ӘОК 510.6 (045)

БУЛЬ ФУНКЦИЯЛАРЫ

Б. Т. Өрбісінова

В статье рассматривается одно из основных понятий математической логики - Булевая функция.

This article deals with the basic concepts by mathematical logic – Bul's function.

Немістің ұлы математигі Г.В.Лейбниц математика теориясын қатыстырып, алғаш рет логика заңдылықтарын тұжырымдаған болатын. Ол шындыққа, ақиқатқа жетудің құралы ретінде логика мен математиканы қатар ұсынды. Ал математикалық логика бастамаларының пайда болуы ағылшын математигі Джорж Буль еңбектерімен байланыстырылады. Ол өзінің тамаша еңбектерінде сандарға орындалатын математикалық амалдардың заңдары мен ережелерін логикаға аударып, сандар алгебрасы сияқты логиканың бір тарауын (кластарды есептеу) құрды. Кластар логикасына негігі амалдар ретінде қосу («+»), көбейту («х») және азайтуды («-») енгізді. Кластарды есептеуде қосу амалы кластардың бірігуіне, ал көбейту кластардың қиылысуына сәйкес келеді. Ал азайтуды қосуға кері амал ретінде қарастырды.Айтылымдар логикасында бұл амалдар дизъюнкция (қосу) және конъюнкциямен (көбейту) пара-пар. Бульдік екілік айнымалылар екі мәнге ие: 0 немесе 1.

$y = f(x_1, x_2, ...)$ функциясы **бульдік функция** немесе **күй ауыстырғыш функция** деп аталады. Мұндағы $x_1, x_2, ...$ екілік айнымалыларға байланысты у функциясының мәні 0 немесе 1 мәнін ғана қабылдайды.

Екілік аргументтердің мүмкін болатын барлық комбинациялары **екілік жиынтық** деп аталады. Мысалы, екі аргумент (x_1 және x_2) үшін екілік жиынтық 00, 01, 10, 11, ал үш аргумент (x_1, x_2 және x_3) үшін екілік жиынтық 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 және 111 болады.

n аргумент үшін жиынтық комбинациялар саны $k_k = 2^n$.

Жиынтық нөмірі — бұл екілік жиынтықтың ондық сан түрінде бейнеленуі. Мысалы, 101 жиынтығының нөмірі 5, 1001 жиынтығының нөмірі 9.

Функция коды - бұл өз аргументтерінің барлық мүмкін комбинацияларындағы функция мәндері.

Логикалық айнымалылардың барлық мүмкін болатын комбинациялары мен функцияның оларға сәйкес мәндерін кесте түрінде бейнелеу өте ыңғайлы. Мұндай кестені **ақиқаттық кестесі** деп атайды [1].

Буль алгебрасының базисі логикалық қосу, логикалық көбейту және логикалық терістеу амалдарынан түрады. Бүл амалдарға **дизъюнкция, коньюнкция** және **инверсия** функциялары сәйкес келеді.

n аргументтің функциялар саны $k_ф = 2^{2^n}$ формуласы арқылы анықталады, яғни аргумент саны $n = 1$ болғанда функция саны 4-ке тең, $n = 2$ болғанда функция саны 16-ға тең болады. Бір және екі аргументті Буль функциялары 1 және 2-кестелерде көрсетілген.

1-кесте

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0(x)$ функциясының мәні аргумент мәніне тәуелсіз нөлге тең болады да, функция **нөль тұрақты** деп аталады;
$f_1(x)$— айнымалының мәніне тең болады және x **айнымалы** деп аталады;
$f_2(x)$— аргументтің терістелген мәніне тең болады және x **инверсия** деп аталады;
$f_3(x)$— мәні аргумент мәніне тәуелсіз бірге тең болады және **бір тұрақты** деп аталады.

2-кесте

a	x_1x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	01	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	10	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
3	11	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

f_0 және f_{15}— сәйкесінше **тұрақты 0** және оның инверсиясы **тұрақты** 1 функциялары;
f_3 және f_{12}— x_1 **айнымалы** және оның инверсиясы $\overline{x_1}$;
f_5 және f_{10}— x_2 **айнымалы** және оның инверсиясы $\overline{x_2}$;
f_1 және f_{14}— **конъюнкция** функциясы және оның инверсиясы **Шеффер функциясы;**
f_7 және f_8— **дизъюнкция** функциясы және оның инверсиясы - **Пирс функциясы;**
f_2 және f_{13}— **тыйым салу** функциясы және оның инверсиясы x_1- **ден** x_2 **-ге импликация;**
f_4 және f_{11} — **тыйым салу** функциясы және оның инверсиясы x_2-ден x_1-ге **импликация;**
f_6 және f_9— **тепе-теңсіздік** функциясы және оның инверсиясы э**квиваленттік.**

Инверсия (терістеу) — аргумент мәні бір болса, мәні нөлге, ал аргумент нөлге тең болса, мәні бірге тең болатын функция және ол $f(x)=\overline{x}$ деп белгіленеді. Инверсия функциясы x **емес** деп оқылады.

