z$ (на рисунке отрезок SS'), так что

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \qquad (8.2)$$

Аналогично, если x сохраняет постоянное значение, а y получает приращение Δy, то z получает приращение, называемое частным приращением z по y. Это приращение обозначают символом $\Delta_y z$ (на рисунке отрезок TT');

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad (8.3)$$

Приращение $\Delta_y z$ функция получает «вдоль линии» пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $x = const$, параллельной плоскости Oyz.

Наконец, сообщив аргументу x приращение Δx, а аргументу y – приращение Δy, получим для z новое приращение Δz, которое называется полным приращением функции z и определяется формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad (8.4)$$

На рис. 8.3 Δz изображается отрезком QQ'.

Надо заметить, что, вообще говоря, полное приращение не равно сумме частных приращений, т.е. $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Пример: $z = xy$.

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x,$$

$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y,$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

При $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$ имеем $\Delta_x z = 0{,}4$, $\Delta_y z = 0{,}3$, $\Delta z = 0{,}76$.

Аналогичным образом определяются частные и полное приращения функции любого числа переменных $u = f(x, y, t)$ имеем:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_t u = f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t).$$

8.1.3 Непрерывность функции нескольких переменных

Введем одно важное вспомогательное понятие – понятие окрестности данной точки.

Окрестностью радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, т.е. совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Если мы говорим, что функция $f(x,y)$ обладает каким-либо свойством «вблизи точки (x_0,y_0)» или «в окрестности точки (x_0,y_0)», то под этим подразумеваем, что найдется такой круг с центром (x_0,y_0), во всех точках которого данная функция обладает указанным свойством.

Прежде чем рассматривать понятие непрерывности функции нескольких переменных, рассмотрим понятие предела функции нескольких переменных).

Пусть дана функция

$$z = f(x,y),$$

определенная в некоторой области G плоскости Oxy. Рассмотрим некоторую определенную точку $M_0(x_0,y_0)$, лежащую в области G или на ее границе

Определение 1. Число A называется *пределом функции* $f(x,y)$ при стремлении точки $M(x,y)$ к точке $M_0(x_0,y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для всех точек $M(x,y)$, для которых выполняется неравенство $\overline{MM_0} < r$, имеет место неравенство

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

Если число A является пределом функции $f(x,y)$ при $M(x,y) \to M_0(x_0,y_0)$, то пишут:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

Определение 2. Пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x,y)$. Функция $z = f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0,y_0)$, если имеет место равенство

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0) \qquad (8.5)$$

причем точка $M(x,y)$ стремится к точке $M_0(x_0,y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Если обозначим $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то равенство (8.5) можно переписать так:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0,y_0) \qquad (8.6)$$

или

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)] = 0 \qquad (8.7)$$

Обозначим $\Delta p = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ $\Delta p \to 0$, обратно, если $\Delta p \to 0$, то $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Замечая, далее, что выражение, стоящее в квадратных скобках в равенстве (8.7), есть полное приращение Δz, равенство (8.7) можно переписать в форме

$$\lim_{\Delta p\to 0} \Delta z = 0 \qquad (8.8)$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной* в области.

Если в некоторой точке $N(x_0,y_0)$ не выполняется условие (8.5), то точка $N(x_0,y_0)$ называется *точкой разрыва функции* $z = f(x,y)$. Условие (8.6) может не выполняться, например, в следующих случаях:

1) $z = f(x,y)$ определена во всех точках некоторой окрестности точки $N(x_0,y_0)$, за исключением самой точки $N(x_0,y_0)$;
2) Функция $z = f(x,y)$ определена во всех точках окрестности точки $N(x_0,y_0)$, но не существует предела
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$
3) Функция определена во всех точках окрестности $N(x_0,y_0)$ и существует предел
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$
но
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$$

Пример 1. Функция
$$z = x^2 + y^2$$
непрерывная при любых значениях x и y, т.е. в любой точке плоскости Oxy. Действительно, каковы бы ни были числа x и y, Δx и Δy, имеем:
$$\Delta z = [(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2] - (x^2+y^2) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2,$$
следовательно,
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$$
Приведем пример разрывной функции.
Пример 2. Функция
$$z = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$
определена всюду, кроме точки $x = 0,\ y = 0$.

Свойство 1. Если функция $f(x,y,\dots)$ определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то в области D найдется по крайней мере одна точка $N(x_0,y_0,\dots)$ такая, что для всех других точек области будет выполняться соотношение $f(x_0,y_0,\dots) \geq f(x,y,\dots)$,
по крайней мере одна точка $\bar{N}(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\dots)$ такая, что для всех других точек области будет выполняться соотношение $f(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\dots) \leq f(x,y,\dots)$.

Значение функции $f(x_0,y_0,\dots) = M$ будем называть *наибольшим значением функции* $f(x,y,\dots)$ в области D, а значение $f(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\dots) = m$ *наименьшим значением*.

Это свойство формулируют и так. Непрерывная функция в замкнутой ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значение M и наименьшего значения m.

Свойство 2. Если функция $f(x, y, ...)$ непрерывна в замкнутой и ограниченной области D и если M и m – наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, ...)$ в области, то для любого числа μ, удовлетворяющего условию $m < \mu < M$, найдется в области такая точка $N^*(x_0^*, y_0^*, ...)$, что будет выполняться равенство $f(x_0^*, y_0^*, ...) = \mu$.

Следствие свойства 2. Если функция $f(x, y, ...)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области и принимает как положительные, так и отрицательные значения, то внутри области найдутся точки, в которых функция $f(x, y, ...)$ обращается в нуль.

§8.2 Частные производные функции нескольких переменных

Определение. *Частной производной по* x от функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Частная производная по x от функции $z = f(x, y)$ обозначается одним из символов z'_x, $f'_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Таким образом, по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Аналогично частная производная по y от функции $z = f(x, y)$ определяется как предел отношения частного приращения функции $\Delta_y z$ по y к приращению Δy к нулю. Частная производная по y обозначается одним из символов z'_y, f'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Заметив, что $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y, а $\Delta_y z$ при неизменном x, мы можем определения частных производных сформулировать так: частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется производная по x, вычисленная в предложении, что y - постоянная. Частной производной по y от функции $z = f(x, y)$ называется производная по y, вычисленная в предположении, что x - постоянная.

Из этого определения ясно, что правила вычисления частных производных совпадают с правилами, указанными для функций одного переменного, и только требуется каждый раз помнить, по какому переменному ищется производная.

Пример 1: Дана функция $z = x^2 \sin y$; требуется частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$$

Пример 2: $z = x^y$.

Здесь $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$

Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично. Так, если имеем функцию u четырех переменных $x,\ y,\ z,\ t$:

$$u = f(x,y,z,t),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, t) - f(x,y,z,t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z, t) - f(x,y,z,t)}{\Delta y}$$

и т.д.

Пример 3: $u = x^2 + y^2 + xtz^3$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3.$$

8.2.1 Полное приращение и полный дифференциал

По определению полного приращения функции $z = f(x,y)$ имеем:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \qquad (8.9)$$

Предположим, что $f(x,y)$ в рассматриваемой точке (x,y) имеет непрерывные частные производные.

Выразим Δz через частные производные. Для этого в правой части равенства (8.9) прибавим и вычтем $f(x, y+\Delta y)$:

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)] \qquad (8.10)$$

Выражение $f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$, стоящее во второй квадратной скобке, можно рассматривать как разность двух значений функции одного переменного y (значение x остается постоянным). Применяя к этой разности теорему Лагранжа, получим:

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} \qquad (8.11)$$

где $\bar{y}$ заключено между y и $y + \Delta y$.

Точно так же выражение, стоящее в первой квадратной скобке равенства (8.10), можно рассматривать как разность двух значений функции одного переменного x (второй аргумент сохраняет одно и то же значение $y + \Delta y$). Применяя к этой разности теорему Лагранжа, получим:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} \qquad (8.12)$$

где $\bar{x}$ заключено между x и $x+\Delta x$.
Внося выражения (8.11) и (8.12) в равенство (8.10), получим:

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \qquad (8.13)$$

Так как, по предложению, частные производные непрерывны, то

$$(8.14) \quad \left.\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} -= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$

(так как $\bar{x}$ и $\bar{y}$ заключены, соответственно, между x и $x+\Delta x$, y и $y+\Delta y$, то при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ $\bar{x}$ и $\bar{y}$ стремятся, соответственно, к x и y). Равенства (8.14) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \gamma_1 \\ \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \gamma_2 \end{aligned}\right\}$$

(8.14^1)

где величины γ_1 и γ_2 стремятся к нулю, когда Δx и Δy стремятся к нулю (т.е. когда $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$).
В силу равенств (8.14^1) соотношение (8.13) принимает вид

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y \qquad (8.13')$$

Сумма двух последних слагаемых правой части является бесконечно малой высшего порядка относительно $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Действительно, отношение $\frac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta\rho} \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$, так как γ_1 является бесконечно малой величиной, а $\frac{\Delta x}{\Delta\rho}$ – ограниченной $\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| \le 1\right)$. Аналогично проверяется, что $\frac{\gamma_2 \Delta y}{\Delta\rho} \to 0$.

Сумма первых двух слагаемых есть выражение линейное относительно Δx и Δy. При $f'_x(x,y) \ne 0$ и $f'_y(x,y) \ne 0$ это выражение представляет собой главную часть приращения, отличаясь от Δz на бесконечно малую высшего порядка относительно $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

<u>Определение.</u> Функция $z = f(x,y)$, полное приращение Δz которой в данной точке (x,y) может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: выражения, линейного относительно Δx и Δy, и величины бесконечно малой высшего порядка относительно $\Delta\rho$, называется дифференцируемой в данной точке, а линейная часть приращения называется *полным дифференциалом* и обозначается через dz или df.

Из равенства (8.13') следует, что если функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в данной точке, то она дифференцируема в этой точке и имеет полный дифференциал

$$dz = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y.$$

Равенство (8.13') можно переписать в виде

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

и с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно $\Delta\rho$ можно написать следующее приближенное равенство:

$$\Delta z \approx dz.$$

Приращения независимых переменных Δx и Δy мы будем называть *дифференциалами независимых переменных* x и y и обозначать, соответственно, через dx и dy. Тогда выражение полного дифференциала примет вид

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy.$$

Таким образом, если функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные, то она дифференцируема в точке (x,y), и ее полный дифференциал равен сумме произведений частных производных на дифференциалы соответствующих независимых переменных.

Пример 1: Найти полный дифференциал и полное приращение функции $z = xy$ в точке $(2;3)$ при $\Delta x = 0{,}1 \quad \Delta y = 0{,}2$.

Решение. $\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y,$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y.$$

Следовательно, $\Delta z = 3\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}72,$

$$dz = 3\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 = 0{,}7.$$

Предыдущие рассуждения и определения соответственным образом обобщаются на функции любого числа аргументов.

8.2.2 Производная сложной функции. Полная производная. Полный дифференциал сложной функции

Предположим, что в уравнении

$$z = F(u,v) \tag{8.15}$$

u и v являются функциями независимых переменных x и y:

$$u = \varphi(x,y), \qquad v = \psi(x,y) \tag{8.16}$$

В этом случае z есть сложная функция от аргументов x и y.

Конечно, z можно выразить и непосредственно через x, y, a именно:

$$z = F[\varphi(x,y),\ \psi(x,y)] \tag{8.17}$$

Предположим, что функции $F(u,v)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам, и поставим задачу: вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, исходя из уравнений (8.15) и (8.16) и не пользуясь уравнением (8.17).

Дадим аргументу x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда в силу уравнения (8.16), u и v получат приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$.

Но если u и v получают приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$, то и функция $z = F(u,v)$ получит приращение Δz:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v.$$

Разделим все члены этого равенства на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$ (в силу непрерывности функций u и v). Но тогда γ_1 и γ_2 тоже стремятся к нулю. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_1 = 0, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_2 = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (8.18)$$

Если бы мы дали приращение Δy переменному y, а x оставили неизменным, то с помощью аналогичных рассуждений нашли бы:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (8.18')$$

<u>Пример:</u> $z = \ln(u^2 + v)$, $u = e^{x+y^2}$, $v = x^2 + y$;

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

Используя формулы (8.18) и (8.18'), находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+\vartheta}e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+\vartheta}2x = \frac{2}{u^2+\vartheta}\left(ue^{x+y^2} + x\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+\vartheta}2e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+\vartheta} = \frac{2}{u^2+\vartheta}\left(4uye^{x+y^2} + 1\right).$$

В последние выражения вместо u и ϑ необходимо подставить e^{x+y^2} и $x^2 + y$ соответственно.

Для случая большего числа переменных формулы (8.18) и (8.18') естественным образом обобщаются.

Например, если $\omega = F(z,u,\vartheta,s)$ есть функция четырех аргументов z,u,ϑ,s, а каждый из них зависит от x и y, то формулы (4) и (4') принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\\ \frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\end{aligned}\right\} \qquad (8.19)$$

Если задана функция $z = F(x, y, u, \vartheta)$, где y, u, ϑ в свою очередь зависят от одного аргумента x: $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$, $\vartheta = \psi(x)$, то, по сути дела, z является функцией только одного переменного x и можно ставить вопрос о нахождении производной $\frac{dz}{dx}$.

Эта производная вычисляется по первой из формул (8.19):

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x};$$

но так как y, u, ϑ - функции только одного x, то частные производные обращаются в обыкновенные, кроме того, $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$; поэтому

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial\vartheta}\frac{d\vartheta}{dx}$$

Эта формула носит название *формулы для вычисления полной производной* $\frac{dz}{dx}$ (в отличие от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$).

Пример: $\quad z = x^2 + \sqrt{y}, \quad y = \sin x,$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=2x+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x=2x+\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x.$$

Найдем далее полный дифференциал сложной функции, определенной равенствами (8.15) и (8.16).

Подставляем выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, определенные равенствами (8.18) и (8.18'), в формулу полного дифференциала

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (8.20)$$

Получаем:

$$dz=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)dy.$$

Произведем следующие преобразования в правой части:

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}dx+\frac{\partial\vartheta}{\partial y}dy\right) \qquad (8.21)$$

Но

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du\\ \frac{\partial\vartheta}{\partial x}dx+\frac{\partial\vartheta}{\partial y}dy=d\vartheta\end{aligned}\right\} \qquad (8.22)$$

Равенство (8.21) с учетом равенств (8.22) модно переписать так:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} d\vartheta \qquad (8.23)$$

или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta \qquad (8.23')$$

Сравнивая (8.20) и (8.23'), можем сказать, что выражение полного дифференциала функции нескольких переменных (дифференциала первого порядка) имеет тот же вид, т.е. форма дифференциала инварианта, являются ли u и ϑ независимыми переменными или функциями независимых переменных.

Пример: Найти полный дифференциал сложной функции

$$z = u^2\vartheta^3, \quad u = x^2 \sin y, \quad \vartheta = x^3 e^y.$$

Решение: По формуле (8.23') имеем:

$$dz = 2u\vartheta^3 + 3u^2\vartheta^2 d\vartheta = 2u\vartheta^3(2x \sin y\, dx + x^2 \cos y\, dy) + 3u^2\vartheta^2(3x^2 e^y dx + x^3 e^y dy).$$

Последнее выражение можно переписать и так:

$$dz = (2u\vartheta^3 2x \sin y + 3u^2\vartheta^2 3x^2 e^y)dx + (2u\vartheta^3 x^2 \cos y + 3u^2\vartheta^2 x^3 e^y)dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

<u>8.2.3 Частные производные различных порядков</u>

Пусть имеем функцию $z = f(x, y)$

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ являются функциями переменных x и y. Поэтому от них можно снова находить частные производные.

Вторые частные производные:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (f'_x(x, y))'_x = f''_{xx}(x, y)$ - f дифференцируется последовательно два раза по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (f'_y(x, y))'_y = f''_{yy}(x, y)$ - f дифференцируется последовательно два раза по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (f'_x(x, y))'_y = f''_{xy}(x, y)$ - f сначала дифференцируется по x, а потом результат дифференцируется по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (f'_y(x, y))'_x = f''_{yx}(x, y)$ - f сначала дифференцируется по y, а потом результат дифференцируется по x;

Последние две частные производные еще называют *смешанными частными производными.*

Теорема. Если функция $z = f(x,y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{yx}, f''_{xy} определены и непрерывны в точке $M(x,y)$ и в некоторой ее окрестности, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

§8.3 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП)

СРСП 12

Дана функция $z = f(x;y)$. Показать, что $F\left(x;\ y;\ z;\ \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0$.

1. $z = y/(x^2 - y^2)^3;\ \ F = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2}$;
2. $z = y^2/(3x) + \arcsin(xy);\ \ F = x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2$;
3. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1);\ \ F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;
4. $z = e^{xy};\ \ F = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz$;
5. $z = \ln(x + e^{-y});\ \ F = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;
6. $z = x/y;\ \ F = x\frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}$;
7. $z = x^y;\ \ F = y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}$;
8. $z = xe^{y/x};\ \ F = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;
9. $z = \sin(x + ay);\ \ F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;
10. $z = \cos y + (y - x)\sin y;\ \ F = (x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}$.

Глава 9
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§9.1 Неопределенный интеграл

9.1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция *F(x)* называется *первообразной* от функции *f(x)* на отрезке [a,b], если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F^1(x) = f(x)$.

Пример:
Найти первообразную от функции $f(x) = x^2$. Из определения следует, что $F(x) = x^3/3$.
В общем виде $F(x) = x^3/3 + C$.

Теорема 1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные от f(x) на отрезке [a,b], то разность между ними равна постоянному числу.

Определение. Если функция *F(x)* является первообразной для *f(x),* то выражение *F(x) + C* называется *неопределенным интегралом* от функции *f(x)* и обозначается символом $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению,

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}\quad, \text{ если } F^1(x) = f(x).$$

При этом функцию *f(x)* называют подынтегральной функцией, *f(x)dx* – подынтегральным выражением, знак $\int$ - знаком интеграла.
Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [a,b], то для этой функции существует первообразная, а значит и неопределенный интеграл. Нахождение первообразной для данной функции называется *интегрированием.*

Замечание: Если производная от элементарной функции является всегда элементарной функцией, то первообразная от элементарной функции может оказаться и непредставимой с помощью конечного числа элементарных функции.

Следствия:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если $F^1(x) = f(x)$, то и
   $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x).$
2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению
   $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$
3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная
   $\int dF(x) = F(x) + C.$

Таблица интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$

8. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

9. $\int e^x dx = e^x + C$

10. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

11^1. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

13^1. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Теорема 2. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Теорема 3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если a=const, то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

1. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$
2. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

9.1.2 Интегрирование методом замены переменной или способом подстановки

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но известно, что она существует. Сделаем замену $x = \varphi(t)$- непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда

$$\boxed{\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$$

- *формула интегрирования методом замены переменной*

Примеры:

1. $$\int \frac{xdx}{x^2+5} = \begin{vmatrix} x^2+5=t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+5| + C$$

2. $$\int (\ln x)^5 \frac{dx}{x} = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{vmatrix} = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{(\ln x)^6}{6} + C$$

3. $$\int e^{\sin^2 x}\sin 2xdx = \begin{vmatrix} \sin^2 x = t \\ 2\sin x\cos xdx = dt \\ \sin 2xdx = dt \end{vmatrix} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin^2 x} + C$$

9.1.3 Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

I. Рассмотрим интеграл

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

Преобразуем трехчлен, который стоит в знаменателе:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-(\frac{b}{2a})^2\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-(\frac{b}{2a})^2\right)\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right],$$

Тогда интеграл

$$\boxed{I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2+k^2}.}$$

где $k^2=\frac{c}{a}-(\frac{b}{2a})^2$.

Здесь делаем замену переменной

$x+\frac{b}{2a}=t, dx=dt$ и получаем табличный интеграл $I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$.

Пример:

$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\left|\begin{array}{l}2x^2+8x+20=2(x^2+4x+10)=2(x^2+2\cdot2\cdot x+4+6)=2\left[(x+2)^2+6\right]\\ x+2=t\\ dx=dt\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{t^2+6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{t}{\sqrt{6}}+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C$$

II. Рассмотрим интеграл более общего вида

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$$

Произведем тождественное преобразование подынтегральной функции

$$\boxed{I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{ax^2+bx+c}dx}$$

Это есть сумма двух интегралов. В первом интеграле делаем замену переменной $ax^2+bx+c=t,(2ax+b)dx=dt$. Подставив его в первый интеграл, получим $\int\frac{dt}{t}$, то есть табличный интеграл, а второй есть интеграл из раздела I , то есть I_1 .

Пример:

$$\int\frac{(3x-2)dx}{5x^2-3x+2}=\left|\frac{3x-2}{5x^2-3x+2}=\frac{\frac{3}{10}(10x-3)+(-2-\frac{3(-3)}{10})}{5x^2-3x+2}\right|=\int\frac{\frac{3}{10}(10x-3)-\frac{11}{10}}{5x^2-3x+2}dx=$$

$$=\frac{3}{10}\int\frac{10x-3}{5x^2-3x+2}dx-\frac{11}{10}\int\frac{dx}{5x^2-3x+2}=\frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right|-\frac{11}{10}\cdot\frac{1}{5}\int\frac{dx}{(x-\frac{3}{10})^2+\frac{31}{100}}=$$

$$=\frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right|-\frac{11}{10}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{\sqrt{31}}arctg\frac{10(x-\frac{3}{10})}{\sqrt{31}}+C=\frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right|-\frac{11}{5\sqrt{31}}arctg\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$$

III. Рассмотрим интеграл

$$I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Аналогично интегралу I_1 после некоторых преобразований придем к табличному интегралу.

IV. Рассмотрим интеграл

$$I_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Применив тот же метод, что у интеграла I_2, получим сумму двух интегралов и приведем их к табличному.

9.1.4 Интегрирование по частям

Пусть u и v - две дифференцируемые функции от x. Так как $d(uv)=udv+vdu$, то

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$$

- *формула интегрирования по частям*

9.1.5 Интегрирование рациональных дробей

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+...+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+...+A_n}$$

Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется *правильной*, в противном случае – *неправильной*.