Конъюнкция (логикалық көбейту) — барлық аргументтері нөлге тең болғанда ғана мәні нөл болатын функция. Конъюнкция таңбасы &. Бұл таңба көп жағдайларда жазылмай, түсіп қалады. $f(x_1,x_2)=x_1 \,\&\, x_2 = x_1x_2$ формуласы x_1 **және** x_2 деп оқылады.

Дизъюнкция (логикалық қосу) — ең болмағанда бір аргументі бірге тең болса, мәні бір болатын функция. Дизъюнкция таңбасы v. $f(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2$ формуласы x_1 **немесе** x_2 деп оқылады.

Шеффер функциясы — конъюнкция инверсиясы.

Пирс функциясы — дизъюнкция инверсиясы [2].

Буль алгебрасының теоремалары:

1. $\bar{0}=1, \bar{1}=0$
2. $x \vee 0 = x, x \cdot 1 = 0$
3. $x \vee 1 = 1, x \cdot 0 = 0$ — тұрақтылар қасиеттері
4. $x \vee x = x, x \cdot x = x$ — тавтология заңдары
5. $x \vee \bar{x} = 1, x \cdot \bar{x} = 0$ — конъюнкция мен дизъюнкция үшін терістеу заңы
6. $\bar{\bar{x}} = x$ — екі рет терістеу заңы
7. $x \vee y = y \vee x, x \cdot y = y \cdot x$ — ауыстырымдылық заңдары
8. $x \vee x \cdot y = x, x \cdot (x \vee y) = x$ — айнымалыны қысқарту заңдары
9. $x \vee \bar{x} \cdot y = x \vee y, x \cdot (\bar{x} \vee y) = x \cdot y$
10. $\overline{(x \vee y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ — $д\ е$ Морган заңдары
11. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$
12. $x \vee y \cdot z = (x \vee y)(x \vee z), x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$ —үлестірімділік заңдары.

Буль алгебрасының заңдылықтары мен теңбе-теңдіктері көбінесе функцияларды ықшамдауда қолданылады. Буль функцияларын ықшамдау функцияның логикалық схемасын тұрғызғанда, ақиқаттық кестелерін құрғанда көп жеңілдіктер береді [3].

1-Мысал.

Берілгені: $f(x_1, x_2, x_3) = x_3\left(\overline{x_2 x_1 \vee \overline{\overline{x_3}}}\right)$

Табу керек: Буль функциясын ықшамдап, оның ақиқаттық кестесін тұрғызу.

Шешуі:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_3\left(\overline{x_2 x_1 \vee \overline{\overline{x_3}}}\right) = \{10\} = x_3\left(\overline{x_2 x_1} \vee \overline{x_3}\right) = \{11ж/е6\} = \overline{x_3 x_2 x_1} x_3 = \{4ж/е7\} = \overline{x_1 x_2} x_3.$

<u>Жауабы:</u>

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$f(0,0,0) = \overline{0 \cdot 0} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0.$
$f(0,0,1) = \overline{0 \cdot 0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$
$f(0,1,0) = \overline{0 \cdot 1} \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0.$
$f(0,1,1) = \overline{0 \cdot 1} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$
$f(1,0,0) = \overline{1 \cdot 0} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0.$
$f(1,0,1) = \overline{1 \cdot 0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$
$f(1,1,0) = \overline{1 \cdot 1} \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0.$
$f(1,1,1) = \overline{1 \cdot 1} \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0.$

2-Мысал.

Берілгені: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2\left(x_1 \vee x_3 \overline{x_2}\right)$

Табу керек: Буль функциясын ықшамдап, оның ақиқаттық кестесін тұрғызу.

Шешуі:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2\left(x_1 \vee x_3 \overline{x_2}\right) = \{12ж/е7\} = x_1 \vee x_1 x_2 \vee x_3 x_2 \overline{x_2} = \{5\} = x_1 \vee x_2 x_1 \vee 0 = \{8\} = x_1$

Жауабы:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Буль функцияларының канондық формалары

Түрлі функцияларды белгілі бір ереже бойынша жазуды функциялардың **канондық формасы** деп атайды. Буль функциясын канондық түрде жазудың екі формасы бар: **нормальді форма** және **қалыптасқан нормальді форма.**

Элементар коньюнкция не **дизьюнкция** - жеке айнымалылары коньюнктивті не дизыонктивті түрде байланысатын коньюнкция не дизьюнкция.

а) Дизъюнктивті нормальді форма (ДНФ). Элементар коньюнкциялардың дизьюнкциясы Буль функциясының **дизъюнктивті нормальді формасы** делінеді.