Если дробь неправильная, то ее можно привести к виду:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{f(x)},$$

где $M(x)$ - многочлен, а $\frac{F(x)}{f(x)}$ - правильная дробь.

Определение. Правильные рациональные дроби вида:

1. $\frac{A}{x-a}$,

2. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k - целое положительное число ≥ 2),

3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные),

4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k - целое положительное число ≥ 2, корни знаменателя комплексные)

называются *простейшими дробями* 1,2,3 и 4-го типов.

Интегрирование простейших дробей:

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$;

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$;

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q}$

(см. пункт 8.1.3 интегралы I_1 и I_2);

4.

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

<u>Теорема 1.</u>

Пусть $x=a$ есть корень знаменателя кратности k, т.е. $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$, где $f_1(a)\neq 0$. Тогда

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)}$$

где А – постоянная, не равная нулю, а $F_1(x)$ - многочлен, степень которого ниже степени знаменателя $(x-a)^{k-1}f_1(x)$

Дробь можно представить в виде:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

где $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ - правильная несократимая дробь.

Рассмотрим случай комплексных корней знаменателя. Комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами всегда попарно сопряжены.

Теорема 2. Если $f(x)=(x^2+px+q)^{\mu}\varphi_1(x)$, где многочлен $\varphi_1(x)$ не делится на x^2+px+q, то правильную рациональную дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)},$$

где $\Phi_1(x)$- многочлен, степень которого ниже степени многочлена .

Применяя к правильной дроби $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ результаты теорем 1 и 2, мы можем выделить последовательно все простейшие дроби, соответствующие всем корням знаменателя $f(x)$. Таким образом,

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+...+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+...+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+...+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q}+...+\frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}}+\frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}$$

Коэффициенты $A,A_1,...,B,B_1,...,M_1,M_2,...,Q_1,Q_2,...$ называются *неопределенными коэффициентами*. Приведя дроби к общему знаменателю, получим тождественные многочлены в числителях справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A,A_1,...,B,B_1,...,M_1,M_2,...,Q_1,Q_2,...$. Этот метод нахождения коэффициентов называется *методом неопределенных коэффициентов.*

Пусть требуется вычислить интеграл от рациональной дроби $\int\frac{Q(x)}{f(x)}dx$.

1 случай:

Корни знаменателя действительны и различны, т.е.

$$f(x)=(x-a)(x-b)...(x-d)$$

В этом случае $\dfrac{F(x)}{f(x)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+...+\dfrac{D}{x-d}$ и тогда

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx=\int\frac{A}{x-a}dx+\int\frac{B}{x-b}dx+...+\int\frac{D}{x-d}dx=A\ln|x-a|+B\ln|x-b|+...+D\ln|x-d|+C$$

2 случай:

Корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные, т.е.

$$f(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}...(x-d)^{\delta}$$

В этом случае дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби 1 и 2 типов.

Пример:

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \dfrac{A}{(x+1)^3} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{x+1} + \dfrac{D}{x-2} \\ x^2+2 = A(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)^2(x-2) + D(x+1)^3 \\ x^2+2 = A(x-2) + B(x^2-x-2) + C(x^3-3x-2) + D(x^3+3x^2+3x+1) \\ x^3 \big| 0 = C + D \\ x^2 \big| 1 = B + 3D \\ x^1 \big| 0 = A - B - 3C + 3D \\ x^0 \big| 2 = -2A - 2B - 2C + D \\ A = -1, B = \dfrac{1}{3}, C = -\dfrac{2}{9}, D = \dfrac{2}{9} \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} = -\frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$$

3 случай:

Среди корней знаменателя есть и комплексные неповторяющиеся, т.е.

$$f(x) = (x^2+px+q)...(x^2+lx+s)(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}...(x-d)^{\delta}$$

В этом случае дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби 1, 2 и 3 типов.

4 случай:

Среди корней знаменателя есть и комплексные кратные, т.е.

$$f(x) = (x^2+px+q)^{\mu}...(x^2+lx+s)^{\nu}(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}...(x-d)^{\delta}$$

В этом случае дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби 1, 2, 3 и 4 типов.

Пример:

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \dfrac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2x+3} + \dfrac{E}{x+1} \\ x^4+4x^3+11x^2+12x+8 = (Ax+B)(x+1) + (Cx+D)(x^2+2x+3)\times \\ \times(x+1) + E(x^2+2x+3)^2 \\ A = 1, B = -1, C = 0, D = 0, E = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{x+1} = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln|x+1| + C$$

<u>9.1.5 Интегралы от иррациональных функций</u>

I. Рассмотрим интеграл

$\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{r}{s}})dx$, где R – рациональная функция своих аргументов.

Замена: $x = t^k$, $dx = kt^{k-1}dt$, где k - общий знаменатель $\frac{m}{n},...,\frac{r}{s}$.

Пример: $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}$; замена $x = t^4$, т.к 4 есть общий знаменатель $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$.

II. Рассмотрим интеграл вида

$\int R\{\ x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}}, ..., (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}}\ \}dx$.

Замена: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k - общий знаменатель дробей $\frac{m}{n},...,\frac{r}{s}$.

Пример:

$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$; замена $x + 4 = t^2$.

9.1.6 Интегралы некоторых классов тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл вида

$\int R(\sin x, \cos x)dx$

Подстановка $tg\frac{x}{2} = t$. – универсальная тригонометрическая подстановка

Тогда $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

Выразим:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Таким образом,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2}$$

На практике применяются и другие подстановки:

а) $\int R(\sin x)\cos xdx$, то подстановка $\sin x = t$;

б) $\int R(\cos x)\sin xdx$, то подстановка $\cos x = t$;

в) если подынтегральная функция зависит только от tgx, то замена $tgx = t$, $x = arctgt$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$;

г) если $\int R(\sin x, \cos x)dx$, но $\sin x, \cos x$ входят в четных степенях, то подстановка $tgx = t$, тогда $\sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$;

д) $\int \sin^m x \cos^n x dx$, m и n таковы, что по крайней мере одно из них нечетное число.

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \left| n = 2p+1 \right| = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p x \cos x dx$$

Замена $\sin x = t$;

е) $\int \sin^m x \cos^n x dx$, m и n - числа неотрицательные и четные

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \left| \begin{array}{l} m = 2p \\ n = 2q \\ \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| = \int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)^p (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)^q dx$$

ж) Если оба показателя – четные, причем хотя бы один из них отрицателен, то следует сделать замену $tgx = t$ или $ctgx = t$

з) $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$

используются формулы:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$$

§9.2 Определенный интеграл

9.2.1 Определение определенного интеграла

К понятию определённого интеграла приводят различные задачи геометрии и физики. Рассмотрим некоторые из них.

Задачи, приводящие к определённому интегралу

1. Задача о площади криволинейной трапеции.

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и $y = f(x)$, где $f(x) > 0$ и непрерывна на $[a, b]$.

Найдём площадь криволинейной трапеции.(рис.9.1)

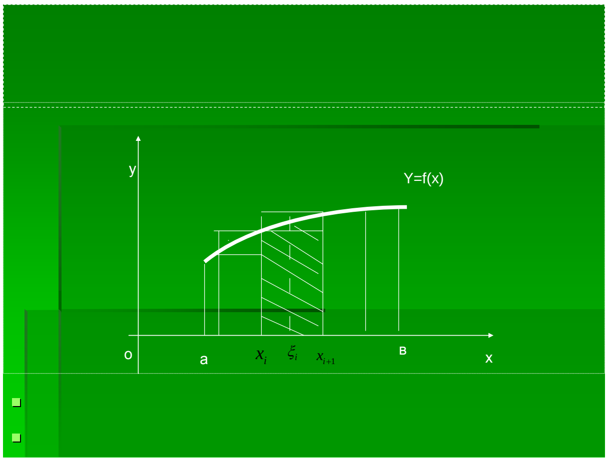


рис.9.1

1) Разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей точками $x_1, x_2, ..., x_n$, где $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Введём обозначения $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)$.

2) Выберем произвольные точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Найдём произведения $f(\xi_i)\Delta x_i$.

3) Составим сумму $S_n = \sum\limits_1^n f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n$

4) Найдём предел S_n при измельчении разбиения $S = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_1^n f(\xi_i)\Delta x_i$. Если этот предел существует, то полученное значение и будет площадь криволинейной трапеции.

Определение. Сумма $\sum\limits_1^n f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой* функции на отрезке $[a,b]$. Если существует конечный предел S интегральной суммы S_n при $\lambda \to 0$, который не зависит от разбиения $[a,b]$ на частичные отрезки Δx_i и выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то функция $f(x)$ *интегрируема* на $[a,b]$.

Определение. Если при любых разбиениях отрезка, таких, что максимум $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ стремится к нулю, и при любом выборе точек ξ_i на отрезках Δx_i интегральная сумма стремится к одному и тому же пределу S, то этот предел называется ***определенным интегралом*** и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$

Числа a и b называются верхним и нижним пределами интегрирования, $f(x)$ - подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования.

2. Задача об объеме выпущенной продукции

Пусть $y = f(t)$ - производительность некоторого производства, где t - время. Требуется найти объем выпускаемой продукции за время $[0,T]$.

Для этого по аналогии задаче 1:

1) разобьем промежуток времени $[0,T]$ на части $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T$, причем $\lambda = \max\limits_{[0,T]}(\Delta t_k)$;

2) допустим, что производительность $f(t)$ не изменится за время $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ и равна $f(\xi_k)$, где ξ_k - произвольное время из $[t_k, t_{k+1}]$;
3) тогда объем продукции за время Δt_k будет $\Delta V_k = f(\xi_k)\Delta t_k$;
4) суммируем объем продукции по всем частям $J = f(\xi_1)\Delta t_1 + f(\xi_2)\Delta t_2 + ... + f(\xi_n)\Delta t_n = \sum_1^n f(\xi_k)\Delta t_k$. Если $\lim_{\lambda \to 0} \sum_1^n f(\xi_k)\Delta t_k$ существует, то он и будет объемом выпущенной продукции за время $[0, T]$. А на языке определенного интеграла $V = \int_0^T f(t)dt$.

Выясним геометрический, экономический и механический смысл определённого интеграла.

1.Если функция $f(x) > 0$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и $y = f(x)$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2. Объем выпускаемой продукции производства и капитал для выпуска продукции производства

$$V = \int_0^T f(t)dt, \text{ где } f(t) \text{- производительность производства}$$

3. Путь, пройденный материальной точкой, равен интегралу от скорости $V(t)$, взятому по времени $s = \int_a^b V(t)dt$

4. Работа переменной силы *F(S)* равна интегралу силы, взятому по перемещению A=$\int_a^b F(S)dS$

5. Масса неоднородного стержня, равна интегралу от плотности $p(x)$, взятому по длине стержня $m = \int_a^b p(x)dx$

9.2.2 Вычисление определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. Определённый интеграл равен разности значений первообразной от подынтегральной функции, взятых при верхнем и нижнем пределах интегрирования $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b)$, где $F'(x) = f(x)$

Это равенство называется *формулой Ньютона-Лейбница.*

Примеры: 1. $\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$

2. $\int 3^{-x}dx = -\frac{3^{-x}}{\ln 3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{\ln 3}\left(3^{-1} - 3^0\right) = -\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2}{3\ln 3}$

3. $\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

6. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

Свойства определённого интеграла

1. Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$

Данные интегралы выражают площадь одной и той же криволинейной трапеции.

2. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ был введён для случая $a < b$, то есть $\int_a^a f(x)dx = 0$, так как $\Delta x = 0$ и трапеция вырождается в отрезок, и её площадь $S = 0$

При изменении направления интегрирования, знак интеграла меняется на противоположный $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, так как Δx_k меняет знак.

3. Интеграл с переменным верхним пределом. Пусть в определённом интеграле $\int_a^b f(x)dx$ один из пределов интегрирования, например a, закреплён, а верхний предел b меняется. Так как определённый интеграл не зависит от переменной интегрирования можем записать $\int_a^x f(t)dt$. С изменением x будет меняться и величина этого интеграла, т.е. он является функцией от x. Обозначим эту функцию $I(x)$. Получим $I(x)= \int_a^x f(t)dt$. Геометрически функция $I(x)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции aAXx с подвижной стенкой, если $f(x)> 0$ (рис. 9.2).

Теорема. Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в точке дифференцирования, т. е. $I'(x) = (\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$. Иными словами: интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для подынтегральной функции $f(x)$. Связь между определённым и неопределённым интегралом выражается равенством. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$.

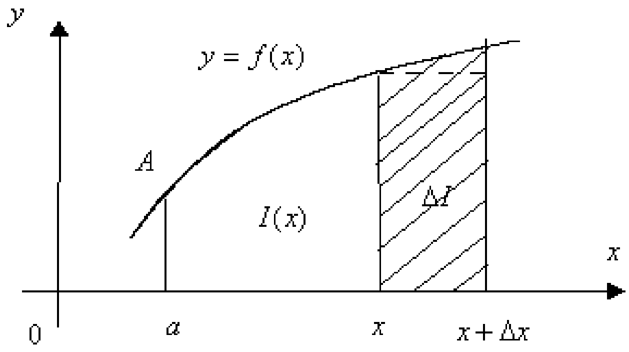


рис.9.2

4. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad k = \text{const}$

7. $a < b, \quad f(x) \ge 0 - [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$

8. $f(x) \le \varphi(x) - [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

9. $f(x) \le |f(x)| - [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$

10. Свойство о среднем значении

Если $f(x)$ $[a, b]$ - непрерывна, то найдется хотя бы одно $c \in (a, b)$, для которого(4) $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, $f(c)$ - среднее значение.

11.Интегрирование по частям

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

12.Замена переменной в определённом интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int_{t1}^{t2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Замечание: При вычислении определённого интеграла не нужно возвращаться к прежней переменной *x*, а подставить в первообразную пределы изменения *t*.

§9.3 Приложение определенного интеграла

С помощью определенного интеграла можно решать задачи механического, физического, экономического смысла, а также любые задачи из жизни. Для этого мы покажем, что определенный интеграл - это:

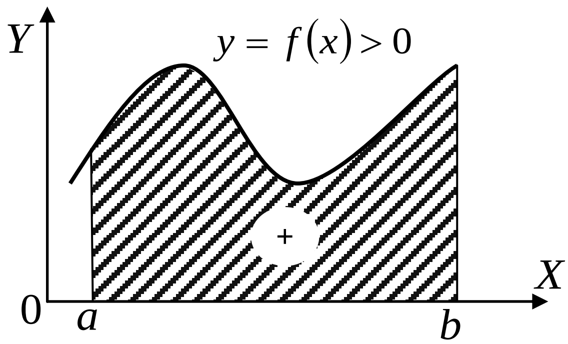
- ***Геометрический смысл*** – площадь криволинейной трапеции;

- ***Экономический смысл*** – объем выпускаемой продукции за промежуток времени от 0 до T;
- ***Методическое обоснование*** – переход от анализа к синтезу.
- ***На языке математики*** – переход от дифференциации (разделение) к интеграции (суммирование) .

Итак, с помощью определенного интеграла можно вычислять:

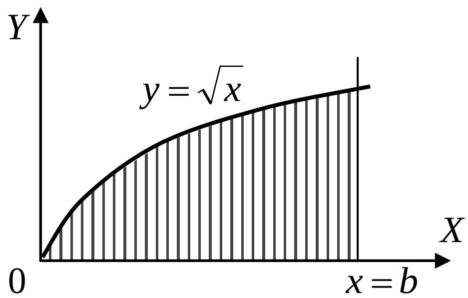
9.3.1. Вычисление площадей в прямоугольных координатах

а) если функция $f(x)>0$, то площадь фигуры вычисляется по формуле



$$S=\int_a^b f(x)dx$$

Пример:



Дано:

$y=\sqrt{3}$

$y=0$

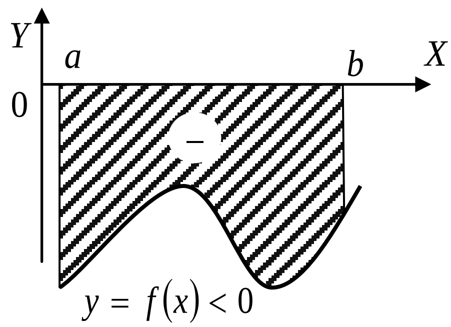
$x=3$

S ?

Решение:

$$S = \int_0^3 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\Big|_0^3 = 2\sqrt{3}\,(\text{кв.ед})$$

б) если функция $f(x) < 0$, то площадь фигуры вычисляется по формуле



$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Пример:

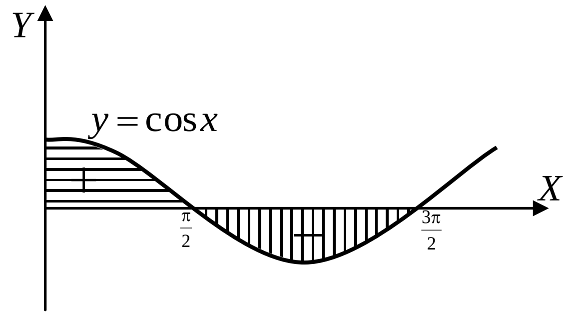
Дано:

$y = \cos x$

$y = 0$

$0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$

$S - ?$

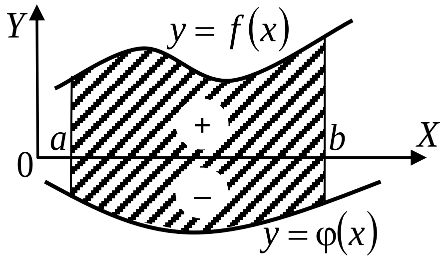


Решение:

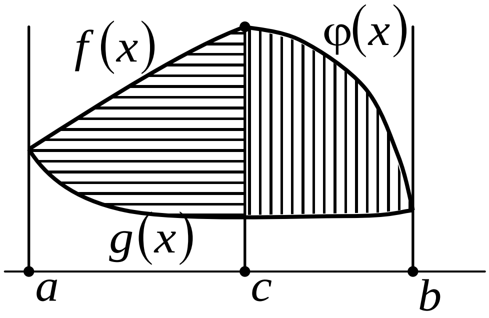
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 3\,(\text{кв.ед})$$

в) Если заданы $f(x) > 0$ и $\varphi(x) < 0$, то площадь фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f(x) - \varphi(x)\right)dx$$



Общий случай



$$S=\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^b (\varphi(x)-g(x))dx$$

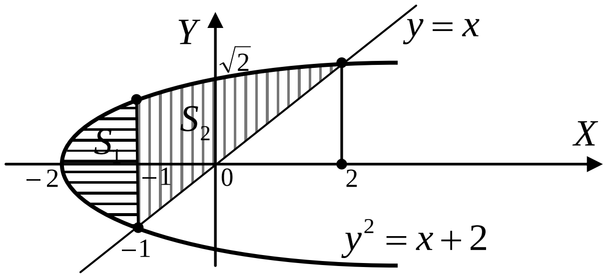
Пример:

Дано:

$y^2 = x+2$

$y = x$

$S - ?$



Решение:

1 метод: $S = S_1 + S_2 = \left| \begin{cases} y = x \\ y^2 = x+2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array} \right. \right| =$

$$= \int_{-2}^{-1}\left(\sqrt{x+2} - \left(-\sqrt{x+2}\right)\right)dx + \int_{-1}^{2}\left(\sqrt{x+2} - x\right)dx = \frac{7}{6}\text{(кв.ед)}$$

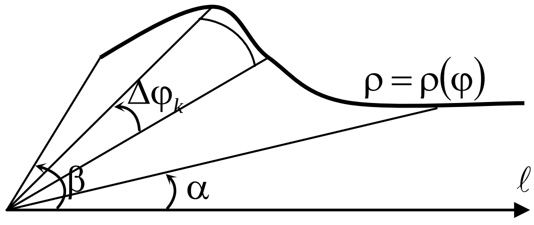
2 метод:

$y_1 = c \quad y_2 = d$

$$\begin{cases} x = y \\ x = y^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = -1 = c \\ y_2 = 2 = d \end{array}$$

$$S = \int_{-1}^{2}\left(y - \left(y^2 - 2\right)\right)dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 2y\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3} + \frac{7}{2} = \frac{7}{6}$$

9.3.2. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

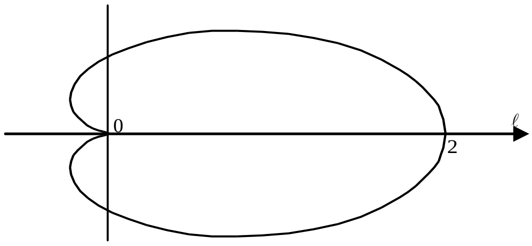


$$S_c = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\, d\varphi$$

Пример:

кардиоида: $\rho = 1 + \cos\varphi$

Решение:



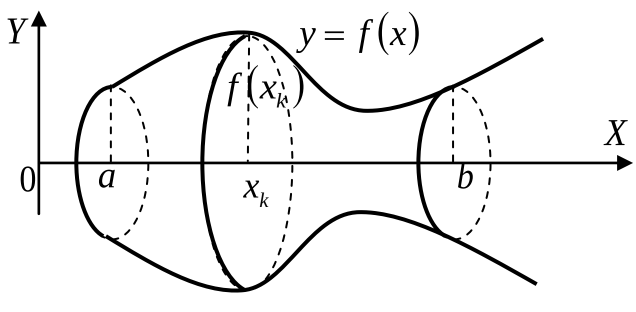
φ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	π
ρ	2	...	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	0

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{3\pi}{2} \text{(кв.ед)}$$

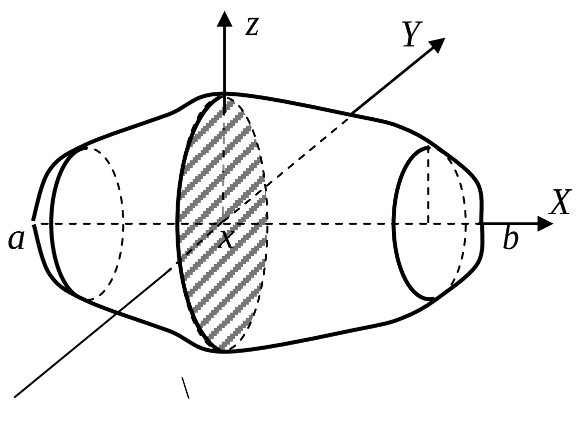
9.3.3. Вычисление объема тел

а) Объем тела вращения



$$V_{Ox} = \pi\int_a^b y^2 dx$$

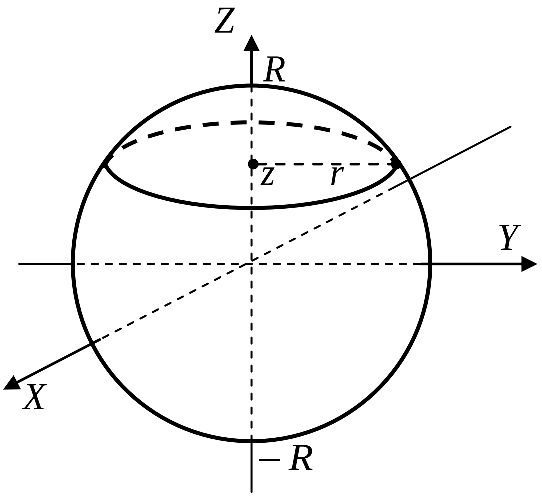
б) Объем тела по площадям параллельных сечений



$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Пример:

$x^2+y^2+z^2=R^2$ - Найти объем шара по площадям поперечного сечения



Решение:: $\forall z\in(-R,\,R)$ -

$x^2+y^2=R^2-z^2=r^2$

$S(z)=\pi r^2=\pi(R^2-z^2)$

$V=\int_{-R}^{R}S(z)dz=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-z^2)dz=$

$=\pi\left(R^2z-\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3$

Ответ:: $\frac{4}{3}\pi R^3$

Во многих задачах экономики, например, при определении спроса населения всеми необходимыми потребностями, при их транспортировке, для определения объемов производимой продукции производства к сроку, возникает необходимость вычисления определенного интеграла. Для этих целей большое значение имеет вычисление площадей фигур, объемов тел разной конфигурации и т.д.

<u>Пример:</u>

$f(t)=(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}$ - производительность производства по времени (функция Кобба-Дугласа); α,β,γ - известные параметры производства с постоянным капиталом. Требуется найти объем производимой продукции за время $0\le t\le T$.

Решение:

$$V=\int_0^T(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}dt=\int_0^T\alpha te^{\gamma t}dt+\int_0^T\beta e^{\gamma t}dt=\left|\begin{array}{l}\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu\\ u=t\Rightarrow du=dt\\ dv=e^{\gamma t}dt\Rightarrow v=\frac{1}{\gamma}e^{\gamma t}\\ a=0,b=T\end{array}\right|=\frac{e^{\gamma T}}{\gamma^2}(\gamma-1)\alpha+\gamma b$$

Ответ: $V=\frac{e^{\gamma T}}{\gamma^2}(\gamma-1)\alpha+\gamma b$

Исходя из условия решенной задачи можно вычислить с помощью определенного интеграла капитал, расходуемый для продукции ко времени t

$K(t)=\int_0^t f(t)e^{-\gamma t}dt$. $K(t)$ - называется дисконтированным капиталом.

Пример:

Первоначальный капитал для производства продукции 10 млн.тенге. Норма годового удельного роста 8%. Требуется найти дисконтированный капитал через 3 года, если ежегодно прибавляют 1 млн.тенге.

Решение:

$$f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$$

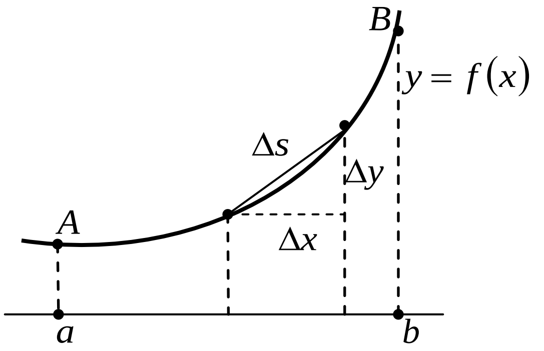
$$K(t) = \int_0^3 (10+t)e^{-0{,}08t}dt = 30{,}5 \text{ млн.тенге.}$$

9.3.4. Длина дуги кривой

1. $y = f(x)$ $\quad [a, b] \quad s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$

2. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\quad [\alpha, \beta] \quad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$

3. $\rho = \rho(\varphi)$ $\quad [\alpha, \beta] \quad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi$



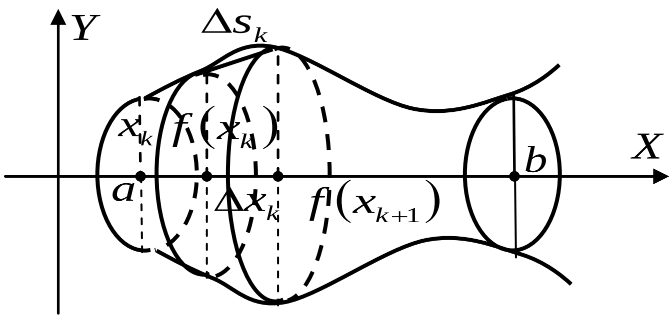
$$\Delta s \cong \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x\sqrt{1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\Rightarrow s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad x^2 + y^2 = \rho^2$$

9.3.5.Площадь поверхности тела вращения



$$S_{Ox} = 2\pi\int y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

И другие вычисления можно производить с помощью определенного интеграла.

§9.4 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП)

СРСП 13

1.

Найти неопределенные интегралы. В пунктах а) и б) результаты проверить дифференцированием.

1. а) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$; б) $\int arctg\sqrt{x}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

2. а) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int e^x \ln(1+3e^x)dx$; в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x + tgx}$;

3. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x3^x dx$; в) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

4. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)}$ б) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ в) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$ г) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

5. а) $\int \frac{\cos 3xdx}{4+\sin 3x}$ б) $\int x^2 e^{3x}dx$ в) $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$ г) $\int \frac{\cos xdx}{1+\cos x}$

6. а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$ б) $\int x\arcsin\frac{1}{x}dx$ в) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$ г) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$

7. а) $\int \frac{(x+arctgx)dx}{1+x^2}$ б) $\int x\ln(x^2+1)dx$ в) $\int \frac{(x^2-3)dx}{x^4+5x^2+6}$ г) $\int \frac{\sqrt{x+5}dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$

8. а) $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+x)}}dx$ б) $\int x\sin x\cos xdx$ в) $\int \frac{x^2dx}{x^4-8}$ г) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$

9. а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$ б) $\int x^2\sin 4xdx$ в) $\int \frac{(x^2-x+1)dx}{x^4+2x^2-3}$ г) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

10. а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$ б) $\int x\ln^2 xdx$ в) $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$ г) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$

2. Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+50}$ 2. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$ 3. $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$ 4. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$ .5. $\int \frac{(6x-7)dx}{3x^2-7x+11}$

6. $\int \frac{(3x-2)dx}{5x^2-3x+2}$ 7. $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-x+1}$ 8. $\int \frac{(7x+1)dx}{6x^2+x-1}$ 9. $\int \frac{(2x-1)dx}{5x^2-x+2}$ 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$ 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$ 13. $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$ 14. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$

3. Найти определенный интеграл:

1. $\int_1^3 x^3\cdot\sqrt{x^2-1}dx$; 2. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; 3. $\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos\ln xdx$; 4. $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$; 5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\sin 2xdx$;

6. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$; 7. $\int_{-3}^3 \frac{x^2\sin 2x}{x^2+1}dx$; 8. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$; 9. $\int_0^1 e^{x+e^x}dx$; 10. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$;

Глава 10
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 10.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

10.1.1 Основные понятия и определения

Определение 1. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Символически дифференциальное уравнение записывают

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad \text{или} \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Если искомая функция $y = f(x)$ есть функция одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Определение 2. *Порядком дифференциального уравнения* называется наивысший из порядков входящих в него производных.

Например,

$y' - 2xy - 5 = 0$ - уравнение 1-го порядка,

$y'' - 3y' + 2y = \sin x$ -уравнение 2-го порядка.

Определение 3. *Решением или интегралом* дифференциального уравнения называется функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество.

Например,

для уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$ функции $y = e^{2x}$, $y = e^x$ и вообще функции вида $y = C_1e^{2x} + C_2e^x$ являются решениями данного уравнения при любом значении постоянных C_1, C_2.

Определение 4. *Дифференциальное уравнение первого порядка* имеет вид $F(x, y, y') = 0$ в неявном виде или $y' = f(x, y)$ - в явном виде.

Пусть дано уравнение
$$y' = f(x, y) \qquad (10.1)$$

Теорема. Если в уравнении (10.1) функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ по y непрерывны в некоторой области D на плоскости Oxy, содержащей некоторую точку (x_0, y_0), то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию: $y = y_0$ при $x = x_0$.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называется *начальным условием*; оно записывается так $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Геометрически теорема утверждает существование единственной интегральной кривой уравнения, проходящей через точку $P(x_0, y_0)$.

Определение 5. *Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y=\varphi(x,C)$, которая зависит от одного произвольного постоянного C и удовлетворяет:

а) $y=\varphi(x,C)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом значении постоянного C;

б) по заданному любому возможному начальному условию $y\big|_{x=x_0}=y_0$ может быть найдено единственное значение $C=C_0$ такое, что $\varphi(x_0,C_0)=y_0$.

Решение, полученное из общего решения при каком-либо фиксированном значении параметра C, называется *частным решением*.

Таким образом,

$y=\varphi(x,C)$ - общее решение, $\Phi(x,y,C)=0$ - общий интеграл;

$y=\varphi(x,C_0)$ - частное решение, $\Phi(x,y,C_0)=0$ - общий интеграл;

Пример: Рассмотрим дифференциальное уравнение $xy'-2x=0$

Функция $y=Cx^2$ является общим решением, т.к. удовлетворяет данному условию. Надо найти частное решение дифференциального уравнения, соответствующего начальному условию $y\big|_{x=2_0}=12$. Если в общее решение подставить $x=2$, $y=12$, то получится $C=3$. Частное решение будет $y=3x^2$.

Общее решение $y=\varphi(x,C)$ дифференциального уравнения с геометрической точки зрения представляет собой семейство кривых на плоскости. Они называются *интегральными* кривыми. Частному решению или частному интегралу соответствует одна кривая этого свойства, проходящая через данную точку.

Уравнение (10.1) для каждой точки $M(x,y)$ определяет значение производной $\frac{dy}{dx}$, т.е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Таким образом, дифференциальное уравнение (10.1) дает совокупность направлений или, как говорят, определяет *поле направлений*. Интегрирование дифференциального уравнения заключается в нахождении кривых, направление касательных к которым совпадает с направлением поля в соответствующих точках.

10.1.2 Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y) \qquad (10.2)$$

Предполагая, что $f_2(y)\neq 0$:

$$\frac{1}{f_2(y)}dy=f_1(x)dx \qquad (10.2)^1$$

Уравнение (10.2) – уравнение с разделяющимися переменными,

$(10.2)^1$ – уравнение с разделенными переменными.