Мысалы, $f(x, y, z) = x \vee yz \vee xz \vee xyz$

б) Конъюнктивті нормальді форма (КНФ). Элементар дизыонкциялардың конъюнкциясы Буль функциясының **конъюнктивті нормальді формасы** делінеді.

Мьсалы, $f(x, y, z) = (x \vee y)(x \vee z)(x \vee y \vee z)$

в) Қалыптасқан дизьюнктивті нормальді форма (ҚДНФ). Функцияның әрбір 1-ге тең мәні үшін оның коньюкциялардың дизьюнкциялары түрінде жазылуы **қалыптасқан дизьюнктивті нормальді форма** (ҚДНФ) деп аталады. Дизыонкцияның коньюнкциясы әрбір айнымалыны мәні 1-ге тең болса тура мағынада, ал мәні 0-ге тең болса терістелген мағынада бір рет қана қабылдайды. Қалыптасқан дизъюнктивті нормальді форманың әрбір коньюнкциясы **минтерм** деп аталады.

г**) Қалыптасқан коньюнктивті нормальді форма (ҚКНФ).** Функцияның әрбір 0-ге тең мәні үшін дизьюнкциялардың коньонкциялары түрінде жазылуы **қалыптасқан коньюнктивті нормальді форма** (ҚКНФ) делінеді. Коньюнкцияның дизьюнкциясы әрбір айнымалыны мәні 0-ге тең болса тура мағынада, ал мәні 1-ге тең болса терістелген мағынада тек бір рет қана қабылдайды. Қалыптасқан коньюнктивті нормальді форманың әрбір дизьюнкциясы **макстерм** деп аталады.

Әрбір минтермге немесе макстермге кіретін айнымалылар саны функцияның **рангісі** деп аталады [4].

Буль функциясы сияқты арнайы шарттармен байланысқан символдармен белгіленген логиканың негізгі ұғымдары кез-келген ойды есепке ауыстыруға және қатесіз шешімін табуға мүмкіндік береді.

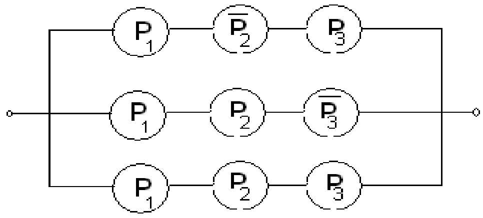
Мысал**.** Конкурсқа қатысушы адамды келесі турға жіберу туралы мәселені үш адамнан тұратын (*X, Y, Z)* қазылар алқасы шешу керек. Қазылар алқасының кем дегенде екі мүшесі (біреуі міндетті түрде қазылар алқасының төрағасы) келіскен жағдайда, тек сонда ғана дұрыс шешім қабылданады.

Қазылардың жұмысы F буль функциясын сипаттайды.

3 кесте

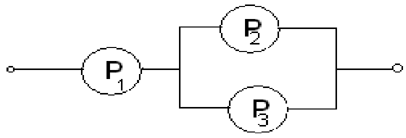
X	Y	Z	$F(X,Y,Z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Кесте бойынша *F(X, Y, Z)* буль функциясының ДҚНТ – ін құрамыз:
$X\overline{Y}Z \vee XY\overline{Z} \vee XYZ.$
Алынған формулаға төмендегідей схема сәйкес келеді.



1сурет.

Бұл схеманы қысқартуға да болады. Ол үшін алдымен функцияның ДҚНТ – ін ықшамдаймыз. $X\overline{Y}Z \vee XY\overline{Z} \vee XYZ \equiv X(\overline{Y}Z \vee Y\overline{Z} \vee YZ) \equiv X((\overline{Y}Z \vee YZ) \vee (Y\overline{Z} \vee YZ)) \equiv X(Z(Y \vee \overline{Y}) \vee Y(Z \vee \overline{Z})) \equiv X(Z \vee Y).$
$X(Z \vee Y)$ формуласына сәйкес құрылған схема бойынша (2 сурет) жасалатын жұмыс $X\overline{Y}Z \vee XY\overline{Z} \vee XYZ$ формуласына сәйкес схема (1 сурет) бойынша жасалатын жұмыспен бірдей.



2 сурет.

Қоғамдық өмірдің қазіргі аса күрделі кезеңінде оқу, білім беру процестерін ұйымдастырудың жаңа да тиімді әдіс-тәсілдерін, дұрыс жолдарын табуға математикалық логиканың көмектесетіні сөзсіз.

Әдебиеттер

1. П. С. Новиков. Элементы математической логики. М., 1973.
2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986
3. Марченков С.С. Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000
4. Алексеев В.Б. Дискретная математика (курс лекций, II семестр). Сост. А.Д. Поспелов