Уравнение вида $P(x)dx+Q(x)dy=0$ называют уравнением с *разделенными переменными.*
$P(x)dx=-Q(x)dy$ можно рассматривать как равенство двух дифференциалов, а неопределенные интегралы от них будут отличаться постоянным слагаемым, т.е. $\int P(x)dx+\int Q(y)dy=C$

Это будет общий интеграл данного уравнения.
Уравнение вида $P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0$ называется уравнением с *разделяющимися переменными*. Разделим обе части на $Q_1(y)P_2(x)\neq 0$, получим уравнение *с разделенными переменными*

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0$$

Общий интеграл уравнения будет

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=C$$

10.1.3 Однородные дифференциальные уравнения

Определение 1. Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией* n*-го измерения* относительно переменных x и y, если при любом λ справедливо тождество $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$.

Например,

1) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ - однородная функция первого измерения, так как
$f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3}=\lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}=\lambda^1 f(x,y)$;

2) $f(x,y)=xy-y^2$ - однородная функция второго измерения, так как
$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)(\lambda y)-(\lambda y)^2=\lambda^2(xy-y^2)=\lambda^2 f(x,y)$;

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{xy}$ - однородная функция нулевого измерения, так как
$f(\lambda x,\lambda y)=\dfrac{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}{\lambda x\lambda y}=\dfrac{x^2-y^2}{xy}=\lambda^0\dfrac{x^2-y^2}{xy}=\lambda^0 f(x,y)$

Определение 2. Дифференциальное уравнение

$$y'=f(x,y) \tag{10.1}$$

называется *однородным*, если $f(x,y)$ однородная функция нулевого измерения относительно переменных x и y, т.е. $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$.

Положив $\lambda=\dfrac{1}{x}$, получим:

$$\frac{dy}{dx}=f(1,\frac{y}{x}) \tag{10.3}$$

Сделаем подстановку $\dfrac{y}{x}=u \;\Rightarrow\; y=ux$, $\dfrac{dy}{dx}=x\cdot\dfrac{du}{dx}+u$

Подставляя в уравнение (10.3), получим

$$x\frac{du}{dx}+u=f(1,u)$$

$$x\frac{du}{dx} = f(1,u) - u$$

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Подставляя после интегрирования вместо u отношение $\frac{y}{x}$, получим общий интеграл уравнения (10.1).

Уравнения, приводящиеся к однородным

К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1} \qquad (10.4)$$

Если $c_1 = c = 0$, то уравнение (10.4) есть однородное.

Пусть c_1, c отличны от нуля.

Сделаем замену переменных:

$x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$, тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1 x_1 + b_1 y_1 + a_1 h + b_1 k + c_1} \qquad (10.5)$$

Подберем h и k так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1 h + b_1 k + c_1 = 0 \end{cases}, \qquad (10.6)$$

т.е определяем h и k как решения системы.

При выполнении условия (10.6) уравнение (10.5) становится однородным и приводится к уравнению вида (10.3).

Если система (10.6) не имеет решения, т.е. $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, то $ab_1 = a_1 b$. Но в это случае $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda \quad \Rightarrow a_1 = \lambda a, \quad b_1 = \lambda b \quad \Rightarrow$ уравнение (10.4) можно преобразовывать к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1} \qquad (10.7)$$

Тогда подстановкой $z = ax + by$ уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

10.1.4 Линейные уравнения

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением* первого порядка называется уравнение, линейное относительно y и y'.

Оно имеет вид $$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (10.8)$$

где $P(x)$, $Q(x)$ - заданные непрерывные функции от x или постоянные.

Решение будем искать в виде произведения двух функций от x

$$y = u(x)v(x) \qquad (10.9)$$

Одну из этих функций можно взять произвольно, другая определяется на основании уравнения (10.8)

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

$$u(v' + P(x)v) + u'v = Q(x) \qquad (10.10)$$

Выберем функцию v такой, чтобы она удовлетворяла условию

$v' + P(x)v = 0$, тогда $\frac{dv}{v} = -P(x)dx$

Интегрируя последнее выражение, получим

$$\ln|v| = -\int P(x)dx + C_1$$

Понимая под $\int P(x)dx$ какую-нибудь одну первообразную для $P(x)$, получим

$$v = e^{-\int P(x)dx}$$

Подставляя найденное значение в (10.10), получим

$u'v = Q(x)$

$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$

$\frac{du}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$

$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$

$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$

Произведение u на v дает общее решение уравнения (10.8)

10.1.5 Метод вариации постоянной для решения линейного уравнения

Рассмотрим сначала линейное однородное уравнение, соответствующее уравнению

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (10.8)$$

т.е. уравнение $$y' + P(x)y = 0 \qquad (10.11)$$

Разделим переменные

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)\cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

и интегрируя, получим

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C \quad \text{или} \qquad y = C \cdot e^{-\int P(x)dx} \qquad (10.12)$$

Для нахождения решения уравнения (10.8) в общем решении (10.12) однородного линейного уравнения, заменим постоянное C функцией $C(x)$

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \qquad (10.13)$$

При этом $C(x)$ подбирается так, чтобы удовлетворить неоднородному уравнению (10.8). Дифференцируем (10.13) и подставляем в (10.8)

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x)$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

Отсюда $\qquad C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C_1 \qquad (10.14)$

Подставляя найденное выражение для $C(x)$ в (10.13), получаем общее решение уравнения (10.8).

<u>10.1.6 Уравнение Бернулли</u>

<u>Определение.</u> *Уравнением Бернулли* называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

где $P(x)$, $Q(x)$ - непрерывные или постоянные функции,

n - любое число, $n \neq 0,1$

Разделим обе части на y^n: $\qquad y'y^{-n} + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$

Делаем подстановку $y^{-n+1} = z$, $\qquad$ тогда $z' = (-n+1)y^{-n}y'$

$$y^{-n}y' = \frac{z'}{-n+1}$$

и последнее уравнение принимает вид

$$\frac{z'}{-n+1} + P(x)z = Q(x)$$

которое является линейным уравнением относительно z.

Найдя его общий интеграл и подставив вместо z выражение y^{-n+1}, получим общий интеграл уравнения Бернулли.

§ 10.2 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП)

СРСП 14

<u>*Дифференциальные уравнения с разделяющимися и разделенными переменными*</u>

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$
2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$
3. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$
4. $\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$
5. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$
6. $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy$

7. $(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0$

8. $y'y\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=0$

9. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$

10. $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$

11. $y(4+e^x)dy-e^xdx=0$

12. $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0$

13. $2xdx-2ydy=x^2ydy-2xy^2dx$

14. $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$

15. $(e^x+8)dy-ye^xdx=0$

16. $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$

17. $6xdx-ydy=yx^2dy-3xy^2dx$

18. $y\ln y+xy'=0$

19. $(1+e^x)y'=ye^x$

20. $\sqrt{1-x^2}y'+xy^2+x=0$

21. $6xdx-2ydy=2yx^2dy-3xy^2dx$

22. $y(1+\ln y)+xy'=0$

23. $(3+e^x)yy'=e^x$

24. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$

25. $xdx-ydy=yx^2dy-3xy^2dx$

26. $\sqrt{5+y^2}dx+4(x^2y+y)dy=0$.

Однородные дифференциальные уравнения

1. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+4\dfrac{y}{x}+2$;

2. $xy'=\dfrac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}$;

3. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$;

4. $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$;

5. $2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+6\dfrac{y}{x}+3$;

6. $xy'=\dfrac{3y^3+4yx^2}{2y^2+2x^2}$;

7. $y'=\dfrac{x+2y}{2x-y}$;

8. $xy'=2\sqrt{x^2+y^2}+y$;

9. $3y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+4$;

10. $xy'=\dfrac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$;

11. $y'=\dfrac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}$;

12. $xy'=\sqrt{2x^2+y^2}+y$;

13. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+6\dfrac{y}{x}+6$;

14. $xy'=\dfrac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$;

15. $y'=\dfrac{x^2+2xy-y^2}{3x^2-2xy}$;

16. $xy'=3\sqrt{x^2+y^2}+y$;

17. $2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+12$;

18. $xy'=\dfrac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}$;

19. $y'=\dfrac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$;

20. $xy'=3\sqrt{2x^2+y^2}+y$;

21. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+12$;

22. $xy'=\dfrac{3y^3+16yx^2}{2y^2+8x^2}$;

23. $y'=\dfrac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}$;

24. $xy'=2\sqrt{3x^2+y^2}+y$;

25. $4y'=\dfrac{y^2}{x^2}+10\dfrac{y}{x}+5$;

26. $xy'=\dfrac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}$;

Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным

1. $y' = \dfrac{x+2y-3}{2x-2}$;
2. $y' = \dfrac{x+y-2}{2x-2}$;
3. $y' = \dfrac{3y-x-4}{3x+3}$;
4. $y' = \dfrac{2y-2}{x+y-2}$;
5. $y' = \dfrac{x+y-2}{3x-y-2}$;
6. $y' = \dfrac{2x+y-3}{x-1}$;
7. $y' = \dfrac{x+7y-8}{9x-y-8}$;
8. $y' = \dfrac{x+3y+4}{3x-6}$;
9. $y' = \dfrac{3y+3}{2x+y-1}$;
10. $y' = \dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$;
11. $y' = \dfrac{x-2y+3}{-2x-2}$;
12. $y' = \dfrac{x+8y-9}{10x-y-9}$;
13. $y' = \dfrac{2x+3y-5}{5x-5}$;
14. $y' = \dfrac{4y-8}{3x+2y-7}$;
15. $y' = \dfrac{x+3y-4}{5x-y-4}$;
16. $y' = \dfrac{y-2x+3}{x-1}$;
17. $y' = \dfrac{x+2y-3}{x-1}$;
18. $y' = \dfrac{3x+2y-1}{x+1}$;
19. $y' = \dfrac{5y+5}{4x+3y-1}$;
20. $y' = \dfrac{x+4y-5}{6x-y-5}$;
21. $y' = \dfrac{x+y+2}{x+1}$;
22. $y' = \dfrac{2x+y-3}{4x-4}$;
23. $y' = \dfrac{2x+y-3}{2x-2}$;
24. $y' = \dfrac{y}{2x+2y-2}$;
25. $y' = \dfrac{x+5y-6}{7x-y-6}$;
26. $y' = \dfrac{x+y-4}{x-2}$.

Линейные дифференциальные уравнения

Найти решение задачи Коши.

1. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 0$;
2. $y' - y \cdot ctgx = 2x \cdot \sin x$, $y(\dfrac{\pi}{2}) = 0$;
3. $y' + y \cdot \cos x = \dfrac{1}{2} \cdot \sin 2x$, $y(0) = 0$;
4. $y' + y \cdot tgx = \cos^2 x$, $y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2}$;
5. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x$, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$;
6. $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x (x+1)$, $y(0) = 1$;
7. $y' - \dfrac{y}{x} = x \sin x$, $y(\dfrac{\pi}{2}) = 1$;
8. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x$; $y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$;
9. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = 1$;
10. $y' + \dfrac{2xy}{1+x^2} = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = \dfrac{2}{3}$;
11. $y' - \dfrac{2x-5}{x^2} y = 5$, $y(2) = 4$;
12. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x} e^x$, $y(1) = e$;
13. $y' - \dfrac{y}{x} = -2 \dfrac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$;
14. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}$, $y(1) = 4$;

15. $y'+\frac{2y}{x}=x^3$, $y(1)=-\frac{5}{6}$;

16. $y'+\frac{y}{x}=3x$, $y(1)=1$;

17. $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=1+x^2$, $y(1)=3$;

18. $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$; $y(1)=1$;

19. $y'+\frac{3y}{x}=\frac{2}{x^3}$, $y(1)=1$;

20. $y'+2xy=-2x^3$, $y(1)=\frac{1}{e}$;

21. $y'+\frac{xy}{2(1-x^2)}=\frac{x}{2}$, $y(0)=\frac{2}{3}$;

22. $y'+xy=-2x^3$, $y(1)=\frac{1}{e}$;

23. $y'-\frac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2$, $y(0)=1$;

24. $y'+2xy=xe^{-x^2}\sin x$, $y(0)=1$;

25. $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$, $y(0)=\frac{1}{2}$;

26. $y'-y\cdot\cos x=-\sin 2x$, $y(0)=3$.

<u>Уравнения Бернулли</u>

1. $y'+xy=(1+x)e^{-x}y^2$, $y(0)=1$;
2. $xy'+y=2y^2\ln x$, $y(1)=\frac{1}{2}$;
3. $2(xy'+y)=xy^2$, $y(1)=2$;
4. $y'+4x^3y=4(x^3+1)e^{-4x}y^2$, $y(0)=1$;
5. $xy'-y=-y^2(\ln x+2)\ln x$, $y(1)=1$;
6. $2(y'+xy)=(1+x)e^{-x}y^2$, $y(0)=2$;
7. $3(xy'+y)=y^2\ln x$, $y(1)=3$;
8. $2y'+y\cos x=y^{-1}\cos x(1+\sin x)$, $y(0)=1$;
9. $y'+4x^3y=4e^{4x}(1-x^3)y^2$, $y(0)=-1$;
10. $3y'+2xy=2xe^{-2x^2}y^{-2}$, $y(0)=-1$;
11. $2xy'-3y=-(5x^2+3)y^3$, $y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$;
12. $3xy'+5y=(4x-5)y^4$, $y(1)=1$;
13. $2y'+3y\cos x=e^{2x}(2+3\cos x)y^{-1}$, $y(0)=1$;
14. $3xy'+3y=xy^2$, $y(1)=3$;
15. $y'-y=2xy^2$, $y(0)=\frac{1}{2}$;
16. $2xy'-3y=-(20x^2+12)y^3$, $y(1)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$;
17. $y'+2xy=2x^3y^3$, $y(0)=\sqrt{2}$;
18. $xy'+y=y^2\ln x$, $y(1)=1$;
19. $2y'+3y\cos x=e^{2x}(8+12\cos x)y^{-1}$, $y(0)=2$;
20. $4y'+x^3y=(8+x^3)e^{-2x}y^2$, $y(0)=1$;
21. $8xy'-12y=-(5x^2+3)y^3$, $y(1)=\sqrt{2}$;
22. $2(y'+y)=xy^2$, $y(0)=2$;
23. $y'+xy=(x-1)e^xy^2$, $y(0)=1$;
24. $2y'-3y\cos x=-e^{-2x}(2+3\cos x)y^{-1}$, $y(0)=-1$;
25. $y'-y=xy^2$, $y(0)=1$;
26. $2(xy'+y)=y^2\ln x$, $y(1)=2$.

§ 10.3 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРС)

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$;

2. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^3)^2$;

3. $xy' = y\ln(y/x)$;

4. $xy' + y = 3$;

5. $xy' + xe^{y/x} - y = 0$;

6. $y'\cos x = (y+1)\sin x$;

7. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;

8. $x^2 y' - 2xy = 3$;

9. $x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$;

10. $xy' + y = x + 1$;

11. $(1 - x^2)y' = xy'$;

12. $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$;

13. $y'' + y' tgx = \sin 2x$;

14. $y'' + (1/x)y' = x^2$;

15. $1 + (y')^2 + yy' = 0$;

16. $(1+y)y'' - 5(y')^2 = 0$;

17. $xy' + 2y' = x^3$;

18. $y'' tgy = 2(y')^2$;

19. $y'' - 2y' tgx = \sin x$;

20. $3yy'' + (y')^2 = 0$.

Глава 11
РЯДЫ

§11.1 Ряд. Сумма ряда

<u>Определение1.</u> Пусть задана бесконечная последовательность чисел

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

Последовательность считается заданной, если известен закон, по которому можно вычислить любой ее член u_n при данном n.

Выражение $$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (11.1)$$

называется *числовым рядом.* При этом числа $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$ называются *членами ряда.*

<u>Определение 2</u>. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется n*-ой частичной суммой ряда:* $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

Если существует конечный предел $s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$, то его называют *суммой ряда* (11.1) и говорят, что *ряд сходится*.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ не существует, то говорят, что ряд (11.1) *расходится* и суммы не имеет.

<u>Пример:</u> Ряд $$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots \qquad (11.2)$$

- геометрическая прогрессия с первым членом a и знаменателем q $(a\neq 0)$. Сумма первых n членов прогрессии при $q\neq 1$

$$s_n=\frac{a-aq^n}{1-q}$$

Ряд (11.2) сходится только тогда, когда знаменатель прогрессии $|q|<1$ и его сумма $s=\dfrac{a}{1-q}$. Во всех остальных случаях сумма не имеет предела и ряд расходится.

<u>Теорема 1.</u> Если сходится ряд, получившийся из данного ряда (11.1) отбрасыванием нескольких его членов, то сходится и сам данный ряд. Обратно, если сходится данный ряд, то сходится и ряд, получившийся из данного отбрасыванием нескольких членов.

<u>Теорема 2</u>. Если ряд $$a_1+a_2+\ldots \qquad (11.3)$$

сходится и его сумма равна s, то ряд $ca_1+ca_2+\ldots$, (11.4)

где c- какое-либо фиксированное число, также сходится и его сумма равна cs.

<u>Теорема 3.</u> Если ряды $$a_1+a_2+\ldots \qquad (11.5)$$

и $$b_1+b_2+\ldots \qquad (11.6)$$

сходятся и их суммы, соответственно, равны $\bar{s}$ и $\bar{\bar{s}}$, то ряды

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots \qquad (11.7)$$

и $$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\ldots \qquad (11.8)$$

также сходятся и их суммы, соответственно, равны $\bar{s}+\bar{\bar{s}}$ и $\bar{s}$-$\bar{\bar{s}}$.

§11.2 Признаки сходимости ряда

11.2.1 Необходимый признак сходимости ряда

При исследовании рядов одним из основных вопросов является вопрос о том, сходится ли данный ряд или расходится. Рассмотрим необходимый признак сходимости ряда, то есть установим условие, при невыполнении которого ряд расходится.

Теорема. Если ряд сходится, то его n-й член стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Следствие: Если n-й член ряда не стремится к нулю при $n\to\infty$, то ряд расходится.

Пример:

Ряд $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$ - расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Замечание:

Рассмотренный признак является только необходимым, но не является достаточным, т.е. из того, что n-й член ряда стремится к нулю, еще не следует, что ряд сходится. Ряд может и расходиться.

Пример:

Рассмотрим гармонический ряд: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

Данный ряд расходится, хотя $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

11.2.2 Сравнение рядов с положительными членами

Пусть имеем два ряда с положительными членами:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{11.9}$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots \tag{11.10}$$

Для них справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Если члены ряда (11.9) не больше соответствующих членов ряда (11.10), т.е. $u_n \le v_n$ (n=1,2,…),

и ряд (11.10) сходится, то сходится и ряд (11.9).

Теорема 2. Если члены ряда (11.9) не меньше соответствующих членов ряда (2), т.е. $u_n \ge v_n$, и ряд (11.10) расходится, то и ряд (11.9) расходится.

11.2.3 Признак Даламбера

Теорема. Если в ряде с положительными членами

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{11.1}$$

отношение (n+1)-го члена к n-му при $n\to\infty$ имеет конечный предел l, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l,$$

то:

1) ряд сходится в случае $l<1$,

2) ряд расходится в случае $l>1$.

В случае $l=1$ ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда теорема не дает.

Пример:

1) Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots$$

Решение: $u_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=\frac{1}{n!},\quad u_{n+1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{(n+1)!}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1\ \Rightarrow$ ряд сходится.

2) Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$$

Решение: $u_n=\frac{2^n}{n},\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\frac{n}{(n+1)}=2>1\ \Rightarrow$ ряд расходится.

11.2.4 Признак Коши

Теорема. Если в ряде с положительными членами

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{11.1}$$

величина $\sqrt[n]{u_n}$ к n-му при $n\to\infty$ имеет конечный предел l, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

то:

1) ряд сходится в случае $l<1$,

2) ряд расходится в случае $l>1$.

В случае $l=1$ ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда теорема не дает.

Пример:

Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1\quad\Rightarrow$ ряд сходится.

11.2.5 Интегральный признак сходимости ряда

Теорема. Если в ряде с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (11.1)$$

положительны и не возрастают, т.е. $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots$, и пусть $f(x)$ - такая непрерывная невозрастающая функция, что $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$, …., $f(n) = u_n$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд (11.1);

2) если указанный интеграл расходится, то расходится и ряд (11.1).

§11.3 Виды рядов

11.3.1 Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

До сих пор мы рассматривали ряды с положительными членами. В этом параграфе будем рассматривать ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, т.е. ряды вида $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$,

где u_1, u_2, u_3, …, u_n, … положительны.

Теорема Лейбница. Если в *знакочередующемся ряде*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \qquad (u_n > 0) \qquad (11.11)$$

члены таковы, что $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд (11.11) сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

11.3.2 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Ряд называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные.

Теорема 1. Если знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$

таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots ,$$

сходится, то и данный знакопеременный ряд также сходится.

Определение. Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов: $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$.

Если же знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то данный знакопеременный ряд называется *условно или неабсолютно сходящимся рядом.*

Всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.

Теорема 2. Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.

Теорема 3. Если ряд сходится условно, то, какое бы мы ни задали число А, можно так переставить члены этого ряда, чтобы его сумма оказалась в точности равной A. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, чтобы ряд, полученный после перестановки, оказался расходящимся.

11.3.3 Функциональные ряды

Определение 1. Ряд $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$

называется функциональным, если его члены являются функциями от x, т.е.

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... + u_n(x) + ...$$

Давая x определенные числовые значения, мы получаем различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися.

Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называют *областью сходимости* этого ряда.

Определение2. Функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... + u_n(x) + ...$

называется *мажорируемым* в некоторой области изменения x, если существует такой сходящийся числовой ряд $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n + ...$

с положительными членами, что для всех значений x из данной области выполняются соотношения $|u_1(x)| \le \alpha_1$, $|u_2(x)| \le \alpha_2$, …, $|u_n(x)| \le \alpha_n$, …

Иначе говоря, ряд называется *мажорируемым,* если каждый его член по абсолютной величине не больше соответствующего члена некоторого сходящегося числового ряда с положительными членами.

Теорема. Пусть функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... + u_n(x) + ...$

мажорируем на отрезке $[a,b]$. Пусть $s(x)$ - сумма этого ряда, $s_n(x)$ - сумма n первых членов этого ряда. Тогда для каждого как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется положительное число N такое, что при всех $n \ge N$ будет выполняться неравенство $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$, каково бы ни было x из отрезка $[a,b]$.

11.3.4 Степенные ряды

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...,$$

где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ - постоянные числа, называемые коэффициентами ряда.

Областью сходимости степенного ряда всегда является некоторый интервал, который, в частности, может вырождаться в точку.

Теорема Абеля.

1) Если степенной ряд сходится при некотором значении x_0, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком значении x, для которого $|x| < |x_0|$;

2) если ряд расходится при некотором значении x_0', то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x_0'|$.

Теорема. Областью сходимости степенного ряда является интервал с центром в начале координат.

Определение. Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал от $-R$ до $+R$, что для всякой точки x, лежащей внутри этого интервала, ряд сходится и притом абсолютно, а для тех точек x, лежащих вне его, ряд расходится. Число R называют радиусом сходимости степенного ряда.

Пример. Определить интервал сходимости ряда

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$$

Решение. Применяя признак Даламбера, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=|x|$$

Следовательно, ряд сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$. При $x=1$ и $x=-1$ ряд также расходится. Таким образом интервал сходимости (-1,1).

Теорема. Степенной ряд $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ мажорируем на любом отрезке $[-p,p]$, целиком лежащем внутри интервала сходимости.

Теорема. Если степенной ряд $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ имеет интервал сходимости $(-R,R)$, то ряд $\varphi(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$, полученный почленным дифференцированием степенного ряда, имеет тот же интервал сходимости $(-R,R)$; при этом $\varphi(x)=s'(x)$, если $|x|<R$, т.е. внутри интервала сходимости производная от суммы степенного ряда равна сумме ряда, полученного почленным дифференцированием исходного ряда.

Теорема. Если степенной ряд сходится в интервале $(-R,R)$, то его сумма представляет собой функцию, имеющую внутри интервала сходимости производные любого порядка, каждая из которых есть сумма ряда, получающегося в результате почленного дифференцирования данного ряда соответствующее число раз; при этом интервал сходимости каждого ряда, получившегося в результате дифференцирования, есть тот же интервал $(-R,R)$.

11.3.5 Ряды по степеням х-а

Степенным рядом также называется функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$

где постоянные $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ также называются коэффициентами ряда. Это – степенной ряд, расположенный по степеням двучлена х-а.

При а=0 получаем степенной ряд, расположенный по степеням х.

11.3.6 Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть функция $f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некотором промежутке, содержащем точку $x=a$. Для этой функции справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[\ a+\theta(x-a)\ ]$, $0<\theta<1$ - остаточный член.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки $x=a$, то в формуле Тейлора число n можно брать сколь угодно большим. Допустим, что в рассматриваемой окрестности

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

Тогда, переходя в формуле Тейлора к пределу при $n\to\infty$, получим бесконечный ряд, который называется *рядом Тейлора*:

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+...}$$

Если в ряде Тейлора положим $a=0$, то получим частный случай ряда Тейлора, который называется *рядом Маклорена*:

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+...}$$

11.3.7 Примеры разложения функций в ряды

Разложение в ряд Маклорена функций

1. $f(x)=\sin x$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$$

2. $f(x)=\cos x$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...$$

3. $f(x)=e^x$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

4. $f(x)=e^{-x}$

$$e^x=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+....$$

5. $f(x)=shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$$shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+...$$

6. $f(x)=chx=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

$$chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+...$$

7. $f(x)=(1+x)^m$, m - произвольное постоянное число

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+...$$

При $m=-1$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...$$

при $m=\frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+...$$

при $m=-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-...$$

8. $f(x)=\arcsin x$

Подставим вместо x выражение $-x^2$ в предыдущее равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-...$$

и получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^6+...$$

Проинтегрировав степенной ряд, получим:

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+...+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...$$

9. $f(x)=\ln(1+x)$

По аналогии пункту 8

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$

Если заменить x на $-x$, то получается ряд

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-...$$

§11.4 Ряды Фурье

11.4.1 Определение. Постановка задачи

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+...,$$

или более сжато, ряд вида $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (11.12)$$

называется *тригонометрическим рядом*.

Постоянные числа a_n, b_n $(n=1,2,...)$ называются *коэффициентами тригонометрического ряда*.

Если ряд (1) сходится, то его сумма есть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π, так как $\sin nx$ и $\cos nx$ являются периодическими функциями с периодом 2π. Таким образом, $f(x)=f(x+2\pi)$

Определение коэффициентов ряда по формулам Фурье

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π такова, что она представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции в интервале $(-\pi,\pi)$, т.е. является суммой этого ряда:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (11.13)$$

Так как ряд (11.12) мажорируем, следовательно его можно почленно интегрировать.

Проинтегрируем обе части равенства (11.13) в пределах от $-\pi$ до $+\pi$ и вычислим коэффициенты:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx$$

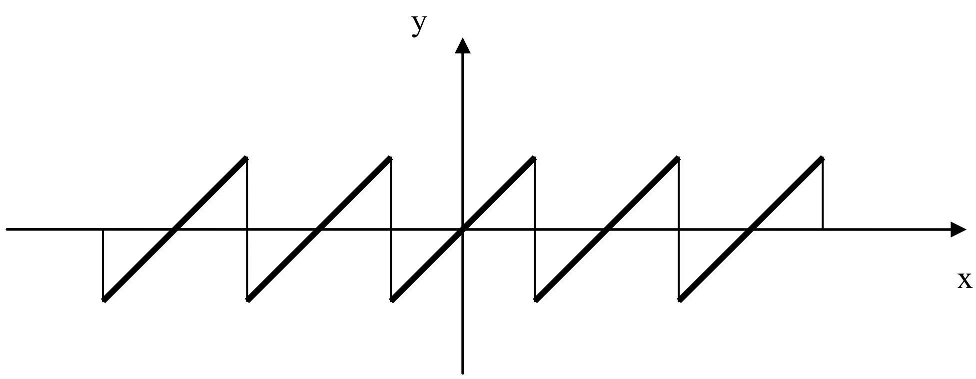
Эти коэффициенты называются коэффициентами Фурье, а ряд (11.12) называется *рядом Фурье*.

<u>Замечание.</u> Интеграл от периодической функции по любому отрезку, длина которого равна периоду, имеет одно и то же значение.

<u>Пример.</u> Периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π:

$$f(x)=x, \qquad -\pi<x\leq\pi$$

Эта функция кусочно монотонная и ограниченная. Следовательно, она допускает разложение в ряд Фурье.



Находим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\left[\left. x\frac{\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx\right] = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\left[\left. -x\frac{\cos kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx\right] = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}$$

Таким образом,

$$f(x) = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - ... + (-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} + ...\right].$$

Это равенство имеет место во всех точках, кроме точек разрыва. В каждой точке разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому ее пределов справа и слева, т.е. нулю.

11.4.2 Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Если $\psi(x)$ - четная функция, то $\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)dx = 2\int_{0}^{\pi}\psi(x)dx$

Если $\varphi(x)$ - нечетная функция, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx = \int_{0}^{\pi}\varphi(-x)dx + \int_{0}^{\pi}\varphi(x)dx = -\int_{0}^{\pi}\varphi(x)dx + \int_{0}^{\pi}\varphi(x)dx = 0$$

Если в ряд Фурье разлагается четная функция, то произведение $f(x)\sin kx$ есть функция нечетная, а $f(x)\cos kx$ - четная и, следовательно

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kxdx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = 0,$$

т.е. ряд Фурье четной функции содержит «только косинусы».

Если в ряд Фурье разлагается нечетная функция, то произведение $f(x)\cos kx$ есть функция нечетная, а $f(x)\sin kx$ - четная и, следовательно

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kxdx,$$

т.е. ряд Фурье нечетной функции содержит «только синусы».

11.4.3 Ряд Фурье для функции с периодом $2l$

Сделаем замену $x = \frac{lt}{\pi}$. Тогда функция $f(\frac{lt}{\pi})$ будет периодической функцией от t с периодом 2π. Тогда разложение в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{k\pi}{l}x + b_n \sin\frac{k\pi}{l}x)$$

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0,l]$. Дополняя определение этой функции произвольным образом на отрезке $[-l,0]$ (сохраняя кусочно монотонность), мы можем разложить эту функцию в ряд Фурье. В частности, если мы дополним определение данной функции так, чтобы при $-l \le x < 0$ было $f(x) = f(-x)$, в результате получится четная функция. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ «продолжена четным образом». Эту функцию разлагают в ряд Фурье, который содержит только косинусы. Таким образом, заданную на отрезке $[0,l]$ функцию $f(x)$ мы разложили по косинусам.

Если же мы продолжим определение функции $f(x)$ при $-l \le x < 0$ так: $f(x) = -f(-x)$, то получим нечетную функцию, которая разлагается по синусам. Таким образом, функцию можно разложить в ряд Фурье как по косинусам, так и по синусам.

§11.5 Самостоятельная работа студента с преподавателем (СРСП)

СРСП 15

Исследовать сходность числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

1. $u_n = \frac{n+3}{n^3-2}$;

2. $u_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

3. $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2-1}$;

4. $u_n = \frac{3^n}{(2n)!}$;

5. $u_n = \frac{n^3}{e^n}$;

6. $u_n = \frac{1}{(n+1[\ln(n+1)]^2}$;

7. $u_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$;

8. $u_n = \frac{n^2}{(3n)}$;

Литература

1. Высшая математика для экономистов/ Под редакцией Н.Ш.Кремера. – М.: ФНИТИ, 1999.
2. Дифференциальное и интегральное исчисление. Пискунов Н.С. :Наука, 1985,т.1, 2.
3. Дифференциальное и интегральное исчисление. Бугров Я.С., Никольский С.М. :Наука, 1985,т.1, 2.
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании.: М., 2000.
5. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1,2 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. М.: Высшая школа,1986г.
6. Сборник задач по курсу математического анализа. Берман Г.Н., издательство «Наука», главная редакция физ-мат.литературы, М, 1975.
7. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). Кузнецов Л.А., М.: Высшая школа.1983г.
8. Высшая математика. Шипачев В.С.: М. Высшая школа,2001г.
9 .Конспект лекций по высшей математике. Божанов Е.Т. ,Алма-Ата , 1992г.
10. Казешев А.К., Нурпеисов С.А. Сборник задач по высшей математике для экономических специальностей. Алматы, изд. «Ғылым», 2004.
11. Кабдыкайырулы К. Курс математики. – Алматы: РИК, 2004.
12. Кабдыкайырулы К., Оразбекова Л.Н. – Математика в экономике. – Казак университетi, 1999.
13. Кельтенова Р.Т., Шумаева О.В. Высшая математика для экономистов. Сборник тестовых заданий. – Алматы, изд. «ИЭиС», 2004.
14.Жуманова З.Ж., Диярова Л.Д. Математика. Учебное пособия для экономических специальностей, часть 1, 2. Актау, 2003, ISBN 9965-499-57-8.
15. КарасевА.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. – М.: Высшая школа, 1982, ч.1,2.